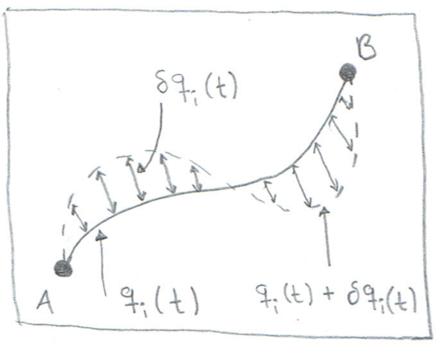
Tarea 3: Oscar De La Cruz Echeveste

Pregunta 1:

Teniendo un lagrangiano dependiente de la aceleración:

$$L = L(\ddot{q}_i, \dot{q}_i, q_i, t) \quad \text{para} \quad t_{ini} \leq t \leq t_{fin}$$

Tal que: $q_i(t=t_{ini}) = A$ y $q_i(t=t_{fin}) = B$



la acción proveniente de este lagrangiano será:

$$S[q_i] = \int_{t_{ini}}^{t_{fin}} L(\ddot{q}_i, \dot{q}_i, q_i, t)\, dt$$

Variando el camino verdadero pero manteniendo los puntos inicial y final, es decir:

$$\delta q_i(t=t_{ini}) = \delta q_i(t=t_{fin}) = 0$$

El cambio en la acción es:

$$\delta S[q_i] = S[q_i + \delta q_i] - S[q_i] =$$

$$= \int_{t_{ini}}^{t_{fin}} L(\ddot{q}_i + \delta\ddot{q}_i, \dot{q}_i + \delta\dot{q}_i, q_i + \delta q_i, t)\, dt - \int_{t_{ini}}^{t_{fin}} L(\ddot{q}_i, \dot{q}_i, q_i, t)\, dt$$

$$= \int_{t_{ini}}^{t_{fin}} \left[L(\ddot{q}_i + \delta\ddot{q}_i, \dot{q}_i + \delta\dot{q}_i, q_i + \delta q_i, t) - L(\ddot{q}_i, \dot{q}_i, q_i, t) \right] dt$$

Usando el desarrollo de serie de Teylor para L

$$\delta L(\ddot{q}_i, \dot{q}_i, q, t) = L(\ddot{q}_i + \delta\ddot{q}_i, \dot{q}_i + \delta\dot{q}_i, q_i + \delta q_i, t) - L(\ddot{q}_i, \dot{q}_i, q_i, t) = \frac{\partial L}{\partial q_i}\delta q_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\delta\dot{q}_i + \frac{\partial L}{\partial \ddot{q}_i}\delta\ddot{q}_i$$

La variación de la acción queda de la forma:

$$\delta S[q_i] = \int_{t_{ini}}^{t_{fin}} \left[\frac{\partial L}{\partial q_i} \delta q_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i + \frac{\partial L}{\partial \ddot{q}_i} \delta \ddot{q}_i \right] dt \qquad \text{usando: } \delta \dot{q}_i = \delta \frac{dq_i}{dt} = \frac{d}{dt}(\delta q_i)$$

$$= \int_{t_{ini}}^{t_{fin}} \left[\frac{\partial L}{\partial q_i} \delta q_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{d}{dt}(\delta q_i) + \frac{\partial L}{\partial \ddot{q}_i} \frac{d^2}{dt^2}(\delta q_i) \right] dt$$

$$= \int_{t_{in}}^{t_{fin}} \left[\frac{\partial L}{\partial q_i} \delta q_i + \frac{\partial L}{\partial \ddot{q}_i} \frac{d^2}{dt^2}(\delta q_i) \right] dt + \int_{t_{ini}}^{t_{fin}} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{d}{dt}(\delta q_i)\, dt$$

usando $u = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$ $\quad dv = \frac{d\delta q_i}{dt} dt$ $\quad du = \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} dt$ $\quad v = \delta q_i$

$$\Rightarrow \int_{t_{ini}}^{t_{fin}} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{d}{dt}(\delta q_i)\, dt = \underbrace{\cancel{\delta q_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\Big|_{t_{ini}}^{t_{fin}}}}_{\substack{\delta q_i(t_{ini})=0 \\ \delta q_i(t_{fin})=0}} - \int_{t_{ini}}^{t_{fin}} \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i\, dt$$

0

$$\Rightarrow \delta S[q_i] = \int_{t_{ini}}^{t_{fin}} \left[\frac{\partial L}{\partial q_i} \delta q_i - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i \right] dt + \int_{t_{ini}}^{t_{fin}} \frac{\partial L}{\partial \ddot{q}_i} \frac{d^2}{dt^2}(\delta q_i)\, dt$$

usando de nuevo: $u = \frac{\partial L}{\partial \ddot{q}_i}$ $\quad dv = \frac{d^2}{dt^2}(\delta q_i)\, dt$ $\quad du = \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \ddot{q}_i} dt$ $\quad v = \frac{d}{dt}\delta q_i$

$$\Rightarrow \int_{t_{ini}}^{t_{fin}} \frac{\partial L}{\partial \ddot{q}_i} \frac{d^2}{dt^2}(\delta q_i)\, dt = \cancel{\frac{\partial L}{\partial \ddot{q}_i} \frac{d}{dt}\delta q_i \Big|_{t_{ini}}^{t_{fin}}} - \int_{t_{ini}}^{t_{fin}} \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \ddot{q}_i} \frac{d}{dt}\delta q_i\, dt$$

0 por $\delta q_i(t_{fin}) = 0$, $\delta q_i(t_{ini}) = 0$

$$= -\cancel{\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \ddot{q}_i}\delta q_i \Big|_{t_{ini}}^{t_{fin}}} + \int_{t_{ini}}^{t_{fin}} \frac{d^2}{dt^2}\frac{\partial L}{\partial \ddot{q}_i}\, dt$$

0

usando:

$u = \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \ddot{q}_i}$

$dv = \frac{d}{dt}(\delta q_i)\, dt$

$du = \frac{d^2}{dt^2}\frac{\partial L}{\partial \ddot{q}_i}\, dt$

$v = \delta q_i$

Entonces, la acción queda:

$$\delta S[q_i] = \int_{t_{ini}}^{t_{fin}} \left[\frac{\partial L}{\partial q_i}\delta q_i - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\delta q_i + \frac{d^2}{dt^2}\frac{\partial L}{\partial \ddot{q}_i}\delta q_i \right] dt \quad \text{factorizamos } \delta q_i$$

$$= \int_{t_{ini}}^{t_{fin}} \left[\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} + \frac{d^2}{dt^2}\frac{\partial L}{\partial \ddot{q}_i} \right] \delta q_i \, dt$$

para que la variación de la acción sea cero $\delta S[q_i] = 0$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} + \frac{d^2}{dt^2}\frac{\partial L}{\partial \ddot{q}_i} = 0} \quad \text{Ecuación de Euler-Lagrange.}$$

Pregunta 2

Encuentra las ecuaciones de Euler-Lagrange del modelo sigma:

$$L(\dot{q}, q, t) = \frac{1}{2} g_{ab}(q^c)\dot{q}^a\dot{q}^b$$

donde $g_{ab}(q^c)$ es una matriz simétrica, que es función de las coordenadas.

