

# Universidad de Guanajuato

División de Ciencias e Ingenierías

Mecánica Analítica

Agosto - Diciembre 2018

Proyecto

## Caos

Lezama Gallegos Omar Alejandro

Grupo A

Profesor: Gustavo Niz Quevedo

### Resumen

El caos es entendido como aleatoriedad pura y desastre en su máxima expresión, pero es tan profundo que se considera una ciencia por sí solo. En el presente trabajo se definirán conceptos importantes para comenzar con su estudio, se darán a conocer a algunas de las personas que ayudaron al desarrollo del tema, se mostrarán algunos ejemplos para entender el origen de esta nueva ciencia y algunos otros para complementar lo que se ha aprendido, entre otras cosas. Se pretende saber cómo se ve el caos, porque hasta en el caos se ha encontrado que existe orden.

# Índice

|   |           |
|---|-----------|
| <b>1. Introducción</b>                          | <b>3</b>  |
| <b>2. Mapeos</b>                                | <b>4</b>  |
| 2.1. Mapeo logístico . . . . .                  | 4         |
| 2.2. Bifurcación . . . . .                      | 7         |
| <b>3. Exponentes de Lyapunov</b>                | <b>9</b>  |
| <b>4. Atractores extraños</b>                   | <b>10</b> |
| 4.1. Atractores en dos dimensiones . . . . .    | 11        |
| 4.1.1. Mapeo de Hénon . . . . .                 | 11        |
| 4.1.2. Atractor de Duffing . . . . .            | 12        |
| 4.2. Atractores en 3 dimensiones . . . . .      | 14        |
| 4.2.1. Atractor de Lorenz . . . . .             | 14        |
| 4.2.2. Atractor de Rössler . . . . .            | 17        |
| <b>5. Secciones de Poincaré</b>                 | <b>20</b> |
| 5.1. Atractor de Lorenz . . . . .               | 20        |
| 5.2. Atractor de Rössler . . . . .              | 21        |
| 5.3. Sobre las proyecciones obtenidas . . . . . | 22        |
| <b>6. Fractales</b>                             | <b>23</b> |
| <b>7. Sistema caótico mecánico</b>              | <b>26</b> |
| <b>8. Apéndice</b>                              | <b>27</b> |
| 8.1. Mapeo logístico . . . . .                  | 27        |
| 8.2. Diagrama de bifurcación . . . . .          | 28        |
| 8.3. Exponentes de Lyapunov . . . . .           | 29        |
| 8.4. Atractores extraños . . . . .              | 29        |
| 8.5. Secciones de Poincaré . . . . .            | 32        |
| 8.6. Fractales . . . . .                        | 33        |
| <b>9. Turbulencia</b>                           | <b>34</b> |
| 9.1. Ecuación de Navier Stokes . . . . .        | 34        |
| <b>10. Conclusiones</b>                         | <b>35</b> |
| <b>11. Bibliografía</b>                         | <b>37</b> |

# 1. Introducción

La Física, en general, se caracteriza por la posibilidad de predecir el desarrollo de un sistema físico, bajo ciertas condiciones y mediante la realización de experimentos y observaciones controladas. Todo fenómeno físico debe ser repetible para que sea de interés científico, sin embargo, existen sistemas físicos que son mucho más complicados de estudiar que otros. [1]

La física Newtoniana, por ejemplo, parte de la suposición de los sistemas de referencia inerciales, los cuales no existen en la vida real. Al tener esos sistemas, los observadores pueden realizar predicciones mediante el estudio de los sistemas físicos, los cuales funcionan bajo los principios de Newton. Las transformaciones de Galileo, por ejemplo, funcionan bien para velocidades pequeñas comparadas con la velocidad de la luz. Cuando se tienen velocidades cercanas a la de la luz, se usan las transformaciones de Lorentz, con la cual se obtienen las expresiones que sirvieron como base para el desarrollo de la teoría especial de la relatividad, con la cual se pudo realizar el estudio de sistemas cuánticos, con lo que posteriormente se realizó el desarrollo de la mecánica cuántica.

Otras ramas de la física, como la termodinámica, las ondas y los fluidos también requieren de suposiciones con las que es posible su estudio. Por ejemplo, en la termodinámica se tienen sus leyes, las cuales se obtienen a partir de los principios de la conservación de la energía. Se tienen conceptos como equilibrio térmico, en el cual un cuerpo se encuentra a la misma temperatura del medio, o también se definen otros más profundos como el cero absoluto, el punto donde un cuerpo no tiene temperatura, lo cual tampoco es posible debido a que eso implicaría que el cuerpo no tuviera nada de energía en él. Hablando de ondas, se tiene el caso clásico de un oscilador armónico, matemáticamente posible, físicamente imposible, pues la pérdida de energía del sistema en la vida real impediría que el oscilador se quedara en movimiento periódico sin fin alguno. Incluso, en los fluidos se requieren muchas más consideraciones de casos ideales, pues estudiar la dinámica de los fluidos mediante la experimentación es mucho más complicado. Un fluido ideal, con una densidad que es uniforme a lo largo de éste, a una temperatura con la que no se altere su movimiento, ninguna resistencia por parte del recipiente que lo contiene, etc.

Con los ejemplos anteriores se busca llegar a un punto, no existen casos ideales en la Física. Es posible, por supuesto, realizar predicciones matemáticas, compararlas con los resultados de las observaciones e incluso, encontrar una buena aproximación entre ambas, pero cuando se agregan más factores que influyen en los resultados, o simplemente se realiza el estudio de los sistemas físicos en la naturaleza, se encontrará que es mucho más complicado el estudio de estos sistemas, mas no imposible.

El caos es la definición que se usa para la descripción de los sistemas anteriores. Coloquialmente se refiere al caos como aquellos sistemas en los cuales no es posible realizar predicción alguna, aquello que no parece seguir un orden o que no puede ser estudiado. Sin embargo, el caos no es más que un tipo de movimiento que es muy sensible a las condiciones iniciales, es decir, un mínimo cambio en los factores con los que se comienza el estudio del sistema físico y se obtendrán trayectorias o resultados completamente diferentes a los demás, por lo que se dice que es un estado caracterizado por completa aleatoriedad. Las trayectorias caóticas surgen del movimiento de sistemas no lineales, es decir, que no son periódicos, pero siguen siendo predecibles. (Goldstein, Poole & Safko, 2001, p. 483, 484)

Pequeños cambios en las condiciones iniciales de un sistema físico pueden causar diferencias sustanciales en las predicciones. Las aplicaciones del caos no se limitan sólo en sistemas físicos,

también en sistemas biológicos y áreas de las ciencias sociales, como la economía. (Resnick, Halliday & Krane, 2001, p. 136, 137)

El caos comienza donde la ciencia clásica termina. Mediante la introducción del caos se han creado técnicas especiales mediante el uso de computadoras y tipos especiales de imágenes, gráficos, etc. Prácticamente se ha creado un nuevo lenguaje para esta rama, tales como la creación de los diagramas de bifurcación, los fractales, los mapeos, etc. Tradicionalmente, cuando se encuentran resultados complejos se buscan causas complejas. Pequeñas diferencias en las entradas de un sistema pueden provocar rápidamente diferencias abrumadoras en las salidas. (Gleick, 1987, p. 5-8)

## 2. Mapeos

Los mapeos son simplemente relaciones usadas para describir la progresión de un sistema, son una colección de puntos generados por la función

$$x_{n+1} = f(x_n) \quad (1)$$

Se puede escribir una ecuación diferencial usando  $f(\alpha, x_n)$  donde  $x_n$  está restringido a un número real entre 0 y 1, y  $\alpha$  es un parámetro modelo independiente. (Thornton & Marion, 2004, p. 169)

$$x_{n+1} = f(\alpha, x_n) \quad (2)$$

La función  $f(\alpha, x_n)$  genera un valor de  $x_{n+1}$  de  $x_n$ , y la colección de puntos generados es llamada mapeo de la función misma. Los mapeos son usados en diversas áreas que van desde biología hasta economía. Por ejemplo, es posible predecir la población de determinada especie al conocer un parámetro asociado a dicha especie, por ejemplo, la fertilidad.

Los mapeos tienen diferentes usos, entre ellos el de la resolución de sistemas de ecuaciones diferenciales. En muchos de los sistemas físicos se tienen ecuaciones de movimiento que no son posibles de resolver manualmente o su resolución requiere de mucho tiempo, la manera de simplificar el proceso es mediante el mapeo de las ecuaciones diferenciales para encontrar sus soluciones. También se usan para el modelado, en el que se tienen casos en diferentes áreas de estudio que pueden ser definidas por medio de ecuaciones diferenciales y con el mapeo de éstas es posible la observación de la propagación de diferentes fenómenos en los modelos descritos (Strogatz, 1994, p. 438). Otra aplicación común es para estudiar los casos de caos en las ecuaciones diferenciales, de los cuales destacan el mapeo logístico y los diagramas de bifurcación, que serán explicados a continuación.

### 2.1. Mapeo logístico

El mapeo logístico es la forma más común de realizar un mapeo, pues a partir de una función sencilla se obtienen resultados interesantes.

El mapeo logístico es el resultado de la ecuación logística (Thornton & Marion, 2004, p. 170).

$$f(\alpha, x) = \alpha x(1 - x), \quad (3)$$

con lo que la ecuación iterativa queda de la siguiente manera:

$$x_{n+1} = \alpha x_n(1 - x_n), \quad (4)$$

Una manera de visualizar la expresión anterior, como se mencionó antes, es visualizándola como una relación entre una población de animales. Con el parámetro  $x_{n+1}$  se pretende predecir la población de los animales después de determinadas iteraciones, a partir de un valor inicial  $x_n$ . Conociendo el parámetro  $\alpha$ , que para los fines de este ejemplo basta pensar que es la fertilidad de los animales, se puede predecir qué tanta población se tendrá. Por ejemplo, se supone que se tiene una fertilidad muy baja, entonces, se espera que los animales mueran muy rápido, o bien, se extingan, como se muestra en la Figura 1, en la cual se usó un valor para  $\alpha$  de 0.1.

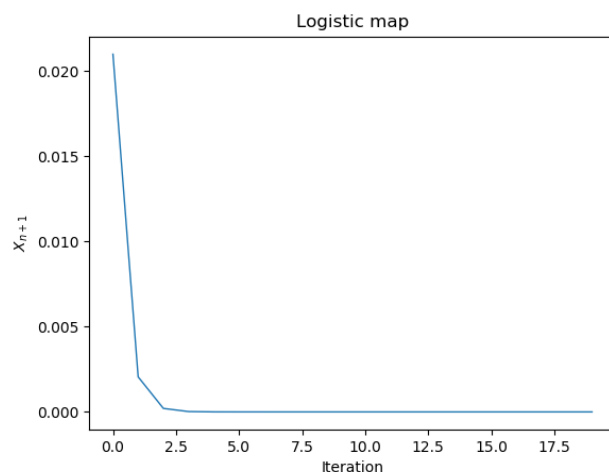


Figura 1: Ecuación logística para  $\alpha = 0.1$ .

Ahora, se puede tener un valor más grande de  $\alpha$ , a pesar de que existen muertes, que son expresadas por el factor  $1 - x_n$  de la ecuación logística, se espera una estabilidad. Pero cuando se incrementan los valores de alpha, ahora se tiene una estabilidad que oscila entre dos valores, y si se incrementa un poco más el valor, habrá una estabilidad que oscila entre más valores. Los casos anteriores se muestran en las Figuras 2, 3, 4, cuyos valores de  $\alpha$  son 2.2, 3.2 y 3.6, respectivamente.

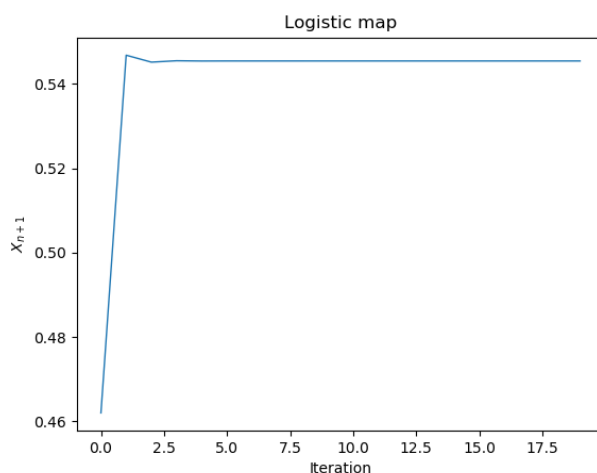


Figura 2: Ecuación logística para  $\alpha = 2.2$ . Se alcanza una estabilidad en un solo valor.

