Rodolfo Ernesto Aviña Varela

1. Deducir paso a paso las ecuaciones de Euler-Lagrange (EL) para un lagrangiano que dependa de la aceleración, además de la velocidad y la posición, es decir:

$$\mathcal{L}=\mathcal{L}(\ddot{q}_i,\dot{q}_i,q_i;t) \quad \text{— I}$$

Si definimos el lagrangiano con las especificaciones dadas por el problema, sea:

$$\mathcal{L}=T-V \quad \text{donde} \quad T=\frac{1}{2}m(\dot{q}_i)^2 \quad \text{— II a}$$

entonces sólo queda $V=V(\ddot{q}_i, q_i;t)$ — II b

donde $q_i = q_1, \dots q_{3n}$ son las coordenadas para n partículas.
En principio este no sería el lagrangiano de un sistema mecánico[1]. Pero supongamos que describe un sistema que cumple con el principio de la mínima acción, entonces debe cumplirse que el movimiento del sistema caracterizado por $\mathcal{L}$ sea tal que minimice la acción S:

$$S=\int_{t_1}^{t_2}\mathcal{L}(\ddot{q}_i,\dot{q}_i,q_i;t)\,dt \quad \text{— III}$$

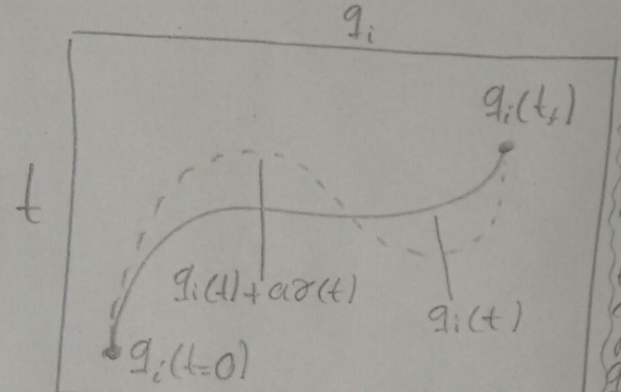

Figura 1. Espacio de configuración C, para un sistema caracterizado por $\mathcal{L}$.

donde $\eta(t)$ es continua hasta la 2da derivada y en t_1 y t_2 es cero porque $q_i(a,t)$ debe ser $q_i(t)$ en los extremos. También $\dot{q}_i(a,t)$ y $\dot{q}_i(t)$.

Tenemos que $S=S(q_i)$, y asumimos que t_1 y t_2 están fijos.

Supongase que $q_i(t)$ minimiza S. Entonces cualquier función que no sea $q_i(t)$ hará que S aumente, a estas funciones de vecindad $\eta(t)$, las definimos como:

$$q_i(a,t)=q_i(0,t)+a\eta(t) \quad \text{— IV}$$

Esto quiere decir que si hacemos $S=S(a)$:

$$\text{V —} \quad S(a)=\int_{t_1}^{t_2}\mathcal{L}(\ddot{q}_i(a,t),\dot{q}_i(a,t),q_i(a,t);t)\,dt$$

[1. "Todo sistema mecánico está caracterizado por una función definida" ($\mathcal{L}=\mathcal{L}(\dot{q}_i,q_i;t)$) que no depende de la aceleración porque: "dadas las velocidades en un cierto instante quedan unívocamente determinadas las aceleraciones $\ddot{q}_i$ en ese instante" y "las coordenadas y las velocidades determinan completamente el estado del sistema" (sistema mecánico) [1]]

La condición para que S se extremice es que

$$\left.\frac{\partial S}{\partial a}\right|_{a=0} = 0 \qquad — \underline{\text{VII}}$$

Derivamos $\underline{\text{VII}}$

$$\frac{\partial S}{\partial a} = \frac{\partial}{\partial a}\int_{t_1}^{t_2} L(q_i, \dot q_i, \ddot q_i; t)\,dt$$

