# Mecánica Analítica: Caos

Daniel Rodríguez Guillén

*Universidad de Guanajuato, División de Ciencias e Ingerías, Campus León. Lomas del Bosque 103, Lomas del Campestre, 37150 León, Gto.*

**En este presente trabajo se habla sobre el caos, en el sentido físico, el documento está dividido en varias secciones, primero se introduce lo que es el caos, de donde proviene y algunas características, posteriormente algunos métodos físicos y matemáticos para analizar sistemas dinámicos que tienden al caos, como lo son las secciones de Poincaré, tomando en cuenta que Poincaré fue la primera persona en tratar el caos determinista, como se menciona en la introducción, algunos otros métodos como mapeos ayudan a entender el sistema en términos de otros parámetros como velocidades, algunos ejemplos son el espacio fase, o variación de parámetros como en mapeos logísticos o ecológicos, o métodos numéricos como los exponentes de Lyapunuv.**

**En este presente documento también se tratan temas como fractales y su relación con el caos, tomando en cuenta algunos objetos matemáticos llamados atractores que ayudan a visualizar el comportamiento de un sistema dinámico. Además se presentan algunos gráficos y sus respectivos códigos en la sección de Apéndice.**

## 1. ¿QUÉ ES EL CAOS?

El caos a diferencia de como se conoce popularmente, no consta de situaciones al azar sin ningun tipo de relación con un evento, sino que hablando de manera física, el caos consta de eventos estrechamente relacionados con sus condiciones iniciales, la primer persona en tratar este tema fue Poincaré con el problema de los tres cuerpos tal y como lo dice su publicación: *..."Toma por ejemplo el problema de los tres cuerpos: uno puede preguntarse si uno de los cuerpos permanecerá siempre dentro de cierta región del cielo o incluso si se alejará indefinidamente; ