Tarea 3

Noemí Lizbeth Moreno López

1. Deduce paso a paso las ecuaciones de Euler-Lagrange para un lagrangiano que dependa de la aceleración, además de la velocidad y la posición, es decir $L = L(\ddot{q}_i, \dot{q}_i, q_i, t)$.

Sol.

Considere caminos suaves en C entre $q_i^{ini} \equiv q_i(t^{ini})$, $q_i^{fin} \equiv q_i(t^{fin})$, donde q_i^{ini}, q_i^{fin} son los puntos iniciales y finales respectivamente. Sólo un camino sigue un sistema clásico. ¿Cuál es este camino?

A cada camino asignaremos un número; acción $\underline{S}$, definido por

$$S = \int_{t_{ini}}^{t_{fin}} L(q_i(t), \dot{q}_i(t), \ddot{q}_i(t))\, dt$$

$\boxed{\text{Teorema}}$ De la mínima acción. El camino que sigue un sistema clásico es aquél que extremiza S.

Prueba. Para encontrar un punto en una función, se puede expandir

$f(x+\delta x) = f(x) + f'(x)\delta x + \frac{1}{2} f''(x)\delta x^2 + \dots$, $\delta f = f(x+\delta x) - f(x) = f'(x) + O(\delta x^2)$,

$\frac{\delta f}{\delta x} \xrightarrow[x \to 0]{} f'(x)$, $f' = 0$ es equivalente a $\delta f = 0$ a primer orden.

Variando un poco el camino del sistema clásico, manteniendo fijos los puntos iniciales y finales, es decir $\delta q_i^{ini} = \delta q_i^{fin} = 0$. El cambio en la mínima acción es

$$\delta S = \delta \int_{t_{ini}}^{t_{fin}} L(\ddot{q}_i, \dot{q}_i, q_i, t)\, dt = \int_{t_{ini}}^{t_{fin}} \delta L(\ddot{q}_i, \dot{q}_i, q_i)\, dt \quad , \ \ddot{q}_i = \ddot{q}_i(t),$$

$\dot{q}_i = \dot{q}_i(t)$, $q_i = q_i(t)$.

*Note que el cambio en el camino no tiene que ver explícitamente con t.

$$\delta S = \int_{t_{ini}}^{t_{fin}} \left(\frac{\partial L}{\partial q_i}\delta q_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\delta \dot{q}_i + \frac{\partial L}{\partial \ddot{q}_i}\delta \ddot{q}_i \right) dt = \int_{t_{ini}}^{t_{fin}} \left(\frac{\partial L}{\partial q_i}\delta q_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\frac{d}{dt}(\delta q_i) + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial L}{\partial \ddot{q}_i}\frac{d^2}{dt^2}(\delta q_i) \right) dt = 0,$$ note lo siguiente:

$$\int_{t_{ini}}^{t_{fin}} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\frac{d}{dt}(\delta q_i)\,dt = \underbrace{\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\delta q_i \Big|_{t_{ini}}^{t_{fin}}}_{=0} - \int_{t_{ini}} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)\delta q_i\,dt$$, dado que $\delta q_i = 0$,

$$\int_{t_{ini}}^{t_{fin}} \frac{\partial L}{\partial \ddot{q}_i}\frac{d}{dt}(\delta \dot{q}_i)\,dt = \underbrace{\frac{\partial L}{\partial \ddot{q}_i}\delta \dot{q}_i \Big|_{t_{ini}}^{t_{fin}}}_{=0} - \int_{t_{ini}} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \ddot{q}_i}\right)\delta \dot{q}_i\,dt =$$

$$= -\int_{t_{ini}}^{t_{fin}} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \ddot{q}_i}\right)\frac{d}{dt}(\delta q_i)\,dt = \underbrace{-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \ddot{q}_i}\right)\delta q_i \Big|_{t_{ini}}^{t_{fin}}}_{=0} + \int_{t_{ini}}^{t_{fin}} \frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{\partial L}{\partial \ddot{q}_i}\right)\delta q_i\,dt$$, note

que siempre que $\delta q_i = 0$, $q_i(t_i) \sim q_i(t_{i+1})$ y $\delta \dot{q}_i = 0$, es decir, si no hay cambio en la posición, no hay cambio en la velocidad, así

$$\delta S = \int_{t_{ini}}^{t_{fin}} \left(\frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{\partial L}{\partial \ddot{q}_i}\right) - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) + \frac{\partial L}{\partial q_i} \right)\delta q_i\,dt = 0$$

