Daniel Rodríguez Guillén

Mecánica Analítica.

Tarea #3

1.- Para deducir las ecuaciones de Euler-lagrange comenzamos con un funcional en el espacio de configuraciones

$\mathcal{L} = \mathcal{L}(t, q_i(t), \dot{q}_i(t), \ddot{q}_i(t))$ De tal modo que queremos conocer el camino que extremiza a S.

$$S = \int_a^b \mathcal{L}(t, q_i, \dot{q}_i, \ddot{q}_i)\,dt$$ De tal modo que

$$\delta S = \delta \int_a^b \mathcal{L}(t, q_i, \dot{q}_i, \ddot{q}_i)\,dt \Rightarrow \delta S = \int_a^b \delta\mathcal{L}(q_i, \dot{q}_i, \ddot{q}_i, t)\,dt$$

Tomamos la derivada total

$$\delta\mathcal{L} = \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta q_i}\delta q_i + \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta \dot{q}_i}\delta\dot{q}_i + \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta \ddot{q}_i}\delta\ddot{q}_i$$ Dado que $\delta\dot{q}_i = \frac{d}{dt}\delta q_i$

Entonces $\delta\ddot{q}_i = \frac{d^2}{dt^2}\delta q_i$

$$\delta S = \int_a^b \left(\left[\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta q_i} + \frac{d}{dt}\left(\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\dot{q}_i}\right) + \frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\ddot{q}_i}\right]\delta q_i\right)dt$$ entonces el integrando debe ser cero

Para la primera integral $\int_a^b \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta q_i}\delta q_i\,dt \Rightarrow \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta q_i} = 0$

Para la segunda $\int_a^b \frac{d}{dt}\left(\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\dot{q}_i}\right)\delta q_i\,dt$, integrando por partes $u = \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\dot{q}_i}$, $dv = \frac{d}{dt}(\delta q_i)$

$$\int_a^b \frac{d}{dt}\left(\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\dot{q}_i}\right)\delta q_i\,dt = \cancel{\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta q_i}\delta q_i\Big|_a^b}^{\,0} - \int_a^b \frac{d}{dt}\left(\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\dot{q}_i}\right)\delta q_i\,dt \Rightarrow -\frac{d}{dt}\left(\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\dot{q}_i}\right) = 0$$

por condiciones iniciales

la tercera $\int_a^b \frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\ddot{q}_i}\right)\delta q_i\,dt$ integrando por partes obtenemos $\frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\ddot{q}}\right) = 0$

Así la ec. de Euler-lagrange $$\boxed{\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{q}_i}\right) + \frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\ddot{q}_i}\right) = 0}$$

2. Tenemos: $\mathcal{L}(\dot{q}, q, t) = \frac{1}{2} g_{ab}(q^c)\dot{q}^a \dot{q}^b$

las ecuaciones de Euler-Lagrange $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q^c} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^c}\right) = 0$

- Si obtenemos el primer término

$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q^c} = \frac{1}{2}\partial_c g_{ab}\dot{q}^a \dot{q}^b$ el primer término solo deriva a la matriz ya que es la única que depende de la posición.

- para el segundo término

$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^c} = \frac{1}{2} g_{cb}\dot{q}^b + \frac{1}{2} g_{ac}\dot{q}^a$ en este caso se sigue la regla de la cadena es decir $\partial \dot{q}^a = 1$ en el primer término y $\partial \dot{q}^b = 1$ en el segundo el tensor g_{ab} cambia de índices ya que solo se puede hacer la suma respecto a c en ambos casos.

- Derivamos respecto a t

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^c}\right) = \frac{1}{2} g_{cb}\ddot{q}^b + \frac{1}{2} g_{ac}\ddot{q}^a + \frac{1}{2}\partial_a g_{cb}\dot{q}^a \dot{q}^b + \frac{1}{2}\partial_b g_{ca}\dot{q}^a \dot{q}^b$$

En este caso se sigue la regla de la cadena tanto para la matriz g_{ab} como para $\dot{q}^a$ y $\dot{q}^b$ en el caso de la matriz existen dos posibilidades la derivada parcial respecto a "a" y respecto a "b". por eso ∂_a y ∂_b Para los últimos 2 términos.

