Omar Alejandro Lezama Gallegos 5-12-18

1°. Prueba que las siguientes transformaciones son canónicas para cualquier μ.

$$q_1 = x\cos\mu + P_y \sin\mu \qquad q_2 = y\cos\mu + P_x \sin\mu$$
$$P_1 = P_x\cos\mu - y\sin\mu \qquad P_2 = P_y\cos\mu - x\sin\mu$$

Se tiene $Q = Q(q_i, P_i)$, entonces, si lo anterior es canónico, la transformación canónica $q = q(Q_i, P_i)$ también lo es.
Se tiene la matriz J para este caso

$$J = \begin{pmatrix} & & & 1 \\ & & 1 & \\ & -1 & & \\ -1 & & & \end{pmatrix},$$ con el Jacobiano se debe comprobar que $J J J^T = J$.

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial q_1}{\partial x} & \frac{\partial q_1}{\partial y} & \frac{\partial q_1}{\partial P_x} & \frac{\partial q_1}{\partial P_y} \\ \frac{\partial q_2}{\partial x} & \frac{\partial q_2}{\partial y} & \frac{\partial q_2}{\partial P_x} & \frac{\partial q_2}{\partial P_y} \\ \frac{\partial P_1}{\partial x} & \frac{\partial P_1}{\partial y} & \frac{\partial P_1}{\partial P_x} & \frac{\partial P_1}{\partial P_y} \\ \frac{\partial P_2}{\partial x} & \frac{\partial P_2}{\partial y} & \frac{\partial P_2}{\partial P_x} & \frac{\partial P_2}{\partial P_y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\mu & 0 & 0 & \sin\mu \\ 0 & \cos\mu & \sin\mu & 0 \\ 0 & -\sin\mu & \cos\mu & 0 \\ -\sin\mu & 0 & 0 & \cos\mu \end{pmatrix}$$

$$J J^T = \begin{pmatrix} & & & 1 \\ & & 1 & \\ & -1 & & \\ -1 & & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\mu & 0 & 0 & -\sin\mu \\ 0 & \cos\mu & -\sin\mu & 0 \\ 0 & \sin\mu & \cos\mu & 0 \\ \sin\mu & 0 & 0 & \cos\mu \end{pmatrix}$$

$$J J^T = \begin{pmatrix} \sin\mu & 0 & 0 & \cos\mu \\ 0 & \sin\mu & \cos\mu & 0 \\ 0 & -\cos\mu & \sin\mu & 0 \\ -\cos\mu & 0 & 0 & \sin\mu \end{pmatrix}$$

$$J J J^T = \begin{pmatrix} \cos\mu & 0 & 0 & \sin\mu \\ 0 & \cos\mu & \sin\mu & 0 \\ 0 & -\sin\mu & \cos\mu & 0 \\ -\sin\mu & 0 & 0 & \cos\mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sin\mu & 0 & 0 & \cos\mu \\ 0 & \sin\mu & \cos\mu & 0 \\ 0 & -\cos\mu & \sin\mu & 0 \\ -\cos\mu & 0 & 0 & \sin\mu \end{pmatrix}$$

Omar Alejandro Lezama Gallegos 5-12-13

$$= \begin{pmatrix} \cos\mu\sin\mu - \sin\mu\cos\mu & 0 & 0 & \cos^2\mu + \sin^2\mu \\ 0 & \cos\mu\sin\mu - \sin\mu\cos\mu & \cos^2\mu + \sin^2\mu & 0 \\ 0 & -\sin^2\mu - \cos^2\mu & -\sin\mu\cos\mu + \sin\mu\cos\mu & 0 \\ -\sin^2\mu - \cos^2\mu & 0 & 0 & -\sin\mu\cos\mu + \sin\mu\cos\mu \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = J$$

Entonces, la transformación es canónica.

b) Si el Hamiltoniano original es $H = \frac{1}{2}(q_1^2 + q_2^2 + P_1^2 + P_2^2)$ encuentra el nuevo Hamiltoniano como función de x, y y sus momentos conjugados.

Sustituyendo los valores de q_1, q_2, P_1, P_2 en H:

$$H = \frac{1}{2}\left[x^2\cos^2\mu + 2xP_y\cos\mu\sin\mu + P_y^2\sin^2\mu + y^2\cos\mu + 2yP_x\cos\mu\sin\mu + P_x^2\sin^2\mu + P_x^2\cos^2\mu - 2yP_x\cos\mu\sin\mu + y^2\sin^2\mu + P_y^2\cos^2\mu - 2xP_y\cos\mu\sin\mu + x^2\sin^2\mu\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[x^2 + y^2 + P_x^2 + P_y^2\right]$$

$$H = \left[x^2 + y^2 + P_x^2 + P_y^2\right]$$

c) Usa el nuevo Hamiltoniano para resolver la dinámica con la restricción $y = P_y = 0$.

$$H = \frac{1}{2}\left[x^2 + P_x^2\right]$$

Usando las ecuaciones de Hamilton:

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial P_i} \quad \text{y} \quad \dot{P}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}$$

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial P_x} = P_x \qquad \dot{P}_x = -\frac{\partial H}{\partial x} = -x$$

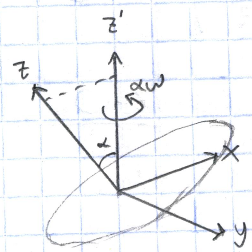
y

$$y = \dot{y} = 0 = \dot{P}_y = P_y$$

Omar Alejandro Lezama Gallegos 5-12-18

2º Un disco delgado uniforme de masa M y radio A, rota sin fricción con una velocidad angular uniforme w sobre un eje vertical fijo que pasa sobre su centro y tiende un ángulo α con el eje de simetría del disco.