Ya que deseamos una extremización independiente de δq_i, es decir, $\delta S = 0$, en general, que el integrando sea cero implica que el área debajo de la curva sea cero y por lo tanto:

$$\boxed{\frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{\partial L}{\partial \ddot{q}_i}\right) - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) + \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0} \leftarrow \text{Ecuaciones de Euler-Lagrange}$$

$i \in \mathbb{N}^+$

2. Encuentra las ecuaciones de Euler-Lagrange del modelo Sigma.

$$L(\dot{q}, q, t) = \frac{1}{2} g_{ab}(q^c)\, \dot{q}^a \dot{q}^b$$

donde $g_{ab}(q^c)$ es una matriz simétrica e inversible, que es una función de las coordenadas. Explica detalladamente cada paso.

Sol.

Una geodésica generaliza la noción de "línea recta" al espacio-tiempo. Comencemos con el elemento de línea $ds^2 = g_{ab}\, dq^a dq^b$, el tiempo propio se define como $d\tau^2 = -ds^2$, asumiendo $c=1$, $q^i = 0$, $i = 1,2,3$:

$$\tau = \int_{t_{ini}}^{t_{fin}} ds = \int_{t_{ini}}^{t_{fin}} \left(-g_{ab}\, dq^a dq^b\right)^{1/2}, \qquad (I)$$

podemos encontrar la ecuación geodésica con el principio de mínima acción. Aquí, consideramos el caso de dos eventos separados únicamente por el tiempo. Sabemos que $q^a = q^a(t)$, $q^b = q^b(t)$, así la expresión (I) se puede escribir de la siguiente manera:

$$\tau = \int_{t_{ini}}^{t_{fin}} \left(-g_{ab} \frac{dq^a}{dt} \frac{dq^b}{dt}\right)^{1/2} dt \qquad (II)$$

Sea la acción $S = \int ds$, entonces la extremización de S correspondiente al tiempo propio es la siguiente:

$$\delta S = \delta \int_{t_{ini}}^{t_{fin}} \left(-g_{ab} \frac{dq^a}{dt} \frac{dq^b}{dt}\right)^{1/2} dt = \int_{t_{ini}}^{t_{fin}} \delta \left(-g_{ab} \frac{dq^a}{dt} \frac{dq^b}{dt}\right)^{1/2} dt = \int_{t_{ini}}^{t_{fin}} L(q^a, \dot{q}^a, t)\, dt = 0, \qquad (III)$$

y dada la solución en el ejercicio anterior al principio de mínima acción pero con $\ddot{q}^a = 0$, tenemos como solución las ecuaciones de Euler-Lagrange.

Ecuaciones de Euler-Lagrange: $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial(dq^{\gamma}/dt)}\right) - \frac{\partial L}{\partial q^{\gamma}} = 0$

Nótese que podemos extraer de la expresión (III) la siguiente relación: $\frac{d\tau}{dt} = L(q^a, \dot{q}^a, t)$, ahora, se desarrollarán los términos de las ecuaciones de Euler-Lagrange:

$$\sim \frac{\partial L}{\partial q^{\gamma}} = -\frac{1}{2}\left(-g_{ab}\frac{dq^a}{dt}\frac{dq^b}{dt}\right)^{-1/2}\frac{\partial g_{ab}}{\partial q^{\gamma}}\frac{dq^a}{dt}\frac{dq^b}{dt} = \frac{-1}{2L}\frac{\partial g_{ab}}{\partial q^{\gamma}} L\frac{dq^a}{d\tau} L\frac{dq^b}{d\tau} =$$

$$= -\frac{L}{2}\frac{\partial g_{ab}}{\partial q^{\gamma}}\frac{dq^a}{d\tau}\frac{dq^b}{d\tau},$$

recuerde que para cualquier función $f = f(\tau(t))$, $\frac{df}{dt} = \frac{df}{d\tau}\frac{d\tau}{dt} = L\frac{df}{dt}$.