En el programa se realizaron 20 iteraciones para los primeros dos casos, pues no fue necesario realizar más debido a que se llegaba a una estabilidad demasiado rápido, para el primer caso, en 0. Para los otros dos casos, se realizaron 50 iteraciones, pues de esta forma es posible visualizar cómo después de cierta variación en los valores iniciales se llega a una estabilidad, primero entre dos valores, luego entre más, dependiendo del valor de  $\alpha$ .

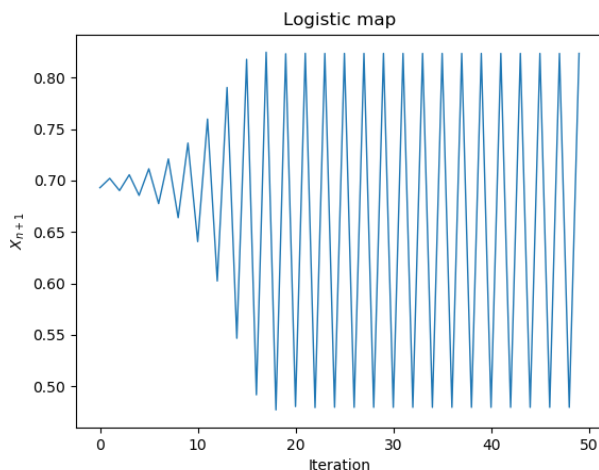


Figura 3: Ecuación logística para  $\alpha = 3.2$ . Se alcanza una estabilidad que oscila entre dos valores.

Si se incrementara un poco el valor del parámetro  $\alpha$ , siendo ésta menor a 4, se observaría que puede existir una estabilidad pero en más de 3 valores, y para valores muy cercanos a 4 se puede decir que ya no se logra una estabilidad en los valores de la función.

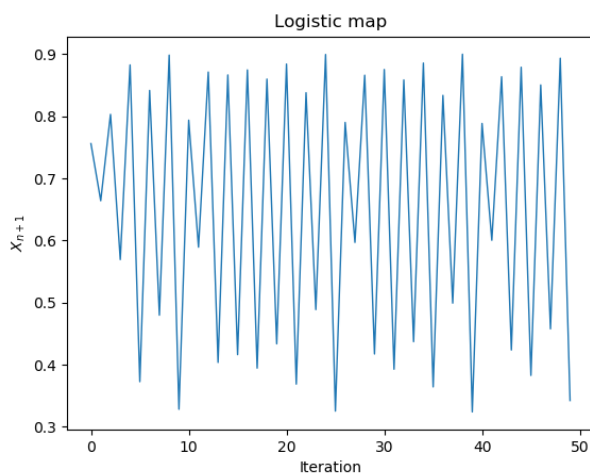


Figura 4: Ecuación logística para  $\alpha = 3.6$ . Se alcanza una estabilidad que oscila entre más de dos valores.

Las gráficas anteriores son de la predicción del valor de  $x_n$  contra el número de iteraciones, el cual se varió para que se observara la estabilidad periódica de los valores de la función. Empíricamente,

los valores para  $\alpha$  en este caso se seleccionan entre 0 y 4, las observaciones en los variaciones de este parámetro se aprecian en el diagrama de bifurcación. El mapeo logístico es una verificación de que un mapeo simple no lineal puede tener una dinámica muy complicada. (Strogatz, 1994, p. 352)

## 2.2. Bifurcación

En la práctica, se quiere estudiar al sistema cuando el parámetro  $\alpha$  es variado. Si se tiene, por ejemplo, la ecuación logística, es posible determinar la estabilidad de la función en determinado valor de  $\alpha$ , pero cuando se realiza la variación de este último es más evidente la visualización de los casos antes mencionados.

La bifurcación es el cambio en el número de soluciones de una ecuación cuando uno de los parámetros se varía, en este caso el parámetro que se varía es  $\alpha$ . (Thornton & Marion, 2004, p. 170-172)

El diagrama de bifurcación consiste en  $x_n$ , graficado como función del parámetro modelo  $\alpha$ . Mientras más valores se tengan, es decir, mientras más grande sea el número de iteraciones mejor se observarán los mapeos, pues en las funciones se tienen valores inestables en las primeras predicciones.

Con el método numérico creado, se grafican diferentes conjuntos de valores, pero se comprobó que conforme aumentaba el número de arreglos usados, éstos tendían a una misma forma inicial, para después producir lo que se conoce como diagrama de bifurcación. Se muestra el caso donde se usaban los primeros arreglos, es evidente que las gráficas van aproximándose a una forma antes de que la bifurcación ocurra.

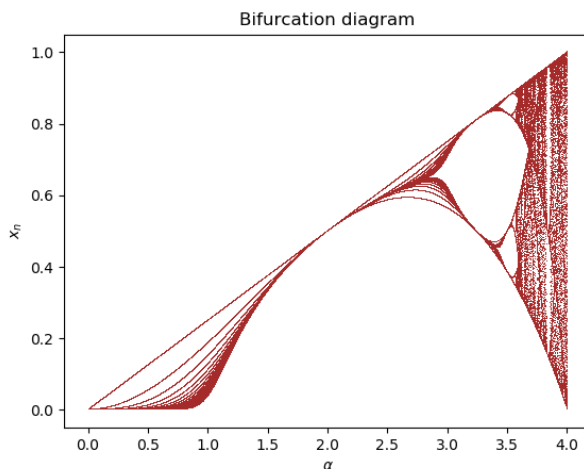


Figura 5: Primeros 20 arreglos de datos.

Se hicieron cálculos mediante el método para 1000 arreglos de datos, de los cuales, se optó por graficar solamente los últimos 100, que son los que están más próximos a la forma inicial de la gráfica antes de que ocurra la bifurcación.

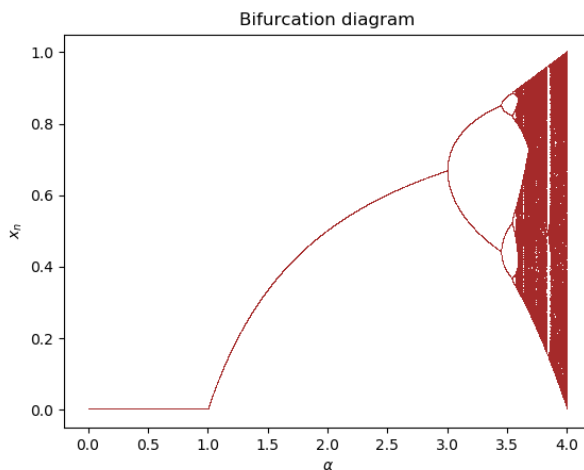


Figura 6: Últimos 100 arreglos de datos.

Para observar lo que es interesante, se muestra la gráfica anterior con más detalle.

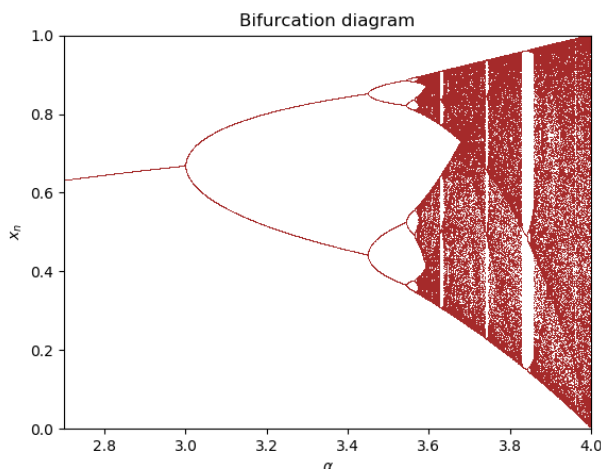


Figura 7: Diagrama de bifurcación a detalle.

Se tiene una estabilidad en los valores, al llegar a cierto valor de  $\alpha$ , la estabilidad se alcanza en dos valores diferentes, después, cada uno de esos valores se divide en dos, llegando a tener 4, y así sucesivamente hasta que se tiene un caso caótico. Se sabe que es caótico porque, de acuerdo a la definición, es muy sensible a condiciones iniciales y es que una pequeña variación en el valor de  $\alpha$ , sobre todo en los valores cercanos a 4, y se tiene un gráfico completamente diferente.

Se tienen dos aspectos muy llamativos, el primero de ellos, es que apartir de una relación simple se tienen gráficos complicados como el de la Figura 7; el otro aspecto, es que existe una especie de estabilidad en el caos de este caso, al observar el diagrama de bifurcación se perciben algunos huecos, que no son más que puntos donde la función vuelve a ser estable y nuevamente se vuelve caótico, como se observa en la Figura 8.



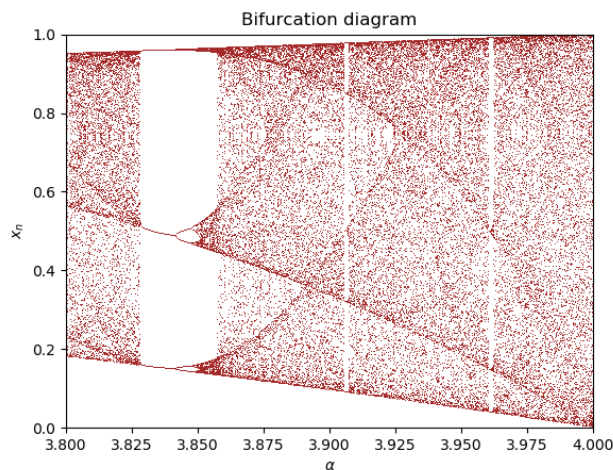


Figura 8: Diagrama de bifurcación en intervalo caótico.

La bifurcación ocurre cuando la estabilidad asintótica es intercambiada entre ciclos de menor y de mayor orden. Con estos diagramas se pueden observar los atractores, que son los puntos asintóticamente estables. (Kibble & Berkshire, 2004, p. 428)

### 3. Exponentes de Lyapunov

Los exponentes de Lyapunov en un sistema proporcionan una manera de medir los efectos de extensión, contracción y plegado en el espacio fase de un atractor. (Gleick, 1987, p. 106)

El cálculo de estos exponentes es un método para cuantificar la sensibilidad de la dependencia en las condiciones iniciales de sistemas, específicamente, de casos caóticos. Hay tantos exponentes de Lyapunov como variables en un sistema particular. Para el caso de una sola variable se tiene un sólo exponente. (Thornton & Marion, 2004, p. 175-177)

El exponente de Lyapunov  $\lambda$  representa el coeficiente de un crecimiento exponencial promedio por unidad de tiempo. Después de  $n$  iteraciones, la diferencia  $d_n$  entre dos valores de  $x_n$  es aproximadamente:

$$d_n \propto e^{n\lambda} \quad (5)$$

Si  $\lambda$  es negativa, las dos órbitas eventualmente convergen, pero si es positiva, las trayectorias cercanas divergen y resulta el caos.

Basta con que sólo uno de los exponentes sea positivo para que ocurra el caos. Para sistemas disipativos, el volumen del espacio fase decrece conforme el tiempo pasa. Esto significa que la suma de los exponentes de Lyapunov será negativa. Si un exponente es cero, no contribuye a la expansión o contracción del volumen del espacio fase.

Los valores de  $\lambda$  pueden ser encontrados mediante métodos numéricos usando la expresión:

$$\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \ln |F'(x_i)| \quad (6)$$

Para la medición de  $\lambda$  en un caso particular, se incrementa  $n$  de tal forma que se aproxime a un valor fijo (Kibble & Berkshire, 2004, p. 432). También se promedia, es decir, se obtiene la media aritmética sobre diferentes valores para evitar cualquier sensibilidad a valores erróneos. Mientras más valores se tengan, mejor será la medición.

En cualquier evento, las diferentes regiones para las cuales hay valores positivos de  $\lambda$  indican sensibilidad a las condiciones iniciales en esa región, es decir, se pueden tener sistemas que son caóticos sólo en determinados intervalos.

Entonces, para el caso de la ecuación logística se tendrá la siguiente expresión para el cálculo de los exponentes:

$$\lambda = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \ln|\alpha - 2\alpha x| \quad (7)$$

donde sólo se ha sustituido la derivada de la ecuación logística en la expresión 6.

En el programa realizado se tomaron 10000 iteraciones, la salida del programa se muestra en la Figura 9.

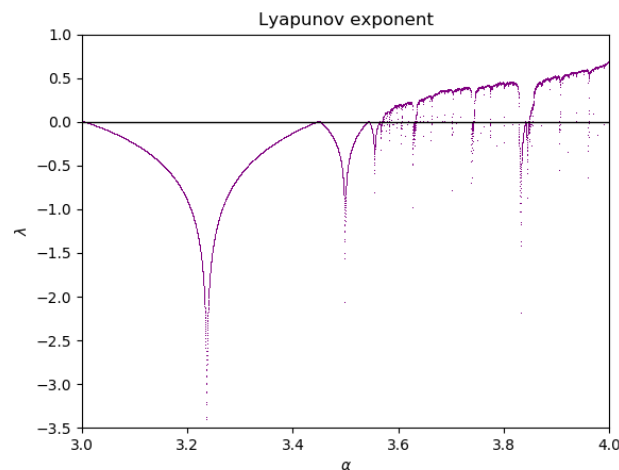


Figura 9: Exponente de Lyapunov como función de  $\alpha$ .

