Tarea IV

Noemí Lizbeth Moreno López

a) Prueba que las siguientes transformaciones son canónicas para cualquier μ.

$$q_1 = x\cos\mu + P_y \operatorname{sen}\mu \quad q_2 = y\cos\mu + P_x \operatorname{sen}\mu$$
$$P_1 = P_x\cos\mu - y\operatorname{sen}\mu \quad P_2 = P_y\cos\mu - x\operatorname{sen}\mu$$

b) Si el hamiltoniano original es $H = \frac{1}{2}(q_1^2 + q_2^2 + P_1^2 + P_2^2)$, encuentra un nuevo hamiltoniano como función de x, y y sus momentos conjugados.

c) Usa el nuevo hamiltoniano para resolver la dinámica con la restricción $y = P_y = 0$.

Sol.

1) Formalmente los corchetes de Poisson son como una "derivada de Lie" que se encuentra en geometría diferencial para la cual existe una identidad jacobi correspondiente. Las relaciones son las siguientes:

$$\{q_i, q_j\} = 0 \quad , \{P_i, P_j\} = 0, \quad \{q_i, P_j\} = \delta_{ij}$$

Así,

- $\{q_1, q_1\} = \frac{\partial q_1}{\partial x}\frac{\partial q_1}{\partial P_x} - \frac{\partial q_1}{\partial x}\frac{\partial q_1}{\partial P_x} + \frac{\partial q_1}{\partial y}\frac{\partial q_1}{\partial P_y} - \frac{\partial q_1}{\partial y}\frac{\partial q_1}{\partial P_y} = \underline{0},$

- $\{q_1, q_2\} = \frac{\partial q_1}{\partial x}\frac{\partial q_2}{\partial P_x} - \frac{\partial q_1}{\partial P_x}\frac{\partial q_2}{\partial x} + \frac{\partial q_1}{\partial y}\frac{\partial q_2}{\partial P_y} - \frac{\partial q_1}{\partial P_y}\frac{\partial q_2}{\partial y} =$

$= \cos\mu \operatorname{sen}\mu - \cos\mu \operatorname{sen}\mu = \underline{0},$

- $\{q_2, q_1\} = -\{q_1, q_2\} = 0$

• $\{q_2, q_2\} = 0$ por simetría ⟷ análogo a $\{q_1, q_1\}$

• $\{P_1, P_1\} = 0$ por simetría

• $\{P_2, P_1\} = 0$ por simetría

• $\{q_1, P_1\} = \frac{\partial q_1}{\partial x}\frac{\partial P_1}{\partial P_x} - \frac{\partial q_1}{\partial P_x}\frac{\partial P_1}{\partial x} + \frac{\partial q_1}{\partial y}\frac{\partial P_1}{\partial P_y} - \frac{\partial q_1}{\partial P_y}\frac{\partial P_1}{\partial y} = \cos^2\mu - (-\operatorname{sen}^2\mu) = \underline{1}$

• $\{q_1, P_2\} = \frac{\partial q_1}{\partial x}\frac{\partial P_2}{\partial P_x} - \frac{\partial q_1}{\partial P_x}\frac{\partial P_2}{\partial x} + \frac{\partial q_1}{\partial y}\frac{\partial P_2}{\partial P_y} - \frac{\partial q_1}{\partial P_y}\frac{\partial P_2}{\partial y} = \underline{0}$

• $\{q_2, P_1\} = \frac{\partial q_2}{\partial x}\frac{\partial P_1}{\partial P_x} - \frac{\partial q_2}{\partial P_x}\frac{\partial P_1}{\partial x} + \frac{\partial q_2}{\partial y}\frac{\partial P_1}{\partial P_y} - \frac{\partial q_2}{\partial P_y}\frac{\partial P_1}{\partial y} = \underline{0}$

• $\{q_2, P_2\} = \frac{\partial q_2}{\partial x}\frac{\partial P_2}{\partial P_x} - \frac{\partial q_2}{\partial P_x}\frac{\partial P_2}{\partial x} + \frac{\partial q_2}{\partial y}\frac{\partial P_2}{\partial P_y} - \frac{\partial q_2}{\partial P_y}\frac{\partial P_2}{\partial y} = -(-\operatorname{sen}^2\mu) +$

$+\cos^2\mu = \underline{1}$

se cumple que $\{q_i, q_j\} = 0$, $\{P_i, P_j\} = 0$, $\{q_i, P_j\} = \delta_{ij}$, por tanto se trata de una transformación canónica.

