

Caos

Universidad de Guanajuato
División de Ciencias e Ingenierías

Mecánica Analítica

Loma del Bosque 103, Lomas del Campestre
C. P. 37150
León, Guanajuato
México

Moreno López Noemí Lizbeth (e-mail: morenoln2016@licifug.ugto.mx)

Resumen

La **predicción** se ha convertido en una de las actividades preferidas del hombre, desde juegos de azar, predicciones climáticas entre otros aspectos. La física en específico tiene cierta tendencia a describir cualquier fenómeno repetible, reproducible.

¿El caos es un fenómeno repetible, reproducible?

Es una de las preguntas que se desarrollarán en el texto además de una serie de temas que abarcarán tanto el concepto como las características del caos, se acompaña también de una aplicación a sistemas digitales y se anexa a él una serie de algoritmos que corresponden a los gráficos mostrados en el texto y a las soluciones numéricas de su problema correspondiente.

Palabras clave: Caos, Determinismo, Aleatoriedad.

En este universo lo único constante es el cambio. Y la única verdad permanente, la evidencia experimental.

-Julían Félix

Caos es un término utilizado para describir o caracterizar un sistema que parece simple pero es aparentemente complejo. [1]

Con nociones construidas a lo largo del tiempo, el hombre consideraba al caos como **errático** o **aleatorio**, simplemente se concebía como un conjunto de fenómenos influenciados por fluctuaciones o ruido externo (producido por fuerzas externas independientes al sistema estudiado) o como aquél fenómeno que interactúa con varios grados de libertad y cada uno de estos con dinámica independiente.

Cuando se trató de aislar a los sistemas simples de toda fuerza externa, se llegó a la conclusión de que estos eran **deterministas**, es decir, podían ser caracterizados con el conocimiento total de sus condiciones iniciales. Dicho de otra forma, podían predecirse sus interacciones futuras. [1]

Parecía que el concepto de **caos** debido a sus características de **aleatoriedad** y **determinismo** traía consigo la **no linealidad**, incluso como implicación dado que todo **sistema caótico** debía ser caracterizado en términos de un *estímulo y respuesta*, los cuales no equivalían al análisis de un sistema lineal.

La motivaciones al estudio de caos residen en:

1. Su estudio proporciona herramientas conceptuales características de sistemas complejos que permiten categorizarlos.
2. **Universalidad.** El caos parece ser universal, dado que todo sistema caótico presenta los mismos análisis cualitativos y cuantitativos, es decir, las características son independientes del sistema.

[1]

Uno de los conceptos con los que trata el caos es la **no linealidad**.

¿Por qué es importante la no linealidad?

Imagine un sistema lineal que puede caracterizarse por un conjunto de parámetros fijos, así

describe su movimiento. Si modifica el valor de estos parámetros, el movimiento del sistema cambia pero las propiedades del movimiento permanecen. La mayoría de los sistemas físicos no cuentan con esta característica, puesto que cambios repentinos y dramáticos dan lugar al **caos**. El caos describe el estado temporal de un sistema cuando es aperiódico y aleatorio, el término aleatorio resulta aparente al concluir, más adelante, que tiene un orden determinado. Un **estado** se caracteriza por medio de las siguientes características:

1. Análisis cuantitativo en la evolución del tiempo.
2. Valor de parámetros uniformes que describen el sistema.
3. Condiciones iniciales.

Aquel sistema que cuenta con las características de un estado se hace llamar **determinista**.

¿Cómo se relacionan los conceptos de aleatoriedad y determinismo?

Podría decirse que la herramienta más factible para relacionar estos conceptos es el **análisis mecánico**.

Una de las formas es por medio de la **bifurcación**, literalmente significa división en dos partes. En la dinámica no lineal se utiliza para describir la evolución de un sistema al variar algún parámetro uniforme. La división concierne a un valor por arriba y otro por abajo del valor inicial del parámetro uniforme. Un **diagrama de bifurcación** grafica una salida del sistema contra la variación de un parámetro uniforme o parámetro de control. La transición abrupta de la imagen en un diagrama de bifurcación corresponde a la evolución de un sistema periódico a uno caótico. Las características siguientes corresponden a un sistema no lineal:

1. Un cambio "lento" en los parámetros uniformes del sistema produce cambios repentinos en el estado de un sistema dinámico.
2. Transición de periodicidad a caoticismo bien definida.
3. Caos se distingue del ruido.¹ al observar divergencia en trayectorias vecinas.

[6]

En un estudio de duplicación de periodos en el mapa logístico, **Mitchell Feigenbaum** descubrió una característica cuantitativa universal del caos. Observó que varias funciones diferentes al estudiar-

se como mapas iterados¹, conducen a una misma convergencia (transición de periódico a caótico) en diagrama de bifurcación a través de una secuencia de periodos. Si la convergencia es geométrica, entonces la diferencia de valores en la duplicación de periodos por iteración la misma para cada división, vista con la siguiente expresión:

$$\delta_n = \frac{r_n - r_{n-1}}{r_{n+1} - r_n} \quad (1)$$

Donde r es el parámetro uniforme del sistema y n el número de iteración, δ_n era el mismo aproximadamente para toda n y cuando $n \rightarrow \infty$, δ era equivalente para cualquier función de mapa. Sin embargo, esto no comprobaba la universalidad del caos, pero si daba lugar a estudios más sofisticados.

A continuación se le introducirá a una descripción del **caos**.

Un **espacio fase** describe el estado de un sistema dinámico, el análisis comienza con un matemático francés *Henri Poincaré* en 1800. En particular, el interés por caracterizar la **estabilidad** e **inestabilidad** de un sistema dinámico fue la motivación del matemático. Esta **estabilidad**, **inestabilidad** es una noción crucial para comprender trayectorias en la vecindad de un **punto fijo** o **ciclo límite**.

Los **puntos fijos** son puntos de equilibrio en el estado fase, los **ciclos límite** describen estados periódicos en estados fase de dos o más dimensiones, ambos son el punto de partida como representación de la estabilidad de un sistema dinámico hacia el estudio del sistema dinámico como un sistema no lineal.

La **teoría de bifurcación** describe la evolución de los puntos fijos y ciclos límite, en cuanto al cambio en su estabilidad a un estado no lineal. Básicamente su estudio se basa en la formación y desaparición de estabilidad a medida que se cambian los parámetros de control del sistema.

Dados $x(t)$, $\dot{x}(t)$, podemos caracterizar el estado del sistema en t , es decir, en cualquier momento se puede clarificar cualquier *evento* en una gráfica de $x(t)$, vs $\dot{x}(t)$. Esta gráfica es lo que conceptualizaremos como **espacio fase**. El número de dimensiones que constituye el estado fase es determinado por el número de variables necesarias para especificar la dinámica del sistema tratado, estas variables son conocidas como **grados de libertad**. Como ha de

¹Término definido al hablar de **mapeos**.

suponer, en el espacio fase se generan trayectorias a medida que evoluciona el tiempo a partir de un **punto de estado inicial**. Si la trayectoria se cierra sobre sí misma, entonces su movimiento corresponde a uno periódico y se hace llamar **cíclica**. Para otro punto de estado inicial se genera otra trayectoria con las mismas características si es que corresponde al mismo sistema dinámico y el conjunto de trayectorias en el espacio fase se conoce como **retrato de fase**.

Un espacio fase y una regla que sigue la evolución de las trayectorias (en diferentes condiciones iniciales) constituyen un sistema dinámico. [1]

EL estudio que rige el enunciado anterior se conoce como **teoría de sistemas dinámicos**, desarrollada en la segunda mitad del siglo XX.

¿Cómo se construye un espacio fase?

Como se mencionó anteriormente, el espacio fase se construye al considerar dos funciones: $x(t)$, $\dot{x}(t)$. Una manera de conjuntar las dos expresiones es al describir al sistema por medio de **ecuaciones diferenciales de primer orden**. Estas ecuaciones, cuyas variables de estado dependen del tiempo pueden ser acopladas, además, n grados de libertad implican n variables de estado, considerándolo para el número de ecuaciones diferenciales. Supongamos tres variables de estado para las cuales

$$\dot{u} = f(u, v, w) \quad (2)$$

$$\dot{v} = g(u, v, w) \quad (3)$$

$$\dot{w} = h(u, v, w) \quad (4)$$

[1]

Esta forma de manipular información del sistema permite identificar de manera relativamente sencilla los puntos fijos del sistema.

¿Cómo se identifican los puntos fijos a partir de un sistema de ecuaciones diferenciales acoplado?

Un **punto fijo** pertenece a aquél conjunto de puntos para los cuales las derivadas respecto al tiempo de las variables de estado son cero, evaluadas en dicho punto.

¿Todo sistema dinámico puede reducirse a un conjunto de ecuaciones diferenciales acopladas?

Es posible expresar cualquier sistema dinámico como un conjunto de ecuaciones diferenciales si se cuenta con todos los grados de libertad.

¿Es posible que las trayectorias en un estado fase se intersecten si se mencionó que cada punto estable genera una trayectoria diferente pero con las mismas características?

Teorema de la No-Intersección Dos trayectorias espaciales de estados distintos no pueden intersectarse (en un periodo de tiempo finito). Una trayectoria no puede intersectarse a sí misma en un tiempo posterior.

[1]

El teorema anterior básicamente es una declaración de **determinismo**, ya que asegura que cualquier estado físico de un sistema dinámico puede ser especificado por sus condiciones iniciales, es decir, su ubicación en el estado fase, entonces, existe *unicidad en las ecuaciones diferenciales acopladas*, es decir, las derivadas respecto al tiempo de las variables de estado están determinadas por su lugar en el estado fase, fantástico. Por tanto, **dos trayectorias no pueden cruzarse en el estado fase**.

¿Cómo se explicaría un cruzamiento de trayectorias en el estado fase?

Si fuera así, dos trayectorias compartirían valores de variables de estado y sus respectivas derivadas pero evolucionarían de diferente manera, ésto resulta imposible si referimos a la condición inicial, un sistema acoplado como el anterior.

