Omar Alejandro Lezama Gallegos

Tarea 3

1° Deduce paso a paso las ecuaciones de Euler-Lagrange para un Lagrangiano que dependa de la aceleración además de la velocidad y la posición, es decir,

$$L = L(\ddot{q}_i, \dot{q}_i, q_i, t)$$

Del principio de la mínima acción:

$$\delta S[x^A] = \delta \int_t L(\ddot{q}_i, \dot{q}_i, q, t)\, dt$$

$$= \int_t \delta L(\ddot{q}_i, \dot{q}_i, q_i, t)\, dt = \int_t \left[\frac{\partial L}{\partial \ddot{x}^A}(\delta \ddot{x}^A) + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^A}(\delta x^A) + \frac{\partial L}{\partial x^A}(\delta x^A) \right] dt$$

$$= \int_t \left[\underbrace{\frac{\partial L}{\partial \ddot{x}^A}}_{u} \underbrace{\left(\frac{d}{dt}\delta \dot{x}^A\right)}_{v'} + \underbrace{\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^A}}_{s} \underbrace{\left(\frac{d}{dt}\delta x^A\right)}_{t'} + \frac{\partial L}{\partial x^A}(\delta x^A) \right] dt = 0$$

$$u = \frac{\partial L}{\partial \ddot{x}^A} \qquad v' = \frac{d}{dt}\delta \dot{x}^A \qquad s = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^A} \qquad t' = \frac{d}{dt}\delta x^A$$

$$u' = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \ddot{x}^A}\right) \qquad v = \delta \dot{x}^A \qquad s' = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^A}\right) \qquad t = \delta x^A$$

Se realiza la integración por partes:

$$= \int_t \left[-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \ddot{x}^A}\right)(\delta \dot{x}^A) - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^A}\right)(\delta x^A) + \frac{\partial L}{\partial x^A}(\delta x^A) \right] dt + \cancel{\frac{\partial L}{\partial \ddot{x}^A}\delta \dot{x}^A}\Big|_t^{\to 0}$$

$$+ \cancel{\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^A}\delta x^A}\Big|_t^{\to 0} = 0,$$ pues la integral en el camino es independiente de t.

Ahora se elige

$$p = -\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \ddot{x}^A} \qquad q' = \frac{d}{dt}\delta x^A$$

$$p' = -\frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{\partial L}{\partial \ddot{x}^A}\right) \qquad q = \delta x^A$$

Se realiza la integración por partes una vez más:

$$\delta S[x^A] = \int_t \left[\frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{\partial L}{\partial \ddot{x}^A}\right)(\delta x^A) - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^A}\right)(\delta x^A) + \frac{\partial L}{\partial x^A}(\delta x^A) \right] dt$$

$$- \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \ddot{x}^A}\cancel{(\delta x^A)}\Big|_t^{\to 0} = 0$$ (La integral en el camino es independiente de t.

Entonces, para que la igualdad se cumpla, los términos entre los corchetes deben ser cero

Omar Alejandro Lezama Gallegos

Tarea 3

$$\left[\frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{\partial L}{\partial \ddot{x}^\lambda}\right) - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\lambda}\right) + \frac{\partial L}{\partial x^\lambda} \right] \delta x^\lambda = 0$$

Finalmente:

$$\boxed{\frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{\partial L}{\partial \ddot{x}^\lambda}\right) - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\lambda}\right) + \frac{\partial L}{\partial x^\lambda} = 0}$$

Omar Alejandro Lezama Gallegos

Tarea 3

2. Encuentra las ecuaciones de Euler-Lagrange del modelo sigma

$$L(\dot{q}, q, t) = \frac{1}{2} g_{ab}(q^c)\, \dot{q}^a \dot{q}^b$$

donde $g_{ab}(q^c)$ es una matriz simétrica e invertible, que es función de las coordenadas. Explica detalladamente cada paso.

