LA TEORIA DEL CAOS

UNIVERSIDAD DE GUANAJUATO

DIVISIÓN DE CIENCIAS E INGENIERÍAS, CAMPUS LEÓN

PROYECTO FINAL

JOSUÉ HUMBERTO COREÑO GONZÁLEZ

Resumen

En este documento se expone una teoría que abarca más allá de las teorías clásicas acostumbradas en libros de texto a tratar, en la que la mayoría de los fenómenos físicos pueden ser explicados, con el detalle de que son meramente no lineales, algo que incomodó a la mayoría de los teóricos de hace cien años dado a que se esperaba que la naturaleza no fuese tan complicada, sino que pudiese ser resumida, en mejores palabras, determinista y reduccionista. En los modelos caóticos expuestos en este documento examinaremos a detalle sobre sus principales características y como se manifiestan de manera física (real).

Introducción

La teoría del caos, también anteriormente en aspecto termodinámico conocido como la teoría de las estructuras disipativas, tiene inicialmente como representante al químico belga Ilya Prigogine, y plantea que el mundo no sigue estrictamente el modelo del reloj, previsible y determinado, sino que tiene aspectos caóticos. Si llevamos esto a modelos no clásicos, donde ya no se vuelve determinista sino probabilístico, el observador no es quien crea la inestabilidad o la imprevisibilidad con su ignorancia: ellas existen de por sí, y un ejemplo típico el clima (cualquier tipo de fenómeno natural que pueda ser analizado con detalle a profundidad). Los procesos de la realidad dependen de un enorme conjunto de circunstancias inciertas, que determinan por ejemplo que cualquier pequeña variación en un punto del planeta, genere en los próximos días o semanas un efecto considerable en el otro extremo de la tierra.

Se debe tener en cuenta que en física muchas veces se habla del caos de una forma un tanto confusa, asociando la palabra caos con desorden, descontrol, aleatoriedad. Pero lo mejor es verlo con un ejemplo; el más claro es el de las bolas de billar en el primer movimiento. Las condiciones iniciales (posiciones, velocidades y dirección de movimiento) son prácticamente iguales. Sin embargo, poder predecir la posición de las bolas es prácticamente imposible.

A mediados de este siglo, la evolución de la ciencia se vio alterada por una reflexión comparable como que conocemos el movimiento de los planetas, la composición de las moléculas, los métodos para explotar la energía nuclear, pero ignoramos todo lo demás. La búsqueda de una explicación a los fenómenos naturales que observamos, complejos e irresolubles mediante fórmulas, configuró lo que se conoce como Teoría del Caos, una disciplina que, si bien no niega el mérito de la ciencia clásica, propone un nuevo modo de estudiar la realidad.

Entonces, se observa que en sistemas complejos y sistemas dinámicos son muy sensibles a las variaciones en las condiciones iniciales. Pequeñas variaciones en dichas condiciones iniciales pueden implicar grandes diferencias en el comportamiento futuro, imposibilitando la predicción a largo plazo. Esto sucede, aunque estos sistemas son en rigor deterministas, es decir; su comportamiento puede ser completamente determinado conociendo sus condiciones iniciales.

Saliendo del contexto físico, también se presenta en otras ciencias, tal es el caso "La teoría del caos en psicología". Sabemos que la conducta humana puede presentársenos en diversos grados como caótica y desorganizada. La teoría del caos viene a sugerirnos un punto de vista muy diferente: el comportamiento caótico tiene valor en sí mismo, tiene la misma entidad, el mismo status ontológico que el orden, y nuestra actitud hacia ese caos ya no consistirá en soslayarlo intentando buscar un orden subyacente, sino en intentar verlo como parte de un proceso que proviene de un orden previo y que desemboca en un nuevo orden.

A finales del siglo pasado, el matemático y físico Henri Poincaré cuestionó la perfección newtoniana en relación con las órbitas planetarias, lo que se conoce como el problema de los tres cuerpos. Planteaba una atracción gravitatoria múltiple, que hasta entonces se resolvía con las leyes de Newton y la suma de un pequeño valor que compensara la atracción del tercer elemento. Poincaré descubrió que, en situaciones críticas, ese tirón gravitatorio mínimo podía realimentarse hasta producir un efecto de resonancia que modificara la órbita o incluso lanzara el planeta fuera del sistema solar.