$$\sim \frac{\partial L}{\partial(dq^{\gamma}/dt)} = \frac{1}{2}\left(-g_{ab}\frac{dq^a}{dt}\frac{dq^b}{dt}\right)^{-1/2}\left(-g_{ab}\frac{dq^b}{dt} - g_{ab}\frac{dq^a}{dt}\right) =$$

$$= \frac{1}{2L}\left(-\underbrace{g_{a\gamma}\frac{dq^a}{dt}}_{=\alpha} - \underbrace{g_{\gamma b}\frac{dq^b}{dt}}_{=\beta}\right) = -\frac{1}{L}g_{a\gamma}\frac{dq^a}{dt}$$

esta expresión se justifica con la simetría de la métrica: $g_{a\gamma} = g_{\gamma a}$, además b, a son índices libres en α, β respectivamente, por lo que pueden intercambiarse por uno común.

$$\sim \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial(dq^{\gamma}/dt)}\right) = \frac{d}{dt}\left(-\frac{1}{L}g_{a\gamma}\frac{dq^a}{dt}\right) = L\frac{d}{d\tau}\left(-\frac{1}{L}g_{a\gamma}\frac{dq^a}{d\tau}L\right) =$$

$$= L\frac{d}{d\tau}\left(-g_{a\gamma}\frac{dq^a}{d\tau}\right) = L\left(-g_{a\gamma}\frac{d^2q^a}{d\tau^2} - \frac{dg_{a\gamma}}{d\tau}\frac{dq^a}{d\tau}\right),$$

por regla de la cadena:

$$\frac{d}{d\tau}\left(\frac{\partial L}{\partial(dq^r/d\tau)}\right) = L\left(-g_{ar}\frac{d^2q^a}{d\tau^2} - \frac{\partial g_{ar}}{\partial q^c}\frac{dq^c}{d\tau}\frac{dq^a}{d\tau}\right) =$$

$$= -L\left(g_{ar}\frac{d^2q^a}{d\tau^2} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{ar}}{\partial q^c} + \frac{\partial g_{rc}}{\partial q^a}\right)\right)\frac{dq^c}{d\tau}\frac{dq^a}{d\tau} \quad ,$$

note lo siguiente: $\frac{\partial g_{ar}}{\partial q^c} = \frac{\partial}{\partial q^c}\left(\vec{e}_a \cdot \vec{e}_r\right) = \frac{\partial}{\partial q^c}\left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial q^a}\cdot \vec{e}_r\right) = \frac{\partial}{\partial q^a}\left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial q^c}\cdot \vec{e}_r\right) =$

$$= \frac{\partial}{\partial q^a}\left(\vec{e}_r \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial q^c}\right) = \frac{\partial}{\partial q^a}\left(\vec{e}_r \cdot \vec{e}_c\right) = \frac{\partial g_{rc}}{\partial q^a}$$

Y la ecuación de Euler-Lagrange:

$$-L\left(g_{ar}\frac{d^2q^a}{d\tau^2} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{ar}}{\partial q^c} + \frac{\partial g_{rc}}{\partial q^a}\right)\right)\frac{dq^c}{d\tau}\frac{dq^a}{d\tau} + \frac{L}{2}\frac{\partial g_{ab}}{\partial q^r}\frac{dq^a}{d\tau}\frac{dq^b}{d\tau} = 0 \, ,$$

multiplicando por el neutro multiplicativo de $-L$:

$$g_{ar}\frac{d^2q^a}{d\tau^2} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{ar}}{\partial q^b} + \frac{\partial g_{rb}}{\partial q^a}\right)\frac{dq^b}{d\tau}\frac{dq^a}{d\tau} - \frac{1}{2}\frac{\partial g_{ab}}{\partial q^r}\frac{dq^a}{d\tau}\frac{dq^b}{d\tau} = 0 \, ,$$

$$g_{ar}\frac{d^2q^a}{d\tau^2} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{ar}}{\partial q^b} + \frac{\partial g_{rb}}{\partial q^a} - \frac{\partial g_{ab}}{\partial q^r}\right)\frac{dq^a}{d\tau}\frac{dq^b}{d\tau} = 0$$

$$g_{ar}\frac{d^2q^a}{d\tau^2} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{dr}}{\partial q^b} + \frac{\partial g_{rb}}{\partial q^d} - \frac{\partial g_{db}}{\partial q^r}\right)\frac{dq^d}{d\tau}\frac{dq^b}{d\tau} = 0 \, ,$$ multiplicando por g^{ar}, recuerde que los índices, son índices mudos y pueden ser intercambiados por cualquier letra, así

$$g^{ar}g_{ar}\frac{d^2q^a}{d\tau^2} + \underbrace{\frac{1}{2}g^{ar}\left(\frac{\partial g_{dr}}{\partial q^b} + \frac{\partial g_{rb}}{\partial q^d} - \frac{\partial g_{db}}{dq^r}\right)}_{= \left\{ \begin{matrix} a \\ b \;\; d \end{matrix} \right\} \text{ por definición}}\frac{dq^d}{d\tau}\frac{dq^b}{d\tau} = 0$$