Para encontrar las ecuaciones de Euler-Lagrange, se obtendrán primero las derivadas parciales respecto a las coordenadas generalizadas (q^r y $\dot{q}^r$)

$$\frac{\partial L}{\partial q^r} = \frac{1}{2} g_{ab}(q^c) \cancelto{0}{\frac{\partial}{\partial q^r}(\dot{q}^a \dot{q}^b)} + \frac{1}{2} \dot{q}^a \dot{q}^b \left(\frac{\partial}{\partial q^r} g_{ab}(q^c) \right)$$

porque se derivan parcialmente las derivadas de las coordenadas respecto a las coordenadas.

Se tiene entonces:

$$\frac{\partial L}{\partial q^r} = \frac{1}{2} \dot{q}^a \dot{q}^b \left(\frac{\partial}{\partial q^r} g_{ab}(q^c) \right)$$

Ahora,

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^r} = \frac{1}{2} \cancelto{0}{\frac{\partial}{\partial \dot{q}^r} \left[g_{ab}(q^c) \right]} \dot{q}^a \dot{q}^b + \frac{1}{2} g_{ab}(q^c) \left[\frac{\partial}{\partial \dot{q}^r} \dot{q}^a \right] \dot{q}^b$$

$$+ \frac{1}{2} g_{ab}(q^c)\, \dot{q}^a \left[\frac{\partial}{\partial \dot{q}^r} \dot{q}^b \right]$$

Por que se derivan las derivadas de las coordenadas respecto a las derivadas de las coordenadas se tiene que

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^r} = \frac{1}{2} g_{ab}(q^c) \left[\frac{\partial}{\partial \dot{q}^r} \dot{q}^a \right] \dot{q}^b + \frac{1}{2} g_{ab}(q^c)\, \dot{q}^a \left[\frac{\partial}{\partial \dot{q}^r} \dot{q}^b \right]$$

En el primer término de la expresión anterior, se tiene que la derivada parcial será uno siempre que a valga r, por lo que en ese término se sustituyen las a's por r. Algo equivalente sucede con el segundo término, en él se sustituyen las b's por símbolos r.

Omar Alejandro Lezama Gallegos

Tarea 3

Entonces, las derivadas anteriores quedan expresadas de la siguiente forma:

$$\frac{\partial L}{\partial q^r} = \frac{1}{2}\dot{q}^a\dot{q}^b\left(\frac{\partial}{\partial q^r} g_{ab}\right) \quad (A)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^r} = \frac{1}{2} g_{rb}\dot{q}^b + \frac{1}{2} g_{ar}\dot{q}^a$$

Como $g_{ab} = g_{ba}$, matriz simétrica con dependencia en las coordenadas,

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^r} = g_{ar}\dot{q}^a$$

Para obtener las ecuaciones de Euler-Lagrange es necesario derivar la relación anterior respecto al tiempo.

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^r}\right) = \frac{d\dot{q}^a}{dt} g_{ar} + \dot{q}^a\frac{d}{dt} g_{ar} = \ddot{q}^a g_{ar} + \dot{q}^a\frac{d}{dt} g_{ar} \quad (1)$$

El segundo término se puede expresar de siguiente manera:

$$\dot{q}^a\frac{d}{dt} g_{ar} = \dot{q}^a\left[\frac{\partial q^b}{\partial q^b}\frac{d}{dt} g_{ar}\right] = \dot{q}^a\left[\frac{dq^b}{dt}\frac{\partial g_{ar}}{\partial q^b}\right] \quad (2)$$

$$= \dot{q}^a\dot{q}^b\left[\frac{\partial g_{ar}}{\partial q^b}\right]$$

Usando las propiedades de la derivada covariante se realiza el siguiente desarrollo:

$$\dot{q}^a\dot{q}^b\left[\frac{\partial g_{ar}}{\partial q^b}\right]$$

Como se tienen índices repetidos, se pueden renombrar los índices para simplificar la expresión y obtener el símbolo de Christoffel. Entonces, se cambia a por b y b por a. (3)

$$\underbrace{\dot{q}^a\dot{q}^b}_{\text{Queda igual}}\left[\frac{\partial g_{br}}{\partial q^a}\right]$$

Omar Alejandro Lezama Gallegos

Tarea 3

El resultado anterior se usará para la obtención de los símbolos de Christoffel para este caso.

