María José Fonseca Vázquez.

Pregunta 1

Se debe obtener una expresión para el lagrangiano que depende de la aceleración, la velocidad, la posición y el tiempo:

$$L = L(\ddot{q}, \dot{q}, q, t)$$

Para ello, se parte de la definición de la acción

$$S = \int_{t_i}^{t_f} L(x_A(t), \dot{x}_A(t), t)\, dt$$

Dicha expresión no depende de la aceleración, por lo que debe agregarse un término adicional.

Sin aceleración:

$$\delta S = \int \left[\frac{\partial L}{\partial q_i} \delta q_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q} \right] dt$$

Con el término de aceleración:

$$\delta S = \int \left[\frac{\partial L}{\partial q_i} \delta q_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i + \frac{\partial L}{\partial \ddot{q}} \delta \ddot{q}_i \right] dt$$

Expresando las derivadas parciales como

$$\delta \dot{q}_i = \delta \left(\frac{d}{dt} q_i \right) = \frac{d}{dt} (\delta q_i)$$

y

$$\delta \ddot{q}_i = \frac{d}{dt} \left(\frac{d}{dt} (\delta q_i) \right) = \frac{d^2}{dt^2} (\delta q_i)$$

Entonces δS se expresa como

$$\delta S = \int \left[\frac{\partial L}{\partial q_i} \delta q_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{d}{dt} (\delta q_i) + \frac{\partial L}{\partial \ddot{q}_i} \frac{d^2}{dt^2} (\delta q_i) \right] dt$$

De acuerdo a la regla del producto

$$\frac{d}{dt}(fg) = \frac{d}{dt}(f)g + f \frac{d}{dt} g$$

Scanned by CamScanner

María José Fonseca Vázquez.

Entonces

$$fg' = \frac{d}{dt}(fg) - \frac{d}{dt}(f)g$$

Reescribiendo los términos 2 y 3 de δs

$$\underbrace{\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}}_{f} \underbrace{\frac{d}{dt}(\underbrace{\delta q_i}_{g})}_{g'} \quad y \quad \frac{\partial L}{\partial \ddot{q}_i}\frac{d^2}{dt^2}(\delta q_i) = \underbrace{\frac{\partial L}{\partial \ddot{q}_i}}_{f} \underbrace{\frac{d}{dt}\left(\underbrace{\frac{d}{dt}\delta q_i}_{g}\right)}_{g'}$$

$$\delta s = \int_{t_1}^{t_2}\left[\frac{\partial L}{\partial q_i}\delta q_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\frac{d}{dt}(\delta q_i) + \frac{\partial L}{\partial \ddot{q}_i}\frac{d}{dt}\left(\frac{d}{dt}\delta q_i\right)\right]dt$$

$$= \int_{t_1}^{t_2}\left[\frac{\partial L}{\partial q_i}\delta q_i + \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\delta q_i\right) - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)\delta q_i + \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \ddot{q}_i}\frac{d}{dt}\delta q_i\right) - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \ddot{q}_i}\right)\frac{d}{dt}\delta q_i\right]dt$$

Nuevamente se utiliza la regla del producto para el último término, con $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \ddot{q}_i}\right)$ como f y $\frac{d}{dt}\delta q_i$ como g'. Entonces

$$\delta s = \int_{t_1}^{t_2}\left[\frac{\partial L}{\partial q_i}\underline{\delta q_i} + \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\delta q_i\right) - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)\underline{\delta q_i} + \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \ddot{q}_i}\frac{d}{dt}\delta q_i\right) - \frac{d}{dt}\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \ddot{q}_i}\delta q_i\right) + \frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{\partial L}{\partial \ddot{q}_i}\right)\underline{\delta q_i}\right]dt$$

Factorizando los términos que tienen el término δq libre e integrando los otros tres:

$$\delta s = \int_{t_1}^{t_2}\left[\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) + \frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{\partial L}{\partial \ddot{q}_i}\right)\right]\delta q_i\, dt + \cancel{\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\delta q_i}\Big|_{t_1}^{t_2}{}^{0} + \cancel{\frac{\partial L}{\partial \ddot{q}_i}\frac{d}{dt}\delta q_i}\Big|_{t_1}^{t_2}{}^{0} - \cancel{\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \ddot{q}_i}\delta q_i}\Big|_{t_1}^{t_2}{}^{0}$$

se cancelan porque dt es muy pequeño y t_1 y t_2 son fijos

Por el principio de Hamilton $\delta s = 0$. Entonces, queda finalmente

$$\int_{t_1}^{t_2}\left[\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) + \frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{\partial L}{\partial \ddot{q}_i}\right)\right]\delta q_i\, dt = 0$$

$$\boxed{\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) + \frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{\partial L}{\partial \ddot{q}_i}\right) = 0}$$

María José Fonseca Vázquez.

Pregunta 2

Se parte de la expresión de Euler-Lagrange

Indices:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^{\gamma}}\right) - \frac{\partial}{\partial q^{\gamma}} L = 0$$

Tomando la expresión para el modelo sigma

$$L(\dot{q}, q, t) = \frac{1}{2} g_{ab}(q^c)\, \dot{q}^a \dot{q}^b$$

Se comienza por obtener $\frac{\partial}{\partial q_\gamma} L$. Utilizando regla de la cadena:

$$\frac{\partial}{\partial q_\gamma} L = \frac{\partial}{\partial q_\gamma}\left(\frac{1}{2} g_{ab}(q^c)\, \dot{q}^a \dot{q}^b\right)$$

$$= \frac{1}{2} g_{ab}(q^c) \cancel{\frac{\partial}{\partial q_\gamma}\left(\dot{q}^a \dot{q}^b\right)}^{0} + \frac{1}{2} \dot{q}^a \dot{q}^b \frac{\partial}{\partial q_\gamma}\left(g_{ab}(q^c)\right)$$

$$= \frac{1}{2} \dot{q}^a \dot{q}^b \frac{\partial}{\partial q_\gamma}\left(g_{ab}(q^c)\right) \qquad (i)$$

Utilizando la definición de derivada covariante

$$\nabla_\gamma g_{ab} = \partial_\gamma g_{ab} - \Gamma^{\mu}_{a\gamma} g_{\mu b} - \Gamma^{\mu}_{b\gamma} g_{a\mu}$$

Pero como $g_{ab}(q^c)$ es simétrico

$$\nabla_\gamma g_{ab} = 0$$

$$\partial_\gamma g_{ab} - \Gamma^{\mu}_{a\gamma} g_{\mu b} - \Gamma^{\mu}_{b\gamma} g_{a\mu} = 0$$

Se despeja $\partial_\gamma g_{ab}$

$$\partial_\gamma g_{ab} = \Gamma^{\mu}_{a\gamma} g_{\mu b} + \Gamma^{\mu}_{b\gamma} g_{a\mu}$$

Sustituyendo $\partial_\gamma g_{ab}$ en la expresión (i)

$$\frac{\partial}{\partial q_\gamma} L = \frac{1}{2} \dot{q}^a \dot{q}^b \left(\Gamma^{\mu}_{a\gamma} g_{\mu b} + \Gamma^{\mu}_{b\gamma} g_{a\mu}\right) \qquad (ii)$$

Ahora, se procederá a obtener $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^{\gamma}}\right)$. Nuevamente, por regla de la cadena:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^{\gamma}} = \frac{1}{2} g_{ab}(q^c) \frac{\partial}{\partial \dot{q}^{\gamma}}\left(\dot{q}^a \dot{q}^b\right) + \frac{1}{2} \dot{q}^a \dot{q}^b \cancel{\frac{\partial}{\partial \dot{q}^{\gamma}}\left(g_{ab}(q^c)\right)}^{0}$$

$$= \frac{1}{2} g_{ab}(q^c) \frac{\partial}{\partial \dot{q}^{\gamma}}\left(\dot{q}^a \dot{q}^b\right)$$

Aplicando regla de la cadena una vez más:

$$= \frac{1}{2} g_{ab}(q^c)\left[\dot{q}^a \frac{\partial}{\partial \dot{q}^{\gamma}} \dot{q}^b + \dot{q}^b \frac{\partial}{\partial \dot{q}^{\gamma}} \dot{q}^a\right]$$

María José Fonseca Vázquez.