Se observa que hay valores positivos para los exponentes de Lyapunov en la ecuación logística, por tanto, se tendrá un caso caótico para los valores de  $\alpha$  entre 3.5 y 4 que fue lo que se observó en el diagrama de bifurcación de la Figura 7.

Esta es otra manera de determinar la estabilidad de un sistema y es muy útil en la identificación del caos.

## 4. Atractores extraños

Un punto asintóticamente estable es un atractor (Kibble & Berkshire, 2004, p. 331).

Existen casos particulares a los que se les llama Atractores extraños, que están asociados con el caos. Estos atractores tienden a ser ampliamente dispersos en lugar de localizarse en el espacio

fase. Además, tienen dimensiones fractales, es decir, sus dimensiones son números fraccionarios o irracionales en lugar de números enteros. Las propiedades anteriores son contraintuitivas, pues no pueden ser descritas o interpretadas a través de la intuición, como sucede con la mayoría de los fenómenos físicos. Lo anterior también es característico del caos (Goldstein, Poole & Safko, 2001, p. 489, 490).

Para sistemas que son dinámicamente de una o dos dimensiones los únicos atractores son los puntos críticos en la línea fase; y para el plano fase, son los círculos límite. En sistemas de tercer orden o más, pueden surgir otros atractores que pueden tener estructura fractal y sensible, que son los casos más estudiados. (Kibble & Berkshire, 2004, p. 361)

Dado que los atractores en movimientos caóticos están limitados en el espacio fase, los atractores deben plegarse en las regiones cercanas del espacio fase. Los atractores extraños crean patrones complicados, pero las trayectorias ocurren de tal manera que ninguna trayectoria en el espacio fase se intersecta. (Thornton & Marion, 2004, p. 169)

## 4.1. Atractores en dos dimensiones

### 4.1.1. Mapeo de Hénon

Con la intención de estudiar el atractor de Lorenz, específicamente en la forma en que el volumen de éste se contraía, Hénon buscó un mapeo que capturara las características esenciales de ese atractor, pero que también tuviera una cantidad ajustable de disipación. Como se sabe, generalmente el estudio de mapeos es más eficiente que el de las ecuaciones diferenciales. (Strogatz, 1994, p. 429 - 431)

Con las funciones

$$x_{n+1} = 1 - ax_n^2 + y_n \quad (8)$$

$$y_{n+1} = bx_n, \quad (9)$$

con  $a$  y  $b$ , parámetros reales, normalmente se tiene un interés físico en  $b$  positivo y menor a 1. La forma de este mapeo es muy similar a la del sistema de Lorenz. (Kibble & Berkshire, 2004, p. 434-437)

Geométricamente el mapa puede ser considerado una composición de 3 mapas simples separados. En la Figura 10 se observa el atractor para este caso.

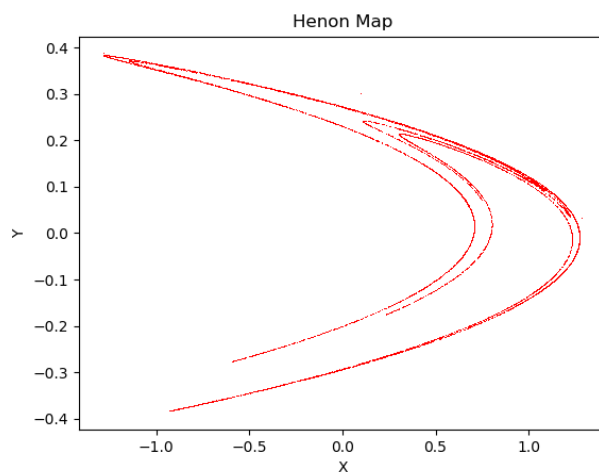


Figura 10: Atractor de Hénon.

Hay una extensión a lo largo de las hebras del atractor (exponentes de Lyapunov positivos) y una compresión a través de él (exponentes de Lyapunov negativos).

También tiene geometría fractal, además de que la extensión, la compresión y los dobleces en él son característicos de los sistemas caóticos. Si se realizan iteraciones infinitas, con la secuencia de operaciones se identifica un atractor. Este atractor tiene una complejidad topológica, es decir, es contraintuitivo; además de que es observable la sensibilidad a las condiciones iniciales, lo que lleva a pensar que su aparición en un sistema particular es complicado.

El mapeo de Hénon es invertible, propiedad que no comparte con el atractor de Lorenz. También es disipativo, como se observa en la figura 10. También puede tener secciones cerradas y algunas trayectorias pueden aproximarse a infinito, contrario al atractor de Lorenz. (Strogatz, 1994, p. 429 - 431)

#### 4.1.2. Atractor de Duffing

El oscilador de Duffing es un tipo de oscilador forzado con amortiguamiento, es reconocido por su dinámica no lineal. Lo particular de este oscilador es que se comienza con oscilaciones armónicas para después tener una dinámica caótica. Algunas de las aplicaciones de este oscilador se realiza para describir un sistema con resortes rígidos, circuitos electrónicos no lineales (por ejemplo, los que incluyen semiconductores), un péndulo doble con resortes, un péndulo con resorte y una fuerza lineal no restauradora, etc. [8]

El oscilador de Duffing es descrito mediante la expresión

$$\ddot{x} + \delta \dot{x} + \beta x + \alpha x^3 = \gamma \cos(\omega_D t) \quad (10)$$

con  $\delta$ ,  $\beta$ ,  $\alpha$ ,  $\gamma$  y  $\omega_D$  parámetros constantes, cuyos valores usados fueron 0.15, 1.0, 0.3 y 1.0, respectivamente. La expresión anterior no es más que la de un oscilador armónico amortiguado forzado con un término no lineal agregado. En la Figura 11 se observa el espacio fase del oscilador de Duffing.

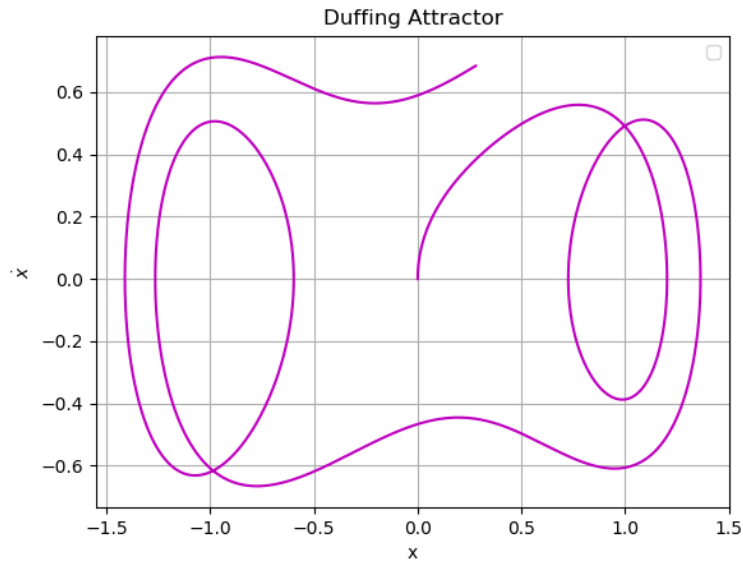


Figura 11: Atractor de Duffing para intervalo pequeño.

Para un intervalo pequeño no se observa un caso caótico, se observa que la trayectoria en el espacio fase sigue un mismo patrón. En el programa realizado se graficó un total de 100000 puntos, de tal manera que el resultado mostrado sea lo más claro posible. Como se mencionó, lo interesante de ese caso reside en que a medida que el sistema evoluciona se tiene un caso caótico, lo que es interesante dado la simplicidad de la ecuación. [9]

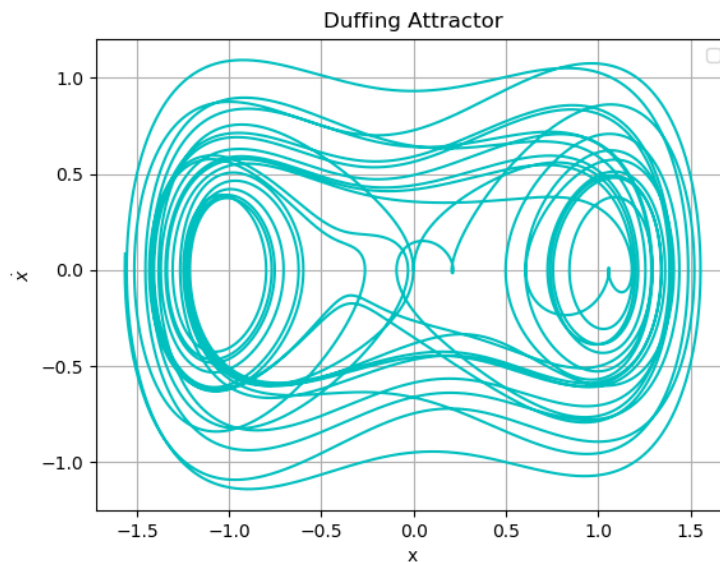


Figura 12: Atractor de Duffing para intervalo grande.

En la Figura 12 se observa el atractor de Duffing con un intervalo más grande, donde es muy

notorio los puntos o regiones hacia donde la trayectoria del espacio fase siempre converge. Como es un sistema caótico, su espacio fase tiene estructura fractal.

## 4.2. Atractores en 3 dimensiones

### 4.2.1. Atractor de Lorenz

Lorenz realizó un programa para simular el clima de la tierra, cada minuto la máquina marcaba el paso de un día al imprimir una serie de números. Al saber leer esos números, se podía conocer cómo fue clima el día que fue simulado. Pero, ninguna impresión se repetía, es decir, no podía pasar lo mismo en un día que en otro. En su máquina él colocó doce reglas, que no eran más que ecuaciones para expresar las relaciones entre la temperatura y la presión, la presión y la velocidad del viento, etc. Dicho de otra forma, en su máquina él puso a prueba los principios de Newton. Fue de esta manera como accidentalmente descubrió lo que se conoce como el efecto mariposa, pues con su programa él se dio cuenta de que las salidas eran muy sensibles a las condiciones iniciales. Al realizar pequeñas modificaciones, se obtenía algo completamente diferente y era imposible saber qué se hubiera obtenido con otras condiciones.

Como se sabe, en la ciencia una cadena de eventos pueden tener puntos de crisis que podrían incrementar los cambios pequeños. En el caos, se tienen dichos puntos en todos lados. Entonces, con la creación de Lorenz, doce ecuaciones eran calculadas sin limitaciones mecánicas eficientes, y de este sistema determinístico simple se obtenía el caos. (Gleick, 1987, p. 8-14)

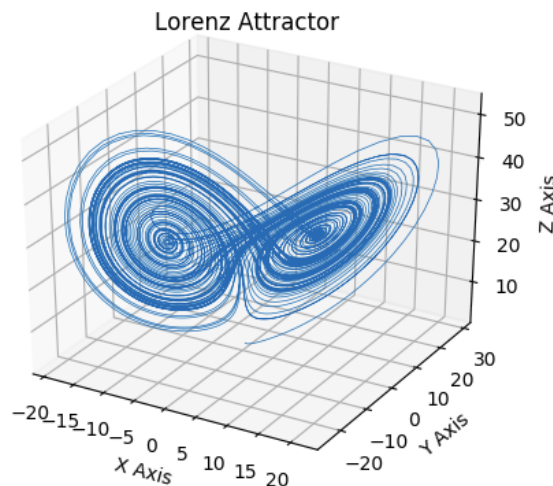


Figura 13: Atractor de Lorenz [Hunter, Dale, Firing, Droettboom(mplot3d example code: `lorenz_attractor.py`, 2017)]

Con el atractor de Lorenz(Figura 13), el cual se asemeja a las alas de una mariposa, se reveló la final estructura escondida en un flujo desordenado de datos. Para mostrar las relaciones de cambio entre tres variables se requiere una técnica diferente. En cualquier instante de tiempo, las tres variables fijan la ubicación de un punto en un espacio tridimensional. Como el sistema cambia, el

movimiento de ese punto representa el cambio continuo de éste. Las ecuaciones diferenciales de las que se habla, para graficar el espacio, son las siguientes:

$$\frac{dx}{dt} = \sigma(y - x) \quad (11)$$

$$\frac{dy}{dt} = x(\rho - z) - y \quad (12)$$

$$\frac{dz}{dt} = xy - \beta z \quad (13)$$

las cuales fueron planteadas por el mismo Lorenz en su artículo Deterministic Nonperiodic Flow, en la página 135, cuyos valores de las constantes se especifican en el mismo texto, siendo  $\sigma = 10$ ,  $\beta = 8/3$  y  $\rho = 24.74$ . [6]

Como el sistema nunca se repite, la trayectoria nunca se intersecta a sí misma, sino que sigue un bucle infinito. En la Figura 14 se muestra el atractor de Lorenz visto desde el plano  $xz$ , que es la perspectiva en la que más se asemeja a las alas de una mariposa.