Retomando la expresión anterior ②

$$\dot{q}^a \frac{d}{dt} g_{a\gamma} = \dot{q}^a \dot{q}^b \left[\frac{\partial g_{a\gamma}}{\partial q^b} \right] = \dot{q}^a \dot{q}^b \left[\frac{1}{2} \frac{\partial g_{a\gamma}}{\partial q^b} + \frac{1}{2} \frac{\partial g_{a\gamma}}{\partial q^b} \right] \quad ⑤$$

El segundo término se sustituye por la expresión obtenida de las propiedades de los tensores (Ver ③)

$$\dot{q}^a \dot{q}^b \left[\frac{1}{2} \frac{\partial g_{a\gamma}}{\partial q^b} + \frac{1}{2} \frac{\partial g_{b\gamma}}{\partial q^a} \right] = \dot{q}^a \dot{q}^b \left[\frac{1}{2} \frac{g_{a\gamma}}{\partial q^b} + \frac{1}{2} \frac{g_{a\gamma}}{\partial q^b} \right]$$

porque son índices mudos.

Se sustituye ⑤ en ①

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\gamma} \right] = \ddot{q}^a g_{a\gamma} + \dot{q}^a \dot{q}^b \left[\frac{1}{2} \frac{g_{a\gamma}}{\partial q^b} + \frac{1}{2} \frac{g_{b\gamma}}{\partial q^a} \right] \quad ⑥$$

Se usan las expresiones Ⓐ y ⑥ para obtener las ecuaciones de Euler-Lagrange.

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^a} \right) - \frac{\partial L}{\partial q^\gamma} = \ddot{q}^a g_{a\gamma} + \dot{q}^a \dot{q}^b \left[\frac{1}{2} \frac{\partial g_{a\gamma}}{\partial q^b} + \frac{1}{2} \frac{\partial g_{b\gamma}}{\partial q^a} \right] - \frac{1}{2} \dot{q}^a \dot{q}^b \left(\frac{\partial}{\partial q^\gamma} g_{ab} \right)$$

$$= \ddot{q}^a g_{a\gamma} + \dot{q}^a \dot{q}^b \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{a\gamma}}{\partial q^b} + \frac{\partial g_{b\gamma}}{\partial q^a} - \frac{\partial g_{ab}}{\partial q^\gamma} \right) \right] = 0$$

El segundo término se asemeja al símbolo de Christoffel de primer orden, pero falta agregar un término $g^{\gamma\mu}$, el cual se puede anexar al multiplicar la expresión por esa matriz.

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\gamma} \right) - \frac{\partial L}{\partial q^\gamma} = \ddot{q}^a g_{a\gamma} g^{\gamma\mu} + \dot{q}^a \dot{q}^b \left[\frac{1}{2} g^{\gamma\mu} \left(\frac{\partial g_{a\gamma}}{\partial q^b} + \frac{\partial g_{b\gamma}}{\partial q^a} - \frac{\partial g_{ab}}{\partial q^\gamma} \right) \right] = 0$$

Donde el segundo término es el símbolo de Christoffel

$$\Gamma^\mu_{ab}$$

Omar Alejandro Lezama Gallegos

Tarea 3

Y el producto de las matrices

$$g_{a\gamma} g^{\gamma\mu} = g_a g^\mu = \vec{e}_a \vec{e}^\mu = \delta_a^\mu$$ Los índices se contraen.

Entonces, finalmente

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\gamma}\right) - \frac{\partial L}{\partial q^\gamma} = \ddot{q}^a \delta_a^\mu + \dot{q}^a \dot{q}^b \Gamma_{ab}^{\mu} = 0$$ O bien,

$$\boxed{\ddot{q}^\mu + \dot{q}^a \dot{q}^b \Gamma_{ab}^{\mu} = 0}$$

Equivalente al mostrado en clase.

- Como complemento al procedimiento anterior, la sustitución de la delta de Kronecker se efectúa de la siguiente manera.

$\vec{e}_a \cdot \vec{e}^\mu = g_a^\mu$, que sólo es 1 cuando $\mu = a$, lo que da como resultado la delta de Kronecker δ_a^μ.

