Tarea 3

Daniel Martinez Ortega

1.- Deducir paso a paso las ecuaciones de Euler-Lagrange para un Lagrangiano que dependa de la aceleracion, ademas de la velocidad y la posicion, es decir, $L = L(\ddot{q}_i, \dot{q}_i, q_i, t)$.

Dem: Partimos de la definición de la minima accion,

$$S[q_i(t)] = \int_{t_i}^{t_f} L(q_i(t), \dot{q}_i(t), \ddot{q}_i(t))\, dt$$

entonces si una particula sigue una trayectoria $x_i(t) \to x_i(t) + \delta x_i(t)$ donde las variaciones δx_i son tan pequenas en los extremos tal que $\delta q_i(t_i) = \delta q(t_f) = 0$, entonces el cambio infinitesimal de la accion es:

$$dS = d\left(\int_{t_i}^{t_f} L dt\right) = \int_{t_i}^{t_f} dL\, dt = \int_{t_i}^{t_f}\left(\frac{\partial L}{\partial q^i} dq^i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} d\dot{q}^i + \frac{\partial L}{\partial \ddot{q}^i} d\ddot{q}^i\right) dt$$

integrando los dos ultimos terminos por partes

$$= \int_{t_i}^{t_f} \frac{\partial L}{\partial q^i} dq^i + \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} dq^i\right)_{t_i}^{t_f} - \int_{t_i}^{t_f} \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\right) dq^i\, dt + \left(\frac{\partial L}{\partial \ddot{q}^i} d\dot{q}^i\right)_{t_i}^{t_f} - \int_{t_i}^{t_f} \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial L}{\partial \ddot{q}^i}\right) d\dot{q}^i\, dt$$

entonces $dq^i(t_f) = dq^i(t_i) = 0$ y $d\dot{q}^i(t_f) = d\dot{q}^i(t_i) = 0$ puesto que dS tiene que ser extremisado en cada punto de la trayectoria y la velocidad en los extremos no cambian, volviendo a integrar por partes el ultimo termino;

$$= \int_{t_i}^{t_f}\left(\frac{\partial L}{\partial q^i} - \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\right)\right) dq^i\, dt - \left[\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial L}{\partial \ddot{q}^i}\right) dq^i\right]_{t_i}^{t_f} + \int_{t_i}^{t_f} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{\partial L}{\partial \ddot{q}^i}\right) dq^i\, dt$$

por lo anterior: $$= \int_{t_i}^{t_f}\left(\frac{\partial L}{\partial q^i} - \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\right) + \frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{\partial L}{\partial \ddot{q}^i}\right)\right) dq^i\, dt$$

entonces si dS es extremisada, implica $dS = 0$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\partial L}{\partial q^i} - \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\right) + \frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{\partial L}{\partial \ddot{q}^i}\right) = 0}$$ para $i = 1, 2, \ldots 3N$

2.- Encontrar las ecuaciones de Euler-Lagrange del modelo sigma:

$$L(\dot{q},q,t)=\frac{1}{2}g_{ab}(q^c)\,\dot{q}^a\dot{q}^b$$ donde g_{ab} es una matriz de las coordenadas.

Dem:

Sabemos que las ecuaciones de Euler-Lagrange son:

$$\frac{\partial L}{\partial q^i}-\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial L}{\dot{q}^i}\right)=0$$, substituyendo el lagrangiano en $\frac{\partial L}{q^i}$

entonces: $$\frac{\partial L}{\partial q^i}=\frac{1}{2}\frac{\partial g_{ab}}{\partial q^c}\dot{q}^a\dot{q}^b=\frac{1}{2}g_{ab,c}\dot{q}^a\dot{q}^b \quad ①$$

substituyendo en $$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}=\frac{1}{2}g_{ab}\left(\frac{\partial \dot{q}^a}{\partial \dot{q}^c}\dot{q}^b+\frac{\partial \dot{q}^b}{\partial \dot{q}^c}\dot{q}^a\right)$$, dado que los índices son libres y permutando las derivadas

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^c}=g_{ac}\dot{q}^a$$

derivando con respecto del tiempo;

