

Caos y Sistemas Dinamicos

Universidad de Guanajuato, División de Ciencias e Ingenierías
Mecánica Analítica
Daniel Martinez Ortega

Resumen—La mayoría de las veces podemos describir el movimiento de un objeto en buena medida con modelos sencillos, en los que las predicciones están basadas en hipótesis idealizadas, pero cuando el problema se extiende a tratar de describir el movimiento de uno o más objetos de los cuáles los modelos dependen fuertemente de las condiciones iniciales del sistema y más aun cuando los sistemas son demasiados perceptibles a ligeras variaciones de las variables que componen el sistema, en estos casos se tiene que recurrir a otro tipo de análisis, que en su mayoría se hace numéricamente. En este trabajo se tratan algunos de los métodos y modelos que se usan comúnmente para describir el movimiento de sistemas complejos y este mismo nos introduce a conocer lo referente al caos que existe en la naturaleza.

I. INTRODUCCIÓN

Issac Newton trajo al mundo la idea de modelar el movimiento de los sistemas físicos con ecuaciones. Esto fue necesario para inventar el calculo, desde las ecuaciones fundamentales del movimiento que envolvían a la velocidad y la aceleración que son derivadas de la posición. Este suceso trajo consigo que el movimiento de los planetas se debía a una interacción del tipo gravitatoria. El demostró que el movimiento observado en los planetas podría ser explicado, asumiendo que la atracción entre dos objetos, es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia entre ellos. Las orbitas de los planetas fueron aproximaciones de leyes modeladas con ecuaciones diferenciales. Estos métodos ahora también son usados en el modelado del movimiento en muchas áreas de la ciencia.

Subsecuente-mente las generaciones de científicos extendieron los métodos de usar ecuaciones diferenciales para describir como los sistemas físicos se desenvuelven. Pero los métodos han tenido limitaciones. Mientras las ecuaciones diferenciales son suficientes para determinar con cierta precisión algunos de los sistemas con ciertas restricciones, que se podían aproximar a lo observado. Pero después de un tiempo se volvió complicado encontrar soluciones algebraicas con términos finitos. En algunos casos ya se obtenían soluciones con sumas infinitas que no convergen en el tiempo. Cuando las soluciones pudieron ser encontradas, los científicos fueron capaces de describir el movimiento que regularmente por ejemplo implicaban perdida de energía por la fricción o oscilaciones con un cierto periodo.

Los científicos posteriormente se encontraron con dificultades al tratar de describir sistemas con un gran numero de partículas que se encontraban interactuando unas con otras, por ejemplo una olla con agua hirviendo. Cerca del año 1975 los científicos llamaron a este tipo de movimiento "caos". Este tipo de movimiento es errático, no se encuentra solo al tratar de describir un sistemas por ejemplo con un gran numero

de periodos en su oscilación y a su vez también puede no depender de un gran numero de interacciones, si no que también se puede encontrar en sistemas simples.

Un pequeño grupo de científicos y matematicos estaban familiarizados con este tipo de movimiento. J. C. Maxwell quien estudio el movimiento de las moleculas en un gas alrededor de 1860, encontro que como era posible que un sistema compuesto por dos tipos de gases, esto para fines practicos el movimiento de las moleculas era impredecible. El aseguro que pequeños cambios en el movimiento inicial de las particulas podria resultar en inmensos cambios en las trayectorias de las moleculas, si fueran como pequeñas esferas. Maxwell comenzo su famoso estudio acerca de las leyes de movimiento de un gas investigando las colisiones individuales entre las particulas. Considerando dos atomos de igual masa, modelados como esferas rigidas. Dado que los atomos tienen velocidades iguales y opuestas, asumio que las posiciones son seleccionadas al azar en un amplio espacio tridimensional. Maxwell mostro que si estas colisionan, todas las direcciones de las trayectorias son equivalentes despues de la colisión.

Henri Poincaré en 1890 estudio ampliamente la simplificación del sistema solar tratando el problema de tres cuerpos y concluyo que los movimientos algunas veces son increíblemente complicadas. Estas tecnicas fueron aplicadas para una gran variedad de sistemas fisicos. En los 60's habia varios grupos de matematicos, particularmente en Berkeley y en Moscow tratando de entender este tipo de movimiento. Pero solo con el desarrollo de las computadoras personales, con pantallas capaces de mostrar graficas, Teniendolas los científicos fueron capaces de ver los rangos en base a los parametros establecidos las conclusiones a sus ecuaciones de movimiento.

En el presente, los científicos realizan modelos en base al comportamiento caótico en los experimentos y los resuelven haciendo uso de las computadoras en muchos campos de la ciencia. Esto se requiere debido a la no linealidad de los sistemas. Esto ahora es común para los experimentos que antes de su elaboración se desea una predicción de lo que puede pasar y así evaluar posteriormente la funcionalidad del experimento. Tomando en cuenta esta nueva forma de evaluar de primeros principios, es llamada teoria de sistemas dinamicos. La teoria de sistemas dinamicos describe fenomenos que son comunmente encontrados en sistemas fisicos y biologicos. Estos han tenido un gran beneficio, debido a la colisión de ideas entre las matematicas y estas ciencias.

II. MAPEO LOGISTICO

Un sistema dinamico consiste en conjunto de posibles estados, junto con reglas que determinan el estado presente en terminos de los pasados. Comunmente necesitamos de alguna regla determinista que nos diga como describir los estados presentes en terminos de los pasados. Pero en algunas ocasiones resulta más eficiente analizar sistemas de una manera tal que algunos parametros son escogidos de manera aleatoria, comunmente se llama analisis estocastico. Tambien los sistemas pueden ser clasificados de tal manera que sean discretos en el tiempo ó continuos.

Para fines practicos a una función con un dominio y rango establecido se le llama mapa. La orbita de la variable independiente bajo el mapa es un conjunto de puntos que va de un valor inicial hasta un cierto punto donde el valor de la función es igual que el de variable independiente. Hay muchas maneras de analizar un mapa de un sistema dinamico.

Comunmente se analiza el sistema $g_a = ax(1 - x)$. En particular este sistema se vuelve complicado, cuando el parametro a se evalua en una gran cantidad de valores, para ello hacemos uso de los puntos periodicos. Los *puntos periodicos* son valores donde la función tiene el mismo valor repetidamente, cuando las orbitas entre dos valores de la función son muy pequeñas. En la figura 1 se muestra las orbitas para, $1 < a < 4$. Esta imagen puede ser generada de la siguiente manera: (1) Escogemos un valor inicial $a=1$, (2) Evaluamos para un valor de x en el rango de $[0,1]$, (3) Calculamos la orbita, ignoramos las primeras 100 iteraciones y comenzamos a graficar. La grafica es llamada diagrama de bifurcación y muestra la evolución del sistema.