La acción S_σ para el lagrangiano del modelo sigma será:

$$S_\sigma[q] = \int_{t_A}^{t_B} L(\dot{q}, q, t)\, dt = \int_{t_A}^{t_B} \frac{1}{2} g_{ab}(q^c)\dot{q}^a\dot{q}^b\, dt = \frac{1}{2}\int_{t_A}^{t_B} g_{ab}(q^c)\dot{q}^a\dot{q}^b\, dt$$

Haciendo la variación de S_σ, es decir, δS_σ, tenemos:

$$\delta S_\sigma = \delta \frac{1}{2}\int_{t_A}^{t_B} g_{ab}(q^c)\dot{q}^a\dot{q}^b\, dt = \frac{1}{2}\int_{t_A}^{t_B} \delta\left[g_{ab}(q^c)\dot{q}^a\dot{q}^b\right] dt$$

$$= \frac{1}{2}\int_{t_A}^{t_B} \left[g_{ab}(q^c + \delta q^c)(\dot{q}^a + \delta\dot{q}^a)(\dot{q}^b + \delta\dot{q}^b) - g_{ab}(q^c)\dot{q}^a\dot{q}^b \right] dt$$

Pregunta 2

Encuentra las ecuaciones de Euler-Lagrange del modelo sigma:

$$L(\dot{q}, q, t) = \frac{1}{2} g_{ab}(q^c)\dot{q}^a \dot{q}^b$$

Las ecuaciones de euler-lagrange para un lagrangiano general $L(\dot{q}, q, t)$ son:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} - \frac{\partial L}{\partial q^i} = 0$$

donde i es la cantidad de grados de libertad, en este caso $i = c$

Entonces, el primer termino será:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^c} = \frac{\partial}{\partial \dot{q}^c}\left[\frac{1}{2} g_{ab}(q^c)\dot{q}^a\dot{q}^b\right] = \frac{1}{2} g_{ab}(q^c)\frac{\partial}{\partial \dot{q}^c}\left[\dot{q}^a\dot{q}^b\right] = \frac{1}{2} g_{ab}(q^c)\left[\dot{q}^b\frac{\partial \dot{q}^a}{\partial \dot{q}^c} + \dot{q}^a\frac{\partial \dot{q}^b}{\partial \dot{q}^c}\right]$$

usando: $\frac{\partial x^a}{\partial x^b} = \delta^a_b$ y $\delta^b_a x^a = x^b$, tenemos:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^c} = \frac{1}{2} g_{ab}(q^c)\left[\dot{q}^b\delta^a_c + \dot{q}^a\delta^b_c\right] = \frac{1}{2}\dot{q}^b g_{ab}(q^c)\delta^a_c + \frac{1}{2}\dot{q}^a g_{ab}(q^c)\delta^b_c$$

$$= \underbrace{\frac{1}{2}\dot{q}^b g_{cb}(q^c)}_{} + \frac{1}{2}\dot{q}^a g_{ac}(q^c) = \frac{1}{2}\dot{q}^a g_{ac}(q^c) + \frac{1}{2}\dot{q}^a g_{ac}(q^c)$$

cambiando $b \to a$
porque esta contraido
y $g_{ab} = g_{ba}$ porque es simetrico

$$\Rightarrow \underline{\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^c} = \dot{q}^a g_{ac}(q^c)}$$

Entonces:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^c} = \frac{d}{dt}\left[\dot{q}^a g_{ac}(q^c)\right] = \ddot{q}^a g_{ac}(q^c) + \dot{q}^a \frac{d g_{ac}(q^c)}{dt}$$

usando regla de la cadena

$$= \ddot{q}^a g_{ac}(q^c) + \dot{q}^a \frac{d g_{ac}(q^c)}{d q^c}\frac{d q^c}{dt}$$

donde:

$$\frac{d g_{ac}}{dq^c}(q^c) = g_{\alpha c}(q^c)\left\{ {\alpha \atop ac} \right\} + g_{\alpha a}(q^c)\left\{ {\alpha \atop cc} \right\}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^c} = \ddot{q}^a g_{ac}(q^c) + \dot{q}^a \dot{q}^c g_{\alpha c}(q^c)\left\{ {\alpha \atop ac} \right\} + \dot{q}^a \dot{q}^c g_{\alpha a}(q^c)\left\{ {\alpha \atop cc} \right\}$$

Estan contraidos contraidos contraidos contraidos

los indices $\dot{q}^c$ los cambiamos c para evitar confuciones.