Ejemplo. Imagine a un niño que para jugar necesita vaciar un recipiente que contiene a sus juguetes. Una vez que realiza sus respectivas actividades, vuelve a introducir los juguetes en el recipiente y se retira. Al día siguiente realiza la misma actividad. ¿Cree que al vaciar el recipiente el primer día y el segundo, se encontró con los juguetes deseados al mismo tiempo? Resultaría imposible que el niño acomodara cada juguete después de realizar sus actividades en el lugar que tenía cada uno antes de ser vaciado del recipiente, por tanto, al día siguiente, el niño encontraría el juguete deseado en tiempo diferente al que lo encontró al día anterior, fantástico. Así, podemos concluir que las condiciones iniciales del sistema son diferentes, y por tanto, el niño obtendría diferentes resultados, es decir, encontraría cada juguete en diferentes tiempos y las actividades

realizadas posteriormente asemejarían a la primera por tratarse del mismo sistema pero con evolución en el tiempo diferente, entonces referiríamos a una trayectoria diferente en el mismo estado fase. Este ejemplo se proporciona para hacer más armonioso para el lector los conceptos mostrados anteriormente.

Note que este ejemplo conduce además, a nociones de entropía. El niño juega el primer día y al regresar los juguetes al recipiente, resulta que estos no tienen el mismo orden dentro que el que tenían antes de vaciarse. Puede decirse que el niño causó un desorden en el sistema que no pudo ser regresado a su estado inicial.

□

En particular, este texto se dedicará a describir espacios fase de una dimensión, a continuación se enlistan las características de estos espacios.

- Una variable de estado (U).
- La ecuación dinámica que caracteriza este estado fase es

$$\dot{U} = f(U; r) \quad (5)$$

donde U es un vector de coordenadas de espacio de fase de dimensión N , y r es un parámetro de control. Las ecuaciones son:

- **Autónomas:** el lado derecho de la ecuación 5 no depende del tiempo.
- **Determinista:** la evolución es completamente especificada (por U instantánea).
- Puntos fijos en este espacio fase son aquellos puntos tales que $\dot{U} = 0$.

En el caso unidimensional existe una clasificación de puntos fijos, llamaremos **nodos** a aquellos que atraen trayectorias en su vecindad, estos puntos generalmente son estables, **repelentes** son aquellos que repelen trayectorias en su vecindad y generalmente son inestables, **puntos silla** a aquellos que atraen por un lado a trayectorias cercanas a su vecindad y por otro las repelen.

Para determinar específicamente el tipo de punto fijo considere la siguiente evaluación: $\dot{U}|_{U=U_o} = f(U_o) = 0$. Ahora, considere un valor $U = U_o + \delta$, $\delta \ll 1, U > 0$. Si $f(U + U_o) > 0$, entonces $\dot{U}|_{U=U_o+\delta} > 0$ y la trayectoria tenderá a valores más positivos, es decir, se alejará de U_o . Por otra parte, si $f(U_o + \delta) < 0$, entonces $\dot{U}|_{U=U_o+\delta} < 0$, la trayectoria tenderá hacia U_o . De igual forma puede procederse a un análisis por la izquierda de U_o .

Si las trayectorias que tienden a U_o por la derecha e izquierda se alejan de U_o se trata de un **repelente**, si se acercan a U_o se trata de un **nodo** y si ocurre lo del análisis anterior, es decir, por un lado se atraen y por el otro se alejan, se trata de un **punto silla**.

Ejemplo. Para conceptualizar a los nodos y repelentes tómese de ejemplo el péndulo. Considere un ángulo (θ) respecto a la vertical en el cual se encuentra oscilando. Si $\theta = 0$ se sabe que se trata de un punto estable en el que la suma de fuerzas externas es cero, cuando un péndulo oscila, las trayectorias siempre tienden a este puntos eventualmente, por lo tanto, se trata de un nodo. Ahora considere el caso en el que se le proporciona al péndulo suficiente impulso como para dar un ciclo completo (recorre la circunferencia completa), cuando $\theta = \pi$, se trata de un punto estable porque la suma de fuerzas externas en este punto es cero, pero resulta ser un estado instantáneo pues cualquier mínimo impulso hará que las trayectorias se alejen de él (en este caso, basta la con la presencia de la gravedad), entonces se trata de un repelente.

□

*¿Cómo se determina entonces el tipo de **punto fijo** que se tiene?*

Por definición, la expresión 5 tiene que equivaler a cero para tratarse de un punto fijo, el valor $f'(U)|_{U=U_o}$ se llama **valor característico o eigenvalor** del punto fijo tratado. A continuación se muestra una tabla que corresponde a los valores característicos de un punto fijo:

Tabla I
ANÁLISIS DE EIGENVALORES (λ)

$\lambda < 0$	Nodo
$\lambda > 0$	Repulsor
$\lambda = 0$	Análisis de derivadas superiores

Análogo a la expresión 5, se añade el estudio de **mapas**, los cuales describen la evolución de un sistema dinámico, pero el tiempo es una variable "discreta".

$$U_{n+1} = F(U_n, r) \quad (6)$$

[3]

Donde r representa un parámetro de control del sistema. En general U_n es un vector con componentes U_n^i en \mathbb{R}^n y F mapea de \mathbb{R}^n a \mathbb{R}^n . La función $F(U_n, r)$ produce un valor U_{n+1} a partir de U_n , y para este caso, se dicen que **es una mapa de la propia función**. Las ecuaciones 6 también conservan las propiedades de **autonomismo** y **determinismo**.

¿Qué es un parámetro de control del sistema?

Los **paraámetros de control** son aquellas variables **uniformes o constantes** de un sistema dinámico.

Para entender el **mapeo** se ejemplificará con la **función logística** representada por la siguiente ecuación:

$$F(U; r) = rU(1 - U) \quad (7)$$

Donde $r \in [0, 4]$. Así, puede formarse una **función de mapa de iteraciones**, dado que por cada valor U_n se asigna un valor a U_{n+1} en un rango $U_{n+1} \in [0, 1]$ a partir de una condición inicial U_0 . La función de mapa de iteraciones es la siguiente, en correspondencia a la expresión 7.

$$U_{n+1} = rU_n(1 - U_n) \quad (8)$$

En inicio, la expresión 8 se utilizó para describir la evolución en la densidad de población de una especie particular.

A continuación se presenta un análisis básico de mapeos, este ejemplo es acerca de la **función logística** y el **mapeo logístico**.

Note la relación entre el valor de la variable en una iteración determinada. En la figura 1 puede concluirse que la población se extinguirá debido a sus condiciones iniciales y específicamente al valor del parámetro de sistema impuesto. La figura 2 representa el caso contrario, la población se incrementa pero se observa que su incremento tiene un límite, es decir, es imposible hacerla infinita.

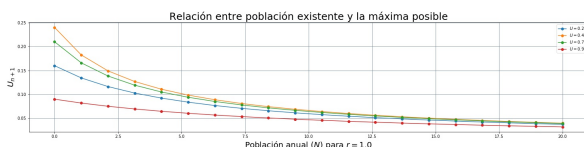


Figura 1. Relación entre iteración y número de iteraciones, para el parámetro de control $r = 1,0$.



Figura 2. Relación entre iteración y número de iteraciones, para el parámetro de control $r = 2,0$.

Puede concluirse que estos parámetros tienen fuerte control del sistema, comparando las figuras 1 y 2, ¿qué ocurre si continua incrementando el valor del parámetro de control? La respuesta se muestra a continuación en las figuras 3, 4.

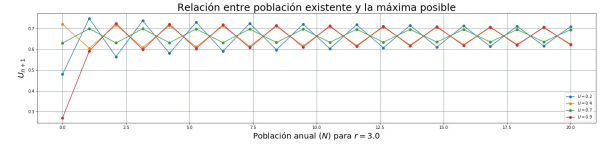


Figura 3. Relación entre iteración y número de iteraciones, para el parámetro de control $r = 3,0$.



Figura 4. Relación entre iteración y número de iteraciones, para el parámetro de control $r = 4,0$.

La predicción de un estado en la vecindad de las condiciones iniciales se vuelve imposible debido al incremento de un parámetro de control, para valores de $r \approx 4,0$ el estado del sistema es caótico.

Ahora analice el estado de una iteración U_{n+1} contra una de U_n , las figuras 5, 6 muestran como las trayectorias tienen una tendencia a un punto o región específica, este punto, como se mencionó anteriormente corresponde a los **puntos fijos**, los cuales persisten claramente para valores de $r \approx 2,5$, pero de igual manera, comprobando la tesis anterior en las figuras representativas de mapeos, note que para $r \approx 4,0$ no existe tal punto de estabilidad, es imposible predecir el estado de iteraciones futuras. Fantástico, un parámetro de control es quien determina, hasta ahora, si es el sistema es caótico o no.

El desarrollo numérico de este ejemplo se puede encontrar en la sección II.

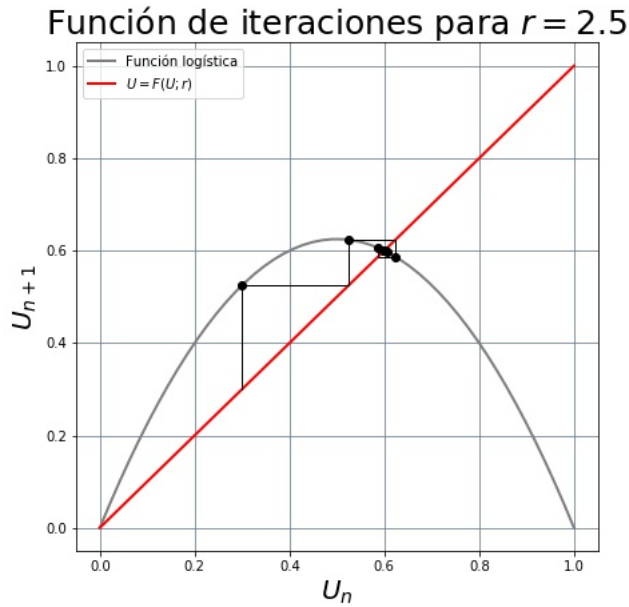


Figura 5. **Primer caso.** Relación entre iteración U_{n+1} y U_n .