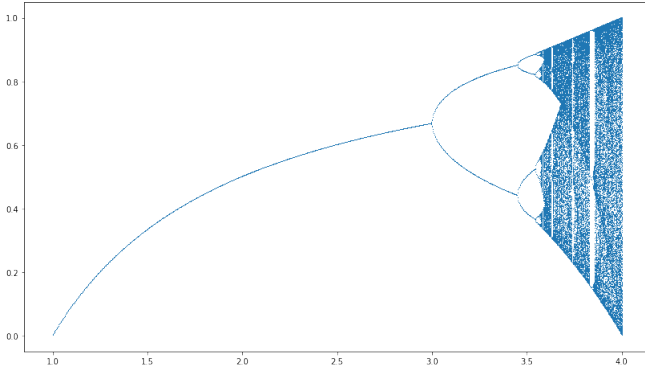


Figura 1. En el punto cuando $a=3$ da camino a un periodo de doble orbita ó punto de bifurcación. Cuando $a>3$ el sistema tiene muchas orbitas que no son atractoras.

Podemos ver por ejemplo que cuando $a = 3,4$ de la figura 1 intersecta al diagrama en dos puntos de doble periodo. Para $a = 3,45$ aproximadamente parece verse un periodo cuadruple. Cuando $a = 3,86$ (línea de color blanco en la zona oscura) este conjunto de atractores con llamados "atractores caóticos", son puntos difíciles de describir. Una característica de estos atractores es que pueden aparecer y desaparecer abruptamente o cambiar discontinuamente. Este fenómeno se llama "crisis", este aparece en algunos valores de a . En particular cuando $a = 4$ hay una crisis cuando el atractor caótico desaparece. Para $a > 4$ no hay conjunto de atractores.

Si seguimos acotando un poco más el rango como en la imagen 3 muestra otra figura interesante, una "ventana periodica". Esto se refiere al conjunto de valores del parametro en los que hay un triple periodo. En la figura 2 no se puede observar este periodo.

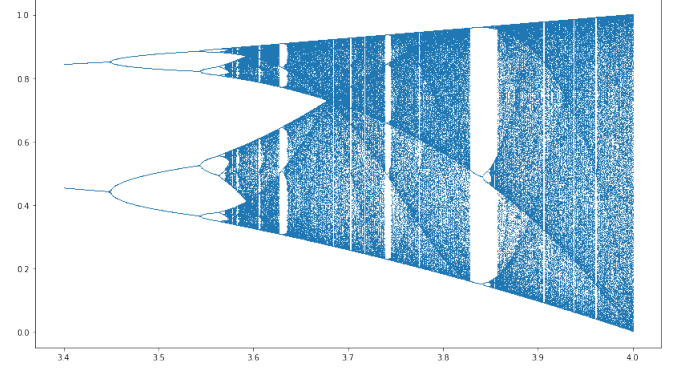


Figura 2. Eje horizontal, $3,4 < a < 4$

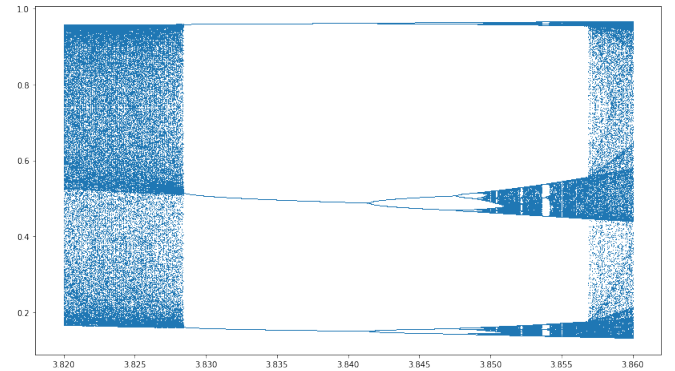


Figura 3. Eje horizontal $3,82 < a < 3,86$

Existen otros tipos de mapeos como el "cobweb plot" que analiza al sistema dinamico usando la grafica de la misma función y trazando una recta que intersecta a la función en un punto. Con ello se puede hacer un analisis de las orbitas del sistema y encontrar un punto de convergencia dada una cierta condición inicial. El diagrama de bifurcación y el cobweb plot son entre otras una serie de técnicas graficas que nos ayudan a entender la estabilidad de un sistema de manera visual.

III. EXPONENTES DE LYAPUNOV

Los sistemas que presentan un movimiento caótico, tienen una gran dependencia de como varían con el tiempo (la derivada de la función). Para un punto donde existe un periodo, nosotros tenemos que observar a la derivada k -ésima iteración del mapa es el producto de las derivadas en k -puntos de la orbita. Podemos introducir el numero de Lyapunov como una cantidad promedio que cuantifica la razón de separación entre puntos cercanos. Un numero de Lyapunov de 2 nos permitira medir la distancia entre una orbita x_1 y otro punto x y sus orbitas. Para un periodo k en un punto x_1 , lo anterior es lo mismo que lo siguiente:

$$|(f^k)(x_1)| = |f(x_1)| |f(x_2)| \dots |f(x_k)| = 2^k \quad (1)$$

El significado de numero de Lyapunov puede ser aplicado a orbitas no periodicas. Una caracteristica de las orbitas caoticas es la gran dependencia de las condiciones iniciales; la eventual separación de las orbitas entre condiciones iniciales cercanas. De hecho la definición de orbita caotica no tiende a una cierta periodicidad y el numero de Lyapunov tiende a ser mas grande que uno. La definición de numero de Lyapunov y exponente de Lyapunov son las siguientes:

Sea una función f que tiene un rango en los numeros reales. El numero de Lyapunov $L(x_1)$ de la orbita x_1, x_2, \dots se define como;

$$L(x_1) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln |f(x_1) \dots f(x_n)| \quad (2)$$

Si el limite existe entonces el exponente de Lyapunov $h(x_1)$ es definido como:

$$h(x_1) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} [\ln |f(x_1)| + \dots + \ln |f(x_n)|] \quad (3)$$