2) En términos de x, y, P_x, P_y, el hamiltoniano tiene la siguiente forma:

$$H = \frac{1}{2}\left(q_1^2 + q_2^2 + P_1^2 + P_2^2\right) = \frac{1}{2}\left\{(x\cos\mu + P_y \operatorname{sen}\mu)^2 + (y\cos\mu + P_x\operatorname{sen}\mu)^2 + \right.$$

$$\left. + (P_x\cos\mu - y\operatorname{sen}\mu)^2 + (P_y\cos\mu - x\operatorname{sen}\mu)^2\right\} =$$

→ dobles productos equivalen con signo opuesto

$$= \frac{1}{2}\left(x^2\cos^2\mu + P_y^2\operatorname{sen}^2\mu + y^2\cos^2\mu + P_x^2\operatorname{sen}^2\mu + P_x^2\cos^2\mu + y^2\operatorname{sen}^2\mu + \right.$$

$$\left. + P_y^2\cos^2\mu + x^2\operatorname{sen}^2\mu\right) = \underline{\frac{1}{2}\left(x^2 + y^2 + P_x^2 + P_y^2\right)}$$

c) Con la restricción $y = P_y = 0$, el hamiltoniano tiene la siguiente forma

$H = \frac{1}{2}(x^2 + P_x^2)$ y las ecuaciones de Hamilton:

$$\bullet\ \dot{x} = \frac{\partial H}{\partial P_x} = P_x \qquad \bullet\ \dot{P}_x = -\frac{\partial H}{\partial x} = -x$$

derivando la primera expresión y comparándola con la segunda:

$\ddot{x} = \dot{P}_x = -x$, así $\ddot{x} + x = 0$ y se trata de un oscilador armónico simple cuya frecuencia es $\omega = 1$ y la solución a la ecuación diferencial:

$$\boxed{x(t) = A\cos(t + \varphi)}$$

Además, $\dot{P}_x = -x = -A\cos(t+\varphi)$, integrando la ecuación:

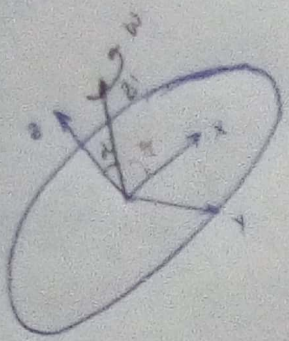
$$\boxed{P_x = -A\,sen(t+\varphi)}$$

Puede observarse que al sumar el cuadrado de las dos magnitudes:

$P_x^2 + x^2 = A^2 sen^2(t+\varphi) + A^2\cos^2(t+\varphi) = A^2$ se forman circunferencias radio A en el espacio fase.

Un disco delgado uniforme de masa M y radio A, rota sin fricción con la velocidad angular uniforme ω sobre un eje vertical fijo que pasa sobre su centro y tiene un ángulo α con el eje de simetría del disco.

a) Determina los momentos de inercia y los ejes principales.



b) Encuentra el vector de momento angular (magnitud y dirección)

c) ¿Cuál es la magnitud y dirección de la torca relativa al sistema de referencia del cuerpo (x, y, z)?

Sol.

a) Sea $I_{ab} = \int \rho dV \left(\delta_{ab} x_e^{(i)} x_e^{(i)} - x_a^{(i)} x_b^{(i)} \right) = \int \rho dV \begin{pmatrix} y^2+z^2 & -xy & -xz \\ -yx & x^2+z^2 & -yz \\ -zx & -zy & x^2+y^2 \end{pmatrix}$,

en el sistema de referencia x, y, z obtiene que $z=0$ y el tensor de inercia se reduce a 4 componentes independientes:

- $I_{xx} = \int \frac{M}{\pi A^2} y^2 \, dA = \frac{M}{\pi A^2} \int \rho^2 sen^2\theta \, \rho \, d\rho \, d\theta = \frac{M}{2\pi A^2} 2\pi \int_0^A \rho^3 d\rho = \frac{1}{4} MA^2$

- $I_{yy} = \frac{1}{4} MA^2$ por simetría

- $I_{zz} = \int \frac{M}{\pi A^2} (x^2+y^2) \, dA = \frac{M}{\pi A^2} \int \rho^2 \rho \, d\rho \, d\theta = \frac{1}{2} MA^2$

- $I_{xy} = \int \frac{M}{\pi A^2} xy \, dA = 0$, en coordenadas polares son funciones cíclicas en un periodo.

