División de Ciencias e Ingenierías

Proyecto final

Jose Salvador Negrete Serrato

11 de noviembre de 2018

1. Introducción

Para analizar el concepto de caos, es necesario conocer la historia detrás de él, de modo que se pueda comprender el porqué del surgimiento del término y con ello, manejar dicho concepto para comprender sistemas caóticos.

El caos puede encapsularse en una área más grande, que es la dinámica. Partiendo de esto, uno de los problemas importantes en dinámica era el problema de los dos cuerpos, que fue desarrollado de manera correcta en su tiempo, sin embargo, las cosas se complicaron cuando se trató el problema de los tres cuerpos, el cual parecía no tener una solución.

Poincaré llevó a cabo la geometría necesaria para tratar el problema de los tres cuerpos, además de ser el que pensó en la idea del caos para aquellos sistemas que a lo largo del tiempo cambian drásticamente dependiendo de las condiciones iniciales que uno tiene, por más pequeÃśo que el cambio en dichas condiciones fuera.

Fue entonces que Edward Norton Lorenz desarrolló su atractor extraño, el cual precisamente era un sistema caótico, ya que, mediante un ligero cambio en las condiciones iniciales, obtenía resultados totalmente diferentes. Fue entonces que decide llevar a cabo la gráfica de su sistema, con lo que obtiene una estructura distintiva en la forma de una mariposa. No fue sino hasta tiempo después del desarrollo del atractor de Lorenz que la comunidad científica se interesó por los sistemas caóticos, siendo que esta área de la física comenzó a ser desarrollada no hace mucho tiempo, de manera que su estudio es aún de interés. [6]

Gracias al concepto del caos, se han podido desarrollar sistemas tales como atractores, fractales, además del estudio del caos en áreas como el estudio del clima.

2. MAPEOS

El término mapeo hace referencia al concepto de función en el sentido de que el mapeo depende de un valor al cual le corresponde otro, de manera que estos valores puedan representarse en una gráfica. Existen diversos tipos de mapeo, pero por supuesto, los mapeos que son de interés para el desarrolló de este escrito tienen que ver con dinámica, de manera en la que un mapeo puede expresar la evolución de un sistema.

Uno de los tipos de mapeo de interés para este ensayo es el mapeo logístico, el cual fue popularizado por Robert M. May en un artículo publicado por él en 1976, titulado *Simple mathematical models with very complicated dynamics*. En dicho artículo, Robert M. May expresa que existen varios campos en los cuales el uso de ecuaciones diferenciales simples pueden describir perfectamente un sistema, pero, que sin embargo, incluso el uso de ecuaciones no lineales sencillas puede dar lugar a un sistema caótico y precisamente una de las ecuaciones que da lugar a algo caótico es la ecuación logística [5], la cual tiene la forma:

$$X_{t+1} = aX_t(1 - X_t) \tag{2.1}$$

El mapeo logístico consiste en la gráfica de X_{t+1} contra X_t, de manera que se observa una parábola. Con ello, se lleva a cabo la grafica de una recta cuyo fin es el de ayudar a representar los diferentes valores de X_t mediante lineas rectas.

Está claro que existirán valores muy diferentes para diferentes valores de a en la ecuación logística, es entonces que surge un interés por comparar los diferentes valores de X_n dependiende del factor a. La manera en la que se lleva a cabo este procedimiento es mediante el diagrama de bifurcación.

3. SECCIONES DE POINCARÉ

Se mencionó en la introducción que, para el problema de los tres cuerpos, que no tenía una solución en la forma de una ecuación como sí lo había para el caso de dos cuerpos, Poncairé desarrolló un método para tratar este problema, además de una aplicación general en el campo de la dinámica, las secciones de Poincaré.

La idea general detrás de dichas secciones es la de simplificar determinados sistemas mediante su estudio en un plano de menor dimensión. Por ejemplo, puede haber un flujo en tres dimensiones, que, a lo largo de tiempo, pasa por puntos que tienen una componente similar en algún valor de las coordenadas usadas para el problema. Entonces se lleva a cabo la gráfica de dichos puntos en un plano en segunda dimensión, simplificando entonces el problema y haciendo más sencillo el análisis de datos, esta gráfica de menor dimensión es a lo que se le conoce como sección de Poincaré.

4. Atractores extraños

Los atractores son un conjunto de números que definen hacia donde un sistema se dirigirá en el tiempo. La gráfica de estos atractores presentan trayectorias con características específicas tales que realmente sea un atractor, una de estas es la cercanía entre sus trayectorias trazadas. Los atractores, al ser producto del caos, presentan una sensibilidad a las condiciones iniciales.