Podemos notar que algunas orbitas los numeros y exponentes de Lyapunov estan indefinidos. En particular en una orbita que contiene a un punto donde $f(x_i) = 0$ causa que el exponente sea indefinido. En la siguiente imagen podemos observar una grafica del calculo de los exponentes de Lyapunov para el sistema $g(x) = ax(1-x)$, para valores de a , $2 < a < 4$:

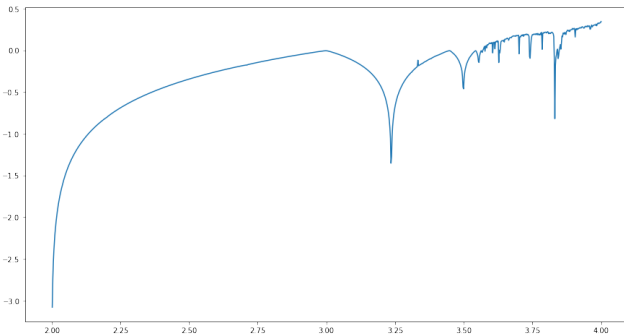


Figura 4. Grafica de los valores obtenidos para los exponentes para valores de $2 < a < 4$.

En la figura 5 podemos observar en el eje horizontal al parametro a y en el vertical los valores calculados para los exponentes.

IV. FRACTALES

Un fractal es una figura geometrica compleja que a diferencia de las figuras complicadas convencionales, no se puede simplificar cuando este se amplía. Así como la geometria euclidiana ha servido para describir en cierto lenguaje la mecanica clasica del movimiento, la geometria fractal es usada para describir los patrones producidos por el movimiento caotico. Los fractales tienen las siguientes propiedades: estructura complicada en un amplio rango de escalas longitudinales, repetición de estructuras a las diferentes escalas y una dimensión fractal que no es

entera.

Para encontrar los primeros ejemplos de fractales debemos remontarnos a finales del siglo XIX: en 1872 apareció la función de Weierstrass, cuyo grafo hoy en día consideráramos fractal, como ejemplo de función continua pero no diferenciable en ningún punto. Posteriormente aparecieron ejemplos con propiedades similares pero una definición más geométrica. Dichos ejemplos podían construirse partiendo de una figura inicial (semilla), a la que se aplicaban una serie de construcciones geométricas sencillas. La serie de figuras obtenidas se aproximaba a una figura límite que correspondía a lo que hoy llamamos conjunto fractal.

Una aproximación a la geometría de los fractales se puede realizar fácilmente mediante la curva de Koch. La curva de Koch, también conocida como copo de nieve es un fractal que puede obtenerse mediante diferentes procedimientos como los denominados IFS o sistemas de funciones iteradas (deterministas o no), sistemas basados en reglas, etc. El algoritmo recursivo goza de la virtud de representar además un concepto muy asociado a los fractales: el infinito. La esencia de la recursividad permite describir de una forma muy simple la de la propia curva. Un universo que contiene a otro y este a su vez copia el patrón a menor escala (de forma contractiva) en una secuencia que se repite infinitamente.

Para la determinación de un fractal determinista se necesita un elemento de partida denominado iniciador, y un patrón de modificación del iniciador llamado generador. El iniciador se subdivide en partes que son sustituidas por el generador en un proceso repetitivo e infinito. La curva de Koch toma como iniciador un segmento de línea recta. El generador divide en tres partes iguales el segmento, elimina el tramo central y añade otros dos, en su lugar, de iguales dimensiones. Los ángulos se corresponden con los de un triángulo equilátero.

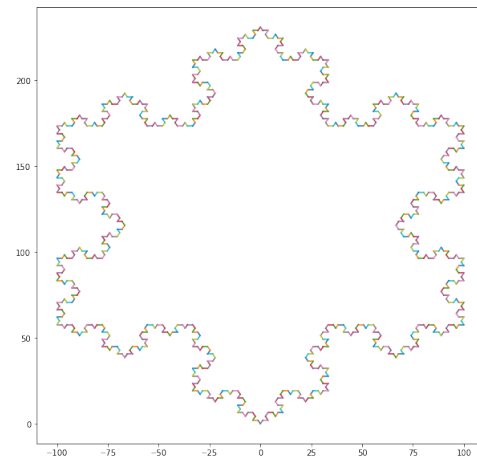


Figura 5. Grafica de la curva de koch

La dimensión de un objeto es un concepto topológico que sitúa o clasifica a los objetos en espacios métricos. La noción intuitiva de espacios con dimensiones enteras choca con las denominadas dimensiones fractales, que toman valores reales. La repetición de los patrones topológicos de estos fractales (a diferentes escalas) llevan a denominarlos autosemejantes. Contienen partes que son versiones reducidas en tamaño

del objeto entero. En el caso de poder aplicar variaciones aleatorias a las subpartes de escala reducida, se dice que el fractal es estadísticamente autosemejante. La curva de Koch se puede generar, en cada iteración, repitiendo cuatro veces el patrón generador expuesto. En la figura se ha remarcado uno de los elementos repetidos para la determinación de la segunda iteración. Trasladando y copiando el generador a la escala adecuada se pueden ir generando los diferentes pasos o iteraciones en su proceso generador.

V. ATRACTORES EXTRAÑOS

V-A. Atractor de Lorenz

En 1950 el meteorólogo del MIT Edward Lorenz con una nueva generación de computadores en su tiempo, pudo realizar el cálculo de la solución de un sistema de aproximadamente 12 ecuaciones diferenciales de un modelo de la atmósfera en miniatura. Con ello pudo elaborar modelos con métodos sofisticados de linealización para predicciones. Lorenz llegó a la conclusión que un factor fundamental, que no se podía conocer un límite para las predicciones del clima. El trato de demostrar este punto encontrando soluciones para su atmósfera en miniatura que no era periódica, pero para trayectorias pequeñas se podía encontrar una solución con técnicas de predicción lineal. El modelo de la atmósfera contenía una serie de parámetros que no eran conocidos. La computadora lo ayudó a explorar el espacio de los parámetros que de alguna otra forma no habría podido. Lorenz encontró la forma de reducir su complicado sistema de 12 ecuaciones que modelaban la atmósfera y logró solo expresarlo en tres ecuaciones diferenciales.