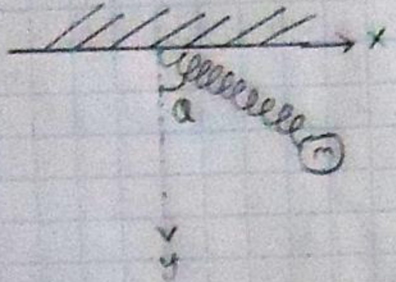
Finalmente, al multiplicar $\ddot{q}^a \delta_a^\mu = \ddot{q}^\mu$, que es el resultado de multiplicar $\ddot{q}^\mu \delta$, donde $\delta = 1$.

Omar Alejandro Lezama Gallegos

Tarea 3

3.- A un péndulo simple se le reemplaza el cable por un resorte de longitud en reposo l y constante de resorte K.

a) Construye el Lagrangiano del sistema y deduce las ecuaciones de Euler-Lagrange.



$$K = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2)$$

$$x = (l+d) \sin\theta$$
$$y = (l+d)\cos\theta$$

d como función del tiempo, es la longitud que se estira el resorte.

$$\dot{x} = \dot{d}\sin\theta + (l+d)\cos\theta \cdot \dot{\theta}$$
$$\dot{y} = \dot{d}\cos\theta - (l+d)\sin\theta \cdot \dot{\theta}$$

Entonces, $K = \frac{1}{2} m \left(\dot{d}^2 + (l+d)^2 \cdot \dot{\theta}^2\right)$

$V = mgh + \frac{1}{2} K d^2$, que es la energía potencial del péndulo más la energía potencial del resorte (en la distancia que se estira).

$h = -mg(l+d)\cos\theta$, por la forma en que se eligieron los ejes.

$$V = -mg(l+d)\cos\theta + \frac{1}{2} K d^2$$

<u>Ecuación de Euler-Lagrange</u>

Primero, con el Lagrangiano $L = K - V = \frac{1}{2} m\left(\dot{d}^2 + (l+d)^2\dot{\theta}^2\right) + mg(l+d)\cos\theta - \frac{1}{2} K d^2$.

Para θ:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = m(l+d)^2\dot{\theta} \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) = m(l+d)^2\ddot{\theta} + 2m(l+d)\dot{\theta}\dot{d}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = -mg(l+d)\sin\theta$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = m(l+d)^2\ddot{\theta} + 2m(l+d)\dot{\theta}\dot{d} + mg(l+d)\sin\theta = 0$$

Omar Alejandro Lezama Gallegos

Tarea 3

O bien,

$$\ddot{\varphi} + \frac{2\dot{\varphi}\dot{d}}{l+d} + \frac{g\sin\varphi}{l+d} = 0$$ Ecuación de movimiento 1.

Para d:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{d}} = m\dot{d} \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{d}}\right) = m\ddot{d}$$

$$\frac{\partial L}{\partial d} = m(l+d)\dot{\varphi}^2 + mg\cos\varphi - Kd$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{d}}\right) - \frac{\partial L}{\partial d} = m\ddot{d} - m(l+d)\dot{\varphi}^2 - mg\cos\varphi + Kd = 0$$

O bien,

$$\ddot{d} - (l+d)\dot{\varphi}^2 - g\cos\varphi + \frac{K}{m}d = 0$$ Ecuación de movimiento 2.

b) Encuentra los puntos de equilibrio y describe su estabilidad.

Se puede derivar la energía potencial en cada caso, o bien, dado que se buscan los puntos de equilibrio, los valores de las derivadas serán iguales a cero.