Para los primeros 2 tenemos índices mudos y podemos renombrar $b \to a$

Tenemos: $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^c}\right) = g_{ac}\ddot{q}^a + \frac{1}{2}\dot{q}^a \dot{q}^b(\partial_a g_{cb} + \partial_b g_{ac})$ dado que la matriz g_{ac} es simétrica podemos intercambiar los índices $g_{ab} = g_{ba}$

Así: $-\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q^c} + \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^c}\right) = g_{ac}\ddot{q}^a + \frac{1}{2}\dot{q}^a \dot{q}^b(\partial_a g_{cb} + \partial_b g_{ac}) - \frac{1}{2}\partial_c g_{ab}\dot{q}^a \dot{q}^b$

reordenando $= g_{ac}\ddot{q}^a + \frac{1}{2}(\partial_a g_{cb} + \partial_b g_{ac} - \partial_c g_{ab})\dot{q}^a \dot{q}^b$

Definimos el símbolo de Christoffel de 1ra especie $[ab, c] = \frac{1}{2}(\partial_a g_{cb} + \partial_b g_{ac} - \partial_c g_{ab})$

$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^c}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q^c} = g_{ac}\ddot{q}^a + [ab, c]\dot{q}^a \dot{q}^b$ para obtener el símbolo de C. de 2da especie multiplicamos ambos lados por g^{Mc}

$g^{Mc} g_{ac}\ddot{q}^a + g^{Mc}[ab, c]$ por contracción de índices $g^{Mc} g_{ca} = \delta^M_a$ delta de Kronecker

$\Rightarrow \delta^M_a \ddot{q}^a + g^{Mc}[ab, c]$ entonces $\delta^M_a \ddot{q}^a = \ddot{q}^M$

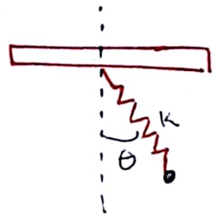
Por lo cual obtenemos

$\ddot{q}^{\mu} + g^{\mu c}[ab,c]\dot{q}^{a}\dot{q}^{b} = 0$ Ahora definimos el símbolo de Christoffel de 2da especie como $\Gamma^{\mu}_{ab} = g^{\mu c}[ab,c] = \frac{1}{2}g^{\mu c}(\partial_a g_{cb} + \partial_b g_{ac} - \partial_c g_{ab})$

Por lo cual las ecuaciones de Euler lagrange son

$$\boxed{\ddot{q}^{\mu} = -\Gamma^{\mu}_{ab}\dot{q}^{a}\dot{q}^{b}}$$

3.-



Tenemos un péndulo hecho por un resorte de constante K longitud de reposo ℓ atado a una masa m.

Utilizando coordenadas polares $q_1 = r$ y $q_2 = \theta$

$x = r\sin\theta \qquad \dot{x} = r\dot{\theta}\cos\theta + \dot{r}\sin\theta$

a)

$y = -r\cos\theta \qquad \dot{y} = r\dot{\theta}\sin\theta - \dot{r}\cos\theta$

la energía cinética $T = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2)$

la energía potencial $V = \frac{1}{2}K(r-\ell)^2 - mgr\cos\theta$

$\mathcal{L} = T - V = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) - \frac{1}{2}K(r-\ell)^2 + mgr\cos\theta$ aplicando euler-lagrange

EOM θ: $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\theta}}\right) - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\theta} \Rightarrow \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\theta} = -mgr\sin\theta$, $\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\theta}} = r^2\dot{\theta}m \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\theta}}\right) = (r^2\ddot{\theta} + 2\dot{r}r\dot{\theta})m$

dividiendo entre r y m

EOM θ: $r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} + g\sin\theta = 0$

Ahora para r

EOM r: $\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial r} = -K(r-\ell) + mg\cos\theta$, $\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{r}} = m\dot{r} \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{r}}\right) = m\ddot{r}$

$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial r} = -K(r-\ell) + mg\cos\theta + mr\dot{\theta}^2$

dividiendo entre m

EOM r: $\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 + \frac{K}{m}(r-\ell) - g\cos\theta = 0$

a) $\boxed{\text{EOM } \theta: r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} + g\sin\theta = 0}$ $\boxed{\text{EOM } r: \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 + \frac{K}{m}(r-\ell) - g\cos\theta = 0}$

b) Para encontrar sus puntos de equilibrio podemos hacer un sistema de ecuaciones para $r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} + g\sin\theta = 0$

con sustitución $\dot{\theta} = \omega \Rightarrow \frac{d\omega}{dt} = -\frac{2\dot{r}}{r}\dot{\theta} - g\sin\theta$ entonces $\dot{\theta} = 0$, $\frac{d\omega}{dt} = 0$

lo que lleva a $-g\sin\theta = 0$ entonces $\theta = k\pi$ para $r \neq 0$

Ahora para $\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 + \frac{k}{m}(r-\ell) - g\cos\theta = 0$ Aquí tenemos que