Así, $I = \frac{1}{4}MA^2\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$

b) Sea $\vec{w} = (w\,sen\alpha,\ 0,\ w\cos\alpha)$ y el vector de momento angular $\vec{L}_a = I_{ab}\vec{w}_b$, entonces, de forma matricial:

$$\vec{L}_a = \frac{1}{4}MA^2\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}w\,sen\alpha\\ 0\\ w\cos\alpha\end{pmatrix} = \frac{1}{4}MA^2\begin{pmatrix}w\,sen\alpha\\ 0\\ 2w\cos\alpha\end{pmatrix}$$ y su

magnitud: $|\vec{L}_a| = \frac{1}{4}MA^2\sqrt{w^2sen^2\alpha + 4w^2\cos^2\alpha} = \frac{1}{4}MA^2 w\sqrt{sen^2\alpha + 4\cos^2\alpha} =$

$= \frac{1}{4}MA^2 w\sqrt{1+3\cos^2\alpha}$, $\theta = \arctan\left(\frac{2w\cos\alpha MA^2/4}{\underbrace{w\,sen\alpha MA^2/4}_{=\sqrt{x^2+y^2}}}\right) = \arctan(2\cot\alpha)$

dirección

2

c) Determinación de ejes principales

Se sabe que $I_{ik}A_k = \lambda A_i \Rightarrow I_{ik}A_k - \lambda\delta_{ik}A_k = (I_{ik} - \lambda\delta_{ik})A_k = 0$, sea la ecuación característica $\det(I_{ik} - \lambda\delta_{ik}) = 0$, entonces

$$\begin{vmatrix}\frac{1}{4}MA^2-\lambda & 0 & 0\\ 0 & \frac{1}{4}MA^2-\lambda & 0\\ 0 & 0 & \frac{1}{2}MA^2-\lambda\end{vmatrix} = \left(\frac{1}{4}MA^2-\lambda\right)^2\left(\frac{1}{2}MA^2-\lambda\right) = 0$$, así los eigenvalores son $\lambda_{1,2} = \frac{1}{4}MA^2$; $\lambda_3 = \frac{1}{2}MA^2$.

Los eigenvectores

$$\begin{pmatrix}\frac{1}{4}MA^2-\lambda & 0 & 0\\ 0 & \frac{1}{4}MA^2-\lambda & 0\\ 0 & 0 & \frac{1}{2}MA^2-\lambda\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A_1^{(i)}\\ A_2^{(i)}\\ A_3^{(i)}\end{pmatrix} = 0$$

Así, se determinar a continuación $\vec{A}^{(1)}, \vec{A}^{(2)}, \vec{A}^{(3)}$:

• $\lambda_1 = \frac{1}{4}MA^2 \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4}MA^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_1^{(1)} \\ A_2^{(1)} \\ A_3^{(1)} \end{pmatrix} = 0$, x, y son libres, $z = 0$,

así el primer vector puede ser $\vec{A}^{(1)} = (1,0,0)$, dado que $\lambda_2 = \lambda_1 \Rightarrow$ x, y sean libres, $z = 0$, por lo tanto $\vec{A}^{(2)} = (0,1,0)$ como opción.

• $\lambda_3 = \frac{1}{2}MA^2 \Rightarrow \begin{pmatrix} -\frac{1}{4}MA^2 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{4}MA^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_1^{(3)} \\ A_2^{(3)} \\ A_3^{(3)} \end{pmatrix} = 0$ con $x = y = 0$,

z libre, entonces $\vec{A}^{(3)} = (0,0,1)$ y las direcciones principales se convierten en la base ortonormal del espacio euclideo con

$$\vec{A}^{(1)} = (1,0,0),\ \vec{A}^{(2)} = (0,1,0),\ \vec{A}^{(3)} = (0,0,1)$$

$\boxed{}$

c) Dado que w es uniforme, es decir $\frac{d\vec{w}}{dt} = 0$ y α también implica que $\frac{d\vec{L}}{dt} = 0$ y por definición $\vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt} = 0$ por tanto el torque en el sistema de referencia x, y, z es cero.

$\boxed{}$