Proyecto Final

Mecánica Analítica

Jessica Fabiola Heredia Cimental*

División de Ciencias e Ingenierías Campus León, Universidad de Guanajuato,

Loma del Bosque 103, 37150 León Guanajuato, México

(Dated: 12 de noviembre de 2018)

I. INTRODUCCIÓN

El caos mas que una propiedad matemática es una situación donde los sistemas no lineales, por ejemplo, péndulo doble, elástico o forzado por decir los más conocidos, están sujetos a las condiciones iniciales, es decir, en el caso de un péndulo doble si las condiciones iniciales varían en lo más mínimo el sistema no se comportará linealmente, sino que tendrá un movimiento totalmente caótico ya que incluso la variación más pequeña en las condiciones iniciales nos generará caos. [4]

II. TEORÍA DEL CAOS

A. Antecedentes Historicos

Aunque el caos se ha estudiado desde inicios de siglo por un señor llamada Henri Poincaré (1854-1912), hijo de un profesor de Medicina en su ciudad natal Nancy, Francia. Donde Poincaré desde muy joven demostró ser sumamente listo resaltando en el área de matemáticas logrando en 1895 a la edad de 41 años publicar uno de los primeros tratados sistemáticos de la topología a tal punto de decir que él es el creador de la topología algebraica[5]. Pese a que Poincaré fue de los primeros en estudiar el caos en sistemas no lineales no fue hasta la década de 1960 donde el caos tuvo un gran avance gracias a Lorentz quien logró predecir condiciones meteorologías. Esto sucedió ya que Lorentz había desarrollado un conjunto de ecuaciones diferentes que describían el fluido de un flujo bajo ciertos parámetros, dichas ecuaciones se estaban resolvieron numéricamente en una computadora, cuando él noto que los parámetros eran muy sensibles a las condiciones iniciales, así pues, Lorentz encontró que un ligero cambio en los valores iniciales generaba soluciones totalmente diferente en un instante inmediato de tiempo. Tras este descubrimiento Lorentz decidió publicarlo en una revista de meteorología donde en ese momento muy poco científicos se interesaron por el desarrollo de Lorentz entre ellos un matemático que hizo grandes contribuciones en los sistemas dinámicos y James A. Yorke quien estuvo circulando el trabajo de Lorentz pero no fue hasta 10 años después con un desarrollo independientes a cargo de tres matemáticos donde se habla de las propiedades universales de sistemas dinámicos que tienen un movimiento regular o periódico cambian a un movimiento complejo, irregular o caótico. [4]

B. Identificación del Caos

Como se ha explicado anteriormente el caos representa la sensibilidad de las condiciones iniciales en un sistema dinámico, esto fácilmente pue-

*Electronic address: heredia.fabiola07@gmail.com

de observarse en un péndulo doble que bajo ciertos valores para sus condiciones iniciales tiene un movimiento oscilatorio pero que para variaciones incluso muy pequeñas su comportamiento se vuelve caótico. Este efecto donde el sistema tiene un comportamiento totalmente caótico con base a las condiciones es conocido como el efecto mariposa y esta vinculado a la siguiente frase: [1]

"El aleteo de una mariposa en Hong Kong puede provocar una tempestad en New York" [6]

Un ejemplo simple del efecto mariposa se puede observar cuando quemamos una hoja con una lupa, teniendo como variación el lugar donde se lleve a cabo esto, si estas en una acera no pasará nada más allá que la hoja se consuma por completo en cambio si estas en algún bosque esto puede llegar a general un incendio catastrófico.

III. SISTEMA CAÓTICO

A. Péndulo elástico

Un péndulo elástico se conforma de una masa sujeta a un resorte que oscila tal como lo haría un péndulo, el sistema se muestra en la Figura 1

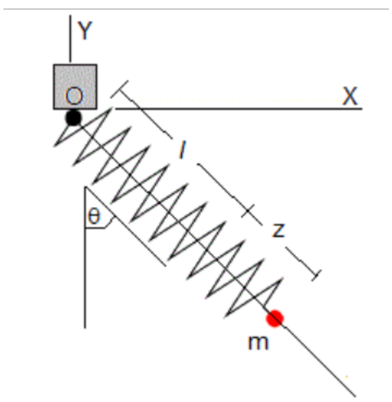


Figura 1: Sistema de un péndulo con resorte (péndulo elástico) [7]

Este sistema consiste en un resorte de longitud l y constante de restitución k que sujeta una masa m y que se puede deformar cierta distancia z.

Para obtener las ecuaciones de movimiento de este sistema partimos de las coordenadas:

$$x = (l + z(t))\sin\theta$$

$$y = -(l + z(t))\cos\theta$$

Y de las expresiones para la energía cinética (T) y potencial (U) del sistema:

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)$$

$$U = -mg(l + z) + \frac{1}{2}kz^2$$

A partir de esto podemos obtener el Lagrangiano del sistema, llegando a la siguiente expresión:

$$L = \frac{m}{2}\Big[(\dot{z}\sin\theta + (l+z)\dot{\theta}\cos\theta)^2$$

$$+(-\dot{z}\cos\theta + (l+z)\dot{\theta}\sin\theta)^2 + mg(l+z) - \frac{1}{2}kz^2$$

Y aplicando la ecuación de Euler-Lagrange

$$\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) = 0$$

Llegamos a las ecuaciones de movimiento de nuestro sistema, donde $\ddot{\theta}$ depende de z, esto sucede de forma análoga para $\ddot{z}$ teniendo un sistema de ecuaciones diferenciales acopladas.

$$\ddot{z} = g\cos\theta + (l+z)\dot{\theta}^2 - \frac{k}{m}z$$

$$y$$

$$\ddot{\theta}(l+z) + 2\dot{\theta}\dot{z} + g\sin\theta$$

***El desarrollo completo se presentá en el ANEXO IA.*

IV. MAPEOS

A. Mapeo de Hénon

El mapa de Hénon es un sistema dinámico en el tiempo y es de los sistemas dinámicos que más se han estudiado. Su comportamiento se basa en tomar un punto (x_n, y_n) en el plano en el que se encuentre para después mapearlo en un nuevo punto. Se rige por las ecuaciones:

$$x_{n+1} = 1 - ax_n^2 + y_n$$

$$y_{n+1} = bx_n$$

Depende de los parámetros del sistema a y b los cuales tienen un valor establecido de 1.4 y 0.3 respectivamente.

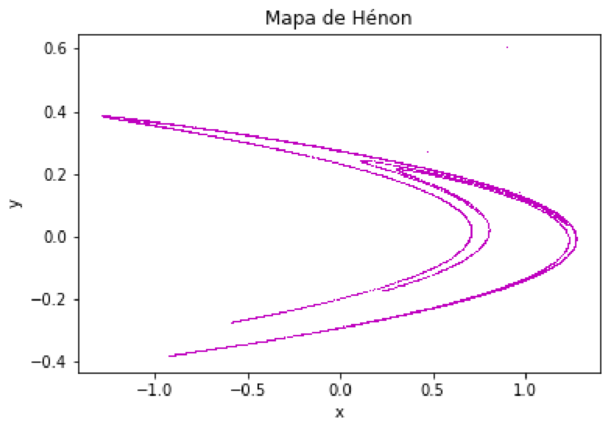


Figura 2: Mapa de Hénon

V. FRACTALES

Se define como fractal a una figura geométrica que resulta del auto-ensamblaje de muchos componente idénticos, siguiendo el principio de organización. Tiene una forma que parece irregular o fragmentada, Su nombre proviene del latín *fractus* (fragmentado) y fue propuesto por el matemático Benoît Mandelbrot en 1975. La magia del fractal radica en que no importa la distancia a la que se observe, este conserva su patrón.

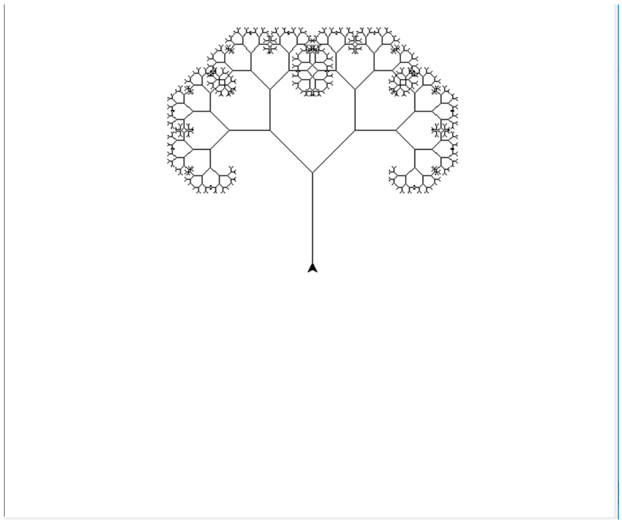


Figura 3: Fractal de árbol

VI. ATRACTORES EXTRAÑOS

Una definición simple de un atractor es que es un grupo de puntos fijos en el espacio fase por los cuales pasa la trayectoria no estable iniciada por las condiciones iniciales. Existe un tipo de atractores relacionados al caos y generalmente son llamados como atractores extraños [3].

A. Atractor de Lorentz. [4]

Este es probablemente es atractor más conocido y fue descubierto por Lorentz quien en su investigación meteorológica donde describe las ecuaciones que gobiernan a la atmosfera las cuales son deterministas sin embargo los aspectos que rigen la atmosfera son altamente impredecibles.
Las ecuaciones que describen el atractor de Lorentz son:

$$\dot{x} = \sigma(y - x)$$

$$\dot{y} = -xz + rx - y$$

$$\dot{z} = xy - bz$$

Donde σ, b y r son parámetros de sistema y tiene un valor fijo de 10, 8/3 y 28 respectivamente.

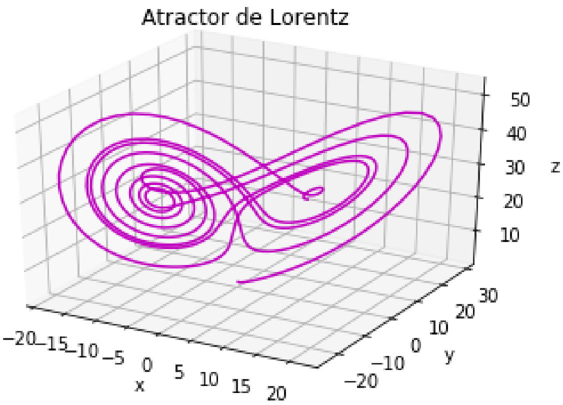


Figura 4: Atractor de Lorentz

B. Atractor de Rössler [4]

Fue descubierto por Otto Rössler quién se dispuso a buscar el ejemplo más simple de un sistema caótico llegando a las ecuaciones.

$$\dot{x} = -(z + y)$$

$$\dot{y} = x + ay$$

$$\dot{z} = b + (x - c)z$$

donde a=0.15, b=0.20 y c=10 son parámetros de nuestro sistema, las ecuaciones de (x,y) son equivalentes a las de un oscilador armónico amortiguado lineal y todo lo no lineal proviene de el termino xz en la tercera ecuación ($\dot{z}$).

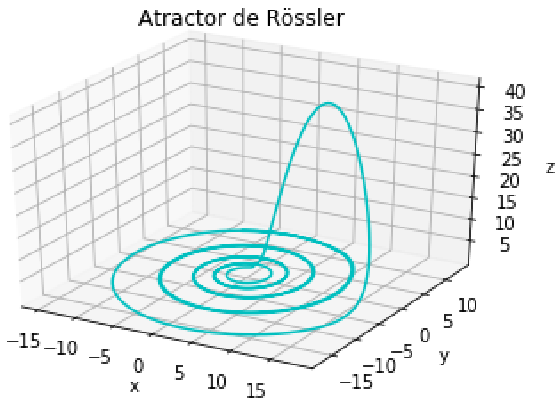


Figura 5: Atractor de Rössler

VII. SECCIÓN DE POINCARÉ

La sección de Poincaré es una técnica desarrolla por Henri Poincaré para describir el movimiento de un sistema caótico tridimensional donde lo que se busca el evitar los obstáculos que surgen al ir trazando orbitas en una región tridimensional por lo que la magia de esta técnica en graficar en las tres dimensiones y tomar únicamente el plano perpendicular a z. Como ya se dijo para encontrar la sección de Poincaré necesitamos una gráfica tridimensional donde en el eje x este la solución al sistema y en el eje y la primera derivada, es decir nos quedará el espacio fase mientras que en el eje z se graficará ωt' donde ω corresponde a la frecuencia angular del sistema. Dependiendo de las coordenadas del sistema:

$$x \longrightarrow \theta$$
$$y \longrightarrow \dot{\theta}$$
$$z \longrightarrow \omega t'$$