Se tienen las derivadas parciales

$$\frac{\partial}{\partial \dot{q}^\gamma} \dot{q}^a \quad y \quad \frac{\partial}{\partial \dot{q}^\gamma} \dot{q}^b$$

Por definición de la delta de Kronecker

$$\delta_{mn} \equiv \begin{cases} 1, & m=n \\ 0, & m\neq n \end{cases}$$

Además

$$\frac{\partial}{\partial \dot{q}^i} \dot{q}^a = \begin{cases} 1 & a=\gamma \\ 0 & a\neq\gamma \end{cases} \quad y \quad \frac{\partial}{\partial \dot{q}^i} \dot{q}^b = \begin{cases} 1 & b=\gamma \\ 0 & b\neq\gamma \end{cases}$$

Por tanto

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\gamma} = \frac{1}{2} g_{ab}(q^c) \left[\frac{\partial \dot{q}^a}{\partial \dot{q}^\gamma} \dot{q}^b + \frac{\partial \dot{q}^b}{\partial \dot{q}^\gamma} \dot{q}^a \right]$$

$$= \frac{1}{2} g_{ab}(q^c) \left(\delta^a_\gamma \dot{q}^b + \delta^b_\gamma \dot{q}^a \right)$$

$$= \frac{1}{2} g_{\gamma b}(q^c) \dot{q}^b + \frac{1}{2} g_{a\gamma}(q^c) \dot{q}^a$$

Pero coma a y b son índices mudos (es decir, pueden tener cualquier denotación, simplemente indican sumas de Einsten), se considera $a=b$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\gamma} = \frac{1}{2} g_{\gamma b}(q^c) \dot{q}^b + \frac{1}{2} g_{b\gamma}(q^c) \dot{q}^b$$

Por otro lado, si g es invertible, $g_{\gamma b} = g_{b\gamma}$. Se tiene, pues

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\gamma} = \frac{1}{2} g_{\gamma b}(q^c) \dot{q}^b + \frac{1}{2} g_{\gamma b}(q^c) \dot{q}^b$$

$$= g_{\gamma b}(q^c) \dot{q}^b$$

Derivando respecto al tiempo y utilizando regla de la cadena:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\gamma} \right) = \frac{d}{dt} \left(g_{\gamma b}(q^c) \dot{q}^b \right)$$

$$= g_{\gamma b}(q^c) \frac{d}{dt} \dot{q}^b + \dot{q}^b \frac{d}{dt} \left(g_{\gamma b}(q^c) \right)$$

$$= g_{\gamma b}(q^c) \ddot{q}^b + \dot{q}^b \frac{\partial}{\partial q^c} g_{\gamma b} \frac{\partial}{\partial t} q^c$$

María José Fonseca Vázquez.

Pero como $\partial_\gamma g_{ab} = \Gamma^{\mu}_{a\gamma} g_{\mu b} + \Gamma^{\mu}_{b\gamma} g_{a\mu}$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^{\gamma}}\right) = g_{\gamma b}(q^c)\ddot{q}^b + \dot{q}^b\left[\Gamma^{\mu}_{\gamma c} g_{\mu b} + \Gamma^{\mu}_{bc} g_{\gamma\mu}\right]\dot{q}^c \quad (iii)$$

Por (ii) y (iii), la ecuación de Euler Lagrange es

$$g_{\gamma b}(q^c)\ddot{q}^b + \dot{q}^b\left[\Gamma^{\mu}_{\gamma c} g_{\mu b} + \Gamma^{\mu}_{bc} g_{\gamma\mu}\right]\dot{q}^c - \frac{1}{2}\dot{q}^a\dot{q}^b\left(\Gamma^{\mu}_{a\gamma} g_{\mu b} + \Gamma^{\mu}_{b\gamma} g_{a\mu}\right) = 0$$

Como a es índice mudo, $a=c$

$$g_{\gamma b}(q^c)\ddot{q}^b + \underline{\dot{q}^b\Gamma^{\mu}_{\gamma c} g_{\mu b}\dot{q}^c} + \dot{q}^b\dot{q}^c\Gamma^{\mu}_{bc} g_{\gamma\mu} \underline{- \frac{1}{2}\dot{q}^c\dot{q}^b\Gamma^{\mu}_{c\gamma} g_{\mu b}} - \frac{1}{2}\dot{q}^a\dot{q}^b\Gamma^{\mu}_{b\gamma} g_{a\mu} = 0$$

Se agrupan el segundo y cuarto término porque $\Gamma^{\mu}_{\gamma c} = \Gamma^{\mu}_{c\gamma}$

$$g_{\gamma b}(q^c)\ddot{q}^b + \underbrace{\frac{1}{2}\Gamma^{\mu}_{\gamma c} g_{\mu b}\dot{q}^b\dot{q}^c}_{c=n,\ b=m} + \Gamma^{\mu}_{bc} g_{\gamma\mu}\dot{q}^b\dot{q}^c \underbrace{- \frac{1}{2}\Gamma^{\mu}_{b\gamma} g_{c\mu}\dot{q}^c\dot{q}^b}_{b=n,\ c=m} = 0$$

Índices mudos:

$$= g_{\gamma b}(q^c)\ddot{q}^b + \cancel{\frac{1}{2}\Gamma^{\mu}_{\gamma n} g_{\mu m}\dot{q}^m\dot{q}^n} + \Gamma^{\mu}_{bc} g_{\gamma\mu}\dot{q}^b\dot{q}^c \cancel{- \frac{1}{2}\Gamma^{\mu}_{n\gamma} g_{m\mu}\dot{q}^n\dot{q}^m} = 0$$

$$g_{\gamma b}(q^c)\ddot{q}^b + \Gamma^{\mu}_{bc} g_{\gamma\mu}\dot{q}^b\dot{q}^c = 0$$

b y μ son índices mudos, y se les asigna la variable a

$$g_{\gamma a}(q^c)\ddot{q}^a + \Gamma^{a}_{bc} g_{\gamma a}\dot{q}^b\dot{q}^c = 0$$

Agrupando $g_{\gamma a}$

$$g_{\gamma a}(q^c)\left[\ddot{q}^a\ \Gamma^{a}_{bc}\dot{q}^b\dot{q}^c\right] = 0$$

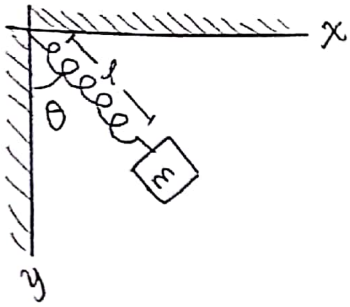
caso 1: $g_{\gamma a}(q^c) = 0 \Rightarrow$ caso trivial, por hipótesis $\neq 0$

Entonces

$$\boxed{\ddot{q}^a\ \Gamma^{a}_{bc}\dot{q}^b\dot{q}^c = 0}$$

María José Fonseca Vázquez.

Pregunta 3



a) A diferencia del péndulo convencional, la energía potencial tiene un termino adicional debido a la energía potencial del resorte, y la longitud del resorte l varía con el tiempo una distancia s, dependiendo de si se comprime o extiende.

Se definen las coordenadas x y y como

$$x = (l+s)\sin\theta$$
$$y = (l+s)\cos\theta$$

Para las velocidades

$$\dot{x} = (l+s)\cos\theta\,\dot{\theta} + (\dot{l}+\dot{s})\sin\theta$$
$$\dot{y} = -(l+s)\sin\theta\,\dot{\theta} + (\dot{l}+\dot{s})\cos\theta$$

Las energías cinética y potencial para el sistema son

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)$$
$$= \frac{1}{2}m\left[(l+s)^2\cos^2\theta\,\dot{\theta}^2 + \cancel{2(l+s)(\dot{l}+\dot{s})\sin\theta\cos\theta\,\dot{\theta}} + (\dot{l}+\dot{s})^2\sin^2\theta + (\dot{l}+\dot{s})^2\cos^2\theta\right.$$
$$\left. + (l+s)^2\sin^2\theta\,\dot{\theta}^2 - \cancel{2(l+s)(\dot{l}+\dot{s})\sin\theta\cos\theta\,\dot{\theta}}\right]$$
$$= \frac{1}{2}m\left[(l+s)^2\dot{\theta}^2 + (\dot{l}+\dot{s})^2\right]$$
$$= \frac{1}{2}m\left[(l+s)^2\dot{\theta}^2 + \dot{s}^2\right]$$

$$\boxed{\begin{aligned} L &= T - U \\ &= \frac{1}{2}m\left[(l+s)^2\dot{\theta}^2 + \dot{s}^2\right] + \\ &\quad + mg(l+s)\cos\theta - \frac{1}{2}ks^2 \end{aligned}}$$

$$U = -mgy + \frac{1}{2}ks^2$$
$$= -mg(l+s)\cos\theta + \frac{1}{2}ks^2$$

Ahora, las ecuaciones de movimiento son

Para θ:

$$\frac{d}{dt}\left(m(l+s)^2\dot{\theta}\right) + mg(l+s)\sin\theta = m(l+s)^2\ddot{\theta} + 2m(l+s)\dot{s}\dot{\theta} + mg(l+s)\sin\theta$$
$$\Rightarrow \boxed{(l+s)\ddot{\theta} + 2\dot{s}\dot{\theta} + g\sin\theta = 0}$$