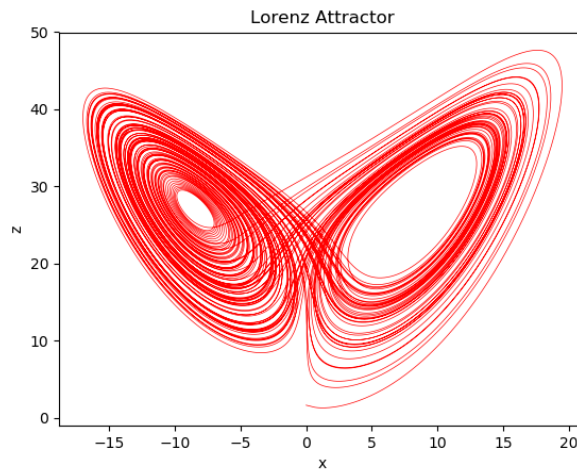


Figura 14: Atractor de Lorenz en el plano  $xz$ .

Para el programa realizado, se realizaron 100000 iteraciones, por lo que la forma de las gráficas son muy claras, mientras menor número de iteraciones se tuvieran se tenía una cantidad visible de líneas rectas. El rango de las iteraciones fue de 0 a 100, si se agrega un rango más amplio, entonces se tendrán más puntos en la gráfica.

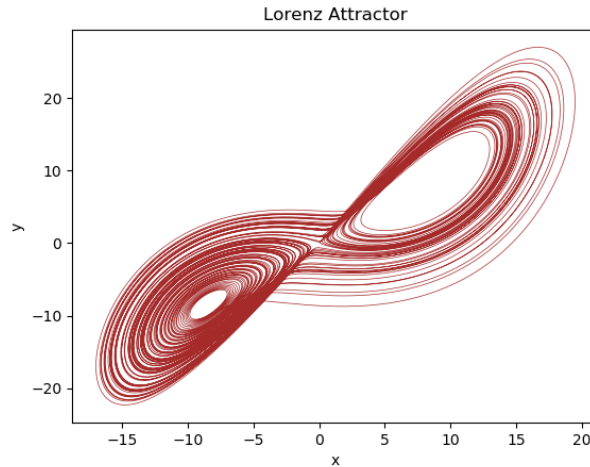


Figura 15: Atractor de Lorenz en el plano xy.

En el programa realizado, se utilizó la función *odeint* para la integración de las ecuaciones diferenciales y se graficaron las soluciones que ésta proporcionaba, para los diferentes planos. Se optó por seleccionar en las condiciones iniciales a números pequeños. Modificando algunas líneas e incluyendo una librería especial, es posible graficar los 3 planos al mismo tiempo, como la de la Figura 13.

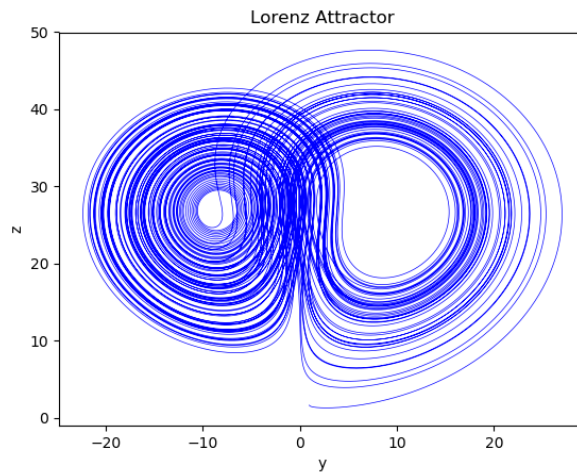
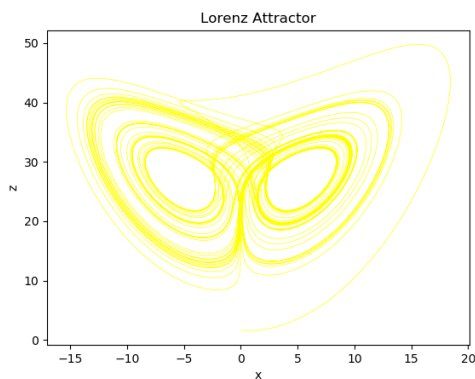


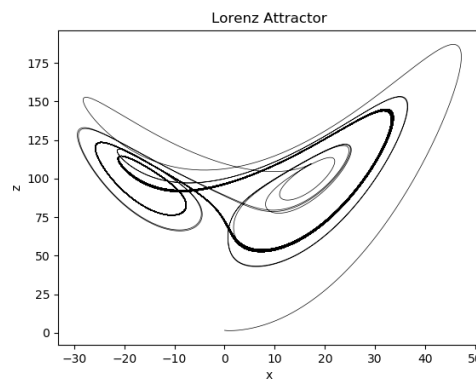
Figura 16: Atractor de Lorenz en el plano yz.

Es evidente cómo en las Figuras 14, 15 y 16 existe un atractor en el centro de las trayectorias, no importa cuántas iteraciones se coloquen, siempre habrá un retorno hacia esos puntos, y no importa desde qué plano se observen, las trayectorias nunca se atraviesan.

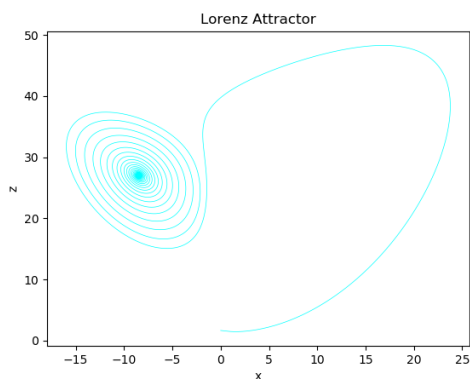




(a) Variación de beta.



(b) Variación de rho.



(c) Variación de sigma.

Figura 17: Variación de los parámetros independientes en el atractor de Lorenz.

Finalmente, en la Figura 17 se muestran algunos gráficos en el plano  $xz$  que se obtienen de variar los valores de los parámetros independientes. En a) se disminuyó  $\beta$  a la unidad; en b)  $\rho$  se incrementó a 100; y en c)  $\sigma$  se incrementó a 30. Es evidente la variación de estas gráficas con respecto a las mostradas anteriormente, se nota la diferencia ante la variación de los parámetros independientes, sin embargo, los atractores siguen presentes.

#### 4.2.2. Atractor de Rössler

Rössler fue un médico con una habilidad para visualizar los atractores como objetos filosóficos, no como objetos matemáticos. (Gleick, 1987, p. 61)

El atractor de Rössler es más simple que el de Lorenz. Se tiene la particularidad de que el sistema se encuentra en dos dimensiones pero se pasa a la tercera dimensión en una de sus secciones, por lo que ahora se requieren 3 dimensiones para la descripción del mismo. (Strogatz, 1994, p. 434, 435) Lo anterior tiene sentido dado que, al igual que con el caso de Lorenz, se tienen 3 ecuaciones diferenciales

$$\frac{dx}{dt} = -y - z \quad (14)$$

$$\frac{dy}{dt} = x + ay \quad (15)$$

$$\frac{dz}{dt} = b + z(x - c) \quad (16)$$

Los parámetros independientes,  $a$ ,  $b$  y  $c$  son determinados numéricamente, para el caso en el que sus valores son de 0.2, 0.2 y 5.7, respectivamente, se tienen los atractores mostrados en la Figuras 18, 19 y 20.

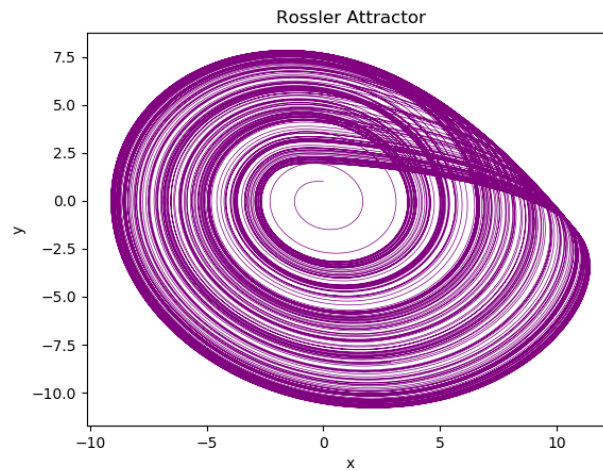


Figura 18: Atractor de Rössler.

Se tiene un intervalo de 0 a 1000 con 100000 iteraciones. Los valores iniciales fueron tomados del documento *An Equation for Continuous Chaos* escrito por el mismo Rössler, dichas condiciones iniciales son  $x = 0.0$ ,  $y = 1.0$  y  $z = 1.65$ . [7]

Cabe mencionar que no se muestra un desarrollo más profundo en este atractor debido a que sólo se están presentando las características principales de cada uno, que son observables mediante los espacios mostrados y cuyas formas dependen de las ecuaciones diferenciales con las que se modela el sistema.

Dependiendo de las condiciones iniciales se tienen definidas las variables en diferentes intervalos, los cuales son útiles para poder implementar las secciones de Poincaré, con las que es posible analizar mejor el sistema, pues los espacios fase para movimiento caótico se tornan muy complicados.

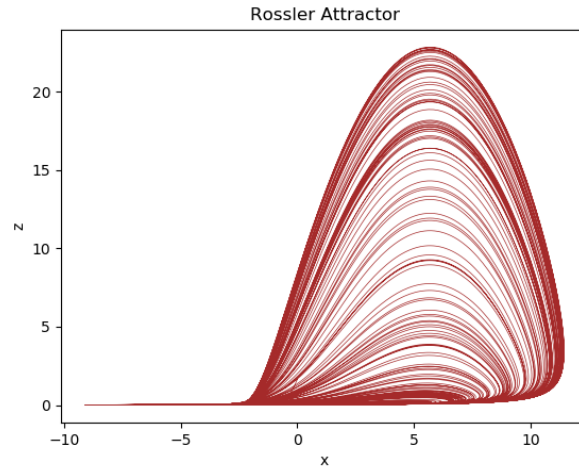


Figura 19: Atractor de Rössler.

Nuevamente se usó la función *odeint* para la resolución del sistema de ecuaciones diferenciales. Para cada caso se grafica una solución respecto a otra para poder observar el espacio fase en diferentes planos.

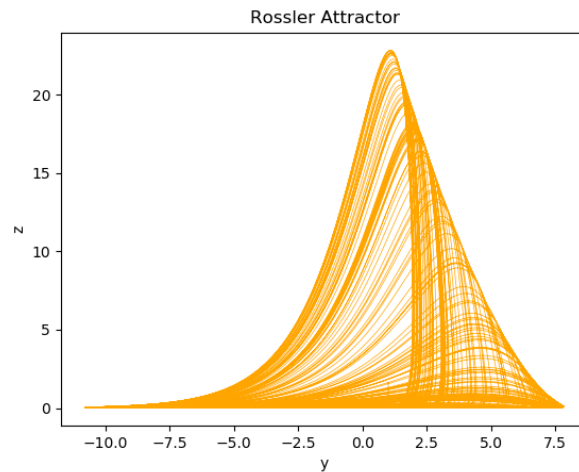


Figura 20: Atractor de Rössler.

Rössler tenía la intención de que su sistema tuviera aplicaciones desde astrofísica hasta economía, pues el sistema puede ser usado como guía para identificar sistemas que naturalmente presentan la misma forma.

El caos continuo es extrañamente atractivo. [7]

## 5. Secciones de Poincaré

Una buena forma de muestrear el movimiento de un sistema es mapeándolo en una sección que atraviesa el espacio fase, llamada sección de superficie. (Kibble & Berkshire, 2004, p. 333) Es más conveniente estudiar una sección bidimensional, o bien, una visualización de una superficie en dos dimensiones a partir de dimensiones superiores. Esta sección es llamada sección de Poincaré y en ella se calculan las posiciones de los puntos donde las órbitas pasan a través de la sección. (Goldstein, Poole & Safko, 2001, p. 494)

Entonces, con esta nueva técnica se simplifican las representaciones de los diagramas de espacio fase cuando éstos son más complicados. Mediante mapeos en dos direcciones se puede visualizar el movimiento en el espacio fase. (Thornton & Marion, 2004, p. 166)

Dado que se conocen las ecuaciones movimiento, la posición donde las órbitas sucesivas pasaron a través de la sección bidimensional puede ser obtenida.

Generalmente, la proyección aparece con forma irregular. Las curvas simples representan movimiento con posibles soluciones analíticas, mientras que las curvas complicadas, de apariencia irregular representan caos. Estos últimos casos son los de interés.