$x_1 = r$

$x_2 = \frac{dx_1}{dt}$ Así el sistema $\frac{dx_1}{dt} = r\dot{\theta}^2 + \frac{k}{m}(r-\ell) + g\cos\theta$ para $r \neq 0 \Rightarrow \dot{\theta}^2 = 0$

entonces necesariamente $r = \ell$ y $\theta = (2n+1)\frac{\pi}{2}$

los puntos de equilibrio son

$$\boxed{\begin{array}{l} \ddot{r} = 0, \ \ddot{\theta} = 0 \\ \dot{r} = 0, \ \dot{\theta} = 0 \\ r = \ell, \ \theta = \left(k\pi, (2k+1)\frac{\pi}{2}\right) \end{array}}$$

c) Para hacer la expansión tomamos en cuenta que $\sin\theta = \theta$, $\cos\theta = 1$ si el desplazamiento θ es muy pequeño $\Rightarrow \dot{\theta} = 0$, a su vez $r = \ell - x$ el desplazamiento x es mucho más pequeño que ℓ $x \ll \ell$

entonces $\boxed{\ddot{\theta} = -\frac{g}{\ell}\theta}$ $\boxed{\ddot{x} = -g - \frac{k}{m}x}$

si resolvemos integrando 2 veces

$\boxed{\theta = C_1\sin\left(\sqrt{\frac{g}{\ell}}t\right) + C_2\cos\left(\sqrt{\frac{g}{\ell}}t\right)}$ $\boxed{x = C_1\sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) + C_2\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) - \frac{gm}{k}}$

4.- $L = e^{bt}\left(\frac{1}{2}m\dot{q}^2 - \frac{1}{2}k^2q^2\right)$

a) Tenemos que $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}}\right) = 0$

$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} = -e^{bt}k^2 q$, $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} = e^{bt} m\dot{q}$, $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}}\right) = be^{bt}m\dot{q} + e^{bt}m\ddot{q}$

$-e^{bt}k^2q - be^{bt}m\dot{q} - e^{bt}m\ddot{q} = 0$ $\Rightarrow e^{bt}(k^2q + m\dot{q} + m\ddot{q}) = 0$

Tenemos que el factor e^{bt} de amortiguamiento no puede ser cero. Este sistema se parece a un oscilador amortiguado.

$$\boxed{\text{EOM}: \ e^{bt}(k^2q + m\dot{q} + m\ddot{q}) = 0}$$

b) Con $Q = e^{bt/2}q$ $\Rightarrow q = \frac{Q}{e^{bt/2}}$ entonces $\dot{q} = \dot{Q}e^{-bt/2} - \frac{b}{2}e^{-bt/2}Q$

Así $L = e^{bt}\left(\frac{1}{2}m(\dot{Q}e^{-bt/2} - \frac{b}{2}e^{-bt/2}Q)^2 - \frac{1}{2}k^2Q^2\right)$

$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m(\dot{Q} - \frac{b}{2}Q)^2 - \frac{1}{2}k^2Q^2$

Si desarrollamos $(\dot{Q} - \frac{b}{2}Q)^2 = \dot{Q}^2 - b^2\dot{Q}Q + \frac{b^2}{4}Q$ de aquí $\dot{Q}Q = 0$ ya que es la derivada total lo que queda

$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m\dot{Q}^2 - \frac{1}{2}(k^2 - \frac{mb^2}{4})Q^2$ este lagrangiano es igual al oscilador sin amortiguamiento por lo cual es independiente del tiempo

Podemos definir entonces el Hamiltoniano y se conserva la energía

$$\boxed{\mathcal{H} = \frac{1}{2}m\dot{Q}^2 + \frac{1}{2}(k^2 - \frac{mb^2}{4})Q}$$

En términos de $\dot{q}$ y q

$$\boxed{\mathcal{H} = \frac{1}{2}m(e^{bt/2}\dot{q} + \frac{b}{2}Q) + \frac{1}{2}(k^2 - \frac{mb^2}{4})e^{bt/2}q}$$