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\right)=\frac{\partial}{\partial t}g_{ac}\dot{q}^a+g_{ac}\ddot{q}^a=\frac{\partial g_{ac}}{\partial q^\beta}\dot{q}^\beta\dot{q}^a+g_{ac}\ddot{q}^a \quad ②$$

sustituyendo en Euler-Lagrange ① y ②

$$g_{ac,b}\dot{q}^\beta\dot{q}^a+g_{ac}\ddot{q}^a-\frac{1}{2}g_{ab,c}\dot{q}^a\dot{q}^b=0$$

$$=g_{ac}\ddot{q}^a+\left(g_{ac,b}-\frac{1}{2}g_{ab,c}\right)\dot{q}^a\dot{q}^b$$

como el tensor g_{ac} es simetrico y la derivada del tensor es cero

$$=g_{ac}\ddot{q}^a+\left(\frac{1}{2}\left(g_{ac,b}+g_{cb,a}\right)-\frac{1}{2}g_{ab,c}\right)\dot{q}^a\dot{q}^b$$

$$=g_{ac}\ddot{q}^a+\frac{1}{2}\left(g_{ac,b}+g_{cb,a}-g_{ab,c}\right)\dot{q}^a\dot{q}^b$$

multiplicando por g^{lc}

$$=g^{lc}g_{ca}\ddot{q}^a+\underbrace{\frac{1}{2}g^{lc}\left(g_{ac,b}+g_{cb,a}-g_{ab,c}\right)}_{\text{simbolo de Christoffell}}\dot{q}^a\dot{q}^b$$

$$=\ddot{q}^l+\Gamma^l_{ab}\dot{q}^a\dot{q}^b=0$$ //

3.- A un péndulo simple se le remplaza el cable por un resorte de longitud en reposo ℓ y constante del resorte K.

a) Construye el Lagrangiano del sistema y deduce las ecuaciones de Euler-Lagrange.

Sol:

para este caso es más fácil describir el movimiento del péndulo con las coordenadas generalizadas $q_1 = r$, $q_2 = \theta$

entonces escribiendo las coordenadas cartesianas en términos de r y θ

$x = r\operatorname{sen}\theta$ y $y = -r\cos\theta$

derivando con respecto del tiempo; $\dot{x} = r\dot{\theta}\cos\theta + \dot{r}\operatorname{sen}\theta$

y $\dot{y} = r\dot{\theta}\operatorname{sen}\theta - \dot{r}\cos\theta$

entonces sea el Langrangiano ; $L = T - V$

$\Rightarrow T = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2)$ y el potencial es $V = \frac{1}{2}K(r-\ell)^2 - mgr\cos\theta$

(potencial debido al resorte y el gravitatorio)

sustituyendo en L;

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) - \frac{1}{2}K(r-\ell)^2 + mgr\cos\theta.$$

escribiendo las ecuaciones de euler-Lagrange: $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0$

θ: $r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} + g\operatorname{sen}\theta = 0$

y para $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{r}}\right) - \frac{\partial L}{\partial r} = 0$

r: $\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 + \frac{K}{m}(r-\ell) - g\cos\theta = 0$

b) Encuentre los puntos de equilibrio y describe su estabilidad.

Sol: derivando el potencial con respecto de r:

$$\frac{\partial V}{\partial r} = K(r-\ell) - mg\cos\theta = 0$$

$$= \frac{K}{mg}(r-\ell) = \cos\theta \quad \text{y si } \theta \ll 1$$

$$\Rightarrow r = \ell + \frac{mg}{K} \text{ ó } r = \ell - \frac{mg}{K} \text{ para el resorte}$$

Cuando las oscilaciones son muy pequeñas el resorte se puede mover de arriba a abajo como un oscilador y su tercer punto de equilibrio es cuando el resorte esta en l,
los puntos $l - \frac{mg}{k}$ y l son puntos de equilibrio inestables y $l + \frac{mg}{k}$ es estable cuando se encuentra totalmente estirado

c) Haz una expansión pequeña alrededor de los puntos de equilibrio y resuelve el sistema.