Scanned by CamScanner

además, $g^{ar} g_{ar} = 1$, por lo tanto

$$\boxed{\frac{d^2 q^a}{d\tau^2} + \left\{ {a \atop b \; d} \right\} \frac{dq^b}{d\tau} \frac{dq^d}{d\tau} = 0}$$

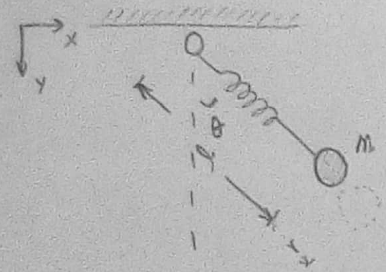
3. A un péndulo simple se le reemplaza el cable por un resorte de longitud en reposo l y constante del resorte k.

a) Construye el lagrangiano del sistema y deduce las ecuaciones de Euler-Lagrange.

b) Encuentra los puntos de equilibrio y describe su estabilidad.

c) Haz una expansión pequeña alrededor de los puntos de equilibrio y resuelve el sistema.

Sol.



a) Un sistema recomendable son las coordenadas polares:

~Energía cinética: $T = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m(\dot{\vec{x}}^2 + \dot{\vec{y}}^2) = \frac{1}{2}m((\dot{\vec{l}}+\dot{\vec{r}})^2 + (\vec{r}+\vec{l})^2\dot{\vec{\theta}}^2) = \frac{1}{2}m(\dot{\vec{r}}^2 + (\vec{r}+\vec{l})^2\dot{\vec{\theta}}^2)$, (I)

~Energía potencial: $V = \underbrace{\frac{1}{2}k\vec{r}^2}_{V \text{ del resorte}} + \underbrace{mg(l+r)\cos\theta}_{V \text{ gravitacional}}$ (II)

El lagrangiano $L = T - V$ está dado por la siguiente expresión, considerando T, V con las expresiones (I), (II):

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{\vec{r}}^2 + (\vec{r}+\vec{l})^2\dot{\vec{\theta}}^2) - \frac{1}{2}k\vec{r}^2 - mg(\vec{l}+\vec{r})\cos\theta \quad \text{(III)}$$

Las ecuaciones de Euler-Lagrange: $\frac{d}{dt}\left(\frac{\delta L}{\delta \dot{x}^A}\right) - \frac{\delta L}{\delta x^A} = 0$ de (III) para las variables $\vec{r}, \vec{\theta}$ son las siguientes:

r: $m\ddot{r} - m(r+l)\dot{\theta}^2 - kr - mg\cos\theta = 0$ (IV)

θ: $\frac{d}{dt}(m(r+l)^2\dot{\theta}) - mg(l+r)\operatorname{sen}\theta = 2m(r+l)\dot{r}\dot{\theta} + m(r+l)^2\ddot{\theta} - mg(l+r)\operatorname{sen}\theta = 0$,

$2\dot{r}\dot{\theta} + (r+l)\ddot{\theta} - g\operatorname{sen}\theta = 0$ (V)

b) Con dos grados de libertad, los puntos de equilibrio se encuentran en $\frac{\partial V}{\partial \theta}, \frac{\partial V}{\partial r}$, que corresponden a aquellos puntos en los que $F_{ext} = 0$.

El potencial se representa en la expresión (11): $V = \frac{1}{2}kr^2 + mg(\ell + r)\cos\theta$

$\sim \frac{\partial V}{\partial \theta} = -mg(\ell + r)\operatorname{sen}\theta = 0$, dado que $m, g, \ell + r \neq 0$, entonces $\operatorname{sen}\theta = 0$,

$\theta = \arcsin(0) = n\pi$, $n \in \mathbb{N}$, los puntos de equilibrio son $\theta = n\pi$.

$\sim \frac{\partial V}{\partial r} = kr + mg\cos\theta = 0$, $r = -\frac{m}{k}g\cos\theta$, $r = r(\theta)$. ¿r es un punto de equilibrio sólo si θ es un punto de equilibrio?