VIII. EXPONENTES DE LYAPUNOV

Si se quiere conocer la dependencia que hay entre las condiciones iniciales y un sistema caótico se pueden utilizar los exponentes de Lyapunov los cuales básicamente te dicen los valores eventuales de un estado X_n n momentos antes de que sucedieran las condiciones iniciales, es decir, estos exponentes te representan el crecimiento exponencial por unidad de tiempo entre dos estados anteriores a las condiciones iniciales. Este exponente se representa con la letra λ y fue establecido por el matemático Ruso A. M. Lyapunov (1857-1918). Dicho exponente tiene la forma.

$$\lambda = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} -1ln \left| \frac{df(x_i)}{dx} \right| \tag{1}$$

IX. CONCLUSIÓN

El estudio de fractales y el desarrollo en la teória del caos ha sido de gran impacto en muchas áreas en el desarrollo humano, desde la física hasta la medicina, pasando por la biología, ingeniería, economía, entre otras. Podemos mencionar algunos casos relevantes de aplicación, en física con el estudio e interpretación de resultados enecuaciones de orden superior, los fractales resultan de suma reelevancia en el área de la sismología y en sistemas de imágenes (análisis y procesamiento de imágenes); un caso sumamente impactante de aplicación es en la biología, ya que de multiples órganos se pueden plantear sistemas dinámicos los cuales se pueden estudiar a profundidad con estos modelos.

[1] Thornton, S., Marion, J. (2014). Classical dynamics of particles and systems (15th ed.). Andover: Cengage Learning.

[2] Jose, J., Saletan, E. (2013). Classical dynamics (6th ed.). Cambridge: Cambridge University Press.

[3] Goldstein, H., Poole, C., Safko, J. (2002). Classical mechanics (13th ed.). San Francisco: Addison-Wesley.

[4]

[5] *Sitio web:* `https:paginas.matem.unam.mxcpri etobiografias-de-matematicos-p-t226-poincare-henri`

[6] *Sitio web:* `https:www.nationalgeographic.escien cia201711el-efecto-mariposa`

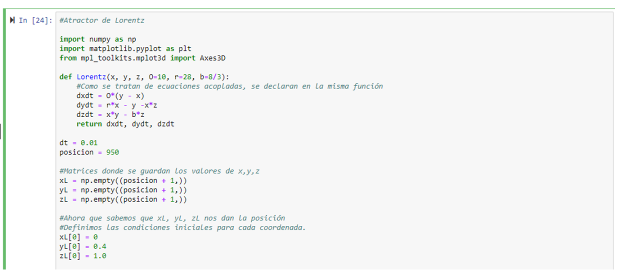
[7] *Sitio web:*`http:www.sc.ehu.essbwebfisi ca3oscilacionespendulo_elasticopendulo_elast`
Referencia python atractores:

[8] *Sitio web:* `https:matplotlib.orgexamples mplot3dlorenz_attractor.html`
Referencia python Mapa Hénon

[9] *Sitio web:* `https:www.dreamincode.netforums topic365205-Henon-Map`
Refrencia python fractal

[10] *Sitio web:* `http:www.academia.edu4266396 Creando_arboles_fractales_con_Turtle_en_Python`