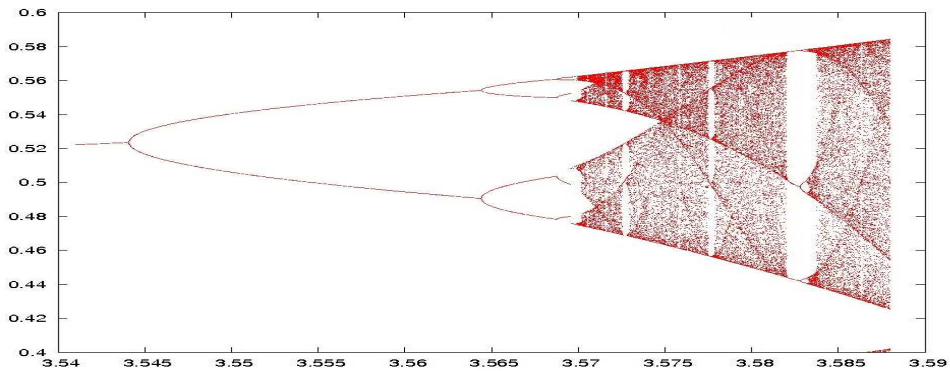
Los procesos de realimentación se corresponden en física con las ecuaciones iterativas, donde el resultado del proceso es utilizado nuevamente como punto de partida para el mismo proceso. De esta forma se constituyen los sistemas no lineales, que abarcan el 90% de los objetos existentes. El ideal clásico sólo contemplaba sistemas lineales, en los que efecto y causa se identifican plenamente; se sumaban las partes y se obtenía la totalidad. Poincaré introdujo el fantasma de la no linealidad, donde origen y resultado divergen y las fórmulas no sirven para resolver el sistema.

Mapeo logístico:

O conocido como la Aplicación logística puede expresarse matemáticamente como:

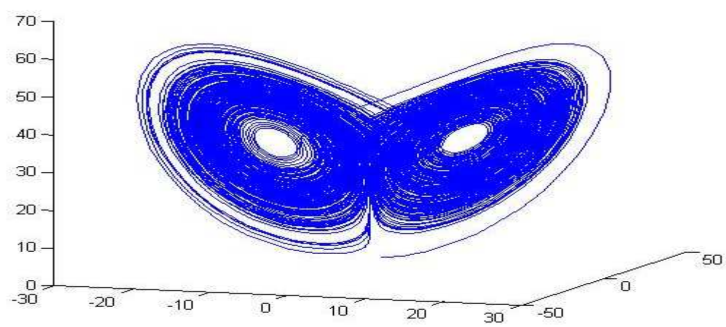
$$x_{n+1} = rx_n(1 - x_n)$$

Este modelo es a menudo citado como un ejemplo de representación de lo complejo que puede ser un comportamiento caótico, aunque se parta de un modelo de sencilla expresión. El hecho de que la iteración del cálculo para distintos valores del parámetro r condujese a soluciones complejas, que parecían aleatorias en su comportamiento pese a tratarse de un modelo determinista muy sencillo causó gran impacto a nivel científico, y fue uno de los detonantes del estudio de lo que se llamaría teoría del caos. Por lo que el mapeo sufre variaciones según los distintos valores de r.

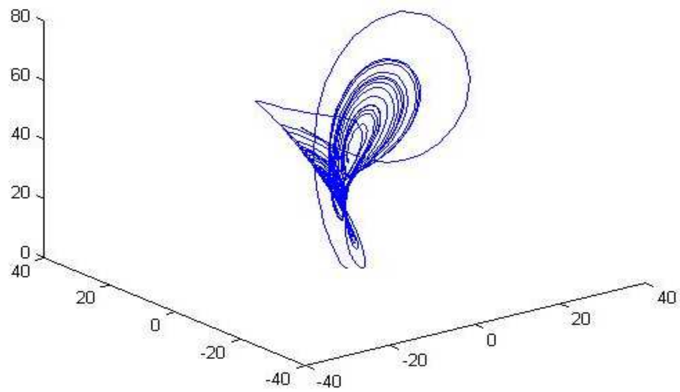


Gráfica de bifurcación

El mapeo sufre una gran cantidad de transformaciones. Saliendo de una estabilidad esperada, pasa por sucesivas duplicaciones, no tan esperadas, hasta llegar a zonas de aparente desorden dentro de las cuales hay ventanas con un poco de orden… y así de manera infinita. Uno de los caminos para llegar a ese destino se llama duplicación de periodos. Por este camino transitan muchos fenómenos, algunos más complejos que otros. Para entender al caos determinista, vale mucho la pena revisar la forma en que se llega a él a través de ésta ruta.



