Oscar De La Cruz Echeveste

Pregunta 1:

a) Prueba que las siguientes transformaciones son canónicas para cualquier μ.

$$q_1 = x \cos\mu + P_y \sin\mu \qquad q_2 = y \cos\mu + P_x \sin\mu$$

$$P_1 = P_x \cos\mu - y \sin\mu \qquad P_2 = P_y \cos\mu - x \sin\mu$$

Construimos la matriz:

$$J_{ij} = \begin{pmatrix} \frac{\partial Q_i}{\partial q_j} & \frac{\partial Q_i}{\partial P_j} \\ \frac{\partial P_i}{\partial q_j} & \frac{\partial P_i}{\partial P_j} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow J = \begin{pmatrix} \frac{\partial q_1}{\partial x} & \frac{\partial q_1}{\partial y} & \frac{\partial q_1}{\partial P_x} & \frac{\partial q_1}{\partial P_y} \\ \frac{\partial q_2}{\partial x} & \frac{\partial q_2}{\partial \cancel{x}} & \frac{\partial q_2}{\partial P_x} & \frac{\partial q_2}{\partial P_y} \\ \frac{\partial P_1}{\partial x} & \frac{\partial P_1}{\partial y} & \frac{\partial P_1}{\partial P_x} & \frac{\partial P_1}{\partial P_y} \\ \frac{\partial P_2}{\partial x} & \frac{\partial P_2}{\partial y} & \frac{\partial P_2}{\partial P_x} & \frac{\partial P_2}{\partial P_y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\mu & 0 & 0 & \sin\mu \\ 0 & \cos\mu & \sin\mu & 0 \\ 0 & -\sin\mu & \cos\mu & 0 \\ -\sin\mu & 0 & 0 & \cos\mu \end{pmatrix}$$

Primero multiplicamos $\mathbb{E} J^T$ donde $\mathbb{E} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\mu & 0 & 0 & -\sin\mu \\ 0 & \cos\mu & -\sin\mu & 0 \\ 0 & \sin\mu & \cos\mu & 0 \\ \sin\mu & 0 & 0 & \cos\mu \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \sin\mu & \sin\mu & \cos\mu & \cos\mu \\ \sin\mu & \sin\mu & \cos\mu & \cos\mu \\ -\cos\mu & -\cos\mu & \sin\mu & \sin\mu \\ -\cos\mu & -\cos\mu & \sin\mu & \sin\mu \end{pmatrix}$$

Ahora multiplicamos $J \mathbb{E} J^T$

$$\begin{pmatrix} \cos\mu & 0 & 0 & \sin\mu \\ 0 & \cos\mu & \sin\mu & 0 \\ 0 & -\sin\mu & \cos\mu & 0 \\ -\sin\mu & 0 & 0 & \cos\mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sin\mu & \sin\mu & \cos\mu & \cos\mu \\ \sin\mu & \sin\mu & \cos\mu & \cos\mu \\ -\cos\mu & -\cos\mu & \sin\mu & \sin\mu \\ -\cos\mu & -\cos\mu & \sin\mu & \sin\mu \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \cancel{\cos\mu\sin\mu} - \cancel{\sin\mu\cos\mu} & \cancel{\cos\mu\sin\mu} - \cancel{\sin\mu\cos\mu} & \cos^2\mu + \sin^2\mu & \cos^2\mu + \sin^2\mu \\ \cancel{\cos\mu \cdot \sin\mu} - \cancel{\sin\mu\cos\mu} & \cancel{\cos\mu\sin\mu} - \cancel{\sin\mu\cos\mu} & \cos^2\mu + \sin^2\mu & \cos^2\mu + \sin^2\mu \\ -\sin^2\mu - \cos^2\mu & -\sin^2\mu - \cos^2\mu & -\cancel{\sin\mu\cos\mu} + \cancel{\cos\mu\sin\mu} & -\cancel{\sin\mu\cos\mu} + \cancel{\sin\mu\cos\mu} \\ -\sin^2\mu - \cos^2\mu & -\sin^2\mu - \cos^2\mu & -\cancel{\sin\mu\cos\mu} + \cancel{\cos\mu\sin\mu} & -\cancel{\sin\mu\cos\mu} + \cancel{\sin\mu\cos\mu} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow J \mathbb{E} J^T = \mathbb{E}$$