X. ANEXO II. CODIGOS EN PYTHON



```
In [24]: #Atractor de Lorentz

import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from mpl_toolkits.mplot3d import Axes3D

def Lorentz(x, y, z, O=10, r=28, b=8/3):
    #Como se tratan de ecuaciones acopladas, se declaran en la misma función
    dxdt = O*(y - x)
    dydt = r*x - y -x*z
    dzdt = x*y - b*z
    return dxdt, dydt, dzdt

dt = 0.01
posicion = 950

#Matrices donde se guardan los valores de x,y,z
xL = np.empty((posicion + 1,))
yL = np.empty((posicion + 1,))
zL = np.empty((posicion + 1,))

#Ahora que sabemos que xL, yL, zL nos dan la posición
#Definimos las condiciones iniciales para cada coordenada.
xL[0] = 0
yL[0] = 0.4
zL[0] = 1.0
```

```
#Para obtener los demas puntos, utilizamos un ciclo for
for i in range(posicion):
    dxdt, dydt, dzdt = Lorentz(xL[i], yL[i], zL[i])
#el primer punto corresponde a las condiciones inciales
#Para los siguiente puntos tenemos i+1
    xL[i + 1] = xL[i] + (dxdt * dt)
    yL[i + 1] = yL[i] + (dydt * dt)
    zL[i + 1] = zL[i] + (dzdt * dt)

#Para graficar.
fig = plt.figure()
G = fig.gca(projection='3d')

G.plot(xL, yL, zL, color='m')
G.set_xlabel("x")
G.set_ylabel("y")
G.set_zlabel("z")
G.set_title("Atractor de Lorentz")

plt.show()
fig.savefig("Lorentz.png")
```

```
#Atractor de Rössler
#Se hace exactamente lo mismo para el atractor de Rössler cambiando las ecuaciones

def Rossler(x, y, z, a=0.15, b=0.20, c=10):
    #Como se tratan de ecuaciones acopladas, se declaran en la misma función
    dxdt = -(z + y)
    dydt = x + a*y
    dzdt = b + (x - c)*z
    return dxdt, dydt, dzdt

dt = 0.01
posicion = 5000

#Matrices donde se guardan los valores de x,y,z
#Parte obtenida de [10]
xR = np.empty((posicion + 1,))
yR = np.empty((posicion + 1,))
zR = np.empty((posicion + 1,))

#Ahora que sabemos que xL, yL, zL nos dan la posición
#Definimos las condiciones iniciales para cada coordenada.
xR[0] = 0
yR[0] = 1.9
zR[0] = 1.3
```

```
#Para obtener los demas puntos, utilizamos un ciclo for
for i in range(posicion):
    dxdt, dydt, dzdt = Rossler(xR[i], yR[i], zR[i])
#el primer punto corresponde a las condiciones inciales
#Para los siguiente puntos tenemos i+1
    xR[i + 1] = xR[i] + (dxdt * dt)
    yR[i + 1] = yR[i] + (dydt * dt)
    zR[i + 1] = zR[i] + (dzdt * dt)

#Para graficar.
fig = plt.figure()
R = fig.gca(projection='3d')

R.plot(xR, yR, zR, color='c')
R.set_xlabel("x")
R.set_ylabel("y")
R.set_zlabel("z")
R.set_title("Atractor de Rössler")

plt.show()
fig.savefig("Rossler.png")
```

In [17]:

```
from pylab import *

def HenonMap(a,b,x,y):
    return 1.0 + y - a *x*x, b * x

# Parametros de la función y número de pasos
a = 1.4
b = 0.3
pasos = 10000

# Initial Condition
xtemp = 0.9
ytemp = 0.6

x = [xtemp]
y = [ytemp]

for n in range(pasos):
  xtemp, ytemp = HenonMap(a,b,xtemp,ytemp)
  x.append( xtemp )
  y.append( ytemp )

# Plot the time series
plot(x, y, 'm,')
xlabel('x')
ylabel('y')
title('Mapa de Hénon')
savefig('henon.png')
```

In [*]:

```
#Fractal simple
import turtle
def fract(largo,ram):
    if ram==0:
        return #Condición de salida para el bucle
    else:
        turtle.forward(largo) #inicio del árbol
        turtle.left(45) #Giramos 45 grados a la izq para la primer rama
        fract(largo*2/3,ram-1) #Función recursiva con menor longitud e iteraciones
        turtle.right(90) #Giramos para la segunda rama
        fract(largo*2/3,ram-1)
        turtle.left(45)
        turtle.back(largo)
turtle.speed(0)
turtle.left(90)
fract(100,10)
turtle.done()
```