Daniel Martínez Ortega

Tarea 4

1.- a) Prueba que las siguientes transformaciones son canónicas para cualquier $\mu$

$q_1 = x\cos\mu + P_y \operatorname{sen}\mu$ $\quad$ $q_2 = y\cos\mu + P_x \operatorname{sen}\mu$

$P_1 = P_x\cos\mu - y\operatorname{sen}\mu$ $\quad$ $P_2 = P_y\cos\mu - x\operatorname{sen}\mu$

Para que una transformación sea canonica tiene que cumplirse que

$$\{q_i, P_j\} = \delta_{ij} \text{ y } \{q_i, q_j\} = 0$$

entonces.

$$\{q_1, P_1\} = \frac{\partial q_1}{\partial x}\frac{\partial P_1}{\partial P_x} - \frac{\partial q_1}{\partial P_x}\frac{\partial P_1}{\partial x} + \frac{\partial q_1}{\partial y}\frac{\partial P_1}{\partial P_y} - \frac{\partial q_1}{\partial P_y}\frac{\partial P_1}{\partial y}$$

$$= \cos^2\mu + \operatorname{sen}^2\mu = 1$$

$$\{q_1, q_1\} = \frac{\partial q_1}{\partial x}\frac{\partial q_1}{\partial P_x} - \frac{\partial q_1}{\partial P_x}\frac{\partial q_1}{\partial x} + \frac{\partial q_1}{\partial y}\frac{\partial q_1}{\partial P_y} - \frac{\partial q_1}{\partial P_y}\frac{\partial q_1}{\partial y}$$

$$= 0$$

$$\{q_2, P_2\} = \frac{\partial q_2}{\partial x}\frac{\partial P_2}{\partial P_x} - \frac{\partial q_2}{\partial P_x}\frac{\partial q_2}{\partial x} + \frac{\partial q_2}{\partial y}\frac{\partial P_2}{\partial P_y} - \frac{\partial q_2}{\partial P_y}\frac{\partial P_2}{\partial y}$$

$$= \cos^2\mu + \operatorname{sen}^2\mu = 1$$

$$\{q_2, q_2\} = 0$$

$$\{P_1, P_1\} = 0$$

$$\{P_2, P_2\} = 0$$

Si $\{q_i, P_j\} \Rightarrow$ si $i, j$ son iguales es $1 \Rightarrow$

$\quad$ " $= \delta_{ij}$ y por lo tanto son canonicas.

b) Encuentra el vector de momento angular (magnitud y dirección)

$$L = I_{ab} w_b = \begin{pmatrix} I_{11} & 0 & 0 \\ 0 & I_{22} & 0 \\ 0 & 0 & I_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} =$$

$$L_1 = I_{11} W_1 = \frac{MA^2}{4} w_0 \operatorname{sen} \Omega t \qquad \Omega = \frac{w_3 (I_1 - I_3)}{I_1}$$

$$L_2 = I_{22} W_2 = \frac{MA^2}{4} w_0 \cos \Omega t$$

$$L_3 = I_{33} W_3 = \frac{MA^2}{2} \frac{w}{2} \cos \alpha$$

El momento ángular tiene dirección en $z'$

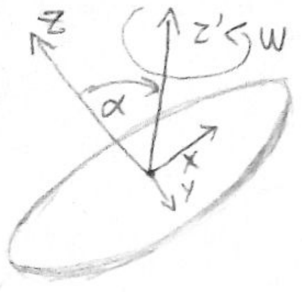
c) ¿Cual es la direccion de la Torca y su magnitud.

Sol: dado que $I_1 = I_2$ y $I_1 \neq I_3$

y como $w$ es constante

$$\frac{dL}{dt} = 0$$

2:



Un disco delgado uniforme de masa M y radio A, rota sin fricción con una velocidad angular uniforme w sobre un eje vertical fijo que pasa sobre su centro y tiende un ángulo alfa con el eje de simetría del disco.

a) Determina los Momentos de Inercia y los Ejes Principales.

$$I_{ij} = \int_V \rho(r) \left(\delta_{ij} x_k^2 - x_j x_j\right) dx\,dy\,dz$$

Dado que el disco es simetrico en los ejes x y y

$$I_{11} = I_{22} \quad y \quad I_{11} \neq I_{33} \qquad \rho = \frac{M}{\pi A^2}$$

$$I_{11} = \rho \iint_0^r y^2\,dx\,dy = I_{22} = \rho \iint_0^r x^2\,dx\,dy$$

$$I_{33} = \rho \int_A x^2 + y^2\,dx\,dy = \rho \int r^3\,dr\,d\phi = \rho\, 2\pi \int_0^A r^3\,dr$$

$$= \rho \frac{2\pi A^4}{4} = \frac{M}{\pi A^2} \frac{2\pi A^4}{4} = \underline{\frac{MA^2}{2}} \implies I_{11} = I_{22}\ y$$

$$I_{11} + I_{22} = I_{33} \Rightarrow \underline{\frac{MA^2}{4} = I_{11}}$$

$$I = \begin{pmatrix} \frac{MA^2}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{MA^2}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{MA^2}{2} \end{pmatrix}$$

como los eigen valores son los mismos que la diagonal.

Los Autovectores son

$A = B \qquad \underline{A = (0, 0, c) = B}$

$\underline{C = (c_1, c_2, 0)}$

b) Encuentra el vector de momento angular (magnitud y dirección)

$$L = I_{ab} w_b = \begin{pmatrix} I_{11} & 0 & 0 \\ 0 & I_{22} & 0 \\ 0 & 0 & I_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} =$$

$$L_1 = I_{11} W_1 = \frac{MA^2}{4} w_0 \operatorname{sen} \Omega t \qquad \Omega = \frac{w_3 (I_1 - I_3)}{I_1}$$

$$L_2 = I_{22} W_2 = \frac{MA^2}{4} w_0 \cos \Omega t$$

$$L_3 = I_{33} W_3 = \frac{MA^2}{2} \frac{w}{2} \cos \alpha$$

El momento angular tiene dirección en $z'$

c) ¿Cual es la direccion de la Torca y su magnitud.

Sol: dado que $I_1 = I_2$ y $I_1 \neq I_3$

y como $w$ es constante

$$\frac{dL}{dt} = 0$$