Atractor de Lorentz



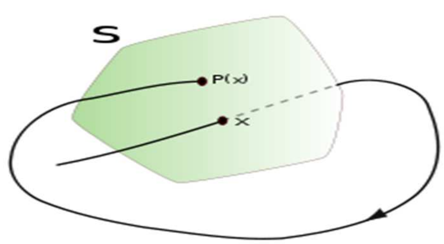
Secciones de Poincaré

La idea esencial de un mapa de Poincaré se reducen a la forma en que se representan en un sistema dinámico. Para ello, el sistema tiene que tener ciertas propiedades, es decir, para volver a algunos de la región en el espacio de estado a partir de tiempo al tiempo. Esto se cumple si la dinámica es periódica, pero también funciona con la dinámica caótica.

Para dar un ejemplo simple, en lugar de analizar toda la trayectoria de un planeta, que sólo mira a su posición una vez al año, más precisamente, cada vez que se cruza (con una dirección dada) un avión que es perpendicular al plano en el que los planetas trayectorias mentira, que contiene el central del cuerpo celeste alrededor de la cual el planeta gira.

Este es un plano de una sección de Poincaré de la órbita de este planeta, como es transversal al flujo del sistema (que va a lo largo del planeta trayectorias).

En matemáticas, y en particular en el campo de sistemas dinámicos, una aplicación de Poincaré o aplicación de primer retorno es una aplicación definida no en el espacio de estados del sistema, sino en un subespacio de dimensión inferior llamado sección de Poincaré. En la sección de Poincaré S, la aplicación de Poincaré P lleva el punto x de en el punto P(x).



Dicha aplicación lleva cada punto de dicha sección en el primer punto en el que la órbita que lo contiene retorna a la misma. Fue presentada por Henri Poincaré en 1881, quien la aplicó al estudio del problema de los tres cuerpos.

Se exige que la sección de Poincaré sea transversal al flujo del sistema, Dicha transversalidad plasma la exigencia de que las órbitas que comienzan en la sección fluyan a través de la misma y no paralelas a ella.

Una aplicación de Poincaré puede interpretarse como un sistema dinámico discreto con un espacio de estado con menor dimensión que el sistema continuo original. Como preserva algunas características esenciales del sistema original suele emplearse como un medio alternativo de analizar al mismo. Sin embargo, no siempre es posible hacer esto, puesto que no existe un método general para construir aplicaciones de Poincaré. La elección de la misma suele ir precedida de un análisis de la estabilidad lineal del sistema, para asegurar que la sección interseque a todas las órbitas de interés. La correspondencia entre una y otra visión es la siguiente:

Una órbita periódica simple del sistema dinámico original se convierte en un único punto fijo en la sección de Poincaré. Una trayectoria cuasiperiódica en la imagen de una curva cerrada. Un movimiento caótico en una zona con puntos distribuidos de modo errático.

Atractores extraños

Primeramente, se debe entender por atractor para sistemas dinámicos como un conjunto de valores numéricos hacia los cuales un sistema tiende a evolucionar, dada una gran variedad de condiciones iniciales en el sistema. Entonces, geométricamente hablando, un atractor puede ser un punto, una curva, una variedad o incluso un conjunto complicado de estructura fractal (conocido como atractor extraño)

Atractor de Rössler

Es el atractor del sistema de Rössler, un sistema de tres ecuaciones diferenciales ordinarias no lineales estudiadas por Otto E. Rössler. Estas ecuaciones diferenciales definen un sistema dinámico del tiempo-continuo que muestra dinámicas caóticas asociadas con las propiedades fractales del atractor.

Algunas propiedades del sistema de Rössler pueden ser deducidas a través de métodos lineales como eigenvectores (autovectores), pero las principales características del sistema requieren métodos no lineales como Aplicaciones de Poincaré o diagramas de bifurcación.

Definición matemática:

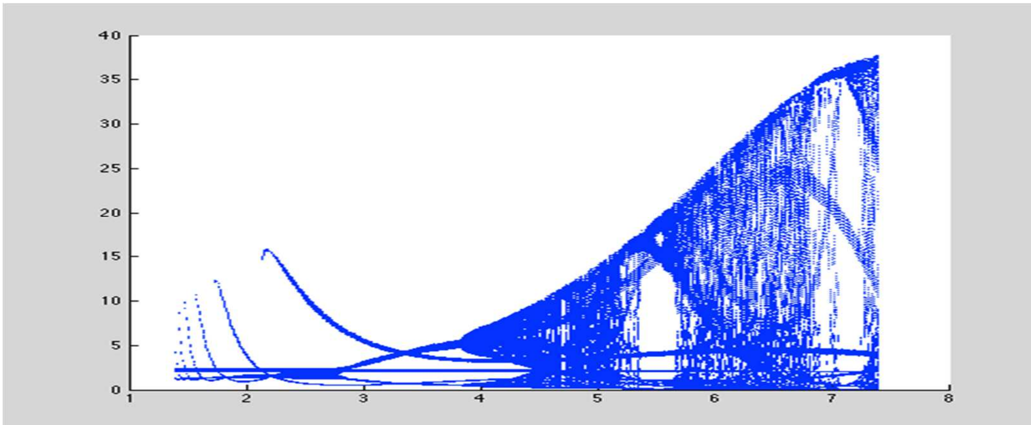
Las ecuaciones que definen el sistema de Rössler son:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -y - z \\ \dfrac{dy}{dt} = x + Ay \\ \dfrac{dz}{dt} = B + z(x - C) \end{cases}$$

Otto E. Rössler estudió el atractor caótico con A = 0.2, B = 0.2 y C = 5.7, aunque desde entonces los parámetros más comunes han sido A = 0.1, B = 0.1 y C = 14.

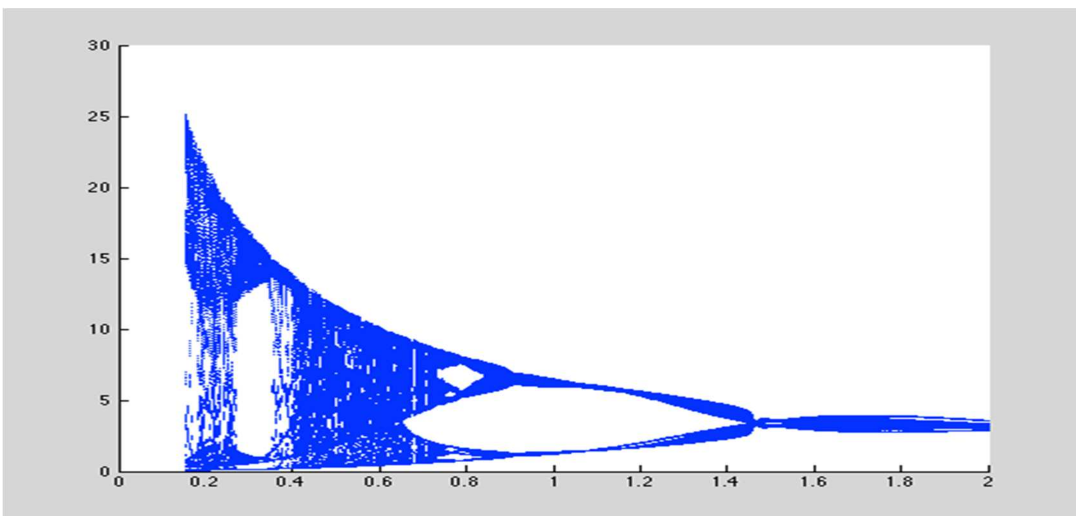
Podemos limitar a un caso bidimensional, que comúnmente dejamos a z constante, entonces:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -y \\ \dfrac{dy}{dt} = x + Ay \end{cases}$$



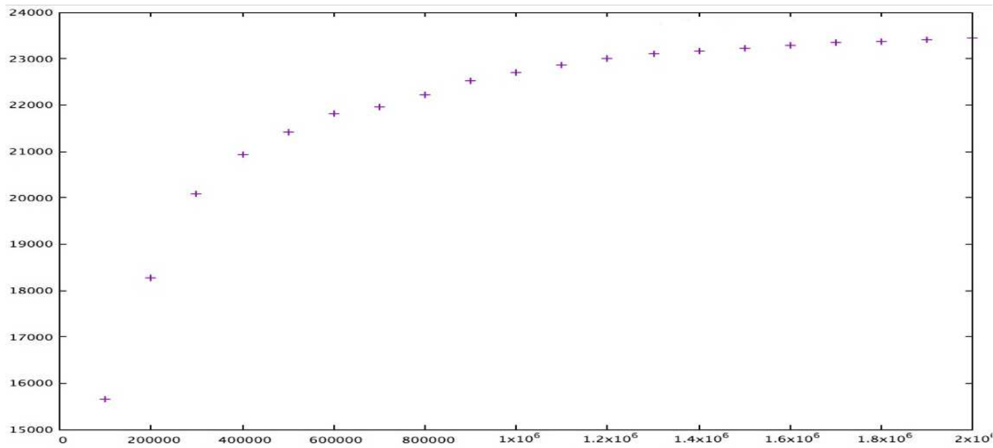
Gráfica de respuesta z vs c para esta secuencia de bifurcación

A = 0.2, B = 0.2 y C se inclina desde 1.4 hasta 7.4 en 600 iteraciones



Gráfica de respuesta z vs b para esta secuencia de bifurcación

A = 0.2, C = 5.7 y B desciende de 2.0 a 0.2



Fractal

Se define matemáticamente como una función continua pero no diferenciable en ningún punto. Es una figura, que puede ser espacial o plana, formada por componentes infinitos. Su principal característica es que su apariencia y la manera en que se distribuye estadísticamente no varía aun cuando se modifique la escala empleada en la observación. Son, por lo tanto, elementos calificados como semigeométricos (por su irregularidad no pertenecen a la geometría tradicional) que disponen de una estructura esencial que se reitera a distintas escalas. Además, se repite a diferentes escalas.

Los fractales pueden presentar 3 clases diferentes de autosimilitud, lo que significa que las partes tienen la misma estructura que el conjunto total:

* autosimilitud exacta, el fractal resulta idéntico a cualquier escala;

* cuasiautosimilitud, con el cambio de escala, las copias del conjunto son muy semejantes, pero no idénticas;

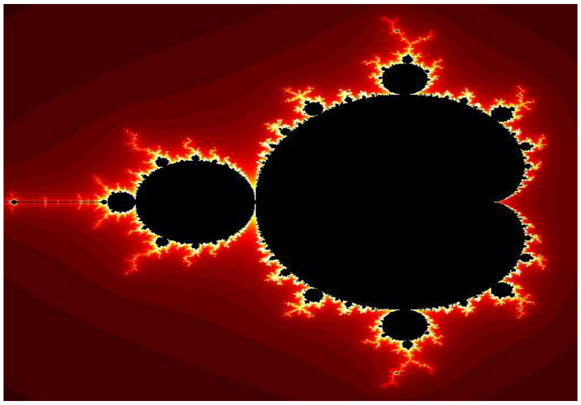
* autosimilitud estadística, el fractal debe tener dimensiones estadísticas o de número que se conserven con la variación de la escala.

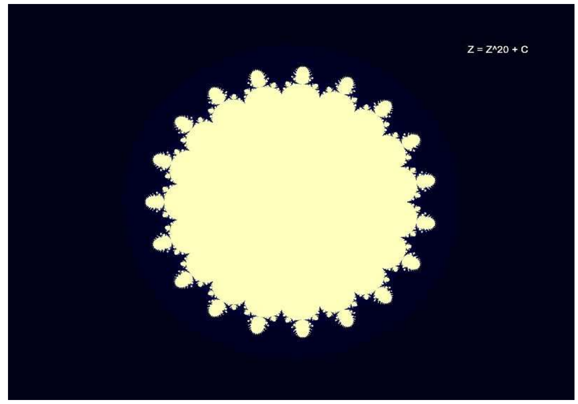
La geometría tradicional o euclidiana distingue las siguientes dimensiones: -1, 0, 1, 2, 3. Cada dimensión representa un punto, vacío, longitud, anchura, o división en planos dependiendo el número de dimensiones.

El fractal de Newton es una curiosa creación basado en la aplicación del método de Newton para la resolución de sistemas de ecuaciones no lineales. El algoritmo es eficiente para encontrar aproximaciones de los ceros o raíces de una función real. También puede ser usado para encontrar el máximo o mínimo de una función, encontrando los ceros de su primera derivada.

El fractal más famoso es el llamado Conjunto de Mandelbrot, que es la representación de una sucesión cuadrática a partir de "c", que es un número complejo cualquiera, que es, la iteración de funciones complejas:

$$f_c(z) \rightarrow \mathrm{z} = z^m + \mathrm{C}$$





Exponentes de Lyapunov

Son un conjunto de números que se emplean usualmente para detectar la presencia del caos en sistemas dinámicos. En un sistema dinámico, se define como una cantidad que caracteriza el grado de separación de dos trayectorias infinitesimalmente cercanas. Cuantitativamente, dos trayectorias en el espacio-fase con separación inicial diverge.

La idea en general es medir qué tan rápido se alejan o difieren las configuraciones globales contiguas con respecto al tiempo. Generalmente, el cálculo de los exponentes Lyapunov, como se define arriba, no puede ser llevado a cabo analíticamente, y en la mayoría de los casos uno debe recurrir a técnicas numéricas. Los procedimientos numéricos comúnmente usados estiman la matriz L basándose en un rango finito de aproximaciones de tiempo del límite definiendo L.

$$L(x_1) = \lim_{n\to\infty} (|f(x_1)| \ldots |f(x_n)|)^{1/n}$$

define a una matriz L(x_0) (las condiciones para la existencia del límite son dadas por el teorema de Oseldec). Si $\Lambda_i(x_0)$ son los valores dados de L(x_0), entonces el exponente Lyapunov λ_i está definido por:

$$\lambda_i(x_0) = \log \Lambda_i(x_0)$$

El mar, un sistema caótico.

Como ya sabemos, Un mar es una masa de agua salada de tamaño inferior al océano, así como también el conjunto de la masa de agua salada que cubre la mayor parte de la superficie del planeta Tierra, incluyendo océanos y mares menores. Dada a las variables que presenta, que son la presión, los efectos de rotación de la tierra, temperatura, se comprende que es sensible a las condiciones iniciales. El resultado final siempre dependerá de esta manera, sensiblemente de las condiciones en que se inició.

Para todos los propósitos prácticos, la conducta de los sistemas caóticos no se puede predecir. Es realmente imposible medir las condiciones originales de un sistema con una perfecta precisión.

Aun así, la situación un poco más difícil de predecir, porque se han producido eventos a lo largo de muchos millones de años, provocan grandes cambios en el clima de nuestro planeta, cambios que se ven reflejados en las rocas que registran la historia de la Tierra.

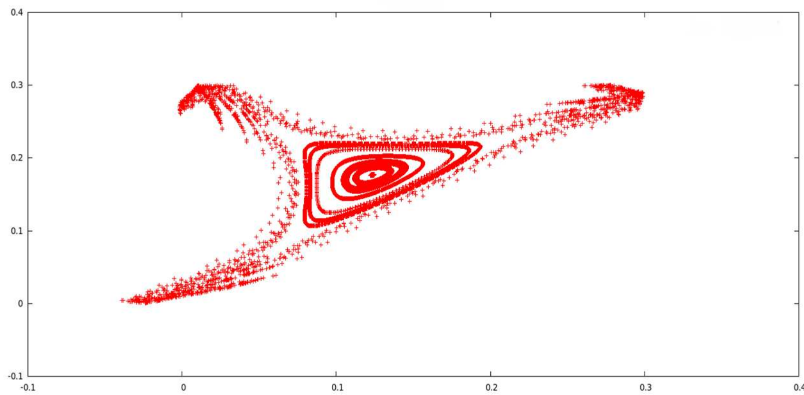
Modelo matemático:

$$\begin{cases} x_{n+1} = -ax_n^2 + y_n \\ y_{n+1} = b - |x_n| \end{cases}$$

Donde:

- a >= 0, y b>= 0 son los parámetros de bifurcación
- x, y son las variables

Entonces, utilizando a = 3.5 y b = 0.3, con x_0 = 0.123, 0.177 < y_0 < 0.277 con pasos de 0.01



Temas extra: teoría del Caos en la sociedad.

Por extraño que parezca, se puede establecer hasta cierto punto el comportamiento conductual de la sociedad, siendo precisos, el crecimiento poblacional, pero el problema ocurre de igual manera como en el caso del mar, son tantas variables que en un punto dado el sistema se vuelve "volátil" para definir un comportamiento ideal. Aunque las condiciones iniciales en muchos de los casos pueden ser fácil de proponer, pero durante su evolución, empieza a volverse en un sistema altamente no lineal.

Comencemos con la ecuación logística, que nos predice el crecimiento poblacional:

$$P(t) = \frac{1}{1 + e^{-t}}$$

En su forma más general, donde podemos añadir más variables:

$$P(t; a, m, n, r) = a\frac{1 + me^{-t/r}}{1 + ne^{-t/r}}$$

Siendo t la variable dependiente y las demás arbitrarias.

Estudios recientes revelan que de cierta manera puede comportarse como atractor el crecimiento poblacional, pero, ¿en qué sentido?, afirma Ernesto Ortiz Diego que las tendencias y "popularidades" como el define que la sociedad está regida, no habla meramente de un concepto matemático sino algo más filosófico. A grandes rasgos, define un comportamiento o una inclinación que perturba de manera indefinida el sistema que en este caso es la sociedad, como los factores ideológicos; en fin, un sinfín de aspectos que lo vuelve cruelmente caótico.

Conclusiones

Como se ha presentado en este documento, vemos que es complicado realizar el estudio de sistemas físicos que estamos acostumbrados a usar o experimentar, pero la realidad es que parece ser que la realidad es que es de carácter probabilístico o incierto a medida que va avanzando con el tiempo, lo que podemos hacer es que podemos condicionar el sistema o experimento de tal suerte que podamos tener un modelo matemático que pueda ajustarse a su comportamiento, aunque la verdad no siempre será así.

También se presentó el caso los atractores que parecen ser modelos extrovertidos, pero se ajustan a modelos climáticos y termodinámicos, dado que son mucho mayor la cantidad de objetos a estudiar y sus propiedades que los caracterizan a tener ese comportamiento, tal es el caso como el modelo de 3 cuerpos o en el peor de los casos un modelo de n cuerpos.

Especialmente se vuelve más fuerte el asunto cuando hablamos de fractales, cuya forma de modelar una ecuación o fórmula es trasladando al plano complejo, para poder generar las figuras (como es el caso de los triángulos que formaban más triángulos encima de estos).

Es de suma importancia las condiciones iniciales para poder llevar a cabo un estudio profundo del sistema que se está estudiando, dado que esas mismas condiciones pueden indicarnos un patrón o comportamiento que al trascurso del fenómeno, puede darnos una idea aproximada de su misma naturaleza.

Aclaraciones:

Un problema a la hora de programar desde Atom, es que el compilador no ejecutaba de manera correcta los programas (suponiendo que sea un error de librerías), y presentándose el mismo problema que la terminal de Windows tiene que actualizar un archivo para volver compatible algunos comandos.

Referencias:

- M. Lakshmanan and S. Rajaseekar, “Nonlinear Dynamics: Integrability, Chaos and Patterns”, Springer, 2003.
- Florian Scheck, “Mechanics: From Newton’s Laws to Deterministic Chaos”, Springer, 5th Ed., 2010
- Moon, Francis (1990). Chaotic and Fractal Dynamics: introduction for applied scientists and engineers.
- Ott, Edward (2002). Chaos in Dynamical Systems
- J. M. T. Thompson and H. B. Stewart, “Nonlinear Dynamics and Chaos”, John Wiley & Sons, 2nd Ed., 2002.
- Aline S. de Paula and Marcelo A. Savi, “Chaos Control Applied to Mechanical Systems”, 1, 2012.
- T. L. Vincent, “Chaotic Control Systems”, Nonlinear Dynamics and Systems Theory, Volume 1, 2001.
- Lorenz, E.N. (1996). The Essence of Chaos. University of Washington Press.
- Chamberlain, L.L. y Butz, R.M. (1998). A therapist’s guide to nonlinear dynamics andtherapeutic change. Clinical chaos. Philadelphia,
- Ekeland, I. (1995). Le Chaos. Paris: Flamarión Dominos.