Rodolfo Ernesto Aviña Varela

1. Deducir paso a paso las ecuaciones de Euler-Lagrange (EL) para un lagrangiano que dependa de la aceleración, además de la velocidad y la posición, es decir:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(\ddot{q}_i, \dot{q}_i, q_i; t) \quad — \quad \mathrm{I}$$

Si definimos el lagrangiano con las especificaciones dadas por el problema, sea:

$$\mathcal{L} = T - V \quad \text{donde} \quad T = \frac{1}{2} m (\dot{q}_i)^2 \quad — \quad \mathrm{II}\,a$$

$$\text{entonces sólo queda} \quad V = V(\ddot{q}_i, q_i; t) \quad — \quad \mathrm{II}\,b$$

donde $q_i = q_1, \dots q_{3n}$ son las coordenadas para n partículas.

En principio este no sería el lagrangiano de un sistema mecánico.[1] Pero supongamos que describe un sistema que cumple con el principio de la mínima acción, entonces debe cumplirse que el movimiento del sistema caracterizado por $\mathcal{L}$ sea tal que minimice la acción S:

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}(\ddot{q}_i, \dot{q}_i, q_i; t)\, dt \quad — \quad \mathrm{III}$$

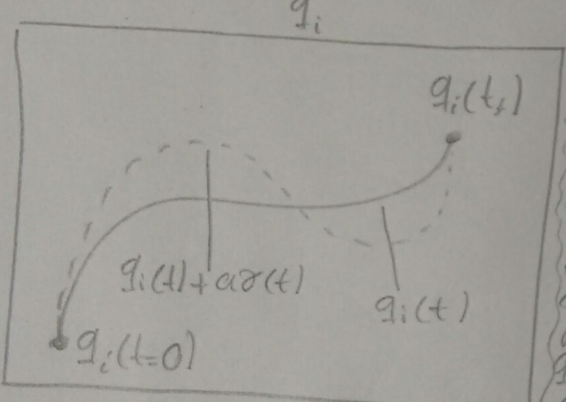

Figura 1. Espacio de configuración C, para un sistema caracterizado por $\mathcal{L}$.

donde $\gamma(t)$ es continua hasta la 2da derivada y en t_1 y t_2 es cero porque $q_i(a,t)$ debe ser $q_i(t)$ en los extremos. También $\dot{q}_i(a,t)$ y $\dot{q}_i(t)$.

Tenemos que $S = S(q_i)$, y asumimos que t_1 y t_2 están fijos.

Supongase que $q_i(t)$ minimiza S. Entonces cualquier función que no sea $q_i(t)$ hará que S aumente, a estas funciones de vecindad $\gamma(t)$, las definimos como:

$$q_i(a,t) = q_i(0,t) + a\gamma(t) \quad — \quad \mathrm{IV}$$

Esto quiere decir que si hacemos $S = S(a)$:

$$\mathrm{V} \quad — \quad S(a) = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}(\ddot{q}_i(a,t), \dot{q}_i(a,t), q_i(a,t); t)\, dt$$

[1. "Todo sistema mecánico está caracterizado por una función definida" ($\mathcal{L} = \mathcal{L}(\dot{q}_i, q_i; t)$) que no depende de la aceleración porque: "dadas las velocidades en un cierto instante quedan unívocamente determinadas las aceleraciones $\ddot{q}_i$ en ese instante" y "las coordenadas y las velocidades determinan completamente el estado del sistema" (sistema mecánico) [1]]

La condición para que S se extremice es que

$$\left.\frac{\partial S}{\partial a}\right|_{a=0}=0 \qquad — \underline{\text{VII}}$$

Derivamos $\underline{\text{VII}}$

$$\frac{\partial S}{\partial a}=\frac{\partial}{\partial a}\int_{t_1}^{t_2}L(q_i,\dot{q}_i,\ddot{q}_i;t)\,dt$$