Sol: si expandimos a $r = r_0 + \delta r$ y $\theta = \theta_0 + \delta\theta$
las ecuaciones de movimiento son:

$$r\ddot{\theta}_0 + \delta r \delta\ddot{\theta} + 2\delta\dot{r}\,\delta\dot{\theta} + g\theta_0 = 0$$

y

como δr, $\delta\dot{r}$, $\delta\ddot{r}$, $\delta\theta$, $\delta\dot{\theta}$, $\delta\ddot{\theta}$, son muy pequeños

$r\ddot{\theta}_0 + g\theta_0 = 0$ esta es la ecuacion que describe a un pendulo

si expandimos en la segunda ecuacion

$$\ddot{r} - r\,\delta\dot{\theta}^2 + \frac{k}{m}(r - l) - g = 0$$

$$\ddot{r} + \frac{k}{m}(r - l) = 0$$

$\ddot{r} + \omega_0(r - l) = 0$ si δr son muy pequeños

tenemos $\ddot{r} + \omega_0 r \rightarrow$ el resorte se mueve como un oscilador normal

y las ecuaciones describen para r y θ oscilaciones en dos dimensiones de forma normal los terminos $\dot{\theta}$ y $\dot{r}$ nos pueden indicar friccion para ambos osciladores

4.- Considerar el siguiente Lagrangiano dependiente del tiempo para un grado de libertad (q).

$$L = e^{bt}\left(m\frac{1}{2}\dot{q}^2 - \frac{1}{2}k^2q^2\right)$$

con k, m y b positivas

a) Encuentra las ecuaciones de Euler-Lagrange

Sol: derivamos L con respecto de $\dot{q}$ y luego t

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) = b\, e^{bt}\dot{q}m + e^{bt}\ddot{q}m \quad y \quad \frac{\partial L}{\partial q} = k^2 q$$

reemplazando en Euler-lagrange

$$\ddot{q} + \frac{b\dot{q}}{m} - \frac{k^2 q}{m} = 0$$

por el termino $\frac{k^2}{b}$ parece un oscilador amortiguado

b) Realiza el cambio de variable $Q = e^{bt/2} q$ y construye el lagrangiano y reescribe en terminos de q la cantidad conservada

Sol:

$$L = e^{bt}\left(\frac{1}{2}\dot{q}^2 - \frac{1}{2}k^2q^2\right)$$

$$q = \frac{Q}{e^{bt/2}} \quad y \quad q^2 = \frac{Q^2}{e^{bt}}$$

entonces

$$\dot{q} = \frac{\dot{Q}e^{bt/2} - \frac{b}{2}Qe^{bt/2}}{e^{bt}}$$

$$\frac{\dot{Q}^2e^{bt} + \frac{b^2}{4}Q^2e^{bt} - b\dot{Q}Qe^{bt}}{e^{2bt}} = \dot{q}^2$$

$$L = e^{bt}\left(\frac{m}{2e^{bt}}\left(\dot{Q}^2 + \frac{b^2}{4}Q^2 - b\dot{Q}Q\right) - k^2\frac{Q^2}{e^{bt}}\right)$$

$$= \frac{1}{2}m\left(\dot{Q}^2 + \frac{b^2}{4}Q^2 - b\dot{Q}Q\right) - k^2Q^2$$

entonces como el Lagrangiano no es funcion explicita del tiempo, entonces el Hamiltoniano coincide con la energia entonces el momento canonico es:

$$p = \frac{\partial T}{\partial \dot{Q}} = \frac{\partial}{\partial \dot{Q}}\left(\frac{m}{2}\left(\dot{Q}^2 + \frac{b^2}{4}Q^2 - \dot{Q}Q\right)\right)$$

$p = (\dot{Q} - Q)m$; escribiendo en terminos de q; $p = \left(e^{bt/2}\dot{q} + \frac{b}{2}q\, e^{bt/2} - q e^{bt/2}\right)m$

$$p = me^{bt/2}\left(\dot{q} + q\left(\frac{b}{2} - 1\right)\right)$$

es el momento de una particula cuando que decae con el tiempo si se encuentra en un sistema de referencia q, en este sistema el momento canonico no se conserva, mientras que en las coordenadas generalizadas Q este se conserva. $p = cte$