Lorenz también había podido modelar el movimiento de convección de un fluido calentado por la parte de abajo y enfriado por encima. Asumiendo que hay dos planos horizontales paralelos con fluido entre ellos y las condiciones de la temperatura. Un equilibrio era posible en este sistema, en el cual el fluido está en reposo y el calor es transportado vía térmica. Considerando las variaciones en solo dos dimensiones se pudo derivar un conjunto de ecuaciones diferenciales ordinarias no lineales por expansiones en series de Fourier, sustituyendo las series en el conjunto de ecuaciones original y truncando en las sumas finita mente. Lorenz entonces colocó el conjunto con los tres coeficientes de Fourier iguales a cero y obtuvo un sistema de ecuaciones de tres ecuaciones diferenciales ordinarias:

$$\frac{dx}{dt} = -x\sigma + y\sigma. \quad (4)$$

$$\frac{dy}{dt} = -xz + rx - y. \quad (5)$$

$$\frac{dz}{dt} = xy - bz. \quad (6)$$

El número de Reynolds, el número de Prandtl y b son parámetros del sistema. La variable x es proporcional a la circulación del fluido a bajas velocidades. La variable y es proporcional a la diferencia de temperatura entre los elementos del fluido que descienden y los que ascienden y la variable z es proporcional a la distorsión de la temperatura vertical en

el equilibrio. Para los valores de $\sigma = 10$, $b = 8/3$, Lorenz encontró numéricamente que el sistema se volvía caótico sin embargo para esto el número de Reynolds tiene que exceder el valor de $r \approx 24.74$.

En la siguiente imagen se muestra la gráfica de la solución al sistema de ecuaciones de Lorenz (Atractor de Lorenz).

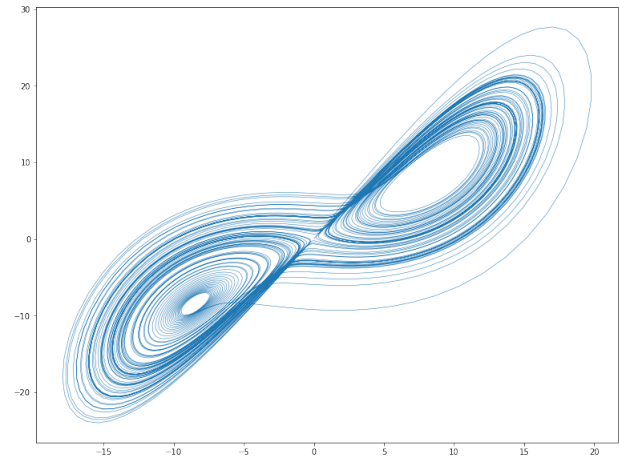


Figura 6. Gráfica en dos dimensiones del atractor de Lorenz en el eje horizontal x y vertical y .

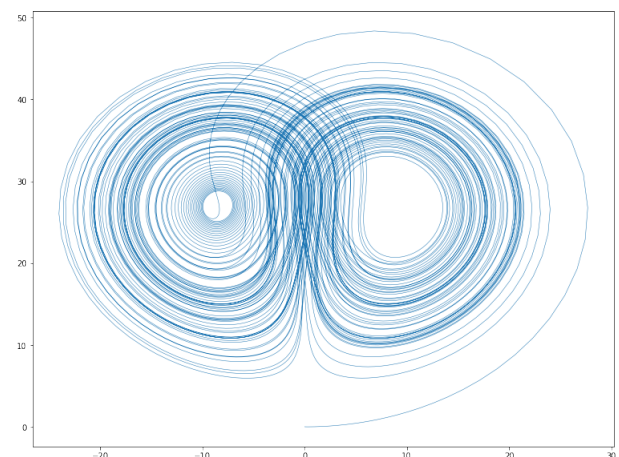


Figura 7. Gráfica del atractor de Lorenz en el eje horizontal x y vertical z .

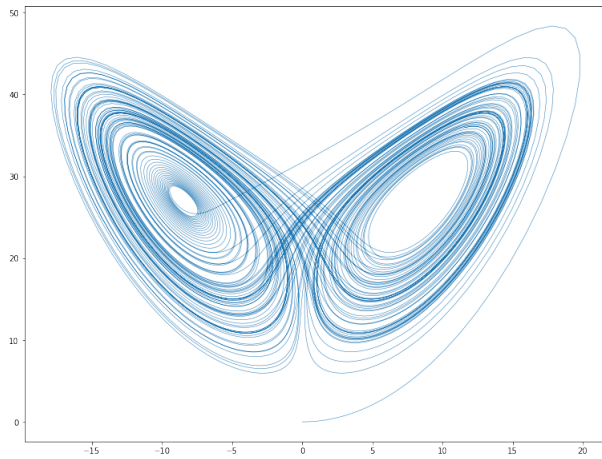


Figura 8. Grafia del atractor de lorenz (x vs z)

En la figura 8 podemos observar el efecto mariposa. Según el efecto mariposa, dadas unas circunstancias peculiares del tiempo y condiciones iniciales de un determinado sistema dinámico caótico (más concretamente con dependencia sensitiva a las condiciones iniciales) cualquier pequeña diferencia entre dos situaciones con una variación pequeña en los datos iniciales, cabe resaltar que sin duda alguna y sin explicación científica, acabará dando lugar a situaciones donde ambos sistemas evolucionan en ciertos aspectos de forma completamente diferente.

La consecuencia práctica del efecto mariposa es que en sistemas complejos tales como el estado del tiempo o la bolsa de valores es muy difícil predecir con seguridad en un mediano rango de tiempo. Los modelos finitos que tratan de simular estos sistemas necesariamente descartan información acerca del sistema y los eventos asociados a él. Estos errores son magnificados en cada unidad de tiempo simulada hasta que el error resultante llega a exceder el cien por ciento.

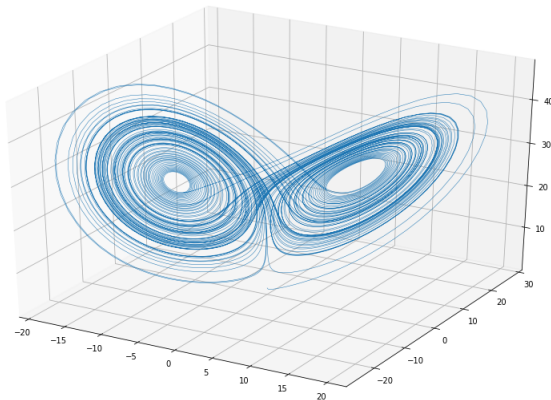


Figura 9. Grafica en tres dimensiones del atractor de Lorenz

V-B. Atractor de Rössler

El científico alemán O. Rössler encontró la manera de crear un atractor caótico con un conjunto de ecuaciones diferenciales no lineales. Las ecuaciones de Rössler son :

$$\frac{dx}{dt} = -y - z. \quad (7)$$

$$\frac{dy}{dt} = x + ay. \quad (8)$$

$$\frac{dz}{dt} = b + (x - c)z. \quad (9)$$

Algunas propiedades del sistema de Rössler pueden ser deducidas a través de métodos lineales como autovectores, pero las principales características del sistema requieren métodos no lineales como Aplicaciones de Poincaré o diagramas de bifurcación. En las siguientes imágenes podemos observar la inestabilidad del atractor.