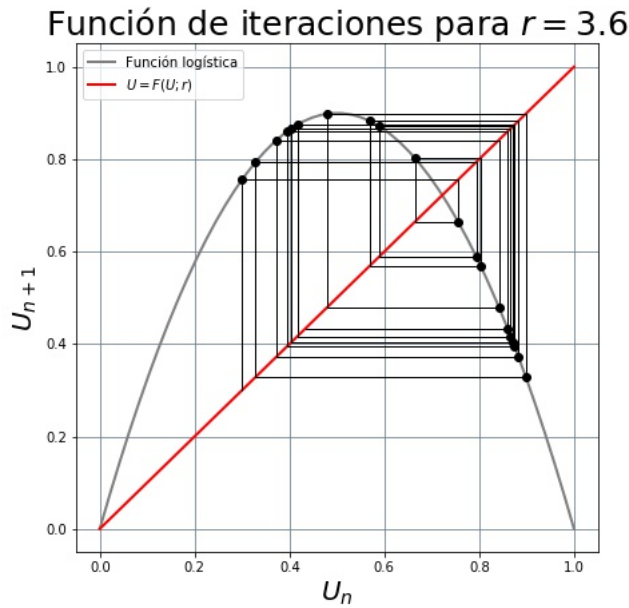


Figura 6. **Segundo caso.** Relación entre iteración U_{n+1} y U_n .

Es importante también, como lo descrito en los primeros párrafos del texto, introducir un desarrollo o evolución del estado del sistema dinámico estudiado respecto al cambio en el parámetro de control. Este análisis que corresponde al **diagrama de bifurcación** que se muestra a continuación:

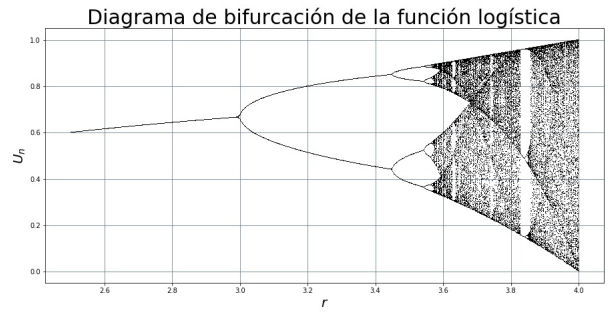


Figura 7. **Diagrama de bifurcación** para condiciones iniciales específicas.

La idea de la inestabilidad de un punto fijo puede generalizarse para que la noción de "*dependencia sensible a las condiciones iniciales*" se determine cuantitativamente. Por medio de una linealización cerca de los puntos fijos que se puede caracterizar el estado de estabilidad de los mismos. Dicha linealización se probará con el teorema de Taylor.

Teorema de Taylor Sea F una función C^{n+1} en un intervalo abierto que contiene a U, U_o , entonces

$$F(U) = F(U_o) + F'(U_o)(U - U_o) + \frac{1}{2!}F''(U_o)(U - U_o)^2 + \dots + \frac{1}{n!}F^{(n)}(U_o)(U - U_o)^n + \zeta_n(U)$$

donde $\zeta_n(U) = \frac{1}{(n+1)!}F^{(n+1)}(c)(U - U_o)^n$ para algún $c \in [U_o, U]$ si $U_o < U$ o $c \in [U, U_o]$ si $U_o > U$.

Por definición de punto fijo, el primer término del lado derecho $F(U_o) = 0$ y por tanto, la función $F(U)$ cerca de U_o es determinada por la serie de sus derivadas evaluadas en U_o y la diferencia de los puntos U, U_o . Como primera aproximación, para puntos muy cercanos, basta con considerar hasta la primer derivada de F en la expresión anterior, además, introducir una nueva variable

$$\delta \dot{U} = \frac{dF}{dU}|_{U=U_o} \delta U \quad (9)$$

[1]

Donde $\delta U = U_o + \delta$. Nótese que al resolver la ecuación diferencial de primer orden, con $\lambda(U_o) = \frac{dF}{dU}|_{U=U_o}$, se puede determinar que la solución corresponde a una **función exponencial**. Generalice el caso para n iteraciones:

$$\delta U_{n+1} = F'(U_n) \delta U_n \quad (10)$$

[3]

Entonces, el producto de las derivadas en sucesivas iteraciones nos proporciona la expansión/contracción de la separación entre las iteraciones de puntos cercanos, partiendo de las condiciones iniciales.

$$\delta_n U = \delta U(0) e^{n\lambda(U_o)} = F^n(U_o + \delta) - F^n(U_o) \quad (11)$$

[3]

Y así, el valor de λ en la condición inicial U_o cuando el número de iteraciones $n \rightarrow \infty$ y $\delta \rightarrow 0$ corresponde al siguiente:

$$\lambda(U_o) = \lim_{n \rightarrow \infty, \delta \rightarrow 0} \frac{1}{n} \log \frac{|F^n(U_o + \delta) - F^n(U_o)|}{|\delta U(0)|} \quad (12)$$

$$\lambda(U_o) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \frac{|dF^n(U_o)|}{|dU_o|} \quad (13)$$

EL valor de λ corresponde a la diferencia entre condiciones iniciales estrechamente espaciadas que divergen o convergen en promedio exponencialmente con cada iteración, es decir, una dependencia sensible a las condiciones iniciales. Por lo tanto, λ puede ser usado como un criterio definitorio del caos, o una posible medida, el valor de lambda comúnmente se nombre **exponente de Lyapunov**.

[3]

La introducción de la cuantificación o posible medida de caoticismo cuenta, en inicio, con dos motivaciones principales:

1. La distinción entre un estado caótico y las fluctuaciones (ruido) debidas a factores externos aleatorios.
2. La medida cuantitativa de caoticismo, es decir un cambio de caoticismo respecto al cambio de parámetros característicos del sistema estudiado.

[6]

Definición. El **exponente de Lyapunov** es una medida de atracción o repulsión desde un punto fijo en el espacio fase cuyas propiedades además se enclarecen como lo ilustrado en la tabla I.

[1]

Analice a continuación el diagrama 8, representa el valor de λ por cada r en el ejemplo estudiado numéricamente en terminología de mapeos, es decir, la función logística. Observe la tabla I y compare.

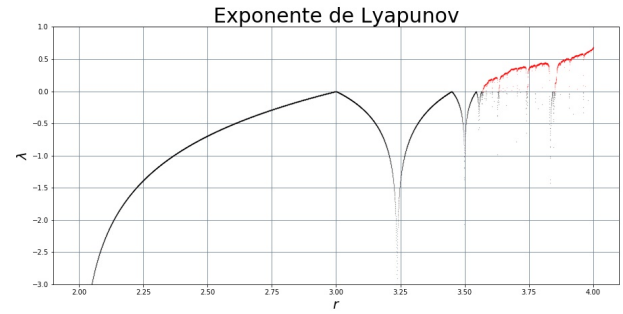


Figura 8. **Diagrama de Lyapunov.**

Los valores de $\lambda > 0$ son aquellos teñidos de color rojo. Observe que para valores de $\lambda < 0$, los valores de λ se aproximan desde infinito hasta un valor $r \approx 3,0$ monótonamente aproximadamente, pero cuando el valor de r continúa aumentando, se pierde la congruencia, incluso puede concluir que para valores pequeños de r , la gráfica es monótona, una vez que supera el valor $r \approx 3,0$ la pendiente de la recta tangente a la curva intercambia su signo hasta tender un ángulo $\approx \pi/2$, entonces se intercambia nuevamente el signo de la recta, note que en esta área específicamente se puede notar una función par acotada, pierde totalmente la congruencia cuando $\lambda = 0$. Antes de esto se trata siempre de un atractor, que evoluciona en el tiempo de forma caótica hasta convertirse en un repulsor, con la característica permanente a partir de ese punto, de caoticismo.

Esta interpretación en los exponentes de Lyapunov hace referencia al estado de un sistema dinámico en la vecindad de un punto fijo.

Cuando se trata de dos o más dimensiones, el análisis de estado del sistema dinámico en las proximidades de la estabilidad resulta útil a la hora de caracterizar sistemas, en este caso, la estabilidad corresponde a los **ciclos límite**. Una técnica conveniente para el análisis en espacios de dos o más dimensiones son las **secciones de Poincaré**, éstas tienen como finalidad aterrizar el análisis de un ciclo límite a una dimensión menor a la anterior.

¿Cómo se construye una sección de Poincaré?

Una **sección de Poincaré** se genera al elegir una superficie bidimensional y registrar los puntos en los que un conjunto de curvas la atraviesan. Es importante considerar la superficie a utilizar, puesto que se tratará de evitar que las curvas sean paralelas a ella y por tanto, se tenga un registro de estado.

En un lenguaje cotidiano, podría decirse que la sección Poincaré "congela el movimiento" del sistema dinámico. [1]

Una **sección gráfica de Poincaré** es la secuencia de puntos formada por las intersecciones de las rutas de secciones de fase con estas superficies bidimensionales, en la mayoría de los casos paralelas a los ejes espaciales en un espacio euclideo en el espacio fase, las curvas perforan estas superficies como velocidad ($y = \dot{\theta}$), tiempo ($z = \omega t'$), ángulo de fase ($x = \theta$). El conjunto de puntos A_i forma patrones cuando son proyectados a cada una de las superficies elegidas. [2]

Cada punto fijo en la sección Poincaré corresponde a un ciclo límite en el espacio de estado tridimensional completo.

Los puntos fijos en una sección de Poincaré son el conjunto de puntos que satisfacen las siguientes ecuaciones:

$$U^{n+1} = F_1(x^{(1)}, x^{(2)}) \quad (14)$$

$$U^{n+1} = F_1(x^{(1)}, x^{(2)}) \quad (15)$$

La estabilidad de estos puntos fijos se caracteriza al encontrar los valores característicos de la matriz jacobiana. La matriz jacobiana está dada por

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial U_1} & \frac{\partial F_1}{\partial U_2} \\ \frac{\partial F_2}{\partial U_1} & \frac{\partial F_2}{\partial U_2} \end{bmatrix} \quad (16)$$

El jacobiano se evalúa en el punto fijo del mapa Poincaré en cuestión. Los valores característicos de esta matriz determinan la estabilidad del ciclo límite, tal como en los puntos fijos en secciones de una dimensión.