Como $\frac{\partial}{\partial a}$ no actúa en la integral $\Longrightarrow$

porque $L \neq L(a)$

$$\frac{\partial S}{\partial a} = \int_{t_1}^{t_2}\left(\frac{\partial L}{\partial q_i}\frac{\partial q_i}{\partial a} + \frac{\partial L}{\partial \dot q_i}\frac{\partial \dot q_i}{\partial a} + \frac{\partial L}{\partial \ddot q_i}\frac{\partial \ddot q_i}{\partial a} + \cancelto{0}{\frac{\partial L}{\partial a}}\right)dt \qquad — \underline{\text{VIII}}$$

De $\underline{\text{IV}}$ $\Rightarrow$ $\eta(t) = \frac{\partial q_i}{\partial a} \Rightarrow \frac{\partial \dot q_i}{\partial a} = \frac{d\eta}{dt}$ y $\frac{\partial \ddot q_i}{\partial a} = \frac{d^2\eta}{dt^2}$

Reescribimos $\underline{\text{VIII}}$:

$$\frac{\partial S}{\partial a} = \int_{t_1}^{t_2}\left(\frac{\partial L}{\partial q_i}\eta(t) + \underbrace{\frac{\partial L}{\partial \dot q_i}\frac{d\eta}{dt} + \frac{\partial L}{\partial \ddot q_i}\frac{d^2\eta}{dt^2}}\right)dt \qquad — \underline{\text{IX}}$$

Integrando por partes los términos más a la derecha

$$\int_{t_1}^{t_2}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot q_i}\frac{d\eta}{dt} + \frac{\partial L}{\partial \ddot q_i}\frac{d^2\eta}{dt^2}\right)dt \qquad — \underline{\text{X}}$$

Integrando por partes el segundo término

$$\int_{t_1}^{t_2}\frac{\partial L}{\partial \ddot q_i}\frac{d^2\eta}{dt}\,dt = \cancelto{0}{\left.\frac{\partial L}{\partial \ddot q_i}\dot\eta(t)\right|_{t_1}^{t_2}} - \int_{t_1}^{t_2}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \ddot q_i}\right)\dot\eta\,dt$$

porque $\dot\eta(t_1) = \dot\eta(t_2) = 0$

Sustituyendo en la ec. $\underline{\text{X}}$:

$$\int_{t_1}^{t_2}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot q}\dot\eta - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \ddot q}\right)\dot\eta\right)dt \qquad — \underline{\text{XI}}$$

integrando por partes el primer término

$\eta(t_1) = \eta(t_2) = 0$

$$\int_{t_1}^{t_2}\frac{\partial L}{\partial \dot q}\dot\eta\,dt = \cancelto{0}{\left.\frac{\partial L}{\partial \dot q}\eta\right|_{t_1}^{t_2}} - \int_{t_1}^{t_2}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot q}\right)\eta\,dt$$

Sustituyendo en $\boxed{XI}$

$$-\int_{t_1}^{t_2}\left(\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot q}\right)\partial + \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \ddot q}\right)\dot\partial\right)dt =$$

$$-\int_{t_1}^{t_2}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot q}\dot\partial + \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \ddot q}\right)\dot\partial\right)dt =$$

$$-\int_{t_1}^{t_2}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot q} + \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \ddot q}\right)\right)\dot\partial\, dt$$

Sustituyendo en $\boxed{IX}$

$$\frac{\delta S}{\delta a} = \int_{t_1}^{t_2}\left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q}\partial - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot q} + \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \ddot q}\right)\right)\partial\right]dt$$

$$= \int_{t_1}^{t_2}\left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot q}\right) - \frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \ddot q}\right)\right]\partial\, dt$$

Por $\boxed{VII}$:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot q_i}\right) - \frac{d}{dt^2}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \ddot q_i}\right) = 0 \iff$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot q_i}\right) = \frac{d}{dt^2}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \ddot q_i}\right)$$ si $\mathcal{L} = \mathcal{L}(\ddot q)$ se recupera E.L. $\boxed{VIII}$