Por otro lado, los atractores extraÃśos presentan una característica interesante que los separa de los atractores convencionales, y es que dichos atractores presentan una especie de estructura fractal (pareciera que las trayectorias se repiten a lo largo de la evolución del sistema). [3]

El ejemplo más clásico de atractor extraño que hay es el atractor de Lorenz, el cual consiste de tres ecuaciones diferenciales no lineales y que se encuentra en varios modelos relacionados a la ciencia.

Las ecuaciones que definen al atractor de Lorenz son:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = a(x-y) \\ \frac{dy}{dt} = x(b-z)-y \\ \frac{dz}{dt} = xy-cz \end{cases} \tag{4.1}$$

Existen valores de a, b y c para los cuales este sistema presenta soluciones caóticas, estos valores son a = 10, b = 28 y c = 2.666. La figura 4.1 ilustra el atractor de Lorenz para el caso anteriormente mencionado.

Por otro lado, existen otros atractores extraños como es el caso del atractor de RÍosler, que se define por diferentes ecuaciones a las de Lorenz:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -y-z \\ \frac{dy}{dt} = x+ay \\ \frac{dz}{dt} = b+z(x-c) \end{cases} \tag{4.2}$$

La figura 4.2 muestra al atractor de Rosler con a = 0.1, b = 0.1, 14.

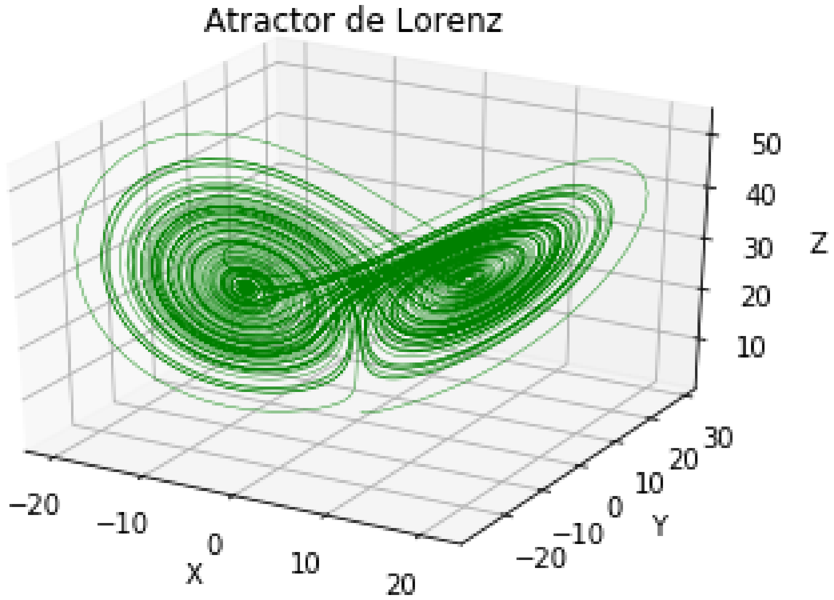

Figura 4.1: Atractor de Lorenz con valores a = 10, b = 28 y c = 2.666

5. Exponentes de Lyapunov

Los exponentes de Lyapunov surgen a partir del trabajo de Aleksandr Liapunov y sirven, esencialmente, como una medida del caos que presenta determinado sistema. La idea que existe detrás de dicho exponente es que en un sistema caótico, a lo largo del tiempo, los sujetos de estudio en un sistema se .alejaran"de entre ellos, dando lugar a lo conocido como caos, es entonces que aparecen los exponentes de Lyapunov, a manera de medir que tan rápido o que tan lento se alejan los sujetos de estudio entre ellos, mas no necesariamente indican el caos que presenta un sistema. [1]

Se puede expresar al exponente de Lyapunov de x_1 como:

$$h(x_1) = \lim_{n\to\infty} (\frac{1}{n}) \sum_{i=1}^{n} \ln|f'(x_i)| \tag{5.1}$$

Desde luego, siendo que el caos está presente en muchas áreas diferentes, tales como biología, economía, meteorología, entre otras y dado que los exponentes de Lyapunov son un indicativo importante del caos en un sistema, está claro que existe un constante uso de estos exponentes en todas esas áreas.

Se tiene un consenso acerca de que un exponente de Lyapunov positivo es indicativo de la presencia de caos en un sistema.