Podemos comprobar, por medio de los principios de Newton que la elongación y contracción de un resorte (máxima) es $r = \frac{m}{k}g$, por lo que dos puntos de equilibrio sí corresponden a los valores de θ como puntos de equilibrio:

Puntos de equilibrio r: $\underbrace{r = \frac{mg}{k}}_{\text{* máxima elongación}}$, $\underbrace{r = -\frac{m}{k}g}_{\text{* máxima contracción}}$ *por sistema coordenado

Estabilidad:

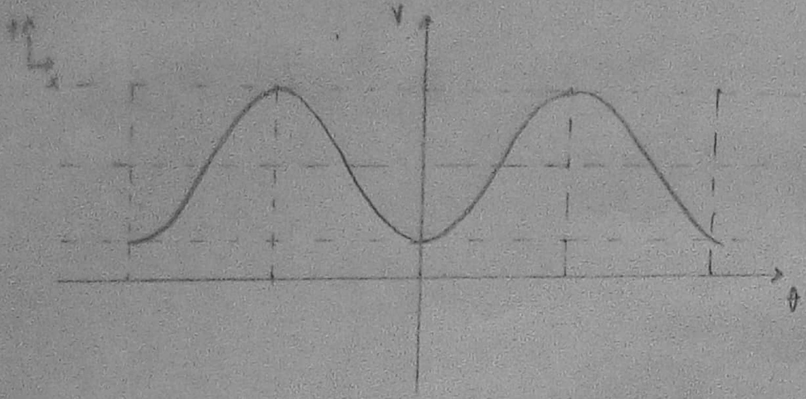
$$\theta: \quad \left.\frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2}\right|_{\theta_0} = -mg(\ell + r)\cos\theta\Big|_{\theta_0} = -mg(\ell + r), \quad \theta_0 = n\pi, \quad n = 0, 2, 4, \ldots$$

son puntos estables pues se refieren a un mínimo en la gráfica de potencial contra ángulo.

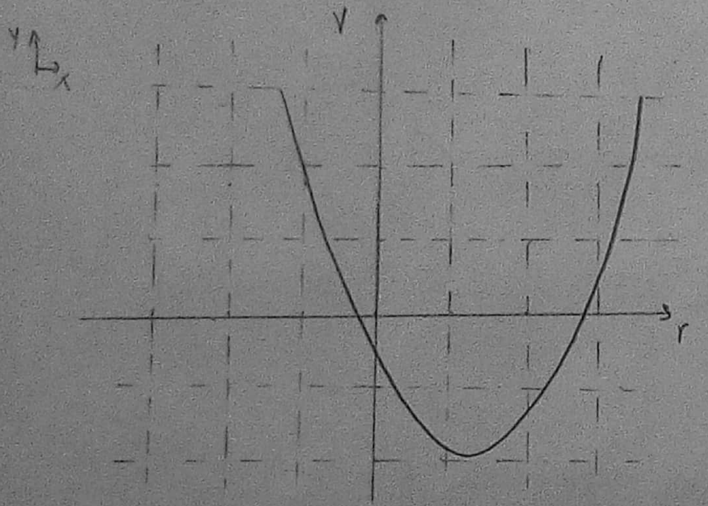
$$\left.\frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2}\right|_{\theta_0} = -mg(\ell + r)\cos\theta\Big|_{\theta_0} = mg(\ell + r), \quad \theta_0 = n\pi, \quad n = 1, 3, \ldots$$

son puntos inestables pues refieren a los máximos en la gráfica V vs θ, puede ser confuso el análisis considerando los signos de la segunda derivada, pero todo refiere al sistema de referencia. Observe la gráfica

Scanned by CamScanner



r: $\dfrac{\partial^2 V}{\partial r^2} = K = \begin{cases} <0 & \text{punto de equilibrio inestable} \\ 0 & \text{punto de equilibrio neutro} \\ >0 & \text{punto de equilibrio estable} \end{cases}$, pero suponemos el tercer caso en el que $K>0$. Observe la gráfica a continuación del potencial contra r para un valor θ fijo:



c) Para resolver el sistema de ecuaciones, podemos realizar una expansión por series de Taylor a primer orden, observemos nuevamente las expresiones (iv), (v)

(iv) $m\ddot{r} - m(r+l)\dot{\theta}^2 - kr - mg\cos\theta = 0$

(v) $2\dot{r}\dot{\theta} + (r+l)\ddot{\theta} - g\,\mathrm{sen}\,\theta = 0$

consideremos los puntos de equilibrio: 1) $\theta_0 = 0$, $r_0 = -\dfrac{m}{k}g$

2) $\theta_0 = \pi$, $r_0 = \dfrac{m}{k}g$

Haciendo una expansión para el caso 1) tenemos $\theta_a = \theta + \theta_0 = \theta$, y $r_a = r + r_0 = r - \frac{mg}{k}$, donde θ_a, r_a son la desviación de las variables respecto a su punto de equilibrio.

Sustituyendo en la ecuación de movimiento:

$$(\mathrm{v}): \underbrace{2\left(r_a + \frac{mg}{k}\right)^{\cdot\cdot}}_{=0}\dot{\theta}_a + \left(l + r_a + \frac{m}{k}g\right)\ddot{\theta}_a + g\,\mathrm{sen}\,\theta_a = 0, \quad r_a, \theta_a \to 0, \text{ por lo que}$$

$$\left(l + \frac{m}{k}g\right)\ddot{\theta}_a + g\theta_a = 0, \quad \boxed{\ddot{\theta}_a + \frac{g}{l + \frac{m}{k}g}\theta_a = 0}$$ y, la solución a la ecuación diferencial es la siguiente:

$$\theta_a = A\cos\left(\sqrt{\frac{g}{l + \frac{m}{k}g}}\,t + \delta\right) \quad (*)$$

$$(\mathrm{iv})\quad m\left(r_a + \frac{m}{k}g\right)^{\cdot\cdot} - m\left(r_a + \frac{m}{k}g + l\right)\dot{\theta}_a^2 - k\left(r_a + \frac{m}{k}g\right) - mg\cos\theta_a = 0,$$

pero $\theta_a \to 0$, $\dot{\theta}_a = 0$, $\cos\theta_a \simeq 1$:

$$m\ddot{r}_a - k\left(r_a + \frac{m}{k}g\right) - mg = m\ddot{r}_a - kr_a - 2mg = 0,$$

$$\boxed{\ddot{r}_a - \frac{k}{m}r_a = 2g}$$

Podemos notar que r_a es también una solución en términos de senos y cosenos como la expresión anterior, recordando el sistema de referencia en el que se refiere. Si fuese en $\overset{y}{\llcorner}_{x}$, la ecuación de movimiento correspondería a $\ddot{r}_a + \frac{k}{m}r_a = 2g$ y

$$\boxed{r_a = B\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\,t + \varepsilon\right)} \quad (**)$$

Donde $(*)$, $(**)$ representan las soluciones a pequeñas oscilaciones.

Puede procederse de igual manera al caso 2), pero observe que se trata del mismo sistema, por lo que se concluye con la mostración. $\square$

4) Considere el siguiente lagrangiano dependiente del tiempo para un grado de libertad q.

$$L = e^{bt}\left(\frac{1}{2}m\dot{q}^2 - \frac{1}{2}k^2q^2\right) \quad , \; k, b, m \in \mathbb{R}^+$$

a) Encuentre las ecuaciones de Euler-Lagrange. ¿Se parece a algún sistema físico visto en clase?

b) Realiza un cambio de variable $Q = e^{bt/2}q$ y construye el lagrangiano como función de $Q, \dot{Q}$. Encuentre la simetría continua de este lagrangiano y deduce la cantidad conservada asociada a ella usando el teorema de Noether. Re-escribe esta cantidad conservada en términos de q y discute el resultado.

Sol

a) Las ecuaciones de Euler-Lagrange: $\frac{d}{dt}\left(\frac{\delta L}{\delta \dot{q}}\right) - \frac{\delta L}{\delta q} = 0$, es la siguiente:

$$\text{EL}: \frac{d}{dt}\left(e^{bt}m\dot{q}\right) - e^{bt}k^2q = b e^{bt}m\dot{q} + e^{bt}m\ddot{q} - e^{bt}k^2q = 0,$$

reduciendo la expresión, es decir, multiplicando por el reverso multiplicativo de e^{bt}:

$$bm\dot{q} + m\ddot{q} - k^2q = 0 \quad , \text{ asemeja al oscilador amortiguado.}$$