Un ciclo límite estable atrae trayectorias cercanas, mientras que un ciclo límite inestable repele las trayectorias cercanas. [1]

La mayoría de las veces resultará imposible encontrar valores característicos explícitamente, ya que para hacerlo se requiere caracterizar explícitamente la función de mapa de Poincaré y, en la mayoría de los casos, no está determinada esa función.

Para entender ampliamente lo que refiere a secciones de Poincaré, se le introducirá a un ejemplo; **las funciones de Lorenz**. Éste será desarrollado más adelante al referirse a **atractores**.

¿Qué ocurre en los puntos que no se encuentran en la vecindad de un punto fijo o ciclo límite en un estado de un sistema dinámico?

Estos puntos pertenecen a una rama de estudio en la que los sistemas se conocen como **sistemas disipativos**, su principal característica es que, a largo plazo, su estado es en gran medida independiente al estado inicial del sistema impuesto por el observador. A medida que el sistema evoluciona en el tiempo, la trayectoria de un estado en el espacio fase se dirigirá, tenderá a algún punto o región del espacio en su estado final². Esta región en el espacio se conoce como **atractor** para el sistema, ya que un conjunto de trayectorias con propiedades similares en el mismo espacio tenderán a él.

Definición. Un **atractor** es un conjunto de valores en el espacio de fase en el que un sistema tiende a evolucionar.

Las propiedades de los atractores determinan las propiedades de un sistema dinámico a largo plazo. [1]

Definición. Una **cuenca de atracción** es un conjunto de condiciones iniciales que dan lugar a trayectorias que tienden a un atractor dado.

[1]

Un **atractor extraño** consiste en una infinidad de puntos en un espacio de $n - \text{dimensiones}$. Estos puntos corresponden a los estados de un sistema caótico. Los atractores extraños corresponden a análisis matemáticos abstractos que generalmente no cuentan con soluciones analíticas, pero que es posible caracterizarlos por medio de un sistema computacional. Estos atractores tienen dependencia sensible a sus condiciones iniciales.

Considere un sistema de ecuaciones como el siguiente:

$$U_1(t+1) = F_1(U_1(t), U_2(t), \dots, U_n(t))$$

$$U_2(t+1) = F_2(U_1(t), U_2(t), \dots, U_n(t))$$

$$\vdots$$

$$U_n(t+1) = F_n(U_1(t), U_2(t), \dots, U_n(t))$$

Se nombrará a F como el mapeo a sí mismo desde U con coordenadas U_1, U_2, \dots, U_n a $F(U)$ con coordenadas $F_1(U_1, U_2, \dots, U_n)$,

²Estado impuesto por el observador.

$F_2(U_1, U_2, \dots, U_n), \dots, F_n(U_1, U_2, \dots, U_n)$. Concluimos que un conjunto acotado S en un espacio de n —dimensiones es un **atractor extraño** para el mapeo F si existe un conjunto U con las siguientes propiedades:

- V es una vecindad de A en el mismo espacio de S , para cada punto U de A existe una pequeña bola centrada en U y enteramente contenida en V . En particular A está contenida en V .
- Para cada punto inicial U_o en V , éste permanece en V para $t > 0$; se vuelve y permanece tan cerca como uno quiere de A para t lo suficientemente grande. Esto significa que A está atrayendo.
- Existe cierta sensibilidad o dependencia a las condiciones iniciales cuando $U_o \in V$.
- Se puede elegir un punto $U_o \in A$, tal que arbitrariamente cerca de cada punto $Y \in A$, existe un punto U_t para algunos valores positivos de t . Esta condición implica que A no puede dividirse en dos diferentes atractores.

[5]

De acuerdo al sistema anterior de ecuaciones (expresión anterior), el conjunto siguiente de ecuaciones define una evolución determinista, cuyas expresiones son continuas en el tiempo:

$$\frac{dx}{dt} = -\sigma x + \sigma y \quad (17)$$

$$\frac{dy}{dt} = -xy + rx - y \quad (18)$$

$$\frac{dz}{dt} = xy - bz \quad (19)$$

Con $\sigma = 10, b = 8/3, r = 28$. Considere además como condiciones iniciales específicas.

El primero en mostrar este atractor fue **Edward Lorenz**, profesor del Instituto de Tecnología de Massachusetts. Este conjunto caracteriza una capa de fluido horizontal calentada desde abajo. El líquido más caliente formado en la parte inferior es más ligero. Éste tiende a elevarse produciendo corrientes de convección. Si se calienta lo suficiente, la convección toma lugar en lo irregular o turbulento. Este fenómeno puede observarse al calentar cualquier fluido.

Otros atractores extraños parten de sistemas como: **el sistema de Rössler**, que no tiene un estudio

específico, únicamente el de describir las características de atractores, **el sistema de Duffing** el cual modela una placa metálica entre imanes, se trata de un oscilador cuya fuerza de arrastre es proporcional al cubo de la velocidad y cuenta con una fuerza periódica externa, **el péndulo doble**, **el problema de los tres cuerpos**, etc.

Los **sistemas de Rössler** se introdujeron en la década de 1970 como ecuaciones prototipo que minimizan el caos continuo. Dado que el **teorema de Poincaré-Bendixson**³ excluye la existencia de atractores que no sean constantes, periódicos o cuasiperiódicos en sistemas autónomos definidos en una o dos dimensiones como la línea, el círculo, el plano, la esfera o el toro (Hartman, 1964), **la dimensión mínima para el caos es tres**. Sobre esta base, **Otto Rössler** ideó una serie de sistemas prototipo de ecuaciones diferenciales ordinarias en espacios de fase tridimensionales inspirada en la geometría de los flujos en \mathbb{R}^n y, en particular, en la característica de los sistemas de tipo relajación para presentar a menudo una variedad lenta en Z en su espacio de fases. En este colector, el movimiento es lento hasta que se alcanza un borde con que la trayectoria salta a la otra rama del colector, lo que permite no solo oscilaciones de relajación periódicas en la dimensión dos.a). En la dimensión tres, la reinyección puede inducir un comportamiento caótico si el movimiento se desplaza en espiral en una rama de la variedad lenta [13]. El sistema de Rössler es el siguiente:

$$\frac{dx}{dt} = -y - z \quad (20)$$

$$\frac{dy}{dt} = x + ay \quad (21)$$

$$\frac{dz}{dt} = bx - cz + xz \quad (22)$$

Donde $a, b, c \in \mathbb{R}, a > 0$.

*¿Por qué se les llama **atractores extraños**?*

Generalmente ese tipo de atractores son localmente inestables (caótico), pero globalmente estables (atractor).

Presentados los dos sistemas anteriores, analice gráficamente las soluciones de el **sistema de Lorenz** y el **sistema de Rössler**, cuyas soluciones se representan en los ejes coordenados.

³Consulte referencias en sección de **Referencias**.

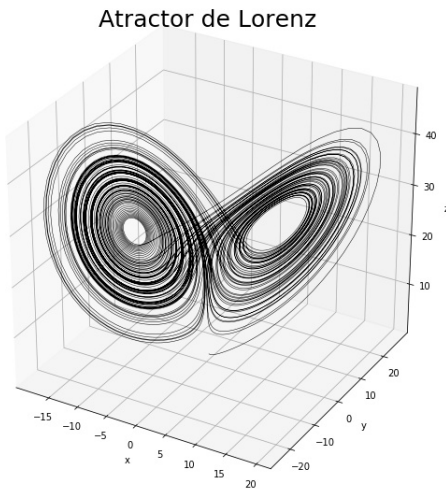


Figura 9. **Atractor de Lorenz.** Las condiciones iniales son: $(x(t=0), y(t=0), z(t=0)) = (0,0,1,0,1,05)$ y los valores de parámetros impuestos en la descripción del atractor.

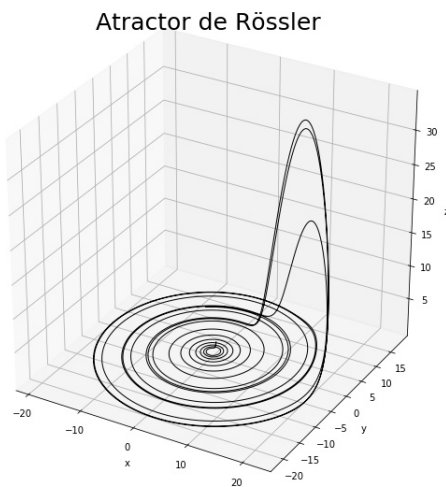


Figura 10. **Atractor de Lorenz.** Las condiciones iniales son: $(x(t=0), y(t=0), z(t=0)) = (1,0,2,5,3,0)$ y los valores de parámetros: $a, b, c = 0,1,0,1,14$ respectivamente.

Mostradas las soluciones, ahora parta de la noción que tiene de **órbita**. Algunas de las órbitas más conocidas son las que generan los planetas en el sistema solar alrededor del Sol, ¿a qué se deben?

Los planetas orbitan porque existe una influencia gravitacional producida por un punto en el espacio (Sol) que los atrae. Ahora, generalice esta noción a cualquier sistema dinámico, para que exista un atractor, debe haber alguna influencia producida por un objeto perteneciente al sistema dinámico, tal que todas las órbitas que lo componen tienden a él. Como se mencionó anteriormente, estos influenciadores no sólo son puntos, sino también regiones en el espacio.

Ahora, al hablarse de atractores extraños puede tener la noción de un sistema dinámico que contiene lo que se llamó anteriormente influenciador, que atrae a las trayectorias pertenecientes al mismo sistema dinámico pero que presenta discontinuidades que pueden concebirse numéricamente, y tal vez, analíticamente. La respuesta a las órbitas (atracción) a estos estados discontinuos del influenciador las hacen dependientes, o mejor dicho, altamente sensibles a las condiciones del sistema en un momento dado, correspondiente al momento en el que se estudia dicha atracción. Fantástico, ahora tiene una noción más clara del **caos**.