por tanto las transformaciones son canónicas para todo μ

b) Si el Hamilto es $H = (q_1^2 + q_2^2 + p_1^2 + p_2^2)/2$ encuentra el nuevo Hamiltoniano como función de X y Y y sus momentos conjugados.

Sustituimos las q's y P's en el hamiltoniano:

$$H = \frac{1}{2}\Big[(x\cos\mu + P_y\sin\mu)^2 + (y\cos\mu + P_x\sin\mu)^2 +$$

$$+ (P_x\cos\mu - y\sin\mu)^2 + (P_y\cos\mu - X\sin\mu)^2\Big] =$$

$$= \frac{1}{2}\Big[X^2\cos^2\mu + P_y^2\sin^2\mu + \cancel{XP_y\cos\mu\sin\mu} +$$

$$+ y^2\cos^2\mu + P_x^2\sin^2\mu + \cancel{yP_x\cos\mu\sin\mu} +$$

$$+ P_x^2\cos^2\mu + y^2\sin^2\mu - \cancel{P_x y\cos\mu\sin\mu} +$$

$$+ P_y^2\cos^2\mu + X^2\sin^2\mu - \cancel{P_y X\cos\mu\sin\mu}\Big]$$

$$= \frac{1}{2}\Big[X^2(\cos^2\mu + \sin^2\mu) + y^2(\cos^2\mu + \sin^2\mu) +$$

$$+ P_x^2(\cos^2\mu + \sin^2\mu) + P_y^2(\cos^2\mu + \sin^2\mu)\Big]$$

$$\Rightarrow \quad H = \frac{1}{2}\left(X^2 + y^2 + P_x^2 + P_y^2\right)$$

c) Usa el nuevo Hamiltoniano para resolver la dinámica con la restricción $y = P_y = 0$

Con la restricción $y = P_y = 0$ el nuevo Hamiltoniano es:

$$H = \frac{1}{2}\left(x^2 + P_x^2\right)$$

$$H = \frac{1}{2}P_x^2 + \frac{1}{2}x^2$$

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p_x} = P_x \qquad \dot{P}_x = -\frac{\partial H}{\partial x} = -x \qquad \frac{\partial H}{\partial t} = 0$$

$$\dot{x} = P_x$$

$$\dot{P}_x = -x$$

Solución:

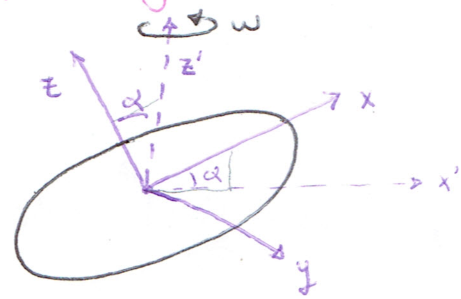
$$x = A\cos(t - t_0)$$

$$P_x = A\sin(t - t_0)$$

Pregunta 2

Un disco delgado uniforme de masa M y radio A rota sin fricción con una velocidad angular uniforme ω sobre un eje principal fijo que pasa sobre su centro y frene un ángulo alfa con el eje de simetría del disco:

a) Determina los momentos de inercia y los ejes principales:



Densidad del disco:

$$\rho = \frac{M}{\pi A^2}$$

Tensor de inercia:

$$\omega_z = \omega_{z'} \cos\alpha$$
$$\omega_y = 0$$
$$\omega_x = -\omega_{z'} \sin\alpha$$