En el movimiento caótico, las trayectorias cercanas entre sí en el espacio fase divergen continuamente una de otra, pero eventualmente deben regresar a lo que se conoce como atractor.

Las secciones de Poincaré tienen una estructura fractal, concepto que será revisado en la siguiente sección.

A continuación, se presentan ejemplos de las secciones de Poincaré obtenidas para dos atractores diferentes, graficando 100000 puntos en cada caso, independientemente del intervalo a considerar.

### 5.1. Atractor de Lorenz

Para el atractor de Lorenz se tienen 3 secciones de Poincaré, que corresponde a la sección en cada uno de los planos, los cuales se observan en la Figura 21.

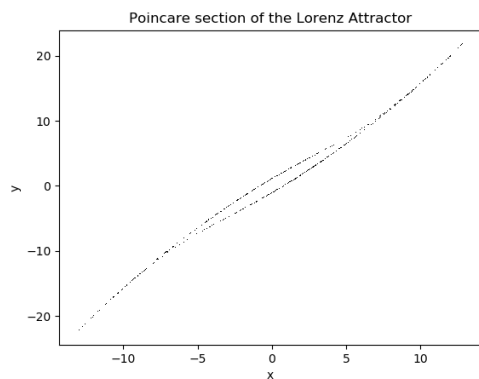
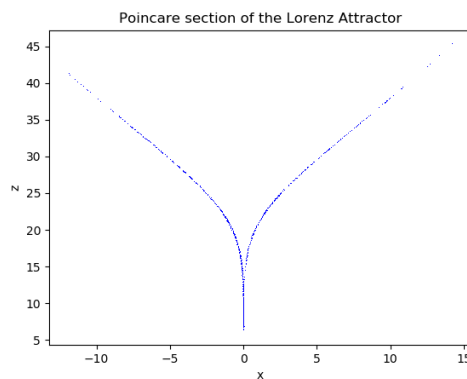
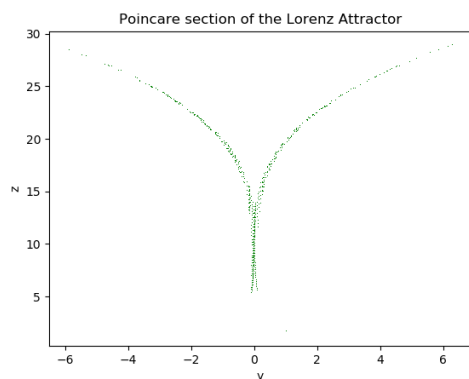
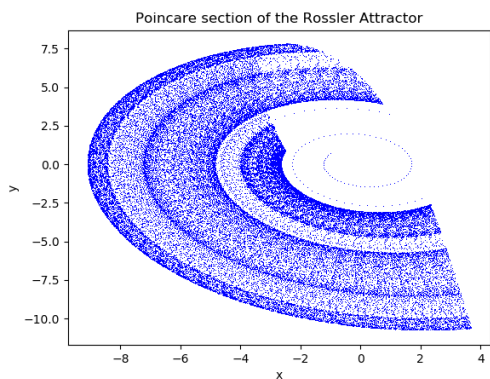
(a) En el plano  $xy$ .(b) En el plano  $xz$ .(c) En el plano  $yz$ .

Figura 21: Secciones de Poincaré para diferentes planos.

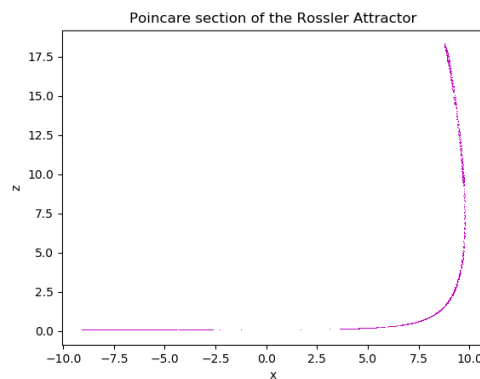
Para el caso de los planos en  $xz$  y  $yz$  se colocó la sección en los puntos  $y = 0$  y  $x = 0$ , respectivamente. La sección de Poincaré para el plano  $xy$  no fue posible mediante la colocación de la sección en  $z = 0$ , debido a las condiciones iniciales, entonces, para que fuera posible su observación se colocó la sección en  $z = 30$ . Lo anterior se decidió mediante el análisis de los espacio fase del atractor de Lorenz en la sección anterior, pues ahí se observa en qué intervalos está definida cada una de las variables.

## 5.2. Atractor de Rössler

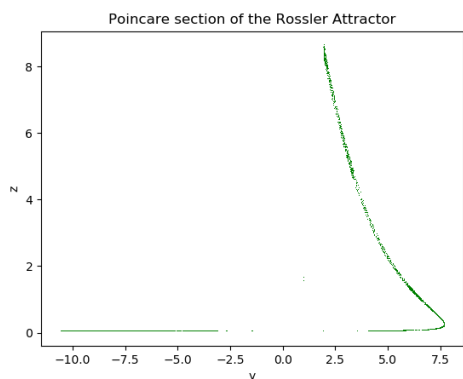
Dado que se tienen 3 ecuaciones diferenciales, se tienen 3 variables, por lo que se sigue que se tienen 3 dimensiones para describir al sistema. De manera similar al caso anterior, se colocaron diferentes secciones, una para cada plano. En la Figura 22 se muestran las secciones de Poincaré para este caso.



(a) En el plano xy.



(b) En el plano xz.



(c) En el plano yz.

Figura 22: Secciones de Poincaré para diferentes planos.

Para cada plano, se colocó la sección a lo largo de la variable faltante en el punto donde es igual a cero. A diferencia del atractor de Lorenz, las condiciones iniciales de este atractor no interfieren con la obtención de las secciones en los extremos del espacio fase. Fue necesario reducir el intervalo de las iteraciones para el caso a), pues no se podía apreciar correctamente la simetría en ese plano.

### 5.3. Sobre las proyecciones obtenidas

En todos los casos se optó por colocar las diferentes secciones paralelas a algunos de los ejes, es decir, las secciones seleccionadas no están rotadas con respecto a alguno de los ejes, debido a que la programación de un caso como este sería más complicado para los conocimientos de programación que se tienen hasta el momento, sin embargo, las gráficas obtenidas son suficientes.

Como se pudo observar, no se tienen formas regulares en cada una de las secciones. Por ejemplo, para el caso del atractor de Lorenz sí se observa una simetría en cada una de las figuras, se puede colocar una línea divisora de tal forma que se tenga un efecto espejo con la figura resultante, pero no es fácil describir tal simetría, pues el sistema está atravesando dichos planos con patrones que no son sencillos de describir y que nunca se enciman.

Ahora, para el caso del atractor de Rössler se tiene que los puntos tampoco se enciman, y además, se presenta un caso muy interesante, pues su forma es mucho más complicada de describir que los casos con el atractor de Lorenz. Además, las otras curvas obtenidas no parecen cerrarse en algún

punto, la proyección tiene forma irregular con lo que se deduce que no se tienen soluciones analíticas para ninguno de los casos.

## 6. Fractales

Fractal significa auto-similar, que es la simetría a través de la escala. (Gleick, 1987, p. 40)

Los fractales son trayectorias en el espacio fase que tienden asintóticamente hacia una estructura de hojas múltiples en una jerarquía de escalas (Kibble & Berkshire, 2004, p. 333), son objetos o conjuntos con dimensiones no integrales que exhiben la propiedad de autosimilitud (Goldstein, Poole & Safko, 2001, p. 518), o dicho de otra forma, es una manera de ver el infinito (Gleick, 1987, p. 40-43).

La manera más sencilla de definir un fractal es como una figura geométrica de forma compleja con una fina estructura en escalas pequeñas arbitrarias (Strogatz, 1994, p. 398). Por ejemplo, se puede observar la Figura 7, en la que se observa una naturaleza fractal en cierto intervalo, pues una sola línea se separa en dos hasta que se pierde la forma de la imagen.

Uno de los ejemplos más característicos de un fractal, es el del copo de nieve de Koch, el cual consiste en un triángulo equilátero inicial. Cada uno de los lados del triángulo se puede dividir en tercios, tomando el segundo tercio de cada lado, se traza otro triángulo equilátero, cuya longitud de los lados será igual a la de un tercio del lado del triángulo original. Se repite lo anterior para los picos que ahora se tienen, se toma el segundo tercio de cada lado y se traza un triángulo equilátero. Es intuitivo pensar que cada uno de estos triángulos será cada vez más pequeño, la idea es nunca se dejen de agregar nuevos triángulos. Avanzando con la secuencia, se tendrá una figura que se parece cada vez más a un copo de nieve, de ahí su nombre.

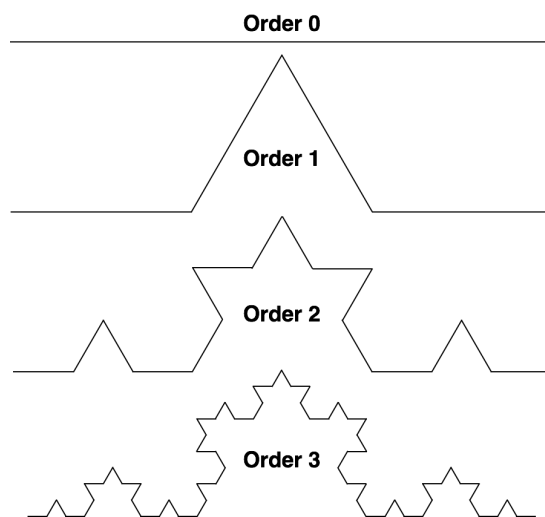


Figura 23: Fractal de Koch [15].

Otros fractales famosos fueron propuestos por Sierpinski, el cual tiene un cuadrado que se divide en 9 cuadrados y quita el que queda en medio de los nueve. Con cada uno de los cuadrados resultantes repite el mismo proceso. Sierpinski propuso realizar el mismo proceso pero con un triángulo, sus

propuestas son conocidas como el triángulo y el cuadrado de Sierpinsky. También existen las versiones en tercera dimensión de las figuras de Sierpinsky. (Gleick, 1987, p. 40-43)

Algo curioso del planteamiento anterior, es que la figura nunca se intersecta a sí misma, pues se tienen cada vez triángulos más pequeños, como se mencionó. Cada vez que se repite la secuencia, el área de la figura incrementa un poco, pero no cambia mucho con respecto a la figura original. Si se traza un círculo alrededor del triángulo original, la figura nunca se extenderá más allá de la circunferencia (Gleick, 1987, p. 40-43). Por ejemplo, se puede observar el ejemplo del copo de nieve, en el cual se sigue una metodología muy similar a la de la Figura 23, pero rotando la secuencia para obtener la forma del copo de nieve. Al ejecutar un programa [10] para obtener la secuencia anterior, se observa lo siguiente.

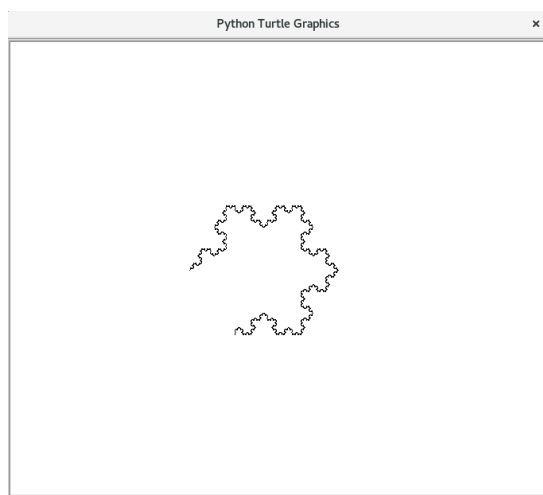


Figura 24: Copo de nieve de Koch

En la Figura 24 se puede apreciar la secuencia del fractal para un orden 4, es decir, si se aproxima la imagen al margen de la figura se observarán muchos triángulos dentro de triángulos, pero éstos nunca se intersectarán, y la figura obtenida no sobrepasará a la circunferencia que se trace en sus extremos. Una última ilustración se observa en la Figura 25 donde se ha ampliado uno de los lados del copo de nieve para observar la naturaleza fractal de la secuencia.



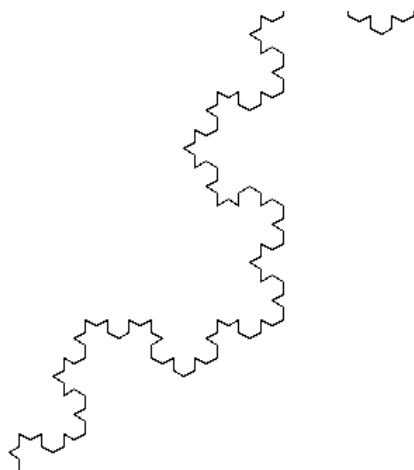


Figura 25: Copo de nieve de Koch ampliado.