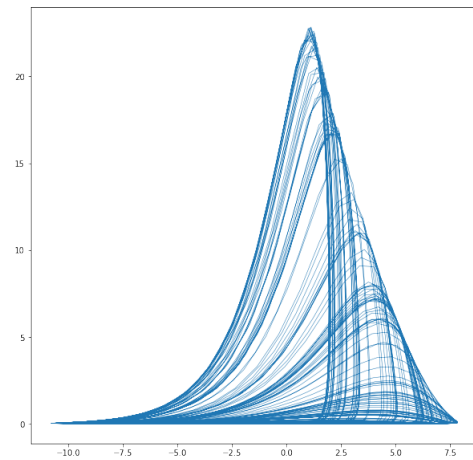


Figura 10. Grafia del atractor de rossler (y vs z)

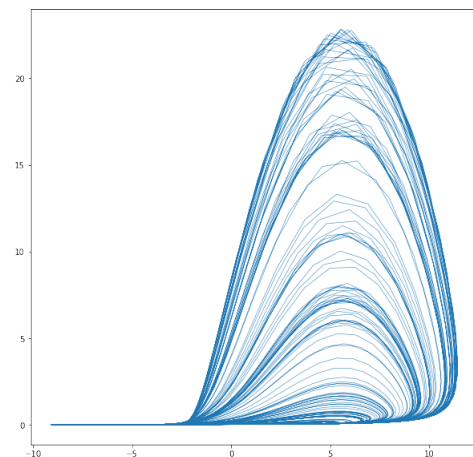


Figura 11. Grafica del atractor (x vs z)

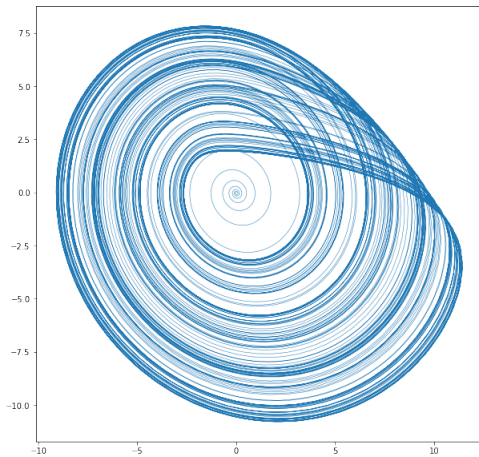


Figura 12. Grafica del atractor (x vs y)

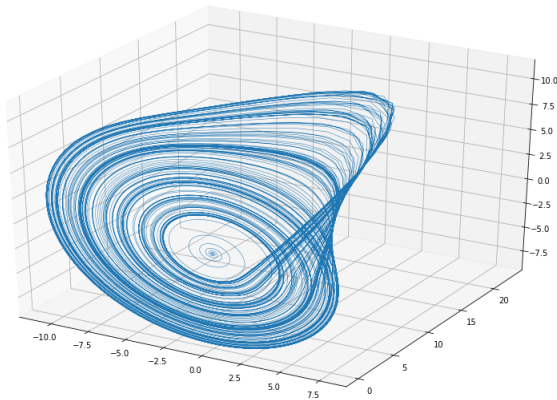


Figura 13. Grafica del atractor en tres dimensiones

VI. SECCIONES DE POINCARÉ

Poincaré cuando estudio el problema de tres cuerpos obtuvo también resultados relativos a la existencia y propiedades de los llamados ciclos límite, que no son más que soluciones periódicas a las que muchas trayectorias vecinas se acercan asintóticamente e introdujo el famoso teorema de Poincaré-Bendixon, el que se puede usar para demostrar que no pueden existir atractores extraños en dimensiones menores a tres. El teorema de Poincaré-Bendixon afirma que en un sistema dinámico diferenciable definido en un subconjunto abierto del plano todo conjunto compacto no vacío que sirva como conjunto límite de una órbita y que contenga un conjunto finito de puntos fijos, sólo podrá ser (1) un punto fijo, (2) una órbita periódica.

Conforme transcurre el tiempo, la trayectoria atravesará una y otra vez la sección de Poincaré. El conjunto de puntos en los que la trayectoria atraviesa la sección de Poincaré se denomina superficie de sección. Este resultado permite clasificar los comportamientos de un sistema dinámico bidimensional con un número finito de puntos críticos pues afirma que las únicas órbitas posibles serán aquellas que converjan o que diverjan tales puntos o que converjan o diverjan a órbitas

periódicas. Poincaré introduce otras herramientas nuevas para el análisis entre ellas las secciones de Poincaré.

Podemos imaginar las órbitas en el espacio fase de un cierto sistema mecánico y imaginarnos una cierta superficie que se interponga en el camino de las trayectorias del sistema, ciertamente las trayectorias del sistema cruzarán esta superficie pues, la sección es transversal y no paralela al flujo del sistema, a las huellas que dejen sobre la superficie estos puntos de cruce se les llama una sección de Poincaré

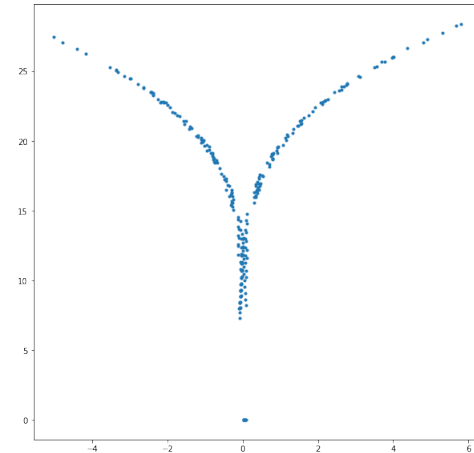


Figura 14. Sección de Poincaré para el atractor de Lorenz

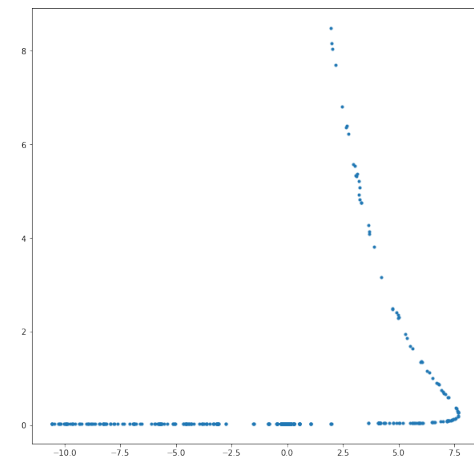


Figura 15. Sección de Poincaré para el atractor de Rossler

VII. MODELO LOCKTA-VOLTERRA

La mayoría de los sistemas dinámicos en la naturaleza son caóticos y se usan modelos que nos permitan analizar su comportamiento, algunos de ellos se relacionan con los seres vivos y su forma de alimentarse. Resulta intuitivo pensar que las poblaciones de un animal depredador y su presa están relacionadas de algún modo en el que si una aumenta, la otra lo hace también. Utilizaremos como ejemplo en este artículo un ecosistema aislado y formado por leones y cebras que viven en armonía, es decir, los leones comiéndose a las cebras. Imaginemos que por cualquier circunstancia, por ejemplo, por disponer de mayor cantidad de alimento,

aumenta la población de cebras; los leones dispondrán de más alimento y su población aumentará, pero ¿qué ocurrirá a partir de este momento? Si la población de leones llega a ser demasiado grande para el número de cebras en nuestra sabana, podrían acabar con todas, provocando su propia extinción por inanición. Pero incluso si el festín no es tan grande como para comerse todas las cebras, pero sí para dejar una población muy mermada, probablemente los leones tendrán que pasar hambre una buena temporada y algunos de ellos morirán hasta que las cebras tengan tiempo suficiente para reproducirse y volver a ser pasto de los leones. ¿Cuántas cebras morirán en el atracón? ¿Cuánto tiempo pasarán los leones hambre? ¿Cuántos morirán?

Las ecuaciones de Lotka-Volterra son un modelo que pretende responder a estas cuestiones prediciendo la dinámica de las poblaciones de presa y depredador bajo una serie de hipótesis: (1) El ecosistema está aislado: no hay migración, no hay otras especies presentes, no hay plagas.

(2) La población de presas en ausencia de depredadores crece de manera exponencial: la velocidad de reproducción es proporcional al número de individuos. Las presas sólo mueren cuando son cazadas por el depredador.

(3) La población de depredadores en ausencia de presas decrece de manera exponencial.

(4) La población de depredadores afecta a la de presas haciéndola decrecer de forma proporcional al número de presas y depredadores (esto es como decir de forma proporcional al número de posibles encuentros entre presa y depredador).

(5) La población de presas afecta a la de depredadores también de manera proporcional al número de encuentros, pero con distinta constante de proporcionalidad (dependerá de cuanto sacien su hambre los depredadores al encontrar una presa).

Se trata de un sistema de dos ecuaciones diferenciales de primer orden, acopladas, autónomas y no lineales:

$$\frac{dx}{dt} = \alpha x - \beta xy \quad (10)$$

$$\frac{dy}{dt} = -\gamma y + \delta yx \quad (11)$$

Donde x es el número de presas (cebras en nuestro caso) e y es el número de depredadores (leones). Los parámetros son constantes positivas que representan:

α = tasa de crecimiento de las presas.

β = éxito en la caza del depredador.

γ = tasa de decrecimiento de los depredadores.

δ = éxito en la caza y cuánto alimenta cazar una presa al depredador. En la siguiente imagen podemos analizar el sistema.

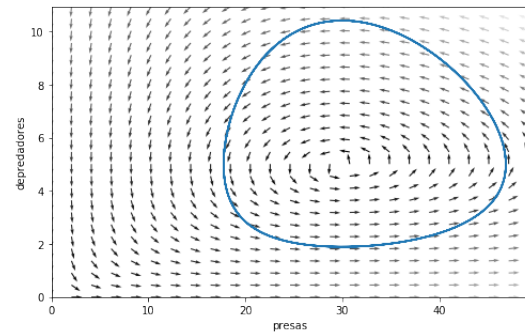


Figura 16. Lotka Volterra

Vemos que se trata de una solución periódica en la que, como decíamos al principio, un aumento en la población de cebras va seguido del aumento del número de leones. Un gran número de depredadores merma la población de presas y a los pobres leones les toca pasar hambre una temporada. Otra forma interesante de visualizar estos datos es ver el número de presas en función del número de depredadores, en lugar de a lo largo del tiempo, es decir, podemos visualizar su mapa de fases. Si nos fijamos en la línea azul, la coordenada x en cada punto indica el número de presas y la coordenada y el número de depredadores. La evolución a lo largo del tiempo que hemos representado antes, se obtiene al recorrer esta curva en sentido antihorario. Podemos ver también como el campo de direcciones nos señala la tendencia del sistema en cada situación. Por ejemplo, una flecha que apunta hacia arriba a la derecha indica que con ese número de cebras y leones en nuestra sabana, la tendencia será que aumenten ambos.

Este sistema es parte de muchos otros que nos permiten entender de manera gráfica ciertos comportamientos que parecen caóticos pero se puede llegar a una simplificación con la hipótesis adecuada.

VIII. METEOROLOGIA

El tiempo atmosférico, además de ser un sistema dinámico, es muy sensible a los cambios en las variables iniciales, es un sistema transitivo y también sus órbitas periódicas son densas, lo que hace del tiempo un sistema apropiado para trabajarlo con matemática caótica. La precisión de las predicciones meteorológicas es relativa, y los porcentajes anunciados tienen poco significado sin una descripción detallada de los criterios empleados para juzgar la exactitud de una predicción.

Al final del siglo XX se ha vuelto común atribuirles una precisión de entre 80 y 85 en plazos de un día. Los modelos numéricos estudiados en la teoría del caos han introducido considerables mejoras en la exactitud de las previsiones meteorológicas en comparación con las predicciones anteriores, realizadas por medio de métodos subjetivos, en especial para periodos superiores a un día. Actualmente es posible demostrar la confiabilidad de las predicciones específicas para periodos de hasta cinco días gracias a la densidad entre las órbitas periódicas del sistema y se han logrado algunos éxitos en la

predicción de variaciones anormales de la temperatura y la pluviosidad para periodos de hasta 30 días.

Antes de la aparición de la Teoría del Caos, se pensaba que para que el tiempo llegara a ser predicho con exactitud newtoniana no era más que una cuestión de introducir más y más variables en un ordenador lo suficientemente potente como para procesarlas. Sin embargo, de unas pocas variables de hace tan sólo unas décadas se ha pasado a considerar cientos de miles de variables sin conseguir la predictibilidad esperada. El clima, como sistema caótico, ha de entenderse como un sistema impredecible dentro de un atractor que le confiere cierto orden a través de las estaciones. Más recientemente se ha probado que el carácter caótico del tiempo atmosférico tiene que ver con las propiedades geométricas del grupo de evolución del sistema climático terrestre, en concreto dicho grupo puede dotarse de la estructura de una variedad de Riemann de dimensión infinita con curvatura negativa, lo cual implica que curvas arbitrariamente cercanas acaban divergiendo en el tiempo. Estos resultados sugieren una imposibilidad práctica de predecir el tiempo atmosférico a medio y largo plazo. El clima es sensible a pequeñas variaciones en las condiciones iniciales y la determinación de las condiciones iniciales con exactitud está abocado al fracaso a causa del Principio de incertidumbre de Heisenberg. Se ha estimado que una predicción a dos meses vista requeriría conocer las condiciones iniciales con una precisión unas 100 mil veces superior a la precisión obtenida por dicha predicción.

IX. APÉNDICE

El primer código se usó para graficar el diagrama de bifurcación de $g(x) = ax(1-x)$

```
import numpy as np
import pylab as py

def f(x, a):
    return a*x*(1-x)

#def g(x, a):
#    return a*(1-2*x)

#ex = []
ys = []
rs = np.linspace(1, 4, 1000)
for a in rs:
    x = 0.1
    # e = 0
    # for i in range(500):
    #     e = e + np.log(np.abs(g(x, a)))
    for i in range(500):
        x = f(x, a)

    for i in range(400):
        x = f(x, a)
        ys.append([a, x])
    # ex.append(e/rs)
```

```
py.figure(figsize=(14,8))
ys = np.array(ys)
py.plot(ys[:, 0], ys[:, 1], ',', lw=0.5)
```

```
py.show()
```

En el siguiente código solo se cambiaron los intervalos de evaluación del parámetro a

```
rs = np.linspace(3.4, 4, 1000)
for a in rs:
    x = 0.1
    # e = 0
    # for i in range(500):
    #     e = e + np.log(np.abs(g(x, a)))
    for i in range(500):
        x = f(x, a)

    for i in range(400):
        x = f(x, a)
        ys.append([a, x])
    # ex.append(e/rs)
```

```
py.figure(figsize=(14,8))
ys = np.array(ys)
py.plot(ys[:, 0], ys[:, 1], ',', lw=0.5)
```

```
py.show()
```

Al igual que en el código anterior se cambiaron los intervalos de evaluación para obtener una vista más cercana del diagrama

```
rs = np.linspace(3.82, 3.86, 1000)
for a in rs:
    x = 0.1
    # e = 0
    # for i in range(500):
    #     e = e + np.log(np.abs(g(x, a)))
    for i in range(500):
        x = f(x, a)

    for i in range(400):
        x = f(x, a)
        ys.append([a, x])
    # ex.append(e/rs)
```

```
py.figure(figsize=(14,8))
ys = np.array(ys)
py.plot(ys[:, 0], ys[:, 1], ',', lw=0.5)
```

```
py.show()
```

El siguiente código es para calcular el valor de los expo-

entes para la función $g = ax(1-x)$ y graficar el parámetro a contra el valor de los exponentes

```
import numpy as np
import pylab as py
import matplotlib.pyplot as plt

def f(x, a):
    return a*x*(1-x)

def g(x, a):
    return a*(1-2*x)

ex = []
ys = []
rs = np.linspace(2, 4, 1000)
for a in rs:
    x = 0.1
    e = 0
    for i in range(500):
        e = e + np.log(np.abs(g(x, a)))
        x = f(x, a)
    for i in range(400):
        ys.append([a, x])
    ex.append(e/1000)

plt.figure(figsize=(15,8))
ys = np.array(ys)
ex = np.array(ex)

py.plot(rs, ex)

py.show()
```

El código siguiente es para graficar la curva de Koch

```
from math import sin, cos, pi
import matplotlib.pyplot as plt
import matplotlib

def koch(l, n):
    x_ver1 = 0
    y_ver1 = 0

    x_ver2 = l * cos ( 2 * pi/3)
    y_ver2 = l * sin(2 * pi/3)

    x_ver3 = l * cos (pi/3)
    y_ver3 = l * sin(pi/3)

    kochCurva(x_ver1,y_ver1,x_ver2, y_ver2,n)
    kochCurva(x_ver2,y_ver2,x_ver3, y_ver3,n)
    kochCurva(x_ver3,y_ver3,x_ver1, y_ver1,n)

    return
```

```
def kochCurva(xi, yi, xf, yf, n):
    if n==0:
        plt.plot([xi,xf],[yi,yf])

    elif n>0:
        x1 = xi + (xf - xi) / 3.0
        y1 = yi + (yf - yi) / 3.0

        x3 = xf - (xf - xi) / 3.0
        y3 = yf - (yf - yi) / 3.0

        x2 = (x1+x3)*cos(pi/3)-(y3-y1)*sin(pi/3)
        y2 = (y1+y3)*cos(pi/3)+ (x3-x1)*sin(pi/3)

        kochCurve(xi,yi,x1,y1,n-1)
        kochCurve(x1,y1,x2,y2,n-1)
        kochCurve(x2,y2,x3,y3,n-1)
        kochCurve(x3,y3,xf,yf,n-1)

    return

plt.figure("Koch snowflack",figsize=(10,10))
kochSnowFlake(200,4) # range 1 -6
plt.show()
```

Para graficar el atractor de Lorenz se usó el siguiente código que muestra las imágenes en dos dimensiones, así las distintas perspectivas se obtuvieron intercambiando las funciones y , x y z .

```
import numpy as np
import scipy as sp
import matplotlib.pyplot as plt
from mpl_toolkits.mplot3d import Axes3D
from scipy.integrate import odeint

def lorenz(sol, t, p):
    s=10
    r=28
    b=2.667

    x=sol[0]
    y=sol[1]
    z=sol[2]

    x_p = s*(y - x)
    y_p = r*x - y - x*z
    z_p = x*y - b*z
    return [x_p, y_p, z_p]

t = np.linspace(0,100,10000)

con_ini = [0.01, .015, .03]
n= 643

sol = odeint(lorenz,con_ini,t, args=(n,))

x = sol[:, 0]
```

```
y = sol[:, 1]
z = sol[:, 2]
```

```
plt.figure(figsize=(13,10))
```

```
plt.plot(x,y,lw='0.5')
```

```
plt.show()
```

