María José Fonseca Vázquez.

Pregunta 1

$q_1 = x\cos\mu + P_y \sin\mu$ $\qquad q_2 = y\cos\mu + P_x\sin\mu$

$P_1 = P_x\cos\mu - y\sin\mu$ $\qquad P_2 = P_y\cos\mu - x\sin\mu$

a) Como el hamiltoniano original depende de q_1, q_2, P_1 y P_2, entonces las transformaciones que se tienen escritas arriba son las inversas; sin embargo, si una transformación es canónica, la inversa lo es también. Como dependen de 4 variables, se utilizará el jacobiano:

$$\mathcal{J} = \begin{pmatrix} \frac{\partial q_1}{\partial x} & \frac{\partial q_1}{\partial y} & \frac{\partial q_1}{\partial P_x} & \frac{\partial q_1}{\partial P_y} \\ \frac{\partial q_2}{\partial x} & \frac{\partial q_2}{\partial y} & \frac{\partial q_2}{\partial P_x} & \frac{\partial q_2}{\partial P_y} \\ \frac{\partial P_1}{\partial x} & \frac{\partial P_1}{\partial y} & \frac{\partial P_1}{\partial P_x} & \frac{\partial P_1}{\partial P_y} \\ \frac{\partial P_2}{\partial x} & \frac{\partial P_2}{\partial y} & \frac{\partial P_2}{\partial P_x} & \frac{\partial P_2}{\partial P_y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\mu & 0 & 0 & \sin\mu \\ 0 & \cos\mu & \sin\mu & 0 \\ 0 & -\sin\mu & \cos\mu & 0 \\ -\sin\mu & 0 & 0 & \cos\mu \end{pmatrix}$$

Para que la transformación sea canónica, $\mathcal{J} J \mathcal{J}^T = J$, con $J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$\mathcal{J} J = \begin{pmatrix} \cos\mu & 0 & 0 & \sin\mu \\ 0 & \cos\mu & \sin\mu & 0 \\ 0 & -\sin\mu & \cos\mu & 0 \\ -\sin\mu & 0 & 0 & \cos\mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin\mu & 0 & 0 & \cos\mu \\ 0 & -\sin\mu & \cos\mu & 0 \\ 0 & -\cos\mu & -\sin\mu & 0 \\ -\cos\mu & 0 & 0 & -\sin\mu \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{J}^T = \begin{pmatrix} \cos\mu & 0 & 0 & -\sin\mu \\ 0 & \cos\mu & -\sin\mu & 0 \\ 0 & \sin\mu & \cos\mu & 0 \\ \sin\mu & 0 & 0 & \cos\mu \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{J} J \mathcal{J}^T = \begin{pmatrix} -\sin\mu & 0 & 0 & \cos\mu \\ 0 & -\sin\mu & \cos\mu & 0 \\ 0 & -\cos\mu & -\sin\mu & 0 \\ -\cos\mu & 0 & 0 & -\sin\mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\mu & 0 & 0 & -\sin\mu \\ 0 & \cos\mu & -\sin\mu & 0 \\ 0 & \sin\mu & \cos\mu & 0 \\ \sin\mu & 0 & 0 & \cos\mu \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = J$$

Por tanto, las transformaciones son canónicas. //

b) Se tiene $H=(q_1^2+q_2^2+p_1^2+p_2^2)/2$. Sustituyendo

$$H=\{(x\cos\mu+P_y\sin\mu)^2+(y\cos\mu+P_x\sin\mu)^2+(P_x\cos\mu-y\sin\mu)^2+(P_y\cos\mu-x\sin\mu)^2\}/2$$

$$=\{x^2\cos^2\mu+\cancel{2xP_y\sin\mu\cos\mu}+P_y^2\sin^2\mu+P_x^2\cos^2\mu-\cancel{2P_xy\cos\mu\sin\mu}+y^2\sin^2\mu+y^2\cos^2\mu+\cancel{2yP_x\cos\mu\sin\mu}+P_x^2\sin^2\mu+P_y^2\cos^2\mu-\cancel{2xP_y\sin\mu\cos\mu}+x^2\sin^2\mu\}/2$$

$$=\{x^2(\cos^2\mu+\sin^2\mu)+y^2(\cos^2\mu+\sin^2\mu)+P_y^2(\sin^2\mu+\cos^2\mu)+P_x^2(\sin^2\mu+\cos^2\mu)\}/2=$$

$$=(q_1^2+q_2^2+p_1^2+p_2^2)/2$$

//

c) $\dot{q}=\frac{\partial H}{\partial p_i}$ $\quad \dot{p}=-\frac{\partial H}{\partial q_i}$, con $y=P_y=0$

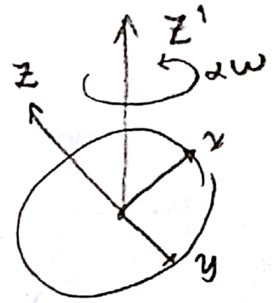
$\dot{x}=\frac{2}{2}P_x=P_x$ $\qquad \dot{x}-P_x=0$ $\qquad (\dot{x}=P_x)^{\circ}=\ddot{x}=\dot{P_x}=-x$

$\dot{P_x}=-q=-x$ $\qquad \dot{P_x}+x=0$

Solución:

$x(t)=A\sin(t+\delta)$ //

Pregunta 2



a) Como es un disco, $\rho=\frac{M}{\pi r^2}$

$$I=\begin{pmatrix}I_1&0&0\\0&I_2&0\\0&0&I_3\end{pmatrix}$$

$I_1=\int\rho\,y^2dA=I_2=\int\rho\,x^2dA$

$I_3=\int\rho(x^2+y^2)dA=I_1+I_2$

$$I_3=\frac{M}{\pi r^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{A}\rho^2\rho\,d\rho\,d\theta=\frac{2M}{r^2}\int\rho^3d\rho=\frac{2M}{r^2}\frac{\rho^4}{4}\Big|_0^A=\frac{M}{2}A^2$$

$I_1+I_2=I_3$; pero $I_1=I_2$, por tanto

$2I_1=I_3$

$I_1=\frac{1}{2}\left(\frac{M}{2}A^2\right)=\frac{MA^2}{4}$

$I_2=\frac{MA^2}{4}$

Además, para los otros elementos de la matriz de inercia se obtienen valores de cero, ya que $z=0$ y $x=y$. Entonces:

$$I = \begin{pmatrix} \frac{MA^2}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{MA^2}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{MA^2}{2} \end{pmatrix}$$

Los ejes de rotación (ejes principales) son, por la geometría, x, y y z. (se explica mejor al final de la tarea).

b) $L = I_{ab}\,\omega_b$

donde $\omega_b = \begin{pmatrix} 0 \\ -\omega\sin\alpha \\ \omega\cos\alpha \end{pmatrix}$

$$L = \begin{pmatrix} \frac{MA^2}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{MA^2}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{MA^2}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -\omega\sin\alpha \\ \omega\cos\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{\omega MA^2\sin\alpha}{4} \\ \frac{\omega MA^2\cos\alpha}{2} \end{pmatrix}$$

Magnitud

$$|L| = \sqrt{\left([\omega MA^2\sin\alpha]/4\right)^2 + \left([\omega MA^2\cos\alpha]/2\right)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{M^2A^4}{16}\omega^2\sin^2\alpha + \frac{M^2A^4}{4}\omega^2\cos^2\alpha} = \sqrt{\frac{1}{16}M^2A^4\omega^2\sin^2\alpha + \frac{1}{16}M^2A^4\omega^2\cos^2\alpha + \frac{3}{16}M^2A^4\omega^2\cos^2\alpha}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{16}M^2A^4\omega^2(1+3\cos^2\alpha)} = \frac{MA^2\omega}{4}(1+3\cos^2\alpha)^{1/2}$$

Dirección

$$\vec{L} = \frac{-\frac{\cancel{\omega M A^2}\sin\alpha}{\cancel{4}}\hat{j} + \frac{\cancel{\omega MA^2}\cos\alpha}{\cancel{4}}\hat{k}}{\frac{\cancel{MA^2\omega}}{\cancel{4}}(1+3\cos^2\alpha)^{1/2}}$$

$$= -\frac{\sin\alpha}{(1+3\cos^2\alpha)^{1/2}}\hat{j} + \frac{\cos\alpha}{(1+3\cos^2\alpha)^{1/2}}\hat{k}$$

$$\theta = tg^{-1}\left(\frac{L_1}{L_3}\right) = tg^{-1}\left(\frac{MA^2/4\,\sin\alpha}{MA^2/2\,\cos\alpha}\right) = tg^{-1}\left(\frac{1}{2}tg\,\alpha\right)$$

c) $\tau = \frac{dL}{dt}$

$= \frac{d}{dt}\left(0, \omega M \frac{A^2}{4} \sin\phi, \omega \frac{MA^2}{2} \cos\phi\right)$

Como se observa, no depende del tiempo

$\tau = \underline{(0,0,0)}$ //

Complemento inciso a) del ejercicio 2

Para obtener los ejes principales se debe calcular el determinante:

$$\left|\begin{pmatrix} MA^2/4 - \lambda & 0 & 0 \\ 0 & MA^2/4 - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & MA^2/2 - \lambda \end{pmatrix}\right| = (MA^2/4 - \lambda)^2 (MA^2/2 - \lambda)$$

$$(MA^2/4 - \lambda)^2 (MA^2/2 - \lambda) = 0$$

$\downarrow$ $\downarrow$

$\lambda_1 = MA^2/4$ $\quad \lambda_2 = MA^2/2$

Con λ_1

$$\begin{pmatrix} MA^2/4 - MA^2/4 & 0 & 0 \\ 0 & MA^2/4 - MA^2/4 & 0 \\ 0 & 0 & MA^2/2 - MA^2/4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{MA^2}{2} z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\frac{MA^2}{2} z = 0 \Rightarrow z = 0$, x y y arbitrarios

Con λ_2

$$\begin{pmatrix} MA^2/4 - MA^2/2 & 0 & 0 \\ 0 & MA^2/4 - MA^2/2 & 0 \\ 0 & 0 & MA^2/2 - MA^2/2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{MA^2}{4} x \\ -\frac{MA^2}{4} y \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$-\frac{MA^2}{4} x = 0 = -\frac{MA^2 y}{4} \Rightarrow x, y = 0$, z arbitrario

En las bases $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$

$\vec{a} = (a_1, a_2, 0)$

$\vec{b} = (b_1, b_2, 0)$

$\vec{c} = (0, 0, c_3)$

Con $a_1 = b_2 = c_3 = 1$ y $a^2 = b_1 = 0$

$\vec{a} = (1, 0, 0)$

$\vec{b} = (0, 1, 0)$

$\vec{c} = (0, 0, 1)$ //