Para s:

$$\frac{d}{dt}(m\dot{s}) - \left(m(l+s)\dot{\theta}^2 + mg\cos\theta - ks\right)$$
$$\Rightarrow \boxed{\ddot{s} - \dot{\theta}^2(l+s) - g\cos\theta + \frac{ks}{m} = 0}$$

María José Fonseca Vázquez.

b) Si el sistema se encuentra en equilibrio, no hay velocidad ni aceleración, entonces $\dot{\theta}, \ddot{\theta}, \dot{s}, \ddot{s} = 0$. Por tanto, los ecuaciones de movimiento resultantes son

(i) $g\sin\theta = 0$

$$\sin\theta = 0$$

$$\theta = \underbrace{0, \pi}_{\text{puntos de equilibrio para } \theta}$$

(ii) $-g\cos\theta + \frac{ks}{m} = 0$

$$\cos\theta = \frac{ks}{mg}$$

$$s = \frac{mg\cos\theta}{k}$$

> Si $\theta = 0$, $\cos\theta \approx 1$

$$s \approx \frac{mg}{k}$$

> Si $\theta = \pi$, $\cos\theta \approx -1$

$$s \approx -\frac{mg}{k}$$

puntos de equilibrio para s

Si $\theta = 0$ y $s = \frac{mg}{k}$ → punto de equilibrio <u>estable</u> ⇒ El péndulo cuelga, por tanto ante alguna perturbación pequeña regresa ahí

Si $\theta = \pi$ y $s = -\frac{mg}{k}$ → punto de equilibrio <u>inestable</u> ⇒ El péndulo tiene la masa encima del resorte ( ), con cualquier perturbación cambia de posición

Scanned by CamScanner

María José Fonseca Vázquez.

Con las ecuaciones de movimiento

$$(l+s)\ddot{\theta} + 2\dot{s}\dot{\theta} + g\sin\theta = 0$$

$$\ddot{s} - \dot{\theta}^2 (l+s) - g\cos\theta + \frac{ks}{m} = 0$$

Para ángulos pequeños, $\sin\theta \approx \theta$ y $\cos\theta \approx 1$, entonces

$$\ddot{s} - \dot{\theta}^2 l - \dot{\theta}^2 s - g + \frac{ks}{m} = 0$$

$$l\ddot{\theta} + s\ddot{\theta} + 2\dot{s}\dot{\theta} + g\theta = 0$$

Por ser oscilaciones pequeñas

$$\ddot{s} - g + \frac{ks}{m} = 0 \qquad (i)$$

$$l\ddot{\theta} + g\theta = 0 \qquad (ii)$$

Para (i)

$$\ddot{s} + \frac{ks}{m} = g$$

La homogénea

$$p^2 + \frac{k}{m} = 0$$

$$p = \sqrt{\frac{k}{m}}\, i \Rightarrow s(t) = C_1\cos\sqrt{\frac{k}{m}}\,t + C_2\sin\sqrt{\frac{k}{m}}\,t$$

La particular

$$g = \frac{ks}{m} \quad \text{(porque C.I. } \theta = 0, \dot{\theta} = 0, \ddot{\theta} = 0\text{)}$$

$$s = \frac{gm}{k}$$

$$\boxed{\therefore\ s(t) = C_1\cos\sqrt{\frac{k}{m}}\,t + C_2\sin\sqrt{\frac{k}{m}}\,t}$$

Para (ii)

$$lp^2 + g = 0$$

$$p = \sqrt{\frac{g}{l}}\, i$$

$$\boxed{\therefore\ \theta(t) = C_3\cos\sqrt{\frac{g}{l}}\,t + C_4\sin\sqrt{\frac{k}{m}}\,t}$$

María José Fonseca Vázquez.