Ahora, el segundo termino de E.L.:

$$* \frac{\partial L}{\partial q^c} = \frac{\partial}{\partial q^c}\left[\frac{1}{2} g_{ab}(q^c)\dot{q}^a \dot{q}^b\right] = \frac{1}{2}\dot{q}^a \dot{q}^b \left[\frac{\partial}{\partial q^c} g_{ab}(q^c)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\dot{q}^a \dot{q}^b \left[g_{\alpha b}(q^c)\left\{ {\alpha \atop ac} \right\} + g_{\alpha a}(q^c)\left\{ {\alpha \atop bc} \right\}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\dot{q}^a \dot{q}^b g_{\alpha b}(q^c)\left\{ {\alpha \atop ac} \right\} + \frac{1}{2}\dot{q}^a \dot{q}^b g_{\alpha a}(q^c)\left\{ {\alpha \atop bc} \right\}$$

Entonces, la E.L. será:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^c} - \frac{\partial L}{\partial q^c} = \ddot{q}^a g_{ac}(q^c) + \dot{q}^a \dot{q}^b g_{\alpha b}(q^c)\left\{ {\alpha \atop ac} \right\} + \dot{q}^a \dot{q}^b g_{\alpha a}(q^c)\left\{ {\alpha \atop bc} \right\}$$
$$- \frac{1}{2}\dot{q}^a \dot{q}^b g_{\alpha b}(q^c)\left\{ {\alpha \atop ac} \right\} - \frac{1}{2}\dot{q}^a \dot{q}^b g_{\alpha a}(q^c)\left\{ {\alpha \atop bc} \right\}$$

$$= \ddot{q}^a g_{ac}(q^c) + \frac{1}{2}\dot{q}^a \dot{q}^b g_{\alpha b}(q^c)\left\{ {\alpha \atop ac} \right\} + \frac{1}{2}\underbrace{\dot{q}^a \dot{q}^b g_{\alpha a}(q^c)}_{\text{cambiando } b \to a \text{ y } a \to b}\left\{ {\alpha \atop bc} \right\} = 0$$

$$= \ddot{q}^a g_{ac}(q^c) + \frac{1}{2}\dot{q}^a \dot{q}^b g_{\alpha b}(q^c)\left\{ {\alpha \atop ac} \right\} + \frac{1}{2}\dot{q}^b \dot{q}^a g_{\alpha b}(q^c)\left\{ {\alpha \atop ac} \right\} = 0$$

$$= \ddot{q}^a g_{ac}(q^c) + \dot{q}^a \dot{q}^b g_{\alpha b}(q^c)\left\{ {\alpha \atop ac} \right\} = 0$$ Acomodando los indices contraidos

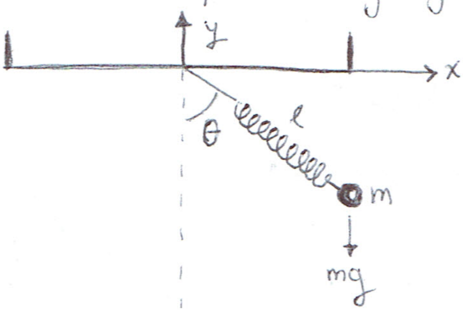
$$= \ddot{q}^a g_{ac}(q^c) + \dot{q}^b \dot{q}^c g_{ac}(q^c)\left\{ {a \atop bc} \right\} = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\ddot{q}^a + \dot{q}^b \dot{q}^c \left\{ {a \atop bc} \right\} = 0}$$

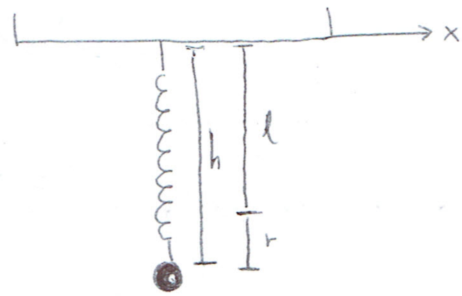
Pregunta 3

A un péndulo simple se le remplaza el cable por un resorte de longitud l y constante de resorte k

a) Construye el Lagrangiano del sistema y deduce las ecuaciones de Euler-Lagrange.



En reposo y sin ángulo el sistema se ve como: →



donde $h = l + r$ es la longitud del resorte con la masa añadida.

Expresando las componentes x, y del movimiento de la masa m en coordenadas polares:

$$\left.\begin{aligned} x &= h\sin\theta \\ y &= -h\cos\theta \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} \dot{x} &= \dot{h}\sin\theta + h\dot{\theta}\cos\theta \\ \dot{y} &= -\dot{h}\cos\theta + h\dot{\theta}\sin\theta \end{aligned}$$

Por tanto la energía cinética es:

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = \frac{1}{2}m\left[\left(\dot{h}\sin\theta + h\dot{\theta}\cos\theta\right)^2 + \left(-\dot{h}\cos\theta + h\dot{\theta}\sin\theta\right)^2\right]$$

$$= \frac{1}{2}m\left[\dot{h}^2\sin^2\theta + \cancel{2\dot{h}\dot{\theta}h\sin\theta\cos\theta} + h^2\dot{\theta}^2\cos^2\theta + \dot{h}^2\cos^2\theta - \cancel{2\dot{h}\dot{\theta}h\cos\theta\sin\theta} + h^2\dot{\theta}^2\sin^2\theta\right]$$

$$= \frac{1}{2}m\left[\dot{h}^2 + h^2\dot{\theta}^2\right]$$

$$\therefore \; T = \frac{1}{2}m\left[\dot{h}^2 + h^2\dot{\theta}^2\right]$$

Ahora la energía potencial será:

$$V = -mgy + \frac{1}{2}kr^2 = \frac{1}{2}kr^2 - mgh\cos\theta = \frac{1}{2}k(h-\ell)^2 - mgh\cos\theta$$

Por tanto el lagrangiano es:

$$\boxed{\mathcal{L} = \frac{1}{2}m\left[\dot{h}^2 + h^2\dot{\theta}^2\right] - \frac{1}{2}k(h-\ell)^2 + mgh\cos\theta}$$

b) Encuentra los puntos de equilibrio y ~~resuelve~~ describe su estabilidad.

Antes, encontramos las Ecuaciones de Euler-Lagrange:

* EOM para θ:

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = 0$$

- $\frac{\partial L}{\partial \theta} = -mgh\sin\theta$

- $\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = mh^2\dot{\theta} \Rightarrow \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = 2mh\dot{\theta}\dot{h} + mh^2\ddot{\theta}$

$$\Rightarrow \quad 2\cancel{m}\dot{h}h\dot{\theta} + \cancel{m}h^2\ddot{\theta} + \cancel{m}gh\sin\theta = 0$$

$$\boxed{h\ddot{\theta} + 2\dot{h}\dot{\theta} + g\sin\theta = 0}$$

* EOM para h:

$$\frac{\partial h}{\partial \theta} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{h}} = 0$$

- $\frac{\partial L}{\partial h} = mh\dot{\theta}^2 - k(h-\ell) + mg\cos\theta$

- $\frac{\partial L}{\partial \dot{h}} = m\dot{h} \Rightarrow \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{h}} = m\ddot{h} \quad \therefore \quad \boxed{m\ddot{h} - mh\dot{\theta}^2 + k(h-\ell) - mg\cos\theta = 0}$

b) Encuentra los puntos de equilibrio.