De la primera ecuación de movimiento:

$$\frac{g\sin\varphi}{l+d} = 0 \quad , \quad l+d \neq 0 \quad , \quad g \neq 0, \text{ entonces,}$$

$\sin\varphi = 0$ en 2 puntos.

$$\varphi_1 = 0$$
$$\varphi_2 = \pi$$

Ahora, se usan los valores anteriores en la segunda ecuación de movimiento:

$$d = \frac{mg\cos\varphi}{K}$$

, para φ_1, $d_1 = \frac{mg}{K}$

, para φ_2, $d_2 = -\frac{mg}{K}$

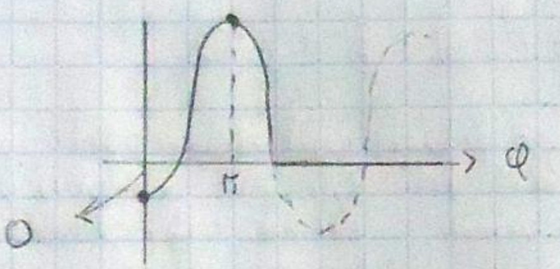
Omar Alejandro Lezama Gallegos

Tarea 3.

Se analiza la función de la energía potencial.

$$V = \frac{1}{2} K d^2 - mg(l+d)\cos\theta$$

Se tiene una función sinusoidal, los valores que no multiplican a $\cos\theta$ solamente modifican la posición de la gráfica en el eje del potencial, mientras que los valores que multiplican a $\cos\theta$ solamente modifican la amplitud de la gráfica. Entonces, la gráfica tiene forma sinusoidal, más preciso, forma de un coseno invertido.



Entonces, para $\theta = 0$ y $d = \frac{mg}{K}$ se tiene un punto de equilibrio estable.

Mientras que para $\theta = \pi$ y $d = -\frac{mg}{K}$ se tiene un punto de equilibrio inestable.

Pero como se considera la longitud l del resorte, la obtención de los puntos de equilibrio para d queda como

$$d_e = l \pm \frac{mg}{K}$$

Omar Alejandro Lezama Gallegos

Tarea 3

c) Haz una pequeña expansión alrededor de los puntos de equilibrio y resuelve el sistema.

- Alrededor de $\theta = 0$, es decir, $\theta << 1$, que es el punto de equilibrio estable:

$$\sin\theta \sim \theta \qquad \cos\theta \sim 1 - \frac{\theta^2}{2}$$

$$\ddot{\theta} + \frac{2\dot{\theta}\dot{d}}{l+d} + g\theta \cdot \frac{1}{l+d} = 0$$

y

$$\ddot{d} - (l+d)\dot{\theta}^2 - g\left(1 - \frac{\theta^2}{2}\right) + \frac{k}{m}d = 0$$

Ahora, considerando oscilaciones muy pequeñas alrededor del punto de equilibrio, se tendrá el movimiento del oscilador armónico simple tanto para el péndulo como para el resorte, entonces se tienen ecuaciones de movimiento de primer orden para describir al sistema.

Por lo anterior, los términos de orden superior a 1 en las ecuaciones de movimiento tienen un valor nulo, para este caso con oscilaciones pequeñas. Quedando:

$$\ddot{\theta} + g\theta \cdot \frac{1}{l+d} = 0 \qquad \text{O bien,} \qquad (l+d)\ddot{\theta} + g\theta = 0$$

Pero alrededor del punto de equilibrio $\ddot{\theta}$ tiene un valor muy pequeño, al igual que d, por lo que el producto de ambos puede despreciarse en este caso.

De esta forma, la primera ecuación de movimiento se expresa:

$$l\ddot{\theta} + g\theta = 0$$

o

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\theta = 0$$

Al tomar en cuenta las consideraciones anteriores, la segunda ecuación de movimiento tiene la siguiente forma

$$\ddot{d} - g + \frac{k}{m}d$$, pues en la expansión del $\cos\theta$ para ángulos pequeños sólo se tomó en cuenta la parte de orden igual a 1, o sea, el 1.

Omar Alejandro Lezama Gallegos

Tarea 3

Se resuelve la ecuación diferencial para φ. En este caso, la solución homogénea será la solución general.