Pregunta 4

Partiendo del lagrangiano

$$L = e^{bt}\left(\frac{1}{2}m\dot{q}^2 - \frac{1}{2}k^2q^2\right)$$

a) $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial L}{\partial q} = 0$

$$= \frac{d}{dt}\left(e^{bt}m\dot{q}\right) + e^{bt}k^2q$$

$$= e^{bt}m\ddot{q} + be^{bt}m\dot{q} + e^{bt}k^2q$$

$$\boxed{e^{bt}(\underbrace{m\ddot{q}}_{\text{aceleración}} + \underbrace{bm\dot{q}}_{\text{amortiguamiento}} + \underbrace{k^2q}_{\text{gravedad}}) = 0}$$

Por tanto, luce como un oscilador amortiguado.

b) $Q = e^{bt/2}q$

$$q = Qe^{-bt/2}$$

$$\dot{q} = -\frac{b}{2}Qe^{-bt/2} + \frac{dQ}{dt}e^{-bt/2}$$

$$\dot{q}^2 = \frac{b^2}{4}Q^2e^{-bt} - bQ\frac{dQ}{dt}e^{-bt} + \left(\frac{dQ}{dt}\right)^2e^{-bt}$$

$$L = e^{bt}\left(\frac{1}{2}m\left\{\frac{b^2}{4}Q^2e^{-bt} - bQ\frac{dQ}{dt}e^{-bt} + \left(\frac{dQ}{dt}\right)^2e^{-bt}\right\} - \frac{1}{2}k^2Q^2e^{-bt}\right)$$

$$= \frac{1}{2}m\left(\frac{b^2}{4}Q^2 - bQ\frac{dQ}{dt} + \left(\frac{dQ}{dt}\right)^2\right) - \frac{1}{2}k^2Q^2$$

$$= \frac{1}{2}m\left(\dot{Q}^2 - bQ\dot{Q} + \left(\frac{b^2}{4} - \frac{k^2}{m}\right)Q^2\right)$$

$$= \frac{1}{2}m\left(\dot{Q}^2 - bQ\dot{Q}\right) + Q^2\left(\frac{b^2m}{8} - \frac{k^2}{2}\right)$$

$$= \boxed{\frac{1}{2}m\dot{Q}^2 - \frac{1}{2}mbQ\dot{Q} + \frac{Q^2}{8}b^2m - Q^2\frac{k^2}{2}}$$

No aparece el tiempo, por ello hay conservación de la energía.

María José Fonseca Vázquez.

Como no aparece explícitamente el tiempo en la expresión del lagrangiano, se tiene

$$\mathcal{H} = \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i - L(q_i, \dot{q}_i)$$

donde $\mathcal{H}$ corresponde a la energía total y se conserva. Para nuestro sistema:

$$\mathcal{H} = m\dot{Q}^2 - \cancel{\frac{b}{2} m Q\dot{Q}} - \frac{1}{2} m \dot{Q}^2 + \cancel{\frac{mb}{2} Q\dot{Q}} - \frac{Q^2 b^2 m}{8} + Q^2 \frac{k^2}{2}$$

$$= \frac{1}{2} m\dot{Q}^2 - \frac{Q^2 b^2 m}{8} + Q^2 \frac{k^2}{2}$$

donde

$$Q = e^{bt/2}$$

$$\dot{Q} = e^{bt/2}\dot{q} + \frac{b}{2} e^{bt/2}$$

$$\dot{Q}^2 = e^{bt}\dot{q}^2 + bq\dot{q}e^{bt} + \frac{b^2}{4} e^{bt} q^2$$

Entonces

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2} m (e^{bt})\left(\dot{q}^2 + bq\dot{q} + \frac{b^2}{4} q^2\right) - \frac{mb^2}{8} e^{bt} q^2 + \frac{k^2}{2} e^{bt/2} q^2$$

$$= \frac{1}{2} m e^{bt}(\dot{q}^2 + bq\dot{q}) + \cancel{\frac{mb^2}{8} e^{bt} q^2} - \cancel{\frac{mb^2}{8} e^{bt} q^2} + q^2\left(\frac{k^2}{2} e^{bt/2}\right)$$

$$= e^{bt}\left(\frac{1}{2} m\dot{q}^2 + \frac{1}{2} bq\dot{q} + \frac{1}{2} k^2 q^2\right)$$

Como se observa, dicha expresión NO corresponde a la expresión de la energía dada en un inicio, pues aparece un término que depende tanto de la posición como de la velocidad al mismo tiempo. Se llega entonces a la conclusión de que NO HAY CONSERVACIÓN DE LA ENERGÍA, ya que como se observa en el lagrangiano original ($e^{bt}[\frac{1}{2} m\dot{q}^2 + \frac{1}{2} k^2 q^2]$), el tiempo SÍ aparece, y al hacer el cambio de variable aparentemente no se encontraba de manera explícita; sin embargo, siempre fue dependiente del tiempo.