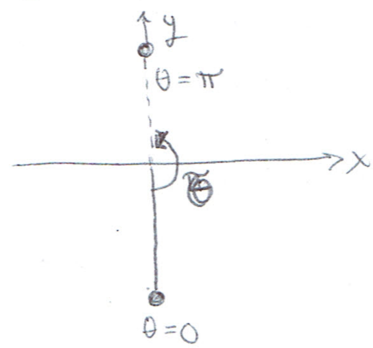
En los puntos de equilibrio No hay velocidad ni aceleración, por lo que las derivadas, primeras y segundas son cero:

Entonces, de las ecuaciones de movimiento tenemos:

- $g \sin\theta = 0 \quad \Rightarrow \quad \sin\theta = 0$
- $k(h-l) - mg\cos\theta = 0$

por la primera ecuación tenemos que $\theta = n\pi$ para que $\sin\theta = 0$ pero para 2π el valor es el mismo para $\theta = 0$ que significa, el mismo lugar en el sistema. Al igual que para π y 3π, por lo que los puntos de equilibrio en θ están en

$$\boxed{\theta = 0, \pi}$$



De la segunda ecuación tenemos:

$$kh - kl - mg\cos(n\pi) = 0$$

$$h = \frac{kl + mg\cos(n\pi)}{k}$$

$$h = l + \frac{mg}{k}\cos(n\pi) \qquad \text{como } n = 0, 1$$

$$\Rightarrow \boxed{h_1 = l + \frac{mg}{k}} \quad y \quad \boxed{h_2 = l - \frac{mg}{k}}$$

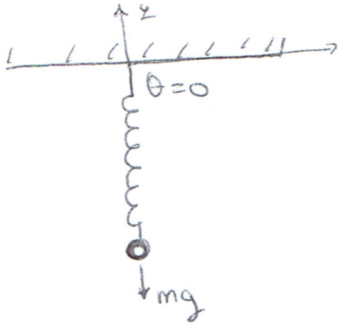
para $\theta = 0$ — para $\theta = \pi$

Sería la longitud normal del resorte más el estiramiento por la masa del objeto debido a la gravedad.

la longitud normal del resorte por encima del techo menos la longitud que comprime la masa del objeto.

Los puntos de equilibrio son, entonces

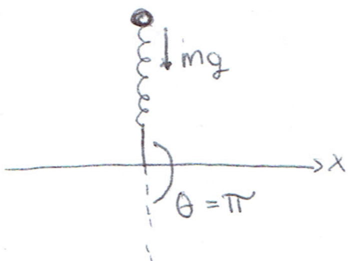
para: $\theta_1 = 0$ y $h_1 = l + \frac{mg}{k}$



que es el resorte con la masa en su punto más bajo sólo con el estiramiento que provoca el peso de la masa.

Esto es un punto de equilibrio estable.

Para $\theta_2 = \pi$ y $h_2 = l - \frac{mg}{k}$



es el resorte con la masa en su punto más alto sólo con la compresión que provoca el peso de la masa.

Esto sería un punto de equilibrio inestable.

c) Haz una expanción pequeña alrededor de los puntos de equilibrio y resuelve el sistema

los puntos de equilibrio son:

- para $\theta_1 = 0 \longrightarrow h_1 = l + \frac{mg}{k}$
- para $\theta_2 = \pi \longrightarrow h_2 = l - \frac{mg}{k}$

haciendo una expanción alrededor del punto cuando $\theta_1 = 0$ tenemos

$$\left.\begin{aligned} \theta_p &= \theta - \theta_1 = \theta \\ h_p &= h - l - \frac{mg}{k} \end{aligned}\right\}$$

siendo θ_p y h_p la desviación de la posición y el ángulo respecto al punto de equilibrio.