a) Determina los momentos de inercia y los ejes principales.



$$\rho = \frac{m}{\pi r^2}$$

Por el tensor de inercia, se obtienen 3 expresiones

$$I_1 = \rho \int y^2 dA' = I_2 = \rho \int x^2 dA' \qquad A' = \text{área}$$

$$I_3 = \rho \int (x^2+y^2) dA' = I_1 + I_2$$

$$I_3 = \rho \int_0^{2\pi}\int_0^{r} r'^2 r' dr' d\theta = 2\pi\rho \int_0^r r'^3 dr' = \frac{2m}{r^2} \cdot \frac{1}{4} r^4 = \frac{1}{2} m r^2, \text{ con } r = A$$

$$I_1 = \frac{1}{4} m A^2 = I_2$$

$$I_3 = \frac{1}{2} m A^2$$

$$I = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} m A^2 & & \\ & \frac{1}{4} m A^2 & \\ & & \frac{1}{2} m A^2 \end{pmatrix}$$

Para los ejes principales

$$\det \left| \begin{pmatrix} \frac{1}{4} m A^2 - \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} m A^2 - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} m A^2 - \lambda \end{pmatrix} \right|$$

$$= \left(\frac{1}{4} m A^2 - \lambda\right)^2 \left(\frac{1}{2} m A^2 - \lambda\right) = 0$$

Omar Alejandro Lezama Gallegos 5-12-18

Usando los autovalores en la matriz

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{4}mA^2 - \frac{1}{4}mA^2 & & \\ & \frac{1}{4}mA^2 - \frac{1}{4}mA^2 & \\ & & \frac{1}{2}mA^2 - \frac{1}{4}mA^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & & \\ & 0 & \\ & & \frac{1}{4}mA^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$$

$$\frac{1}{4}mA^2 z = 0 \qquad \underline{z = 0}$$

Usando el segundo autovalor,

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{4}mA^2 - \frac{1}{2}mA^2 & & \\ & \frac{1}{4}mA^2 - \frac{1}{2}mA^2 & \\ & & \frac{1}{2}mA^2 - \frac{1}{2}mA^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -\frac{1}{4}mA^2 & & \\ & -\frac{1}{4}mA^2 & \\ & & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$$

$$-\frac{1}{4}mA^2 x = 0 \qquad \underline{x = 0}$$

$$-\frac{1}{4}mA^2 y = 0 \qquad \underline{y = 0}$$

Ejes principales en las bases

$$\vec{c} = (c_1, c_2, 0)$$
$$\vec{d} = (d_1, d_2, 0)$$
$$\vec{e} = (0, 0, e_3)$$

, donde c_i, d_i y e_i son parámetros libres. Entonces, se puede seleccionar $c_1 = 1$, $c_2 = 0$, $d_1 = 0$, $d_2 = 1$ y $e_3 = 1$

$$\vec{c} = (1, 0, 0)$$
$$\vec{d} = (0, 1, 0)$$
$$\vec{e} = (0, 0, 1)$$

Omar Alejandro Lezama Gallegos 5-12-18

b) Encuentra el vector de momento angular (magnitud y dirección).

$\underline{L} = I\,\underline{w}$

Respecto a z', la proyección del momento angular en los ejes es

$w_x = 0$
$w_y = +w\sin\alpha$
$w_z = +w\cos\alpha$

Entonces, $\underline{L} = I(\underline{w}) = I_1 w_x \hat{i} + I_2 w_y \hat{j} + I_3 w_z \hat{k}$

$\underline{L} = + I_2 w\sin\alpha\,\hat{j} + I_3 w\cos\alpha\,\hat{k}$

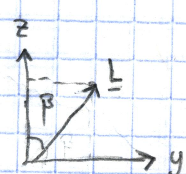
$\underline{L} = +\frac{1}{4} m A^2 w\sin\alpha\,\hat{j} + \frac{1}{2} m A^2 w\cos\alpha\,\hat{k}$

$|\underline{L}| = \sqrt{\frac{1}{16} m^2 A^4 w^2 \sin^2\alpha + \frac{1}{4} m^2 A^4 w^2 \cos^2\alpha}$

$|\underline{L}| = \frac{1}{2} m A^2 w \sqrt{\frac{1}{4}\sin^2\alpha + \cos^2\alpha}$

La dirección del momento angular es el ángulo que $\underline{L}$ forma con z, que está dado por la proporción entre el momento angular en y y en z.

β es el ángulo que $\underline{L}$ forma con z.



$\tan\beta = \frac{L_y}{L_z}$ $\beta = \tan^{-1}\left(\frac{\frac{1}{4}\cancel{mA^2 w}\sin\alpha}{\frac{1}{2}\cancel{mA^2 w}\cos\alpha}\right)$

$\beta = \tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\tan\alpha\right)$

Omar Alejandro Lezama Gallegos 5-12-18

c) ¿Cuál es la magnitud y dirección de la torca relativa al sistema de referencia del cuerpo (x, y, z)?

$$\vec{\tau} = \dot{\underline{L}} = \frac{dL}{dt}$$

$$\underline{L} = I \underline{\omega}$$

$$\dot{\underline{L}} = I \dot{\underline{\omega}}$$

Pero $\underline{\omega}$ no depende del tiempo, entonces

$$\vec{\tau} = 0$$