Los sistemas caóticos tienen una naturaleza de tipo fractal y la dimensionalidad no integral es una característica del caos, es decir, se tienen dimensiones que no son representadas por números enteros. (Goldstein, Poole & Safko, 2001, p. 516-518)

La dimensión es el número mínimo de coordenadas necesitadas para describir cada punto de una muestra. Por ejemplo, las líneas y curvas suaves son de dimensión uno; las figuras geométricas clásicas como los planos, son de dimensión dos; mientras que los sólidos son de 3 dimensiones, etc. (Strogatz, 1994, p. 404)

Para determinar la dimensión de un fractal se sigue el siguiente procedimiento, el cual se encuentra en las páginas 517 y 518 del libro *Classical Mechanics* (Goldstein, Poole & Safko). El número de subdivisiones de un segmento está dado por

$$N(a) = (a_0/a)^d \quad (17)$$

donde  $a_0$  es un segmento de línea subdividido en muchos segmentos de igual longitud, cada uno de lado  $a < a_0$ ; y con  $d$  igual a la dimensionalidad del espacio.

La dimensión fractal o dimensión de Hausdorff se define como

$$d_F = \frac{\log N(a)}{\log(a_0/a)} \quad (18)$$

el subíndice es colocado para diferenciar la dimensión característica de los fractales y atractores extraños (contraintuitiva no entera). También se tiene la dimensión Euclideana inicial  $d_E$  y la dimensión Euclideana final (topológica)  $d_E$ , que no son más dimensiones perpendiculares, o bien, el plano cartesiano en 3 dimensiones como se conoce. Se cumple que para la dimensión fractal

$$d_T < d_F < d_E \quad (19)$$

En sistemas de orden 3 o más pueden surgir atractores que tengan una estructura fractal y sensible. Por ejemplo, se pueden observar las figuras de la sección de atractores en 3 dimensiones, en los que se explica el atractor de Lorenz y el de Rössler, cuyos espacios fase presentan una naturaleza fractal.

Las "islas" (huecos que aparecen en los espacios fase) replicadas a mayor nivel de magnitud son características de muchos de los sistemas caóticos y son llamadas fractales. Los sistemas caóticos

tienen una naturaleza de tipo fractal y la dimensionalidad no integral es una característica del caos. La dimensionalidad fractal de un atractor extraño puede ser calculada con los exponentes de Lyapunov asociados con la expansión de su espacio fase. (Goldstein, Poole & Safko, 2001, p. 518)

## 7. Sistema caótico mecánico

Los péndulos son usados para ilustrar ejemplos de sistemas caóticos. En la práctica, éstos pierden energía y son sensibles a condiciones iniciales, pero el cambio de éstas no afectan visiblemente al movimiento de los mismos, pues dichos cambios no son tan perceptibles al ojo humano. Sin embargo, en el famoso ejemplo del péndulo doble se tiene un sistema caótico y las variaciones en las condiciones iniciales sí dan como resultado diferentes trayectorias, en las cuales, existe una probabilidad casi nula de que la misma trayectoria se repita. Normalmente se tienen péndulos físicos que están sostenidos de algún punto fijo, por ejemplo, el techo, en los casos más simples de osciladores armónicos. Cuando ese punto donde el péndulo también oscila con determinada frecuencia se tiene otro caso caótico. El ejemplo que se explicará un poco más que los anteriores es el del péndulo magnético. La idea es simplemente dar un panorama general de las implicaciones del problema y de la forma en la que se puede o se pretenden predecir las trayectorias del péndulo ante determinadas condiciones iniciales.

El péndulo magnético consiste en un péndulo simple, sólo que en lugar de tener la clásica esfera se tiene un imán. Entonces, el péndulo oscila por encima de un plano donde se tienen otros imanes, los cuales se encuentran fijos respecto a la posición de equilibrio del péndulo si se tuviera una esfera en lugar del imán. Además, los imanes están colocados de tal manera que exista una fuerza de atracción entre el que oscila y los que se encuentran fijos en el plano. Como es de esperar, se hará oscilar el péndulo con ciertas condiciones iniciales, en cierto momento de la evolución del sistema, el péndulo quedará estático, atraído hacia uno de los imanes del plano.

Se comenzará con definir cuáles son las variables de este sistema.

- La masa del imán que oscila, al igual que en el péndulo simple las ecuaciones de movimiento quedarán en función de esta masa, la cual determinará o contribuirá cuando menos, a la frecuencia de oscilación del péndulo.
- La longitud de la cuerda que sostiene al imán que oscila, pues también es de esperar que cuando menos se debe considerar para obtener la frecuencia de oscilación del péndulo.
- La cantidad de imanes. Cuando el sistema llegue a un nuevo punto de equilibrio, quedará atraído hacia uno de los imanes. Si se tiene un solo imán, por ejemplo, es muy probable que su nueva posición de equilibrio sea cuando esté siendo atraído por el imán. Si se tiene más de uno resulta más complicado determinar o intentar predecir en qué posición de equilibrio terminará el sistema.
- La distancia entre el péndulo y el plano. Por el principio de Biot-Savart, la intensidad del campo magnético es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia entre dos puntos, y la fuerza magnética (de atracción o repulsión) es proporcional al campo magnético. En términos más simples, a mayor distancia menor fuerza de atracción.

El sistema requiere realizar consideraciones mecánicas y electromagnéticas. De alguna forma, este sistema es más simple que otros debido a que la interacción con los imanes disminuye la sensibilidad a las condiciones iniciales, sin embargo, ésta propiedad no se anula por completo. [13]

Se realizará el análisis para el caso en que se tienen 3 imanes en el plano, pero en principio se puede seleccionar cualquier número.

Para la ecuación de movimiento, es necesario considerar las fuerzas debido a la gravedad, la fricción y la fuerza magnética.

La fuerza debido a la gravedad no es más que la masa por la aceleración  $\vec{a}_g$  debido a la gravedad. La fuerza de fricción, o bien, la consideración de la desaceleración debido a la resistencia del aire a bajas velocidades es expresada como  $\vec{F}_f = -k\vec{x}$ , donde  $\vec{x}$  es la velocidad del péndulo. Se toma la velocidad debido a que la energía cinética disminuye debido a la fricción. Se debe recordar que el signo negativo es debido a que existe una desaceleración del sistema. Ahora, la fuerza debido a los imanes es expresada como el desplazamiento  $\vec{r}$  entre la magnitud del vector al cubo  $|\vec{r}|^3$ , que es la distancia del péndulo a cada uno de los imanes. La fuerza magnética total será la suma de las fuerzas magnéticas del péndulo debida a cada imán. Sabiendo que la fuerza es la masa del péndulo por la distancia, se toma la aceleración debida a cada uno de los factores. Entonces, se puede expresar lo anterior de la siguiente manera.[14]

$$\vec{a} = \vec{a}_g - \vec{a}_f + \sum_{i=1}^3 \vec{a}_{im} \quad (20)$$

donde  $\vec{a}$  es la aceleración total del sistema,  $\vec{a}_g$  es la aceleración debido a la acción del campo gravitatorio.  $\vec{a}_{im}$  es igual a la aceleración debida a la interacción entre los imanes, se debe notar que en la sumatoria se ha colocado el número 3 debido a la cantidad de imanes que se tienen.

De esta manera se pueden predecir diferentes trayectorias para diferentes condiciones iniciales. Por la manera en que se obtuvieron las ecuaciones de movimiento no es necesario considerar la masa del péndulo ni la longitud de la cuerda que lo sostiene. Sin embargo, no se descarta la posibilidad de que con otro análisis sea posible obtener la frecuencia del sistema, pues por la forma de la ecuación de movimiento se puede intuir que se tendrá una solución sinusoidal.

Entonces, sólo se mostró un desarrollo muy general, una aproximación simple para analizar el sistema, no se pretendía la resolución de la ecuación de movimiento ni la obtención de trayectorias con sus respectivos espacio fase. Siplemente se busca dar a entender que no importa qué sistema físico se tenga es posible realizar un análisis para obtener sus ecuaciones de movimiento, con ellas es posible tener un "juguete" para ver qué dinámica tienen los sistemas. Lo demás es juego.

En este caso, el término no lineal de la expresión vendría dado por la fuerza magnética, pues se tiene un factor de  $x$  (la magnitud de  $\vec{r}$ ) con una potencia diferente de 0 y 1.

## 8. Apéndice

### 8.1. Mapeo logístico

Las gráficas de esa sección, que van desde la Figura 1 hasta la 4 fueron realizadas con el mismo programa. La estructura de éste se muestra en la Figura 26.

```

alpha = 0.1 #Valor del parámetro independiente
Xn = [] #Vector para guardar las salidas
x = 0.3 #Condición inicial

for i in range (20): #20 iteraciones
    x = alpha * x * (1 - x) #Función logística
    Xn.append(x)

plt.plot(Xn, label='alpha = 0.1', linewidth = 1.0)
plt.title('Logistic map')
plt.xlabel('Iteration')
plt.ylabel('$X_{n+1}$')
plt.rcParams['figure.figsize'] = (5, 5)

plt.show()

```

Figura 26: Ecuación logística

En esta sección se graficó el valor de  $x_{n+1}$  contra el número de iteraciones, pues con ello se pretendía realizar una predicción del siguiente valor de  $x$  de acuerdo a cierta condición inicial. Se definió el valor de  $\alpha$ , un vector para guardar las salidas de la función y en un ciclo se modificaba el número de iteraciones dependiendo del valor de  $\alpha$ , pues como se mencionó, la estabilidad de la función no se lograba en el mismo intervalo. En cada caso se modificaba el valor de  $\alpha$ , en esta ocasión no fue necesario realizar modificaciones adicionales.

## 8.2. Diagrama de bifurcación

Las Figuras que van desde la 5 hasta la 8 fueron hechas con un mismo programa.

En el programa anterior sólo se modificaba el parámetro independiente  $\alpha$  y con ello se obtenían los valores de  $x_{n+1}$ , ahora, se grafica el valor de  $x_{n+1}$  respecto a  $\alpha$  cuando este último es variado. Entonces, en el programa se realiza el cálculo de los valores de  $x_{n+1}$  para un valor de  $\alpha$ , se guardan los valores, se modifica el parámetro independiente y se vuelven a obtener los valores de  $x_{n+1}$ , como se observa en la Figura 27.

```

a = np.linspace(0, 4, 10000) #Intervalo de 0 a 4 con 10000 iteraciones
x = 0.5 #Condición inicial

for i in range (1000): #Se obtienen los valores de 1000 iteraciones
    x = a * x * (1 - x)

    if i < 20: #Se grafican las primeras 20 iteraciones
        plt.plot(a, x, color = 'brown', ls='', marker=',', )

plt.title('Bifurcation diagram')
plt.xlabel(r'$\alpha$')
plt.ylabel('$x_n$')
plt.show()

```

Figura 27: Diagrama de bifurcación para la ecuación logística

En la primera línea se definió el rango de los valores para  $\alpha$  y la cantidad de iteraciones entre ese rango. Se colocó el valor inicial de  $x$  y se obtienen sus siguientes valores. Ahora, en lugar de guardar los valores en un vector se grafican directamente. Con la función *if* se determina qué arreglos son los que se graficarán, como se mencionó, mientras mayor fuera el arreglo todas las trayectorias convergían a una sola excepto en el intervalo donde se sabe que es caótico. Entonces, lo que se modificó para las gráficas posteriores fue el intervalo donde  $\alpha$  estaba definido, para lograr una mejor imagen cuando se ampliaba la gráfica; los límites de la imagen, para realizar la ampliación; el tamaño de la imagen,

para ver con mayor detalle; y por último, el número de arreglos a graficar, que casi siempre fue cuando el valor de  $i$  era mayor a 900.

### 8.3. Exponentes de Lyapunov

La Figura 9 fue realizada con el programa mostrado en la Figura 28.

```
a = np.linspace(3, 4, 10000) #Intervalo de interés, pues coincide con la región donde el diagrama de bifurcación ca
su = 0 #Para la sumatoria de valores.
x = 0.5 #Condición inicial

for i in range(10000): #10000 iteraciones
    x = a * x * (1 - x) #Función logística
    su += np.log(abs(a - 2 * a * x)) #Sumatoria

lamb = su/10000 #Para la media de valores

plt.plot(a, lamb, color = 'purple', ls='', marker=',', )
plt.axhline(0, color='black', lw = 1) #Para visualizar x = 0 en el diagrama e identificar los valores positivos
plt.xlim(3, 4)
plt.ylim(-3.5, 1)
plt.xlabel(r'$\alpha$')
plt.ylabel(r'$\lambda$')
plt.title("Lyapunov exponent")
plt.rcParams['figure.figsize'] = (10, 7)
plt.show()
```

Figura 28: Gráfico obtenido para los exponentes de Lyapunov

Como se busca encontrar los exponentes positivos en determinado valor de  $\alpha$ , se grafica el valor de  $\lambda$  contra  $\alpha$ . En la primera línea se definió el rango, el cual fue seleccionado debido a que en el diagrama de bifurcación se observó en qué momento existía caos. Los valores se guardan en la variable  $su$ , la cual se inicializa en cero para poder realizar la sumatoria requerida. Las operaciones colocadas ahí pueden entenderse si se lee la sección correspondiente. Finalmente, como se trata de una media aritmética se divide el valor de la sumatoria entre el número de iteraciones que se realizó.