Calculando las componentes

$$I_{xx} = \int \rho (y^2 + z^2)\, dA = \frac{M}{\pi A^2} \int y^2 \, dA$$

Considerando que $z=0$

Vemos que por simetría:

$$I_{yy} = \int \rho (x^2 + z^2)\, dA = \frac{M}{\pi A^2} \int x^2 dA = \frac{M}{\pi A^2} \int y^2 \, dA = I_{xx}$$

y Así:

$$I_{zz} = \int \rho (x^2 + y^2) = \frac{M}{\pi A^2} \int (x^2 + y^2)\, dA = I_{xx} + I_{yy}$$

Resolviendo I_{zz} cambiando a coordenadas polares:

$$I_{zz} = \frac{M}{\pi A^2} \int_0^{2\pi} \int_0^A r^2 (r\,dr\,d\theta) = \frac{M}{\cancel{\pi} A^2} (2\cancel{\pi}) \int_0^A r^3 \, dr = \frac{2M}{A^2} \frac{1}{4} r^4 \Big|_0^A$$

$$\boxed{I_{zz} = \frac{1}{2} M A^2}$$

Como: $I_{xx} = I_{yy}$ y $I_{zz} = I_{xx} + I_{yy}$

Entonces $I_{xx} = I_{yy} = \frac{1}{4} MA^2$

Tomando $z = 0$ los terminos cruzados con z serán cero, es decir:

$$I_{xz} = I_{yz} = I_{zy} = I_{zx} = 0$$

Además:

$$I_{xy} = I_{yz} = -\frac{M}{\pi A^2} \int_{-A}^{A} x y \, dA = 0$$

Por tanto el tensor de inercia es:

$$I = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} MA^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} MA^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} MA^2 \end{pmatrix}$$

b) Encuentra el vector de Momento angular (magnitud y dirección).

El vector $\vec{\omega}$ en referencia a los ejes principales será la proyeccion de este en los principales:

$$\vec{\omega} = \begin{pmatrix} -\omega \sin\alpha \\ 0 \\ -\omega \cos\alpha \end{pmatrix}$$ donde $\omega_y = 0$ ya que solo se rota en el plano xz

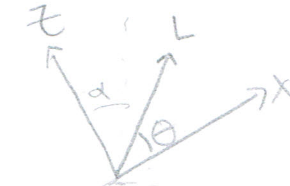
Así el momento angular será:

$$\underline{L} = I \vec{\omega} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} MA^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} MA^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} MA^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\omega \sin\alpha \\ 0 \\ \omega \cos\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} MA^2 \omega \sin\alpha \\ 0 \\ \frac{1}{2} MA^2 \omega \cos\alpha \end{pmatrix}$$

$$\| \underline{L} \|^2 = \frac{1}{16} M^2 A^4 \omega^2 \sin^2\alpha + \frac{1}{4} M^2 A^4 \omega^2 \cos^2\alpha = \frac{1}{4} M^2 A^4 \omega^2 \left[\frac{1}{4} \sin^2\alpha + \cos^2\alpha \right]$$

$$\| \underline{L} \| = \frac{1}{2} MA^2 \omega \left[\frac{1}{4} \sin^2\alpha + \cos^2\alpha \right]^{1/2}$$

ángulo de $\underline{L}$ en el plano xz



$$\Rightarrow \theta = \tan^{-1}\left[\frac{\frac{1}{2}\cancel{M}A^2\cancel{\omega}\cos\alpha}{-\frac{1}{4}\cancel{M}A^2\omega\sin\alpha}\right] = \tan^{-1}\left[\frac{-2}{\tan\alpha}\right]$$

$$\boxed{\theta = \tan^{-1}\left[\frac{-2}{\tan\alpha}\right]}$$

ángulo con respecto al eje X

c) ¿Cuál es la magnitud y dirección de la torca relativa al sistema de referencia del cuerpo

En el sistema no hay torca ya que la derivada del momento angular respecto al tiempo es cero:

$$\frac{d\underline{L}}{dt} = 0$$