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{l}\varphi = 0$$

Se tiene que la segunda derivada de una función menos la función multiplicada por cierta amplitud es igual a cero, entonces, la solución propuesta queda en términos de senos y cosenos.

$$\varphi = A\cos(w_1 t) + B\sin(w_1 t)$$

$$\dot{\varphi} = -Aw_1\sin(w_1 t) + Bw_1\cos(w_1 t)$$

$$\ddot{\varphi} = -Aw_1^2\cos(w_1 t) - Bw_1^2\sin(w_1 t)$$

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{l}\varphi = -Aw_1^2\cos(w_1 t) - Bw_1^2\sin(w_1 t) + \frac{g}{l}A\cos(w_1 t) + \frac{g}{l}B\sin(w_1 t) = 0$$

$$A\cos(w_1 t)\left[\frac{g}{l} - w_1^2\right] + B\sin(w_1 t)\left[\frac{g}{l} - w_1^2\right] = 0$$

Para que la igualdad se cumpla, $\frac{g}{l} - w_1^2 = 0$

$$w_1 = \sqrt{\frac{g}{l}}$$

La solución de la primera ecuación de movimiento es

$$\varphi(t) = A\cos\left(\sqrt{\frac{g}{l}}\,t\right) + B\sin\left(\sqrt{\frac{g}{l}}\,t\right)$$

Ahora se resuelve la ecuación diferencial para d. En este caso, se tiene que la solución general es igual a la suma de la solución homogénea y la particular.

$$\ddot{d} + \frac{k}{m}d = g$$

De manera similar al caso anterior, debido a la forma de la ecuación diferencial se tendrá una solución en términos de senos y cosenos, por lo que la solución propuesta es

$$d_h = C\cos(w_2 t) + D\sin(w_2 t)$$

$$\dot{d}_h = -w_2 C\sin(w_2 t) + Dw_2\cos(w_2 t)$$

Omar Alejandro Lezama Gallegos

Tarea 3

$$\ddot{d}_h = -w_2^2 C\cos(w_2 t) - w_2^2 D\sin(w_2 t)$$

$$\ddot{d}_h + \frac{k}{m} d_h = -w_2^2 C\cos(w_2 t) - w_2^2 D\sin(w_2 t) + \frac{k}{m} C\cos(w_2 t) + \frac{k}{m} D\sin(w_2 t)$$

$$C\cos(w_2 t)\left[\frac{k}{m} - w_2^2\right] + D\sin(w_2 t)\left[\frac{k}{m} - w_2^2\right] = 0$$

La igualdad anterior se satisface si

$$\frac{k}{m} - w_2^2 = 0 \qquad \text{O bien,} \qquad w_2 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

La solución homogénea de esta ecuación es

$$d_h = C\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\, t\right) + D\sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\, t\right)$$

Para la solución particular, se tiene la ecuación diferencial igualada a un valor constante, entonces se propone una solución constante

$$d_p = C_1$$

$$\dot{d}_p = 0$$

$$\ddot{d}_p = 0$$

Con lo que

$$\ddot{d}_p + \frac{k}{m} d_p = 0 + \frac{k}{m} C_1 = g \qquad C_1 = \frac{gm}{k}$$

$$d_p = \frac{gm}{k}$$

$$d_{general} = d_p + d_h$$

$$d_g = C\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\, t\right) + D\sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\, t\right) + \frac{gm}{k}$$

Omar Alejandro Lezama Gallegos

Tarea 3

4.- Considera el siguiente Lagrangiano dependiente del tiempo para un grado de libertad (q)

$$L = e^{bt}\left(\frac{1}{2}m\dot{q}^2 - \frac{1}{2}k^2q^2\right)$$, con k, b y m constantes positivas.

a) Encuentra las ecuaciones de Euler - Lagrange. ¿Se parece a algún sistema físico visto en clase?

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = e^{bt}(m\dot{q}) \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) = be^{bt}m\dot{q} + e^{bt}m\ddot{q}$$

$$\frac{\partial L}{\partial q} = -e^{bt}k^2q$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial L}{\partial q} = e^{bt}\left(m\ddot{q} + bm\dot{q} + k^2q\right) = 0 \qquad e^{bt} \neq 0$$

Entonces,

$$\ddot{q} + b\dot{q} + \frac{k^2}{m}q = 0$$

- Se asemeja a la ecuación del oscilador armónico amortiguado.

b) Realiza el cambio de variable $Q = e^{\frac{bt}{2}}q$, y reescribe el Lagrangiano como función de Q y dQ/dt. Encuentra la simetría continua de este Lagrangiano y deduce la cantidad conservada asociada a ella usando el Teorema de Nöether. Re-escribe esta cantidad conservada en términos de la variable original q y discute el resultado.

$$q = Qe^{-\frac{bt}{2}}$$
$$\dot{q} = \dot{Q}e^{-\frac{bt}{2}} - \frac{b}{2}Qe^{-\frac{bt}{2}}$$

$$L = e^{bt}\left[\frac{1}{2}m\left[\dot{Q}e^{-\frac{bt}{2}} - \frac{b}{2}Qe^{-\frac{bt}{2}}\right]^2 - \frac{1}{2}k^2Q^2e^{-bt}\right]$$

$$L = e^{bt}\left[\frac{1}{2}m\left(\dot{Q}^2e^{-bt} - \dot{Q}Qbe^{-bt} + \frac{b^2}{4}Q^2e^{-bt}\right) - \frac{1}{2}k^2Q^2e^{-bt}\right]$$

Omar Alejandro Lezama Gallegos

Tarea 3

$$L = \frac{1}{2}m\dot{Q}^2 - \frac{1}{2}mb\dot{Q}Q + \frac{1}{8}mb^2Q^2 - \frac{1}{2}k^2Q^2$$

Dado que el tiempo no aparece explícitamente en la relación, por el teorema de Nöether, "la energía se conserva."
Asumiendo que sí hay conservación de energía, se obtiene $\mathcal{H}$.
Entonces, se expresa $\mathcal{H}$ como la energía total y la relación

$$\mathcal{H} = \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{Q}_i}\dot{Q}_i - L(Q_i, \dot{Q}_i)$$ se conserva. Pero sólo se tiene una coordenada Q, entonces:

$$\mathcal{H} = \frac{\partial L}{\partial \dot{Q}}\dot{Q} - L(Q, \dot{Q})$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{Q}} = m\dot{Q} - \frac{1}{2}mbQ$$

$$\dot{Q}\left[\frac{\partial L}{\partial \dot{Q}}\right] = m\dot{Q}^2 - \frac{1}{2}mbQ\dot{Q}$$

Ahora,

$$\mathcal{H} = m\dot{Q}^2 - \cancel{\frac{1}{2}mbQ\dot{Q}} - \frac{1}{2}m\dot{Q}^2 + \cancel{\frac{1}{2}mb\dot{Q}Q} - \frac{1}{8}mb^2Q^2 + \frac{1}{2}k^2Q^2$$

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2}m\dot{Q}^2 - \frac{1}{8}mb^2Q^2 + \frac{1}{2}k^2Q^2$$ es la energía conservada en términos de Q.

Usando $Q = qe^{\frac{bt}{2}}$

y $\dot{Q} = \dot{q}e^{\frac{bt}{2}} + \frac{b}{2}qe^{\frac{bt}{2}}$

$$E = \frac{1}{2}m\left[\dot{q}^2e^{bt} + bq\dot{q}e^{bt} + \cancel{\frac{b^2}{4}q^2e^{bt}}\right] - \cancel{\frac{1}{8}mb^2q^2e^{bt}} + \frac{1}{2}k^2q^2e^{bt}$$

$$E = \frac{1}{2}m\dot{q}^2e^{bt} + \frac{1}{2}mbq\dot{q}e^{bt} + \frac{1}{2}k^2q^2e^{bt}$$

O bien,

$$E = \frac{1}{2}e^{bt}\left[m\dot{q}^2 + mbq\dot{q} + k^2q^2\right]$$

En el Lagrangiano inicial, se observa el tiempo explícitamente, por lo tanto, no hay conservación de energía. Pero, al realizar un cambio de variable, el tiempo no aparece explícitamente, pero sólo fue un cambio de variable, entonces, aunque no se vea, el tiempo sí está en el Lagrangiano.
Asumiendo que no hay dependencia temporal, se realiza el procedimiento para determinar la cantidad "conservada", con lo que efectivamente se comprueba que no hay conservación de energía, lo que coincide con la hipótesis del movimiento del oscilador armónico amortiguado.