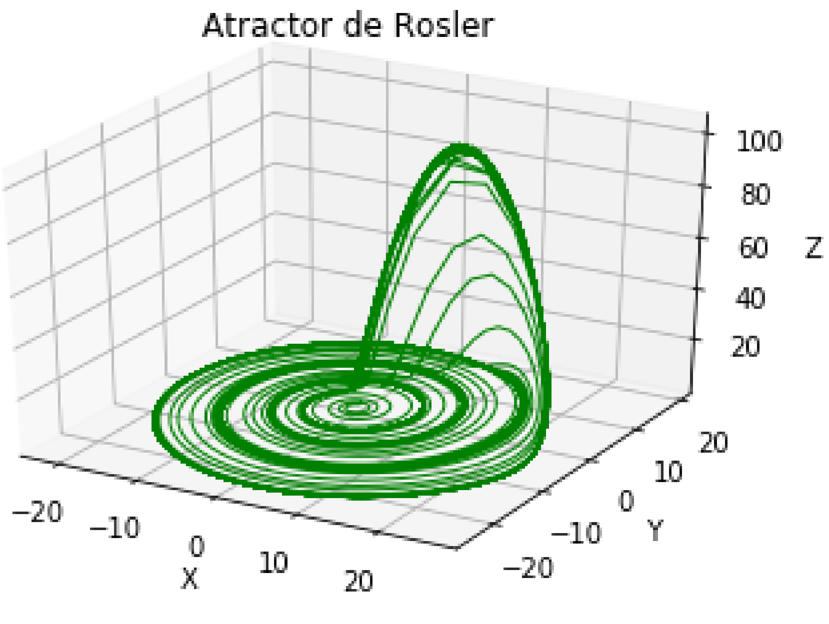

Figura 4.2: Atractor de RÍosler con valores a = 0.1, b = 0.1 y c = 14

6. FRACTALES

Para desarrollar este tema, es necesario tener una definición de lo que es un fractal, esto para tener una idea más o menos clara de lo que se trata en esta sección. El término fractal surge como sugerencia de Benoît Mandelbrot (matemático polaco con nacionalidad francesa), quien describe en *La Geometría Fractal de la Naturaleza* que la elección del término proviene de que fractal viene de una raíz que signfica romper en pedazos.º "fragmentado", de manera que describe con este término a lo conocido como un fractal como algo roto en varias partes. Estrictamente, Mandelbrot define a un fractal como ün conjunto cuya dimensión de Hausdorff-Besicovitch es estrictamente mayor que su dimensión topológica".
[4]

A esto le sigue el tener bien definido lo que uno reconoce como *dimensión*. Usualmente se tienen en cuenta dimensiones que coinciden como es el caso de la geometría euclidiana, sin embargo, la gran mayoría de fractales se definen en base a dimensiones que no necesariamente coinciden. Mandelbrot lo reconoce como conjuntos *dimensionalmente discordantes*.

Una simple revisión a los conceptos utilizados en el estudio de los fractales muestra como su estudio dista de lo que uno prodría considerar como geometría convencional, abriendo paso a la geometría fractal, a forma de estudiar las propiedades fractales de manera adecuada.

Uno de los ejemplos que Mandelbrot toma al inicio para desarrollar la idea de los fractales es la pregunta *¿Cuánto mide la costa de Bretaña?*, entonces lleva a cabo el desarrollo de varias ideas para medir de manera adecuada la costa de la isla de Bretaña, y es a medida de esta pregunta, que surge como sugerencia el uso de fractales para responder a esta pregunta, siendo incluso que se tiene medido el valor de dimensión de Hausdorff-Besicovitch a día de hoy.

Cabe aclarar también la existencia de varios tipos diferentes de fractales, entre ellos, los clasificados fractales deterministas y aquellos que son aleatorios/naturales.

7. Conclusión

El caos forma parte de la dinámica como una sección de esta que trata problemas donde los sistemas son sensibles a las condiciones iniciales y a los cambios que tengan éstas, por más pequeÃśo que sea el cambio. Por supuesto, el estudio del caos es importante, ya que da lugar a que comprendamos de manera adecuada los fenómenos de este estilo.

En este ensayo se ha hecho mención de alguna de las aplicaciones que tienen varias de las partes que conforman la idea del caos, y es que inclusive puede aplicarse en situaciones como la prediccón del clima, que si se piensa de manera detenida, mucha gente tiende a pensar que los meteorólogos no suelen hacer bien su trabajo, pues en ocasiones su presentación de como estará el clima en determinado día es errada, pero esto se debe a que una predicción del clima es complicada, debido a que el clima por si solo es un sistema caótico, dando lugar a que el más mínimo cambio en las variables provoca un cambio radical en el clima de un momento para otro, de modo que con ayuda del concepto de caos, podemos entender el porqué de estas situaciones.