### 8.4. Atractores extraños

Se mostraron 4 casos, cada uno de ellos requiere su propio programa debido a que las ecuaciones diferenciales no son las mismas.

Para el atractor de Hénon sólo se mostró la Figura 10, la cual fue obtenida con el programa mostrado.

```

def H(a,b,x,y): #Función de Hénon
    return y + 1.0 - a*x*x, b*x

#Parámetros independientes
a = 1.4
b = 0.3

#Condiciones iniciales
x = 0.1
y = 0.3

for i in range(10000): #10000 iteraciones
    x, y = H(a, b, x, y) #Se llama a la función
    plt.plot(x, y, 'r,') #Se grafica punto por punto

plt.xlabel('x')
plt.title('Henon Map')
plt.ylabel('y')

plt.show

```

Figura 29: Atractor de Hénon

Se definió una función. Después de muchos intentos por programar se llegó a la conclusión de que la definición de una sola función para obtener ambos valores era necesaria, pues de lo contrario, debido a que el valor de  $y$  es un múltiplo del valor de  $x$ , se graficaba  $x$  contra  $x$ , lo que daba como resultado una línea recta. En este caso se grafica el valor de  $y$  contra el de  $x$ . Se definen los parámetros independientes y las condiciones iniciales para ambas variables. Nuevamente, en lugar de guardar los valores en un vector se grafica punto por punto, como se observa en la Figura 29. Para este caso no se realizó alguna modificación inicial.

Las Figuras 11 y 12, que corresponden al atractor de Duffing, se hicieron con el siguiente programa.

```

def Duf (y, t): #Ecuaciones diferenciales de Duffing
    tx, ox = y
    dydt = [ox, - 0.15 * ox + tx - tx * tx * tx + 0.3 * np.cos(t)]
    return dydt

t = np.linspace(0, 20, 100000) #100000 para intervalo pequeño.
y0 = [0.0, 0.0]

sol = odeint(Duf, y0, t)

plt.plot(sol[:, 0], sol[:, 1], 'm')
#plt.plot(strange[:, 0], strange[:, 1], 'b')
plt.legend(loc='best')
plt.title("Duffing Attractor")
plt.xlabel('x')
plt.ylabel('$\dot{x}$')
plt.grid()
plt.show()

```

Figura 30: Atractor de Duffing

Para este caso se tiene una ecuación diferencial que puede ser revisada en la sección de Atractores extraños. Entonces, con la función *odeint* se realiza la integración para obtener cada solución. En este caso se tiene la gráfica de la velocidad contra la posición, que son soluciones guardadas en la variable *sol* de la Figura 30. También se definió el intervalo y el número de iteraciones. Se muestran dos imágenes, la diferencia entre ellas es nada más el rango de valores que se usó, pero el número de iteraciones no se cambió. Como en otros casos, también se modificó el color para variar.

En la Figura 31 se muestra el programa realizado para graficar el atractor de Lorenz en diferentes planos. Las imágenes obtenidas para este atractor van desde la Figura 14 hasta 17.

```
def Lorenz (state, t):
    x, y, z = state
    dx = sigma * (y - x)
    dy = x * (rho - z) - y
    dz = x * y - beta * z
    return [dx, dy, dz]

sigma = 10
rho = 24.74
beta = 2.66

t = np.linspace(0, 100, 100000)

init_state = [0, 1, 0]
state = odeint(Lorenz, init_state, t)

plt.plot(state[:, 0], state[:, 2], lw = 0.5, color = 'red') #Plano xz
plt.title("Lorenz Attractor")
plt.xlabel("x")
plt.ylabel("z")

plt.show()
```

Figura 31: Atractor de Lorenz

En la función se tienen las ecuaciones diferenciales a resolver, nuevamente las soluciones son obtenidas con la función *odeint*. Se inicializan los valores de los parámetros independientes para este caso, se define el rango de valores y el número de iteraciones, los valores iniciales para cada variable y se grafica. Las soluciones son guardadas en *state*. Para cada caso, se modificó qué solución se graficaba respecto a cuál. Se tienen 3 casos, *y* contra *x*, *z* contra *x* y *z* contra *y*. Recordar que para este atractor en específico se modificaron los valores de los parámetros independientes para observar cómo se modificaban las gráficas.

El último atractor extraño fue el de Rössler, cuyo programa se muestra a continuación.

```
def Rossler (state, t):
    x, y, z = state
    dx = -y - z
    dy = x + a * y
    dz = b + z * (x - c)
    return [dx, dy, dz]

a = 0.2
b = 0.2
c = 5.7

t = np.linspace(0, 1000, 100000)

init_state = [0, 1, 1.65]
state = odeint(Rossler, init_state, t)

plt.plot(state[:, 0], state[:, 1], lw = 0.5, color = 'purple')
plt.title("Rossler Attractor")
plt.xlabel("x")
plt.ylabel("y")

plt.show()
```

Figura 32: Atractor de Rössler

La estructura del programa de la Figura 32 es muy similar a la de la Figura 31. Se tienen las ecuaciones diferenciales con 3 variables, se definen los parámetros independientes, el rango de valores, el número de iteraciones y las soluciones también se guardan en *state*. Además, también se grafican

3 planos, para los cuales sólo se modifican las soluciones graficadas. Para este caso no fue necesario modificar ninguno de los otros parámetros. Las gráficas obtenidas están en las Figuras 18, 19 y 20.

## 8.5. Secciones de Poincaré

Para exponer este tema se seleccionaron los dos atractores extraños en 3 dimensiones. Los programas de las Figuras 31 y 32 sólo sufrieron pequeñas modificaciones para obtener la imagen deseada. Ambos programas se muestran en las Figuras 33 y 34.

```
def Lorenz (state, t):
    x, y, z = state
    dx = sigma * (y - x)
    dy = x * (rho - z) - y
    dz = x * y - beta * z
    return [dx, dy, dz]

sigma = 10
rho = 28
beta = 2.66

t = np.linspace(0, 1000, 100000)

init_state = [0, 1, 1.65]
state = odeint(Lorenz, init_state, t)

a = []
b = []

for i in range (100000):
    if float(format(state[:, 2][i], '0.1f')) == 20:
        a.append(state[:, 0][i])
        b.append(state[:, 1][i])

plt.plot(a, b, 'k,')
plt.title("Poincare section of the Lorenz Attractor")
plt.xlabel("x")
plt.ylabel("y")

plt.show()
```

Figura 33: Secciones de Poincaré para el atractor de Lorenz

```
def Rossler (state, t):
    x, y, z = state
    dx = -y - z
    dy = x + a * y
    dz = b + z * (x - c)
    return [dx, dy, dz]

a = 0.2
b = 0.2
c = 5.7

t = np.linspace(0, 10000, 100000)

d = []
e = []

init_state = [0, 1, 1.65]
state = odeint(Rossler, init_state, t)

for i in range (100000):
    if float(format(state[:, 2][i], '0.1f')) == 0:
        d.append(state[:, 0][i])
        e.append(state[:, 1][i])

plt.plot(d, e, 'b,')
plt.title("Poincare section of the Rossler Attractor")
plt.xlabel("x")
plt.ylabel("y")

plt.show()
```

Figura 34: Secciones de Poincaré para el atractor de Rössler

Como se observa, se agrega un ciclo *for* grande, el cual contiene una condicional en su interior. Si determinada variable es cero, entonces el valor de las variables restantes en ese puntos se guardan en



dos vectores. Lo anterior es debido a que, en el caso más sencillo, se coloca una sección de Poincaré en el valor donde determinada variable es cero, observando la proyección del plano de las otras variables sobre ella. En todos los casos, excepto en uno se pudo poner la condición en la que se iguala la solución a cero. Entonces, al cumplirse la condición y guardar los valores, se está guardando la proyección del espacio fase sobre un plano. La función adicional *format* es usada para redondear los valores cercanos a la condición, es decir, difícilmente se obtendrá que un punto esté exactamente en el valor indicado, por ello, al redondear se toman muchos puntos como parte de la proyección, obteniendo así todas las Figuras 21 y 22.

## 8.6. Fractales

Solamente se tomó este programa de una página de internet, cuyos datos se encuentran en las referencias. La forma de trabajar con el programa es mediante la librería *turtle*. Para la realización del fractal, solamente se define una secuencia muy simple y se agregan otras líneas para determinar en qué momento y posición la figura continúe dibujándose. Para finalizar, se muestra el programa en la Figura 35.

```
import turtle

def koch(a, order): #Función para definir la secuencia a seguir
    if order > 0:
        for t in [60, -120, 60, 0]:
            koch(a/3, order-1) #Para la colocación de triángulos dentro de triángulos.
            turtle.left(t) #Esta línea es para cerrar la figura
    else:
        turtle.forward(a) #Para dar forma

turtle.color("black")
turtle.bgcolor("white")
size = 300
order = 4

turtle.penup() #Para centrar la figura
turtle.backward(size/1.732)
turtle.left(30)
turtle.pendown()

turtle.tracer(2) #Para una ejecución más rápida
turtle.hideturtle() #Para que no se vea la flecha que dibuja la secuencia

turtle.begin_fill()

for i in range(3): #Para que la figura se vea completa
    koch(size, order)
    turtle.right(120)

turtle.end_fill()
turtle.update()
```

Figura 35: Copo de nieve de Koch

El orden define el número de veces que se tiene la subrutina para dibujar la imagen, como se observó en la Figura 23. Los números en los corchetes son los ángulos en los que la línea trazada se desviará, en este caso para la formación de los triángulos. Con las funciones *left* y *forward* se indica a la llamada tortuga en qué dirección dibujar ahora. Se colocan una serie de líneas más: para definir el color de fondo, el color de las líneas, el color interno de la figura, el tamaño, la velocidad del trazo, para que no se vea la tortuga; y para rotar la secuencia, es decir, que la figura se cierre.

Trabajar con esta nueva librería es sencillo, el programa se tomó como ejemplificación, debido a que entender lo que se está haciendo mediante palabras es complicado. Las otras imágenes mencionadas en la sección para ejemplificar lo anterior fueron elaboradas con los programas anteriores.

## 9. Turbulencia

De acuerdo a James Gleick, "tan pronto como la física estándar fue concebida, Dios debió haber tomado todas las moléculas de agua bajo la mesa y las barajeó personalmente".

Generalmente, turbulencia significa desastre. Todos los grandes físicos pensaron acerca de la turbulencia, que es el estado de movimiento de un fluido en el cual ya no es posible describir su dinámica, pues existe una variación drástica tanto en la dinámica de un material sólido en el límite en el que es un fluido como en la energía cuando la cantidad de movimiento del fluido disminuye en una cantidad muy pequeña. (Gleick, 1987, p. 52)

Debido a la complejidad del estudio de la turbulencia, muchos físicos decidieron dejar el tema de lado porque consideraron que no valía la pena invertir tiempo en ello, incluso se dejó como objeto de estudio para los ingenieros, implicando que la dinámica de fluidos ya no sería parte de la física. Por lo anterior, los matemáticos contribuyeron de manera más significativa que los físicos en la explicación del tema. Mientras tanto, los físicos continuarían trabajando con los fluidos de flujo laminar, es decir, los que tienen una dinámica ordenada que puede ser descrita a partir de los principios de Newton.

Cuando se tiene turbulencia hay una sensibilidad muy alta a las pequeñas variaciones en el flujo de los fluidos. Cuando el flujo es laminar, las pequeñas variaciones no afectan en la evolución del sistema, pues se disipan; sin embargo, en un flujo turbulento cualquier pequeña perturbación puede incrementar de manera drástica. Cuando se llega a un estado turbulento el sistema es inestable y altamente disipativo lo que genera que el movimiento se vuelva aleatorio. (Gleick, 1987, p. 52-53)

### 9.1. Ecuación de Navier Stokes

La ecuación de Claude-Louis Navier y George Gabriel Stokes es uno de los siete problemas del milenio, por cuya solución se ofrece un millón de dólares. Es usada para modelar el flujo de cualquier fluido Newtoniano incompresible (viscosidad invariante respecto al tiempo), y es obtenida de las ecuaciones de conservación y continuidad aplicadas a propiedades de fluidos, pues es una forma del segundo principio de Newton. [11]

A pesar de su amplio rango de aplicaciones, no se ha podido determinar una solución analítica general para la ecuación, por lo cual es común recurrir a un análisis numérico para trabajar con ella, como es común en muchos sistemas caóticos.