Es difícil, como se mencionó anteriormente, conocer las regiones de estabilidad en sistemas con estas características, es por eso que **Poincaré** propone una proyección.^a una superficie (generalmente suave), generalmente se trata de planos paralelos a los planos del espacio euclideo: $x=0, y=0, z=0$, la justificación es que generando un plano paralelo, automáticamente puede determinar uno de los tres valores (x, y ó z) para los cuales existe una región de estabilidad, entonces el espacio se reduce en una dimensión y se caracterizan los puntos para los cuales las soluciones a las ecuaciones diferenciales (la solución es una superficie) cruzan este plano paralelo. Dichos puntos, corresponden a una región de estabilidad.

Analice a continuación el diagrama 11, el cual muestra gráficamente el método de **Poincaré** para la solución a regiones estables del sistema, en este caso, el **atractor de Lorenz**.

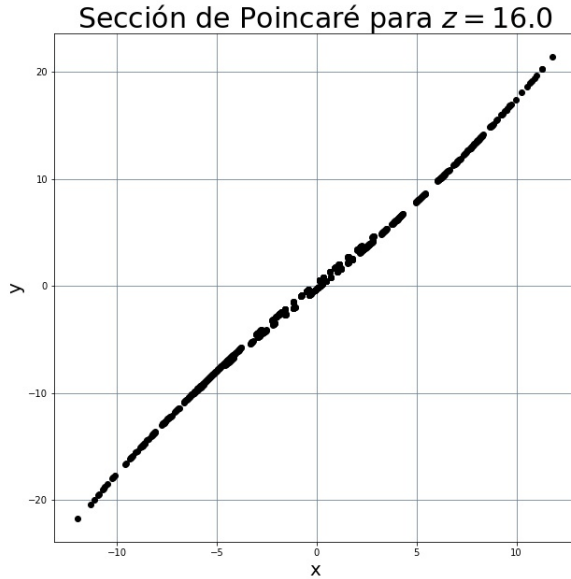


Figura 11. **Sección de Poincaré.** Las condiciones iniales son: $(x(t=0), y(t=0), z(t=0)) = (8, 0, 9, 0, 25)$ y los valores de parámetros del sistema impuestos.

Mostrado un resultado, puede concluir que el sistema tiene una región de estabilidad en $z = 16,0$ para un conjunto de valores que tienden a una recta con pendiente positiva. Se deja al lector realizar una regresión lineal para caracterizar este conjunto de puntos.

*¿Cuáles son las **cuencas de atracción** para los puntos fijos de atracción? ¿Cómo cambian estas regiones a medida que cambian los parámetros que describen el sistema?*

Estas regiones difícilmente tienen soluciones analíticas. Para describirlos, se necesita introducir un concepto geométrico; **fractal**.

El nombre de **fractal** fue introducido por **Benoit B. Mandelbrot** para caracterizar figuras geométricas que no son suaves o regulares. Este término corresponde a un verbo perteneciente al latín **frangere** que hace referencia a romper.^{en} fragmentos irregulares.

Un intento por introducir una definición matemática de **fractal** fue propuesta por **Mandelbrot** es un conjunto para el cual la dimensión de Hausdorff-Besicovitch estrictamente excede una dimensión topológica.

Imagine una línea, esta la troza a la mitad y sigue observando ñas mismas características pero con

dimensiones diferentes, vuelva a trozar el último pedazo y notará exactamente lo mismo, sucesivamente encontrará este patrón repetitivo hasta que la línea resulta indistinguible o se convierte simplemente en un punto, al final obtendrá un conjunto de puntos si troza cada uno de los segmentos existentes de igual manera espaciados, este conjunto se conoce como **conjunto de Cantor**. El conjunto de Cantor es autosimilar en el sentido de que las ampliaciones de sistema resultan ser equivalentes a él mismo. El proceso generado anteriormente se conoce como **recursión**. [8]

Cuando se trata de \mathbb{R} , se produce un conjunto de segmentos de longitud menor (no comparable con la longitud original, $a \ll a_o$) a la original, en \mathbb{R}^2 , los segmentos ahora son superficies cuya área es menor (con las mismas características que en el caso unidimensional) a el área total de la superficie original, en \mathbb{R}^3 ahora concebimos volúmenes, así, por inducción, para \mathbb{R}^d puede determinar que el número total de subdivisiones está dado por:

$$N(a) = \left(\frac{a_o}{a}\right)^d \quad (23)$$

[8]

$$d_F = \lim_{a \rightarrow \infty} \frac{\log(N(a))}{\log(a_o/a)} \quad (24)$$

[8]

La determinación de dimensionalidad n se conoce como **dimensión de Hausdorff**.

Note que en el conjunto de Cantor el número de segmentos es $N(a) = 2^n$ mientras que la longitud de cada segmento corresponda a $a_n = a_o/3^n$ y la dimensión de un objeto fractal está dada por

$$d_F = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log(2^n)}{\log(3^n)} \quad (25)$$

Lo cual se interpreta como una dimensión menor a la de una línea pero mayor a la de un punto. Puede hacer una conexión entre la dimensión fractal y los exponentes de Lyapunov, recuerde que una de las interpretaciones a los exponentes de Lyapunov es el espacio ocupado por la suma de los mismos, generalmente volúmenes. Si $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 < 0$, $\lambda_3 = 0$ se trata de un espacio fase en una superficie y note la siguiente correspondencia al considerar el área del espacio fase como un cuadrado:

$$A(t=0) = a_o^2 \rightarrow A(t) = a_o^2 e^{(\lambda_1 + \lambda_2)t} = a_o^2 e^{2\lambda_2 t} \quad (26)$$

Observe la figura siguiente y deduzca la siguiente expresión:

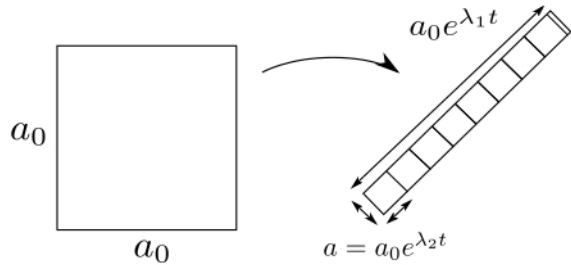


Figura 12. Transformación a la dimensión de fractales. A medida que el sistema evoluciona, el volumen del espacio de fase cambia.

[9]

$$N(t) = \frac{A(t=0)}{A(t)} = e^{\lambda_1 - \lambda_2} \quad (27)$$

Y la dimensión de un fractal, es:

$$d_F = 1 + \frac{\lambda_1}{|\lambda_2|} \quad (28)$$

Conocida como la **relación de Kaplan-Yorke**. Para un punto fijo $d_F = 0$, para un ciclo límite $d_F = 1$, para un atractor extraño no existen dimensiones predefinidas y la dimensión y expansión/contracción del espacio fase están dados por las condiciones iniciales del sistema estudiado.

I. SINCRONIZACIÓN DE SISTEMAS CAÓTICOS

La idea de sincronización de dos sistemas caóticos fue propuesta por primera vez por **Pecora y Carroll**. Desde entonces, se han producido e implementado métodos diferentes para sincronizar los sistemas caóticos, como el control de retroalimentación lineal, es un caso fantástico, imagínelo como a un auto al que se le agota la gasolina y cuando requiere automáticamente un sistema auxiliar lo compensa, también existe la retroalimentación no lineal, el control adaptativo, el control de retroceso, el control de la estructura variable, el control impulsivo, etc. Entre estos, el control impulsivo es básicamente una fuerza externa impulsora que en la mayoría de los casos es periódica. En este tipo

de sistemas, por tratarse de iteraciones, el tiempo es una variable discreta, por tanto la sincronización también lo es, es decir, solamente el receptor recibe información a plazos lo cual incrementa la eficiencia del paralelismo entre los dos sistemas en comparación a otros métodos. Generalmente la sincronización se lleva a cabo con sistemas idénticos como la serie y paralelismo en unidades computacionales con parámetros de control conocidos o los mismos parámetros de control desconocidos. [15]

Dado que existe incertidumbre, es imposible determinar que dos estados o incluso dos sistemas son idénticos, lo que conduce a una tendencia a buscar sistemas con mayores similitudes posibles, es necesaria la introducción de interferencias como función del tiempo dado que los sistemas son sensibles a las condiciones de estado iniciales y estas incertidumbres por muy pequeñas que seas, pueden destruir incluso, la sincronización de los sistemas tratados. Los resultados experimentales mostraron las siguientes características del control impulsivo:

- La precisión de la sincronización depende tanto del periodo como del ancho de las muestras de impulsos.
- El ancho de impulso mínimo para la sincronización aumenta a medida que aumenta el periodo de impulso.
- Los sistemas caóticos se pueden sincronizar mediante la transmisión de dos tipos de muestras a través de un solo canal a través de un esquema de división de tiempo.

[15]

Algunos sistemas caóticos se pueden descomponer en dos partes. Una parte tiende a hacer que la sincronización sea inestable y la otra parte tiende a hacer que la sincronización sea estable. La estabilidad de la sincronización impulsiva está estrechamente relacionada con los valores de los componentes de Lyapunov de los sistemas variacionales al mostrar cuando el error de sincronización aumenta o decrementa.