Como $\frac{\partial}{\partial a}$ no actúa en la integral $\Longrightarrow$

$$\frac{\partial S}{\partial a}=\int_{t_1}^{t_2}\left(\frac{\partial L}{\partial q_i}\frac{\partial q_i}{\partial a}+\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\frac{\partial \dot{q}_i}{\partial a}+\frac{\partial L}{\partial \ddot{q}_i}\frac{\partial \ddot{q}_i}{\partial a}+\underbrace{\cancel{\frac{\partial L}{\partial a}}}_{0}\right)dt \qquad — \underline{\text{VIII}}$$

porque $L \neq L(a)$

De $\underline{\text{IV}}$ $=$ $\eta(t)=\frac{\partial q_i}{\partial a} \Rightarrow \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial a}=\frac{d\eta}{dt}$ y $\frac{\partial \ddot{q}_i}{\partial a}=\frac{d^2\eta}{dt^2}$

Reescribimos $\underline{\text{VIII}}$:

$$\frac{\partial S}{\partial a}=\int_{t_1}^{t_2}\left(\frac{\partial L}{\partial q_i}\eta(t)+\underbrace{\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\frac{d\eta}{dt}+\frac{\partial L}{\partial \ddot{q}_i}\frac{d^2\eta}{dt^2}}\right)dt \qquad — \underline{\text{IX}}$$

Integrando por partes los términos más a la derecha

$$\int_{t_1}^{t_2}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\frac{d\eta}{dt}+\frac{\partial L}{\partial \ddot{q}_i}\frac{d^2\eta}{dt^2}\right)dt \qquad — \underline{\text{X}}$$

Integrando por partes el segundo término

$$\int_{t_1}^{t_2}\frac{\partial L}{\partial \ddot{q}_i}\frac{d^2\eta}{dt}\,dt=\left.\cancelto{0}{\frac{\partial L}{\partial \ddot{q}_i}\dot{\eta}(t)}\right|_{t_1}^{t_2}-\int_{t_1}^{t_2}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \ddot{q}_i}\right)\dot{\eta}\,dt$$

porque $\dot{\eta}(t_1)=\dot{\eta}(t_2)=0$

Sustituyendo en la ec. $\underline{\text{X}}$:

$$\int_{t_1}^{t_2}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\dot{\eta}-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \ddot{q}}\right)\dot{\eta}\right)dt \qquad — \underline{\text{XI}}$$

integrando por partes el primer término

$$\int_{t_1}^{t_2}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\dot{\eta}\,dt=\left.\underbrace{\cancel{\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\eta}}_{0}\right|_{t_1}^{t_2}-\int_{t_1}^{t_2}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right)\eta\,dt$$

$\eta(t_1)=\eta(t_2)=0$

sustituyendo en XI

$$-\int_{t_1}^{t_2}\left(\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \ddot{q}}\right)\eta + \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \ddot{q}}\right)\dot{\eta}\right)dt =$$

$$-\int_{t_1}^{t_2}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\dot{\eta} + \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \ddot{q}}\right)\dot{\eta}\right)dt =$$

$$-\int_{t_1}^{t_2}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} + \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \ddot{q}}\right)\right)\dot{\eta}\,dt$$

sustituyendo en IX

$$\frac{\delta S}{\delta a} = \int_{t_1}^{t_2}\left[\frac{\partial L}{\partial q}\eta - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} + \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \ddot{q}}\right)\right)\eta\right]dt$$

$$= \int_{t_1}^{t_2}\left[\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{\partial L}{\partial \ddot{q}}\right)\right]\eta\,dt$$

Por VIII:

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{\partial L}{\partial \ddot{q}_i}\right) = 0 \iff$$

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) = \frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{\partial L}{\partial \ddot{q}_i}\right)$$ si $L = L(\ddot{q})$ se recupera E.1. VIII

Referencias:

[1]. Landau y Lifshitz. Física teórica, vol. I. Reverté (1994).