Partiendo del segundo principio de Newton, se comienza por considerar las fuerzas en una muestra infinitesimal de fluido que, por unidad de volumen, se escriben

$$-\nabla p = \rho \frac{D\vec{u}}{Dt} = \rho \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \rho \vec{u} \cdot \nabla \vec{u}$$

donde  $p$  es la presión del fluido,  $\vec{u}$  su velocidad y  $\rho$  su densidad. [12]

Incluyendo el esfuerzo de cizallamiento y la viscosidad del fluido, la expresión queda de la siguiente manera:

$$\mu \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial z^2} - \nabla p = \rho \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \rho \vec{u} \cdot \nabla \vec{u}$$

Del lado izquierdo se pueden expresar las derivadas parciales como el laplaciano de  $\vec{u}$  por un factor común  $\mu$  [16]. Finalmente, agregando un término para describir las fuerzas externas que repercuten en el movimiento del fluido, se llega a la siguiente expresión

$$\rho \left( \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \vec{u} \nabla \vec{u} \right) = -\nabla p + \mu \nabla^2 \vec{u} + \rho \vec{a}_g \quad (21)$$

que es la llamada ecuación de Navier-Stokes.

La ecuación trata con las partes infinitesimales de un fluido, por lo que se divide el segundo principio de Newton entre el volumen, para tener que la fuerza por unidad de volumen es igual a la densidad por la aceleración. Habiendo dividido toda la ecuación por el volumen, se tiene la densidad en lugar de la masa, medida en  $[kg/m^3]$ .

$\rho$  es la densidad del fluido, el cual está multiplicado por la aceleración, que no es más que la derivada del vector  $\vec{u}$  con respecto al tiempo más el mismo vector multiplicado por su gradiente. La aceleración se escribe como la derivada material de la velocidad. Mientras que una derivada normal se usa para describir la razón de cambio de una propiedad en un punto, la derivada material se usa para describir el cambio de alguna propiedad de una partícula en un campo de velocidades. Su unidad es el  $[m/s^2]$ .

Lo anterior es igual a una serie de términos. Se usa el gradiente de presión para describir en qué dirección y qué tan rápido cambia la presión alrededor de un cierto punto en el fluido, expresado en unidades de presión por longitud:  $[Pa/m]$ . Para representar el estrés se usa el laplaciano del vector velocidad multiplicado por la viscosidad  $[Pa \cdot s]$  del fluido. Esto resulta a partir de la divergencia del tensor de estrés  $\sigma$ . En este término están las fuerzas internas de un fluido, en el que sus partes infinitesimales colisionan constantemente entre ellas causando el estrés, medido en  $[Pa]$ . Las fuerzas externas o volumétricas que actúan sobre cada partícula del fluido están descritas en el tercer término. Esto usualmente incluye solamente los efectos gravitatorios sobre el fluido. La unidad de fuerza es el Newton  $[N]$ . [17]

Como se observa, claramente se tiene una ecuación no lineal. Debido a la complejidad de la ecuación de Navier-Stokes, las soluciones analíticas se consideran prácticamente imposibles. Por esta razón, la manera más común de usarlas es a través de la simulación y la aproximación, por medio de diversos métodos y algoritmos.

El movimiento turbulento es completamente aperiódico, no puede ser visto como un conjunto de movimientos periódicos. Como se mencionó, cuando se tiene una transición hacia un flujo turbulento el movimiento ya no puede ser predecido y dos partículas dentro de él pueden hallarse en estados de movimiento muy diferentes. (Resnick, Halliday & Krane, 2001, p. 456)

Finalmente, es adecuado cerrar la sección con una frase atribuida a Werner Heisenberg:

*Cuando conozca a Dios le preguntaré dos cosas: el por qué de la relatividad y el por qué de la turbulencia. Sólo me responderá la primera.*

## 10. Conclusiones

El desarrollo de presente proyecto ha sido enriquecedor, pues no sólo se han mejorado las habilidades de investigación, sino que también se han adquiridos nuevos conocimientos para programar,

buscar información y se ha aprendido respecto a este interesante tema, el caos, que hasta la fecha no había tenido énfasis en mi vida escolar.

El mapeo es muy útil para determinar en qué intervalos o rangos una función deja de ser estable y comienza a dar resultados que podrían considerarse aleatorios. La visualización del mapeo mediante un diagrama de bifurcación es mucho más útil, pues la información que se obtiene de él es más simple de identificar y comprender. El valor de  $\alpha$  para este caso sólo se usa entre 0 y 4, pues se comprobó experimentalmente que cuando se usa un valor mpas grande existe un sobreflujo de datos, entonces, para la función logística sólo se tiene esa restricción. Algo interesante, no importa el valor de la condición inicial, el diagrama de bifurcación tendrá la misma forma en todos los casos.

Los exponentes de Lyapunov son útiles para determinar si con una función se tendrá un caso caótico, este método complementario al diagrama de bifurcación es muy simple identificar los intervalos en los que hay casos caóticos, es decir, se pierde la estabilidad del sistema y una mínima modificación en las condiciones iniciales cambia todos los resultados obtenidos. Sólo es necesario un número de Lyapunov positivo para que exista el caos.

Las trayectorias en los atractores extraños en 3 dimensiones nunca se intersectan. Una propiedad de los sistemas caóticos es que se presentan fractales en sus espacio fase, lo que pudo ser observado en los diferentes ejemplos. Para que se un atractor, no importa cuántas iteraciones se realicen, deben existir puntos o secciones del espacio fase hacia donde las trayectorias siempre convergan. La función *odeint* también puede ser usada para resolver sistemas de ecuaciones diferenciales de 3 o más variables, se propone investigar la forma en que se pueden resolver sistemas de ecuaciones diferenciales en las que se incluyan segundas derivadas, pues sería útil para aproximar soluciones de otros sistemas caóticos, como el péndulo doble. En los atractores en 3 dimensiones, no importa desde qué plano se observen, los atractores siguen siendo evidentes en cada caso.

Las secciones de Poincaré son intersecciones de planos en el espacio fase para observar la proyección de éstos, son útiles cuando se tienen espacio fase más complicados. Es posible colocar planos en cualquier orientación, pero por simplicidad sólo se programaron secciones que fueran paralelas a alguno de los ejes, pues la rotación de estos planos implica la elaboración de programas más elaborados. Si se tienen curvas simples en las secciones de Poincaré es posible que se tengan soluciones analíticas, de lo contrario, se trata de sistemas más complicados.

Existen fractales en toda la naturaleza, y los espacio fase de los sistemas caóticos también tienen naturaleza fractal. La librería *turtle* es útil para dibujar fractales, pues se puede programar para que dibuje determinadas secuencias en determinado sentido. Se puede determinar la dimensión fractal, el cual es el número de coordenadas que se requiere para describir a un punto en un sistema, para sistemas caóticos, las dimensiones no son números enteros.

Es importante complementar lo que se lee y se aprende con la práctica directa, en este caso, mediante la programación de los diferentes casos. Programar un tema implica entender qué es lo que se quiere lograr y con ello se puede pensar en el cómo se llegará a ello. Fue muy agradable observar cuando se obtenían los diferentes diagramas y observar que tenían sentido, por ejemplo, que la sección donde existe caos en el diagrama de bifurcación coincide con los valores del exponente de Lyapunov positivos. Obtener los diferentes atractores, comparar sus diferencias, jugar con los valores, las funciones, etc. Es una manera de reafirmar que se está entendiendo un tema y una buena forma

de motivar a investigar más.

De ecuaciones de movimiento muy simples se pueden obtener dinámicas muy complicadas. Es muy evidente que el tener ecuaciones diferenciales de órdenes mayores a uno es una implicación directa del caos. Los péndulos son los ejemplos clásicos para introducir a los sistemas caóticos, cuando no se tienen los osciladores simples no es muy complicado obtener la dinámica de estos nuevos sistemas, aunque para algunos de ellos es necesario conocer métodos más efectivos, como lo son el Lagrangiano y el Hamiltoniano.

El caos está presente en la naturaleza, a la fecha uno de los temas más complicados a estudiar es el de la turbulencia. No se tienen sistemas perfectos, no existen sistemas inerciales ni otras implicaciones similares cuando se resuelven problemas en la física. Este proyecto ha sido de utilidad para marcar un límite entre la física de Newton, que es la que siempre se enseña, y la física un poco más complicada. El caos es uno de los temas con los que uno se puede dar cuenta de la complejidad del estudio de cualquier sistema físico en el mundo real. Se tienen métodos analíticos más apropiados para la descripción de diferentes fenómenos físicos, pero la naturaleza de los sistemas no siempre es simple. Se pueden obtener ecuaciones de movimiento extremadamente complicadas, las cuales, de una forma muy curiosa, es posible resolver mediante algo que se aprendió muchos años atrás, graficar. Cuando no quede otra cosa por hacer en un problema, siempre se puede graficar. De esa manera, usando algún método numérico o programas computacionales más específicos, es posible aproximar resultados con determinada precisión, lo que es una herramienta útil debido al tiempo que toma la resolución de un sistema en la computadora y porque el saber programar implica un correcto entendimiento del sistema, con lo que se podrán interpretar los resultados que se obtengan, tal como lo hizo Lorenz con su máquina.

No existen sistemas físicos perfectos, la realidad es mucho más complicada.

*Physicists like to think that all you have to do is say, these are the conditions, now what happens next?* **-Richard Feynman**

## 11. Bibliografía

- [1] Félix, Julián. (2000). Notas para una introducción a la Teoría Especial de la Relatividad. 1st ed. El Cid Editor, pp. 4-5.
- [2] Goldstein, H., Poole, C. and Safko, J. (2001). Classical Mechanics. 3rd ed. United States: Adisson Wesley.
- [3] Resnick, R., Halliday, D., Krane, K. (2001). Física (3rd ed., Vol.1). México: Compañía editorial continental.
- [4] Gleick, J. (1987). Chaos: Making a new science. 1st ed. United States: Penguin Books.
- [5] Thorton, S. and Marion, J. (2004). 5th ed. United States: Thomson.
- [6] Lorenz, E. (1962). Deterministic Nonperiodic Flow. Massachussets Institute of Technology, pp. 135 - 136.

- [7] Rössler, O. (1976). An Equation for Continuous Chaos.
- [8] (2008) The Duffing Oscillator. In: Chaos. Springer, Berlin, Heidelberg
- [9] Tarnopolski M. (2013). On the Fractal Dimension of the Duffing Attractor. Jagiellonian University, Astronomical Observatory, Kraków, Poland, pp. 1-2.
- [10] Jeff. Revision 7fe15ee5. Obtenido de [https://python-with-science.readthedocs.io/en/latest/koch\\_fractal/](https://python-with-science.readthedocs.io/en/latest/koch_fractal/)  
© Copyright 2016
- [11] Tartar, L. (2004). An Introduction to Navier Stokes Equation and Oceanography (4 ed., Vol. 1, pp. 31-43). New York, New York: Springer Berlin Heidelberg
- [12] Córdoba, D. Las ecuaciones de Navier Stokes I. Obtenido de [http://garf.ub.es/milenio/img/presentacion\\_ESln9yD0BVgqAxo2k0xY](http://garf.ub.es/milenio/img/presentacion_ESln9yD0BVgqAxo2k0xY)
- [13] James C, Middleton-Spencer H (2018) <http://chalkdustmagazine.com/features/the-magnetic-pendulum/>
- [14] The Magnetic Pendulum, demonstrating the butterfly effect with a magnetic pendulum based on "Experimente zum Chaos", Copyright © 2018 Ingo Berg All rights reserved. Obtenido de [http://beltoforion.de/article.php?a=magnetic\\_pendulum](http://beltoforion.de/article.php?a=magnetic_pendulum)
- [15] Obtenido de <https://www.finchrobot.com/teaching/finch-fractals>. Copyright ©2010-2017 Bird-Brain Technologies, LLC. All rights reserved.
- [16] Gibiansky, A. (2011, 05). Fluid Dynamics: The Navier-Stokes Equations. Obtenido 05, 2018, de <http://andrew.gibiansky.com/blog/physics/fluid-dynamics-the-navier-stokes-equations>
- [17] Foias, C. (2004). Navier Stokes Equation and Turbulence (2 ed., Vol. 1, pp. 1-5). Cambridge, United Kingdom: Cambridge University Press.
- [18] Hunter, Dale, Firing, Droettboom (matplotlib example code: lorenz\_attractor.py, 2017
- [19] Strogatz, S. (1994). Nonlinear Dynamics and Chaos. 2nd ed. United States: Addison-Wesley.
- [20] Kibble, T., Berkshire, F. (2004). Classical mechanics. 5th ed. London: Imperial College Press.