La sincronización en sistemas es un estudio bastante amplio, ya que puede tratarse de sistemas que transmiten y reciben información en una o más direcciones, realizando tareas en paralelo, es por eso que este análisis se restringe a la **sincronización impulsiva** entre dos sistemas caóticos para un acoplamiento unidireccional, es decir, solo se transmite información en una dirección. Para este tipo de sistemas el transmisor se hace llamar **maestro** y el

receptor **esclavo**. Para iniciar con un estudio básico, suponga que las muestras de impulsos equidistan, análogo a un sistema dinámico, se trata de una fuerza impulsora periódica. Además, para el caso general de un sistema dinámico, se expresarán las variables de estado separadas en dos partes:

Transmisor (S_1)

$$x_{n+1}^{(1)} = f(x_n^{(1)}, y_n^{(1)}) \quad (29)$$

$$y_{n+1}^{(1)} = g(x_n^{(1)}, y_n^{(1)}) \quad (30)$$

El separamiento se debe, como se mencionó anteriormente, a la consideración de incremento o decremento del error de sincronización al representarse la parte estable e inestable del sistema y detectar la tarea correcta a realizarse, ya sea por retroalimentación o lo contrario. Suponga que las muestras de la variable de estado del transmisor al receptor, el sistema accionado por el transmisor puede describirse mediante el conjunto siguiente de expresiones:

Receptor (S_2)

$$x_{n+1}^{(2)} = x_n^{(1)} \quad (31)$$

$$y_{n+1}^{(2)} = g(x_n^{(2)}, y_n^{(2)}) \quad (32)$$

Mientras que el sistema esté inactivo, la información que recibe el receptor está dada de la forma:

$$x_{n+1}^{(2)} = x_n^{(2)} \quad (33)$$

$$y_{n+1}^{(2)} = g(x_n^{(2)}, y_n^{(2)}) \quad (34)$$

Y como toda magnitud física, la sincronización debe presentarse con su respectiva incertidumbre o error sistemático:

$$s_{n+1} = \frac{\partial g(x_n^{(1)}, y_n^{(1)})}{\partial y_n^{(1)}} s_n \quad (35)$$

Equivalente a la matriz jacobiana con $r_n = x_n^{(1)} - x_n^{(2)}$, $s_n = y_n^{(1)} - y_n^{(2)}$.

$$\begin{bmatrix} r_{n+1} \\ s_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f(x_n^{(1)}, y_n^{(1)})}{\partial x_n} & \frac{\partial f(x_n^{(1)}, y_n^{(1)})}{\partial y_n^{(1)}} \\ \frac{\partial g(x_n^{(1)}, y_n^{(1)})}{\partial x_n^{(1)}} & \frac{\partial g(x_n^{(1)}, y_n^{(1)})}{\partial y_n^{(1)}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_n \\ s_n \end{bmatrix}$$

Los exponentes de Lyapunov para trayectorias específicamente conducidas se hacen llamar condicionales. Entonces la versión discreta del teorema de Pecora y Carroll, está dado por lo siguiente:

Teorema. Los sistemas S_1, S_2 estarán sincronizados si y sólo si los exponentes de Lyapunov del sistema diferencial 35 son todos negativos.

La expresión 35 representa la serie de mediciones hechas para la variable y , en muchas ocasiones, se considera únicamente el error en las variables correspondientes al eje vertical aunque el caso ideal es considerar el error en los dos ejes cartesianos. Por simplicidad, se reduce a lo redactado anteriormente.

La manera más sencilla de sincronizar dos sistemas es por medio del **acoplamiento** y como lo mencionado anteriormente en el texto, el acoplamiento funciona con un conjunto de ecuaciones diferenciales acopladas. El siguiente es una posible manera de acoplamiento:

$$x_{n+1}^{(1)} = f(x_n^{(1)}, y_n^{(1)}) \quad (36)$$

$$y_{n+1}^{(1)} = g(x_n^{(1)}, y_n^{(1)}) \quad (37)$$

$$q_n = x_n^{(1)} + K(x_n^{(1)} - x_n^{(2)}) \quad (38)$$

$$x_{n+1}^{(2)} = f(q_n, y_n^{(2)}) \quad (39)$$

$$y_{n+1}^{(2)} = g(q_n, y_n^{(2)}) \quad (40)$$

[15]

Donde $K \in \mathbb{R}$, $K \approx 1$. El acoplamiento en esta expresión es importante pues puede notarse que el sistema S_1 no se ve afectado por algún tipo de consecuencia del sistema S_2 , es decir, cumple con la condición de unidireccionalidad impuesta al inicio del análisis.

Como **ejemplo de sistema digital caótico** se mostrará el sistema de **Lorenz**. Éste, está dado por el siguiente conjunto de ecuaciones:

$$x_{n+1} = (1 + ab)x_n - bx_n y_n \quad (41)$$

$$y_{n+1} = (1 - b)y_n + bx_n^2 \quad (42)$$

Donde $a = 1.2, b = 0.8$. Para un análisis más intuitivo a lo que respecta **sincronización de sistemas caóticos**, observe la transición del sistema digital caótico de Lorenz:

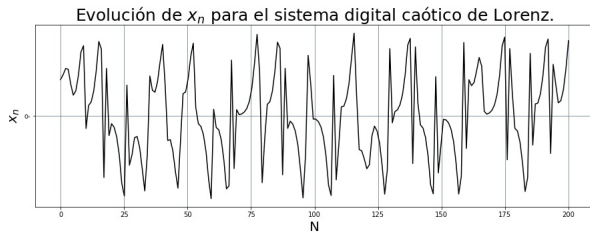


Figura 13. Evolución de x_n con condiciones iniciales $x_o = 0,1, y_o = 0,1$ y los parámetros establecidos anteriormente.

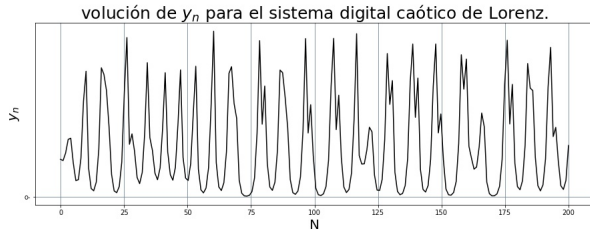


Figura 14. Evolución de y_n con condiciones iniciales $x_o = 0,1, y_o = 0,1$ y los parámetros establecidos anteriormente.

Puede observarse la presencia de caos en ambos ejemplos. Note que se trata de señales con el tiempo como variable discreta ya que sólo se enmarcan puntos específicos, es decir, el gráfico es un conjunto de crestas y valles irregulares en cada caso, además no existe un patrón que coincida en ambos análisis gráficos, podría esperarse un espacio de fase igualmente caótico, a continuación se muestra el diagrama de fase:

Proyección de trayectorias en estados de fase para el sistema caótico digital d

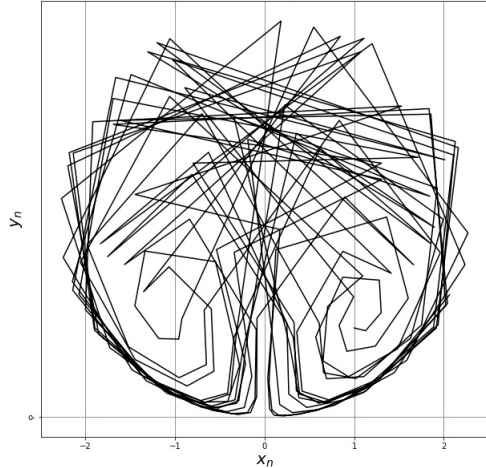


Figura 15. Proyección del estado de trayectorias con condiciones iniciales $x_o = 0,1, y_o = 0,1$ y los parámetros establecidos anteriormente.

La señal de sincronización, como se mostraba en un conjunto de ecuaciones anterior es aquella que relaciona la evolución de un sistema respecto a otro. Para el sistema de caos digital de Lorenz esta función denotada como d_n tiene la forma que se mostrará a continuación y así, acoplados los sistemas S_1, S_2 puede establecer además una relación entre éstos y d_n .

$$d_n = (1 + a^{(1)}b^{(1)})x_n^{(1)} - b^{(1)}x_n^{(1)}y_n^{(1)} - \epsilon x_n^{(1)} \quad (43)$$

$$x_{n+1}^{(2)} = d_n + \epsilon x_n^{(2)} \quad (44)$$

$$y_{n+1}^{(2)} = (1 - b^{(2)})y_n^{(2)} + b^{(2)}(x_n^{(2)})^2 \quad (45)$$

Donde $\epsilon \in (0, 1)$, en este caso específico $\epsilon = 0,3$ y los valores de los parámetros son los siguientes para cada uno de los sistemas acorde a su índice: $a^{(1)} = 1,25, b^{(1)} = 0,75, a^{(2)} = 1,22, b^{(2)} = 0,73$. La similitud impuesta en las condiciones iniciales y en los parámetros está hecha para notar el cómo un sistema caótico depende de sus condiciones iniciales y sus parámetros de control, que por muy cercanos que sean, generan otra trayectoria que en ocasiones, no asimila la una a la otra. A continuación se muestra la evolución del sistema S_1, S_2 respecto al número de iteraciones para la comparación de estados del sistema con condiciones iniciales y parámetros de control semejantes.

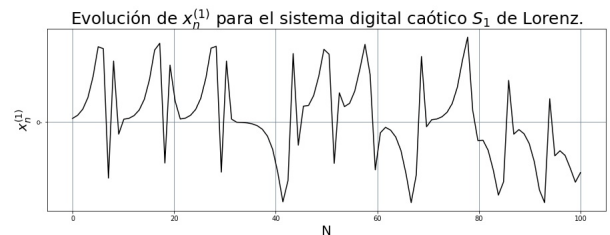


Figura 16. Evolución de $x_n^{(1)}$ con condiciones iniciales $x_o^{(1)} = 0,05, y_o^{(1)} = 0,05$ y los parámetros establecidos anteriormente.

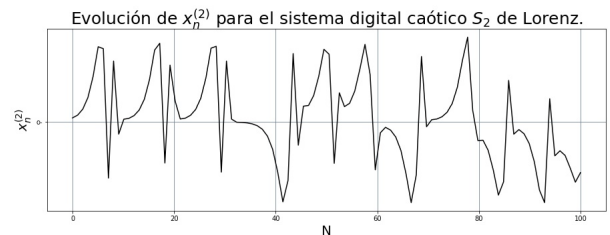


Figura 17. Evolución de $x_n^{(2)}$ con condiciones iniciales $x_o^{(2)} = 0,10, y_o^{(2)} = 0,01$ y los parámetros establecidos anteriormente.

El estado de las trayectorias de los sistemas S_1, S_2 parecen ser similares, recordando que uno es el transmisor y otro el receptor, se esperaría que la información que se enviara fuera totalmente la que se recibiera, pero en muchos de los casos no es así porque ésta, dependiendo de sus propiedades, cambia sus propiedades al interactuar con fuerzas externas. Puede concluir que esta sincronización no se ve alterada en gran medida por factores externos.