Para graficar el atractor de Lorenz en tres dimensiones use estos comandos.

```
[H]
fig = plt.figure(figsize=(15,10))
ax = fig.gca(projection='3d')

ax.plot(x, y, z,lw='0.5')
```

```
plt.show()
```

Para graficar el atractor de Rössler use este código y podemos obtener las diversas caras intercambiando los ejes al momento de graficarlos

```
import numpy as np
import scipy as sp
import matplotlib.pyplot as plt
from mpl_toolkits.mplot3d import Axes3D
from scipy.integrate import odeint
```

```
def lorenz(sol, t, p):
    s=0.2
    r=5.7
    b=0.2
```

```
    x=sol[0]
    y=sol[1]
    z=sol[2]
```

```
    x_p = -y-z
    y_p = x + s*y
    z_p = b + x*z - r*z
    return [x_p, y_p, z_p]
```

```
t = np.linspace(0,1000,10000)
```

```
con_ini = [0.01, .015, .03]
n= 643
```

```
sol = odeint(lorenz,con_ini,t, args=(n,))
```

```
x = sol[:, 0]
y = sol[:, 1]
z = sol[:, 2]
plt.figure(figsize=(10,10))

plt.plot(x,y,lw='0.5')
```

```
plt.show()
```

Para graficarlo en tres dimensiones se usó la misma lógica que para hacerlo para el atractor de Lorenz.

Este es el código usado para graficar las secciones de Poincaré para el atractor de Lorenz

```
import numpy as np
import scipy as sp
import matplotlib.pyplot as plt
from mpl_toolkits.mplot3d import Axes3D
from scipy.integrate import odeint
```

```
def lorenz(sol, t, p):
    s=10
    r=28
    b=2.667
```

```
    x=sol[0]
    y=sol[1]
    z=sol[2]
```

```
    x_p = s*(y - x)
    y_p = r*x - y - x*z
    z_p = x*y - b*z
    return [x_p, y_p, z_p]
```

```
t = np.linspace(0,900,50000)
```

```
con_ini = [0.01, .015, .03]
n= 643
```

```
sol = odeint(lorenz,con_ini,t, args=(n,))
```

```
x = sol[:, 0]
y = sol[:, 1]
z = sol[:, 2]
```

```
fs = []
gs = []
```

```
for j in range(50000):
    if float(format(sol[:, 0][j], '0.1f')) == 0:
        fs.append(sol[:, 1][j])
        gs.append(sol[:, 2][j])
```

```
plt.figure(figsize=(10,10))
```

```
plt.plot(fs,gs,'.')
```

```
plt.show()
```

Lo mismo se hizo para el atractor de Rössler. Este programa se usó para graficar el espacio fase del modelo Lockta-Volterra.

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from scipy.integrate import odeint
```

```

def df_dt(x, t, a, b, c, d):

    dx = a*x[0] - b*x[0]*x[1]
    dy = - c*x[1] + d*x[0]*x[1]

    return np.array([dx, dy])

a = 0.1
b = 0.02
c = 0.3
d = 0.01

x0 = 40
y0 = 9
conds_iniciales = np.array([x0, y0])

tf = 200
N = 800
t = np.linspace(0, tf, N)

solucion = odeint(df_dt, conds_iniciales, t, args=(a, b, c, d))

x_max = np.max(solucion[:,0]) * 1.05
y_max = np.max(solucion[:,1]) * 1.05

x = np.linspace(0, x_max, 25)
y = np.linspace(0, y_max, 25)

xx, yy = np.meshgrid(x, y)
uu, vv = df_dt((xx, yy), 0, a, b, c, d)
norm = np.sqrt(uu**2 + vv**2)
uu = uu / norm
vv = vv / norm

plt.figure("Campo de direcciones", figsize=(8,5))
plt.quiver(xx, yy, uu, vv, norm, cmap=plt.cm.gray)
plt.plot(solucion[:, 0], solucion[:, 1])
plt.xlim(0, x_max)
plt.ylim(0, y_max)
plt.xlabel('presas')
plt.ylabel('depredadores')

```

REFERENCIAS

- [1] BAZARAA, M.S., J.J. JARVIS y H.D. SHERALI, *Programación lineal y flujo en redes*, segunda edición, Limusa, México, DF, 2004.
- [2] DANTZIG, G.B. y P. WOLFE, «Decomposition principle for linear programs», *Operations Research*, **8**, págs. 101–111, 1960.
- [3] Leslie Lamport, *TeX: a document preparation system*, Addison Wesley, Massachusetts, 2nd edition, 1994.
- [4] *Fast Fourier Transform (FFT)*, www.cmlab.csie.ntu.edu.tw/cml/dsp/training/coding/transform/fft.html, Junio, 2005.
- [5] I. EKELAND, *MATHEMATICS AND THE UNEXPECTED* (UNIVERSITY OF CHICAGO PRESS, CHICAGO USA, 1988).
- [6] E. CHARPENTIER, E. GHYS, A. LENNICK (EDS.) 'THE SCIENTIFIC LEGACY OF POINCARÉ (AMERICAN MATHEMATICAL SOCIETY–LONDON MATHEMATICAL SOCIETY, LONDON UK, 2010).
- [7] F. VERHULST, *HENRI POINCARÉ* (SPRINGER–VERLAG, BERLIN, 2012).
- [8] R. H. ABRAHAM y J. E. MARSDEN, *DYNAMICS: THE GEOMETRY OF BEHAVIOR* (ADDISON-WESLEY, NEW YORK USA, 1992). p. 361
- [9] J. L. LEBOWITZ y O. PENROSE, *PHYSICS TODAY* 26 (1973) 23.

- [10] E. ZERMELO, *COLLECTED WORKS / GESAMMELTE WERKE*, VOL. I, SPRINGER, BERLIN, (2010); VOL II, SPRINGER, BERLIN, (2011), EDITOR PRINCIPAL, HEINZ DIETER EBBINGHAUS; EDITORES ASOCIADOS: AKIHIRO KANAMORI, CRAIG G. FRASER, ENZO DE PELLEGRIN (TRADUCTOR).
- [11] M. D. BOSHERNITZAN, *INVENTIONES MATHEMATICAE* 113 (1993) 617.