$$\boxed{\ddot{q} + b\dot{q} - \frac{k^2}{m}q = 0}$$

b) Para la construcción del lagrangiano es necesario un cambio de variable $q = Qe^{-bt/2}$, $\dot{q} = \dot{Q}e^{-bt/2} - \frac{b}{2}Qe^{-bt/2}$, por lo que

$$L = e^{bt}\left(\frac{1}{2}m\dot{q}^2 - \frac{1}{2}k^2q^2\right) = e^{bt}\left(\frac{1}{2}m\left(\dot{Q}e^{-bt/2} - \frac{b}{2}Qe^{-bt/2}\right)^2 - \frac{1}{2}k^2\left(Qe^{-bt/2}\right)^2\right),$$

$$L = e^{bt}\left[\frac{1}{2}me^{-bt}\left(\dot{Q} - \frac{b}{2}Q\right)^2 - \frac{1}{2}k^2Q^2e^{-bt}\right] = \frac{1}{2}m\left(\dot{Q} - \frac{b}{2}Q\right)^2 - \frac{1}{2}k^2Q^2,$$

$$L = \frac{1}{2}m\dot{Q}^2 - \frac{1}{2}mb\dot{Q}Q + \frac{mb^2}{8}Q^2 - \frac{1}{2}k^2Q^2$$ ← Lagrangiano en términos de $Q, \dot{Q}$

Una cantidad conservada $\Lambda(\dot{q}, q, t)$ es una que no varía a lo largo del movimiento del sistema. Esto significa

$$\left.\frac{d\Lambda}{dt}\right|_{q=q(t)} = 0$$

Para mostrar las cantidades conservadas es necesario desarrollar cada uno de los criterios para momento lineal, momento angular, energía.

1) Homogeneidad en el espacio

Concidere $\vec{r}_i \rightarrow \vec{r}_i + \delta\hat{n}$, $\dot{\vec{r}}_i \rightarrow (\vec{r}_i + \delta\hat{n})^{\cdot} = \dot{\vec{r}}_i$, $\delta \in \mathbb{R}$, $\hat{n} \to$ cte. Para comprobar la conservación de momento lineal proyectado en $\hat{n}$, es necesario que $L(\dot{\vec{r}}_i, \vec{r}_i + \delta\hat{n}, t) = L(\dot{\vec{r}}_i, \vec{r}_i, t)$. A continuación se realiza una prueba con $L = \frac{1}{2}m\dot{Q}^2 - \frac{1}{2}mb\dot{Q}Q + \frac{1}{2}mb^2Q^2 - \frac{1}{2}k^2Q^2$:

$$L(\dot{\vec{Q}}, \vec{Q} + \delta\hat{n}, t) = \frac{1}{2}m\dot{Q}^2 - \frac{1}{2}mb\dot{Q}(Q + \delta n) + \frac{1}{2}mb^2\underbrace{(Q + \delta n)^2}_{*} - \frac{1}{2}k^2\underbrace{(Q + \delta n)^2}_{**},$$

pero con la aparición de términos cuadráticos en la expresión anterior: $*, **$, se comprueba que $L(\dot{\vec{Q}}, \vec{Q} + \delta\hat{n}, t) \neq L(\dot{\vec{Q}}, \vec{Q}, t)$, por lo tanto no hay conservación del momento lineal.

2) Isotropía

~ Sin dirección privilegiada.

~ $L = \frac{1}{2}\sum_i m_i \dot{\vec{r}}_i^{\,2} - V(|\vec{r}_i - \vec{r}_j|)$ es invariante ante rotaciones, es decir, $\vec{r}_i \longrightarrow \vec{r}_i + \delta\hat{n}\times\vec{r}_i$, $\dot{\vec{r}}_i \rightarrow \dot{\vec{r}}_i + \delta\hat{n}\times\dot{\vec{r}}_i$, $t \rightarrow t$, $\forall i$, δ es pequeño