¿A qué se debe que una señal no cambie sus propiedades en gran medida?

Generalmente la transmisión de la información se lleva a cabo en la cercanía, es decir, si los sistemas son cercanos, básicamente la interacción de las señales con fuerzas externas es nula y la información que se envía es en gran medida la que se recibe. Considerando que las condiciones iniciales del sistema transmisor y receptor son diferentes y que existe incertidumbre por lo que no se puede tratar de la misma señal pero si de dos muy similares.

Sea $e_n = x_n^{(1)} - x_n^{(2)}$ el impulso requerido para sincronizar al sistema o el error entre las señales de entrada y salida. Esta variable funciona en sistemas digitales que se basan en sincronización impulsiva para determinar la magnitud de una señal externa que se añade al sistema conformado por la unión de S_1, S_2 para evitar que se pierda la sincronización, esta variable es importante puesto que si su magnitud es menor o mayor a la necesaria puede producir una pérdida parcial o total de dicha sincronización, ahora observe como se sincronizan los sistemas al incrementarse el número de iteraciones.

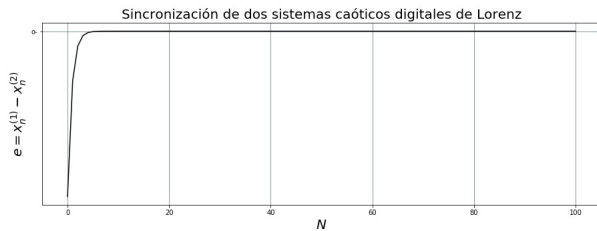


Figura 18. Sincronización de dos sistemas discretos con parámetro de control y condiciones iniciales diferentes.

Observe que se genera una tendencia a cero, es decir el valor de entrada corresponde al de salida con una cierta tolerancia en rango, generalmente de decimales. Con esto se concluye el estudio de caos y se deja al lector un conjunto de puertas abiertas a

cada una de las secciones tratadas para que explore este conocimiento tan maravilloso.

□

II. APÉNDICES

Esta sección contiene los algoritmos correspondientes a las soluciones numéricas de cada problema o ejercicio propuesto en el texto, las gráficas también se muestran a lo largo del texto.

Iteraciones

```
#El paquete lstlisting no acepta acentos
import numpy as np
import math
from scipy.integrate import odeint
from matplotlib import pyplot as plt
from matplotlib import style

#Valor asignado a variables
N = 20
r = [1.0, 2.0, 3.0, 4.0]
U = [0.2, 0.4, 0.7, 0.9]
V = [[] for x in range(4)]

for i in range(len(U)):
    for j in range(N):
        V[i].append(U[i] * r[0] *
                    (1 - U[i]))
        U[i] = V[i][j]

U = [0.2, 0.4, 0.7, 0.9]
#Figuras
plt.figure(figsize=(25,5))
for i in range(len(V)):
    plt.plot(np.linspace(0, N, N),
             V[i], 'o-', label='$U = \{0\}$'
             .format(U[i]))
plt.title('Relacion entre poblacion
existente y la maxima posible',
          fontsize = 25)
plt.ylabel('$U_{n+1}$', fontsize = 20)
plt.xlabel('Poblacion anual ($N$)
para $r = \{0\}$'.format(r[0]),
          fontsize = 20)
plt.legend()
plt.grid(True,color='slategray')
plt.savefig("Maps1.jpg")
plt.show()
```



```

U = [0.2, 0.4, 0.7, 0.9]
V = [[] for x in range(4)]

for i in range(len(U)):
    for j in range(N):
        V[i].append(U[i] * r[1] *
            (1 - U[i]))
        U[i] = V[i][j]

U = [0.2, 0.4, 0.7, 0.9]
#Figuras
plt.figure(figsize=(25,5))
for i in range(len(V)):
    plt.plot(np.linspace(0, N, N),
        V[i], 'o-', label='$U = {0}$'.
            format(U[i]))
plt.title('Relacion entre
poblacion existente y la maxima
posible', fontsize = 25)
plt.ylabel('$U_{n+1}$',
    fontsize = 20)
plt.xlabel('Poblacion anual ($N$)
para $r = {0}$'.format(r[1]),
    fontsize = 20)
plt.legend()
plt.grid(True, color='slategray')
plt.savefig("Maps2.jpg")
plt.show()

U = [0.2, 0.4, 0.7, 0.9]
V = [[] for x in range(4)]

for i in range(len(U)):
    for j in range(N):
        V[i].append(U[i] * r[2] *
            (1 - U[i]))
        U[i] = V[i][j]

U = [0.2, 0.4, 0.7, 0.9]
#Figuras
plt.figure(figsize=(25,5))
for i in range(len(V)):
    plt.plot(np.linspace(0, N, N),
        V[i], 'o-', label='$U = {0}$'.
            format(U[i]))
plt.title('Relacion entre poblacion
existente y la maxima posible',
    fontsize = 25)
plt.ylabel('$U_{n+1}$',
    fontsize = 20)
plt.xlabel('Poblacion anual ($N$)
para $r = {0}$'.format(r[1]),
    fontsize = 20)
plt.legend()
plt.grid(True, color='slategray')
plt.savefig("Maps3.jpg")
plt.show()

U = [0.2, 0.4, 0.7, 0.9]
V = [[] for x in range(4)]
Ug = [[] for x in range(4)]

for i in range(len(U)):
    for j in range(N):
        V[i].append(U[i] * r[3] *
            (1 - U[i]))
        U[i] = V[i][j]

U = [0.2, 0.4, 0.7, 0.9]
#Figuras
plt.figure(figsize=(25,5))
for i in range(len(V)):
    plt.plot(np.linspace(0, N, N),
        V[i], 'o-', label='$U = {0}$'.
            format(U[i]))
plt.title('Relacion entre poblacion
existente y la maxima posible',
    fontsize = 25)
plt.ylabel('$U_{n+1}$',
    fontsize = 20)
plt.xlabel('Poblacion anual ($N$) para
$r = {0}$'.format(r[3]),
    fontsize = 20)
plt.legend()
plt.grid(True, color='slategray')
plt.savefig("Maps4.jpg")
plt.show()

Ciclos límite, puntos fijos

#Observar la estabilidad del sistema.
import numpy as np
import math
from scipy.integrate import odeint
from matplotlib import pyplot as plt
from matplotlib import style

def logis(r,U):
    return r * U * (1 - U)

U = np.linspace(0,1)
r = [2.5, 3.6]
Uo = 0.3

```

```

plt.xlabel('Poblacion anual ($N$)
para $r = {0}$'.format(r[2]),
    fontsize = 20)
plt.legend()
plt.grid(True, color='slategray')
plt.savefig("Maps3.jpg")
plt.show()

U = [0.2, 0.4, 0.7, 0.9]
V = [[] for x in range(4)]
Ug = [[] for x in range(4)]

for i in range(len(U)):
    for j in range(N):
        V[i].append(U[i] * r[3] *
            (1 - U[i]))
        U[i] = V[i][j]

U = [0.2, 0.4, 0.7, 0.9]
#Figuras
plt.figure(figsize=(25,5))
for i in range(len(V)):
    plt.plot(np.linspace(0, N, N),
        V[i], 'o-', label='$U = {0}$'.
            format(U[i]))
plt.title('Relacion entre poblacion
existente y la maxima posible',
    fontsize = 25)
plt.ylabel('$U_{n+1}$',
    fontsize = 20)
plt.xlabel('Poblacion anual ($N$) para
$r = {0}$'.format(r[3]),
    fontsize = 20)
plt.legend()
plt.grid(True, color='slategray')
plt.savefig("Maps4.jpg")
plt.show()

Ciclos límite, puntos fijos

#Observar la estabilidad del sistema.
import numpy as np
import math
from scipy.integrate import odeint
from matplotlib import pyplot as plt
from matplotlib import style

def logis(r,U):
    return r * U * (1 - U)

U = np.linspace(0,1)
r = [2.5, 3.6]
Uo = 0.3

```

```

N = 20

#Primer radio
plt.figure(figsize=(7,7))
plt.plot(U, logis(r[0],U), 'gray',
label = 'Funcion logistica',linewidth
= 2)
plt.plot([0, 1], [0, 1], 'red',
label = '$U = F(U;r)$', linewidth
= 2)
plt.title('Funcion de iteraciones
para $r = {0}$'.format(r[0]),
fontsize= 25)
plt.ylabel('$U_{n+1}$',fontsize = 20)
plt.xlabel('$U_{n}$',fontsize = 20)
plt.legend()
plt.grid(True,color='slategray')

plt.legend()
plt.grid(True,color='slategray')

U = Uo
for i in range(N):
    V = logis(r[1],U)
    plt.plot([U, U], [U, V], 'k',
linewidth = 1)
    plt.plot([U, V], [V, V], 'k',
linewidth = 1)
    plt.plot([U], [V], 'k', marker = 'o')
    U = V
plt.savefig("Iteracion1.jpg")
plt.show()

plt.legend()
plt.grid(True,color='slategray')

U = Uo
for i in range(N):
    V = logis(r[1],U)
    plt.plot([U, U], [U, V], 'k',
linewidth = 1)
    plt.plot([U, V], [V, V], 'k',
linewidth = 1)
    plt.plot([U], [V], 'k', marker = 'o')
    U = V
plt.savefig("Iteracion2.jpg")
plt.show()

```

Bifurcaciones

```

import numpy as np
import math
from scipy.integrate import odeint
from matplotlib import pyplot as plt
from matplotlib import style

def logis(r,U):
    return r * U * (1 - U)

n = 1000
r = np.linspace(2.5, 4.0, n)
iteraciones = 500
menos = 100
U = 1e-5 * np.ones(n) #Dejare las
mismas condiciones iniciales.

plt.figure(figsize=(15,7))
for i in range(iteraciones):
    U = logis(r, U)
    if i >= (iteraciones - menos):
        plt.plot(r, U, 'k',
linewidth = 0.1)
plt.title('Diagrama de bifurcacion
de la funcion logistica',fontsize
= 30)
plt.ylabel('$U_{n}$',fontsize = 20)
plt.xlabel('$r$',fontsize = 20)
plt.grid(True,color='slategray')
plt.savefig("Bifurcacion.jpg")