Sustituyendo en las EOM:

$$\left(h_p + l + \frac{mg}{k}\right)\ddot{\theta}_p + 2\left(h_p + l + \frac{mg}{k}\right)^{\circ}\dot{\theta}_p + g\sin\theta_p = 0$$

Siendo: $h_p << l + \frac{mg}{k}$ y $\theta_p \approx 0$

Entonces:

$$\left(l + \frac{mg}{k}\right)\ddot{\theta}_p + 2\underbrace{\cancel{\left(l + \frac{mg}{k}\right)^{\circ}}}_{\text{constante}}\dot{\theta}_p + g\theta_p = 0$$

$$\Rightarrow \left(l + \frac{mg}{k}\right)\ddot{\theta}_p + g\theta_p = 0$$

$$\ddot{\theta}_p + \frac{g}{l + \frac{mg}{k}}\theta_p = 0 \quad \therefore \quad \boxed{\theta_p = A\cos\left[\sqrt{\frac{g}{l + \frac{mg}{k}}}\, t\right]}$$

De la 2da EOM obtenemos:

$$m\left(h_p + l + \frac{mg}{k}\right)^{\ddot{}} - m\left(h_p + l + \frac{mg}{k}\right)\dot{\theta}^2 + k\left[\left(h_p + l + \frac{mg}{k}\right) - l\right] - mg\cos\theta = 0$$

como: $\theta \approx 0 \longrightarrow \cos\theta \approx 1 \Rightarrow \dot{\theta}^2 = 0$

Entonces tenemos:

$$m\ddot{h}_p + kh_p + \cancel{mg} - \cancel{mg} = 0$$

$$\ddot{h}_p + \frac{k}{m}h_p = 0 \Rightarrow \boxed{h_p = B\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\,t\right)}$$

Entonces tenemos las soluciones:

$$\theta_\varphi = A\cos\left[\sqrt{\frac{g}{l + \frac{mg}{k}}}\,t\right]$$

que sería la solucion de un pendulo normal con longitud $l + \frac{mg}{k}$ que sería la longitud normal del resorte más el estiramiento ~~[illegible]~~ debido a la masa.

y $h_p = B\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\,t\right)$ que sería la solución para un resorte normal

Pregunta 4

Lagrangiano: $\mathcal{L} = e^{bt}\left(\frac{1}{2}m\dot{q}^2 - \frac{1}{2}k^2q^2\right)$ con k, b, m constantes positivos.

a) ecuaciones de Euler - lagrange:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} - \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} = 0$$

- $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} = e^{bt}\left(-k^2q\right) = -k^2 q\, e^{bt}$

- $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} = e^{bt}\left(m\dot{q}\right) = m\dot{q}\,e^{bt} \Rightarrow \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} = m\ddot{q}\,e^{bt} + m\dot{q}\,b\,e^{bt}$

$$\Rightarrow m\ddot{q}\,e^{bt} + m\dot{q}\,b e^{bt} + k^2 q\, e^{bt} = 0$$

$$\boxed{\ddot{q} + b\dot{q} + \frac{k^2}{m}q = 0}$$

parece la ecuación del oscilador armonico amortiguado.

b) Realizamos el cambio de variable $Q = e^{bt/2}q$

$$\frac{dQ}{dt} = e^{bt/2}\dot{q} + \frac{b}{2}e^{bt/2}q = \dot{Q}$$

Entones: $q = Q e^{-bt/2}$ $\quad \dot{q} = \dot{Q}e^{-bt/2} - \frac{b}{2}q = \dot{Q}e^{-bt/2} - \frac{b}{2}Qe^{-bt/2}$

$$\Rightarrow \mathcal{L} = e^{bt}\left[\frac{1}{2}m\left(\dot{Q}e^{-bt/2} - \frac{b}{2}Qe^{-bt/2}\right)^2 - \frac{1}{2}k^2\left(Qe^{-bt/2}\right)^2\right]$$

$$\mathcal{L} = e^{bt}\left[\frac{1}{2}m\left(\dot{Q}^2e^{-bt} - b\dot{Q}Q\,e^{-bt} + \frac{b^2}{4}Q^2e^{-bt}\right) - \frac{1}{2}k^2Q^2e^{-bt}\right]$$ factorizando e^{-bt}

$$\boxed{\mathcal{L} = \frac{1}{2}m\dot{Q}^2 - \frac{mb}{2}\dot{Q}Q + \frac{b^2m}{8}Q^2 - \frac{1}{2}k^2Q^2}$$

El lagrangiano

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} m\dot{Q}^2 - \frac{mb}{2}\dot{Q}Q + \frac{b^2 m}{8}Q^2 - \frac{1}{2}k^2Q^2$$

No tiene de forma explicita el tiempo por lo que hay simetria temporal.