Para comprobar conservación del momento angular, es necesario que $L(\dot{\vec{Q}}_i + \delta\hat{n}\times\dot{\vec{Q}}_i , \vec{Q}_i + \delta\hat{n}\times\vec{Q}_i , t) = L(\dot{\vec{Q}}_i , \vec{Q}_i , t)$. A continuación, se realiza la prueba con $L = \frac{1}{2}m\dot{Q}^2 - \frac{1}{2}mb\dot{Q}Q + \frac{1}{2}mb^2Q^2 - \frac{1}{2}k^2Q^2$:

$$L(\dot{\vec{Q}}_i + \delta\hat{n}\times\dot{\vec{Q}}_i , \vec{Q}_i + \delta\hat{n}\times\vec{Q}_i , t) = \frac{1}{2}m(\dot{Q} + \delta\hat{n}\times\dot{Q})^2 - \frac{1}{2}mb(\dot{Q} + \delta\hat{n}\times\dot{Q})(Q + \delta\hat{n}\times Q) +$$
$$+ \frac{1}{2}mb^2(Q + \delta\hat{n}\times Q)^2 - \frac{1}{2}k^2(Q + \delta\hat{n}\times Q)^2;$$

como ejemplo $\vec{Q}_i \cdot \vec{Q}_i = (\vec{Q}_i + \delta\hat{n}\times\vec{Q}_i)\cdot(\vec{Q}_i + \delta\hat{n}\times\vec{Q}_i) = \vec{Q}_i\cdot\vec{Q}_i + \theta(\delta^2)$, por lo que los términos $\frac{1}{2}m\dot{Q}^2$, $\frac{1}{2}mb^2Q^2$, $\frac{1}{2}k^2Q^2$ conservan su forma, observemos qué pasa con $\frac{1}{2}mb\dot{Q}Q$. Sabemos que se trata de un producto escalar por ser ambos vectores, y sea cual sea el marco de referencia $\dot{\vec{Q}}\cdot\vec{Q} = 0$ por lo que el término se desvanecería y, así:

$$L(\dot{\vec{Q}} + \delta\hat{n}\times\dot{\vec{Q}} , \vec{Q} + \delta\hat{n}\times\vec{Q} , t) = L(\dot{\vec{Q}}, \vec{Q}, t)$$

por lo tanto, se conserva el momento angular.

3) Homogeneidad en el tiempo

Invarianza ante transformaciones temporales $\vec{r}_i(t) \rightarrow \vec{r}_i(t)$, $\dot{\vec{r}}_i(t) \rightarrow \dot{\vec{r}}_i(t)$, $t \rightarrow t + \delta$. Como se observa, no hay cambios en coordenadas y velocidades, pero al tiempo se le agrega una constante $\delta \in \mathbb{R}$. Esta es una simetría si y sólo si el lagrangiano no depende explícitamente del tiempo

Esta condición coincide con la expresión, por lo que $\mathcal{H} = \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i - L(q_i, \dot{q}_i)$ se conserva. Determinaremos a continuación las componentes de $\mathcal{H}$:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{Q}} = m\dot{Q} - \frac{1}{2}mbQ, \quad L = \frac{1}{2}m\dot{Q}^2 - \frac{1}{2}mb\dot{Q}Q + \frac{1}{2}mb^2Q^2 - \frac{1}{2}k^2Q^2, \text{ así}$$

$$\mathcal{H} = m\dot{Q}^2 - \frac{1}{2}mbQ\dot{Q} - \frac{1}{2}m\dot{Q}^2 + \frac{1}{2}mb\dot{Q}Q + \frac{1}{2}mb^2Q^2 - \frac{1}{2}k^2Q^2;$$

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2}m\dot{Q}^2 + \frac{1}{2}mb^2Q^2 - \frac{1}{2}k^2Q^2 \quad \leftarrow \text{Energía en términos de } Q,$$

Ahora, en términos de $q, \dot{q}$, recuerde que $Q = e^{bt/2}q$, $\dot{Q} = \frac{b}{2}e^{bt/2}q + e^{bt/2}\dot{q}$:

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2}m\left(\frac{b}{2}e^{bt/2}q + e^{bt/2}\dot{q}\right)^2 + \frac{1}{2}mb^2\left(e^{bt/2}q\right)^2 - \frac{1}{2}k^2\left(e^{bt/2}q\right)^2 =$$

$$= \frac{1}{2}e^{bt}\left[m\left(\frac{b}{2}q + \dot{q}\right)^2 + mb^2q^2 - k^2q^2\right]$$

Lo que observo en esta última expresión es que el término de la energía no es constante debido a que depende del tiempo en uno de sus términos, tal como en el oscilador amortiguado, la amplitud decrece y hay pérdida de energía debido al término cinético que lo frena. Por lo tanto, una transformación de sistema de coordenadas no implica las mismas simetrías al no conservarse las mismas magnitudes físicas.