```

Exponentes de Lyapunov

```
import numpy as np
import math
from scipy.integrate import odeint
from matplotlib import pyplot as plt
from matplotlib import style
```

```
def logis(r,U):
    return r * U * (1 - U)
```

```
def lya(r,U):
    return np.log(abs(r - (2 * U *
r)))
```

```
n = 10000
r = np.linspace(2.0, 4.0, n)
iteraciones = 10000
```

```
U = 1e-5 * np.ones(n) #Dejare las
mismas condiciones iniciales.
lyapunov = np.zeros(n)
```

```
for i in range(iteraciones):
    U = logis(r, U)
    lyapunov = lyapunov + lya(r, U)
```

```
plt.figure(figsize=(15,7))
plt.plot(r[lyapunov < 0],lyapunov
[lyapunov < 0]/ iteraciones, '.k',
alpha=.5, ms=.5)
plt.plot(r[lyapunov > 0],lyapunov
[lyapunov > 0]/ iteraciones, '.r',
alpha=.5, ms=.5)
plt.ylim(-3,1)
plt.title('Exponente de Lyapunov',
fontsize = 30)
plt.ylabel('$\lambda$', fontsize
= 20)
plt.xlabel('$r$', fontsize = 20)
plt.grid(True, color='slategray')
plt.savefig("Lyapunov.jpg")
plt.show()
```

Atractores

```
import matplotlib.pyplot as plt
from mpl_toolkits.mplot3d import Axes3D
import numpy as np
import math
from scipy.integrate import odeint
```

```
def lorenz(sol,t,sigma,b,r):
    x,y,z = sol
    return [sigma*(y-x), x*(r-z)-y,
x*y-b*z]
```

```
sigma = 10
b = 8 / 3
r = 28
x, y, z = 0.0, 1.0, 1.05
lor = []
t = np.linspace(0, 100, 10000)
sol = [x,y,z]
```

```
lor = odeint(lorenz,sol,t,
args=(sigma,b,r))
```

```
fig = plt.figure(figsize =
(10,10))
ax = fig.add_subplot(111,
projection='3d')
ax.grid(False)
plt.axis('on')
```

```
ax.plot(lor[:, 0], lor[:, 1],
lor[:, 2], 'k', linewidth = 0.5)
ax.set_title("Atractor de Lorenz",
fontsize = 25)
ax.set_xlabel("x")
ax.set_ylabel("y")
ax.set_zlabel("z")
plt.grid(True,color='slategray')
plt.savefig("AtractorLorenz.jpg")
plt.show()
```

```
def rossler(sol,t,sigma,b,r):
    x,y,z = sol
    return [-y-z, x+(a*y), b+z*
(x-c)]
```

```
a,b,c = 0.1,0.1,14
x,y,z = 1.0,2.5,3.0
t = np.linspace(0, 100, 1000000)
ross = []
```

```
ross = odeint(rossler,sol,t,
args=(a,b,c))
```

```
fig = plt.figure(figsize =
(10,10))
```

```

ax = fig.add_subplot(111,
projection='3d')
ax.grid(False)
plt.axis('on')

ax.plot(ross[:, 0], ross[:, 1],
ross[:, 2], 'k', linewidth = 1)
ax.set_title("Atractor de Rossler",
fontsize = 25)
ax.set_xlabel("x")
ax.set_ylabel("y")
ax.set_zlabel("z")
plt.grid(True, color='slategray')
plt.savefig("AtractorRossler.jpg")
plt.show()

```

Secciones de Poincaré

```

import matplotlib.pyplot as plt
from mpl_toolkits.mplot3d import
Axes3D
import numpy as np
import math
from scipy.integrate import odeint

```

```

def lorenz(sol, t, sigma, b, r):
    x, y, z = sol
    return [sigma*(y-x), x*(r-z)-y,
x*y-b*z]

```

```

def poincare(lor, inter):
    z = lor[:,2] #Comparacion
    indirecta.
    x = lor[:,0] #Para agregar
    elemento correspondiente a nuevo
    arreglo.
    y = lor[:,1]
    U = []
    V = []
    for i in range(len(z)):
        if(abs(z[i] - inter) <= 0.1):
            #print(z[i]) #Aseguro que
            hay intersecciones con
            el plano z = inter.
            U.append(x[i])
            V.append(y[i])
            #print(U,V) #Me aseguro
            de que se guarden los
            valores
    return [U, V]

```

```

sigma = 10
b = 8 / 3
r = 28
x, y, z = 8.0, 9.0, 25
lor = []
t = np.linspace(0, 100, 100000)
sol = [x,y,z]
inter = 16.0

```

```

lor = odeint(lorenz, sol, t,
args=(sigma, b, r))

```

```

#Interseccion
m,n = poincare(lor, inter)
#print(m,n) #Vuelvo a comprobar
intersecciones.

```

```

plt.figure(figsize=(10,10))
plt.plot(m, n, 'k', marker = 'o')
plt.title('Seccion de Poincare
para $z = {0}$'.format(inter),
fontsize = 30)
plt.ylabel('y', fontsize = 20)
plt.xlabel('x', fontsize = 20)
plt.grid(True, color='slategray')
plt.savefig("Poincare.jpg")

```

Sincronización de sistemas caóticos

```

import matplotlib.pyplot as plt
from mpl_toolkits.mplot3d import
Axes3D
import numpy as np
import math
from scipy.integrate import odeint

```

```

#Valor asignado a variables
N = 200
a = 1.2
b = 0.8

```

```

x = []
y = []
e = []

```

```

for i in range(N):
    x.append((1 + a * b) * x_o -
b * x_o * y_o)
    y.append((1 - b) * y_o + b *
x_o * x_o)

```

```

x_o = x[i]
y_o = y[i]

plt.figure(figsize=(15,5))
plt.plot(np.linspace(0, N, N),x,
'k','o-')
plt.title('Evolucion de $x_{n}$
para el sistema digital caotico de
Lorenz.', fontsize = 25)
plt.ylabel('$x_{n}$', fontsize = 20)
plt.xlabel('N', fontsize = 20)
plt.grid(True,color='slategray')
plt.savefig("EvolucionX.jpg")

plt.figure(figsize=(15,5))
plt.plot(np.linspace(0, N, N),y,
'k','o-')
plt.title('Evolucion de $y_{n}$
para el sistema digital caotico
de Lorenz.', fontsize = 25)
plt.ylabel('$y_{n}$', fontsize = 20)
plt.xlabel('N', fontsize = 20)
plt.grid(True,color='slategray')
plt.savefig("EvolucionY.jpg")

plt.figure(figsize=(10,10))
plt.plot(x,y,'k','o-')
plt.title('Proyeccion de trayectorias
en estados de fase para el sistema
caotico digital de Lorenz.',
fontsize = 20)
plt.ylabel('$y_{n}$', fontsize = 20)
plt.xlabel('$x_{n}$', fontsize = 20)
plt.grid(True,color='slategray')
plt.savefig("FaseSincronizacion.jpg")

plt.show()

```

Referencias particulares para análisis numéricos:

1. <https://ipython-books.github.io/121-plotting-the-bifurcation-diagram-of-a-chaotic-dynamical-system/>
2. <https://arxiv.org/pdf/1409.6738.pdf>

REFERENCIAS

- [1] ROBERT C. HILBORN. *Chaos and Nonlinear Dynamics*. Second Edition. Oxford University Press.
- [2] THORNTON, MARION. *Classical Dynamics of Particles and Systems*. Fifth Edition. Thomson Brooks Cole.
- [3] MICHAEL CROSS. *Introduction to Chaos*. California Institute of Technology. Last modified Monday, January 24, 2000. http://www.cmp.caltech.edu/~mcc/Chaos_Course/
- [4] OXFORD. *CHAOS FROM MAPS. Lecture7: 1-dimensional Maps*. <https://www2.physics.ox.ac.uk/sites/default/files/profiles/read/lect7-43148.pdf>
- [5] DAVID RUELLE. *Strange Attractors*. http://www.math.harvard.edu/~knill/teaching/mathe320_2014/blog/RuelleIntelligencer.pdf
- [6] STEVEN H. STROGATZ. *Non Linear Dynamics and Chaos*. Advanced Book Program. PERSEUS BOOKS.Reading, Massachusetts.
- [7] HENK BROER AND FLORIS TAKENS. *Dynamical Systems and Chaos*. March 29, 2009.
- [8] GOLDSTEIN, POOLE, SAFKO. *Classical Mechanics*. Third Edition. Adison Wesley.
- [9] MIT. *Chapter 7. Chaos and Non-Linear Dynamics*.
- [10] OLIVER KNILL. *Dynamical systems*. Harvard University, Spring semester, 2005.
- [11] GARNETT P. WILLIAMS. *Chaos Theory Tamed*. JOSEPH HENRY PRESS. Washington, D.C. 1997.
- [12] PREDRAG CVITANOVIĆ, ROBERTO ARTUSO, RONNIE MAINIERI, GREGOR TANNER AND GÁBOR VATTAY. *Chaos: Classical and Quantum. Volume I: Deterministic Chaos*. GONE WITH THE WIND PRESS ATLANTA. ChaosBook.org version13.5, Sep 7 2011.
- [13] PIERRE GASPARD. *Rössler Systems*. Enter for Nonlinear Phenomena and Complex Systems. Université Libre de Bruxelles. Code Postal 23. Campus Plaine, B-1050. Brussels, Belgium.
- [14] LOUIS M. PECORA, THOMAS L. CARROLL. *Synchronization in Chaotic Systems*. Naval Research Laboratory, Washington, D. C. 20 de diciembre de 1989.
- [15] MILAN STORK. *Digital Chaotic Systems Examples and Application for Data Transmission*. Department of Applied Electronics and Telecommunications, University of West Bohemia, 30614 Plzen, Czech Republic.
- [16] MIT. *Poincaré Sections*. <https://dspace.mit.edu/bitstream/handle/1721.1/84612/12-006j-fall-2006/contents/lecture-notes/lecnotes8.pdf>