De igual manera, existen muchas aplicaciones en distintos ambitos del caos, como el crecimiento de una población, en el caso de la biología, donde el mapeo logístico juega un papel importante. También tiene aplicaciones en otros tipos de sistemas caóticos, como es el caso de la economía.

A manera de reflexión cabe aclarar que física y matemáticas de este tipo fueron desarrollados apenas en el siglo pasado, incluyendo los fractales, como nueva rama de la geometría. Esto demuestra que, por supuesto, existen muchas áreas inexploradas de la física para la humanidad y es importante buscar en la física situaciones como el caos, para poder así, hacer nuevos descubrimientos y avanzar en las ciencias, ya que como se ha visto, algo como la dinámica, que parecería tener un sentido solo en el área de la física, podemos ver que herramientas que se usan para describir sistemas en esta área pueden usarse de igual forma en otras áreas a manera de tratar de solucionar problemas importantes.

8. Programas utilizados

Ambos códigos utilzados para la sección de atractores se encuentran basados en el código mostrado en la página desarrollada por John Hunter, Darren Dale, Eric Firing, Michael

Droettboom y el Matplotlib development team [2].

Listing 1: Programa utilizado para general el atractor de Lorenz

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from mpl_toolkits.mplot3d import Axes3D


def lorenz(x, y, z, a=10, b=28, c=2.666):
    xpunto = a*(y - x)
    ypunto = x*(b - z) - y
    zpunto = x*y - c*z
    return xpunto, ypunto, zpunto


dt = 0.01
stepCnt = 10000

posicionx = np.empty((stepCnt + 1,))
posiciony = np.empty((stepCnt + 1,))
posicionz = np.empty((stepCnt + 1,))

posicionx[0], posiciony[0], posicionz[0] = (0., 1., 1.)

for i in range(stepCnt):

xpunto, ypunto, zpunto = lorenz(posicionx[i], posiciony[i], posicionz[i])
posicionx[i + 1] = posicionx[i] + (xpunto * dt)
posiciony[i + 1] = posiciony[i] + (ypunto * dt)
posicionz[i + 1] = posicionz[i] + (zpunto * dt)

fig = plt.figure()
ax = fig.gca(projection='3d')

ax.plot(posicionx, posiciony, posicionz, lw=0.4, color='g')
ax.set_xlabel("X")
ax.set_ylabel("Y")
ax.set_zlabel("Z")
ax.set_title("Atractor de Lorenz")

plt.show()
```

Listing 2: Programa utilizado para generar el atractor de Rosler

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from mpl_toolkits.mplot3d import Axes3D


def lorenz(x, y, z, a=0.1, b=0.1, c=14):
    xpunto = -y - z
    ypunto = x + a*y
    zpunto = b + z*(x - c)
```

```
    return xpunto, ypunto, zpunto


dt = 0.05
stepCnt = 10000

posicionx = np.empty((stepCnt + 1,))
posiciony = np.empty((stepCnt + 1,))
posicionz = np.empty((stepCnt + 1,))

posicionx[0], posiciony[0], posicionz[0] = (0., 1., 1.)

for i in range(stepCnt):

xpunto, ypunto, zpunto = lorenz(posicionx[i], posiciony[i], posicionz[i])
posicionx[i + 1] = posicionx[i] + (xpunto * dt)
posiciony[i + 1] = posiciony[i] + (ypunto * dt)
posicionz[i + 1] = posicionz[i] + (zpunto * dt)

fig = plt.figure()
ax = fig.gca(projection='3d')

ax.plot(posicionx, posiciony, posicionz, lw=1, color='g')
ax.set_xlabel("X")
ax.set_ylabel("Y")
ax.set_zlabel("Z")
ax.set_title("Atractor de Rosler")

plt.show()
```

REFERENCIAS

[1] BRICMONT, J. https://cdn.uclouvain.be/public/Exports%20reddot/math/documents/GLOBAL_2111.pdf, 2009.

[2] JOHN HUNTER, DARREN DALE, E. F. M. D., AND THE MATPLOTLIB DEVELOPMENT TEAM. https://matplotlib.org/examples/mplot3d/lorenz_attractor.html, may 2017.

[3] KARTOFELEV, D. https://www.ioc.ee/~dima/mittelindyn/Loeng_10.pdf, 04-Aug-2018.

[4] MANDELBROT, B. *La Geometria Fractal de la Naturaleza.* Tusquets Editores, 2003. 19-32.

[5] MAY, R. Simple mathematical models with very complicated dynamics. *Nature 261* (1976), 459–460.

[6] STROGATZ, S. H. *Nonlinear Dynamics and Chaos: with applications to physics, biology, chemistry, and engineering.* Addison-Wesley Publishing Company, 1994. 2-3.