Entonces el Hamiltoniano se conserva:

$$H = \frac{\partial L}{\partial \dot{Q}}\dot{Q} - L$$

$$\Rightarrow \frac{\partial L}{\partial \dot{Q}} = m\dot{Q} - \frac{mb}{2}Q$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{Q}}\dot{Q} = m\dot{Q}^2 - \frac{mb}{2}\dot{Q}Q$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{Q}}\dot{Q} - L = m\dot{Q}^2 - \cancel{\frac{mb}{2}\dot{Q}Q} - \frac{1}{2}m\dot{Q}^2 + \cancel{\frac{mb}{2}\dot{Q}Q} - \frac{b^2 m}{8}Q^2 + \frac{1}{2}k^2Q^2$$

$$= \frac{1}{2}m\dot{Q}^2 - \frac{b^2 m}{8}Q^2 + \frac{1}{2}k^2Q^2$$

$$= \frac{1}{2}m\dot{Q}^2 - \frac{1}{2}\left[m\left(\frac{b}{2}\right)^2 - k^2\right]Q^2$$

$$\therefore \boxed{H = \frac{1}{2}m\dot{Q}^2 + \frac{1}{2}\left[k^2 - m\left(\frac{b}{2}\right)^2\right]Q^2}$$ que es la cantidad conservada

Siendo $Q = q e^{bt/2}$ y $\dot{Q} = \dot{q} e^{bt/2} + \frac{b}{2} q e^{bt/2}$

$$\Rightarrow H = \frac{1}{2}m\left[\dot{q}e^{bt/2} + \frac{b}{2}qe^{bt/2}\right]^2 + \frac{1}{2}\left[k^2 - m\left(\frac{b}{2}\right)^2\right]\left(qe^{bt/2}\right)^2$$

elevando los cuadrados:

$$H = \frac{m}{2}\left[\dot{q}^2 e^{bt} + bq\dot{q}e^{bt} + \frac{b^2}{4}q^2 e^{bt}\right] + \frac{1}{2}\left[k^2 - m\left(\frac{b}{2}\right)^2\right] q^2 e^{bt}$$

factorizando e^{bt}:

$$H = e^{bt}\left\{\frac{1}{2}m\left[\dot{q}^2 + bq\dot{q} + \left(\frac{b}{2}\right)^2 q^2\right] + \frac{1}{2}\left[k^2 - m\left(\frac{b}{2}\right)^2\right] q^2\right\}$$

$$= e^{bt}\left\{\frac{1}{2}m\dot{q}^2 + \frac{1}{2}mbq\dot{q} + \cancel{\frac{1}{2}m\left(\frac{b}{2}\right)^2 q^2} + \frac{1}{2}k^2q^2 - \cancel{\frac{1}{2}m\left(\frac{b}{2}\right)^2 q^2}\right\}$$

$$= e^{bt}\left\{\frac{1}{2}m\dot{q}^2 + \frac{1}{2}k^2q^2 + \frac{1}{2}mbq\dot{q}\right\}$$ dondo $m\dot{q} = p$

$$\Rightarrow H = e^{bt}\left\{\frac{1}{2}m\dot{q}^2 + \frac{1}{2}k^2q^2 + \frac{1}{2}bqp\right\}$$

los termino:

- $\frac{1}{2}m\dot{q}^2$ tiene forma de energía cinetica
- $\frac{1}{2}k^2q^2$ tiene forma de energía potencial de un oscilador armonico
- $\frac{1}{2}bqp$ un tipo de energía adicional.

y por el termino e^{bt} se puede intuir facilmente que la energía no se conserva ya que cambia con el tiempo.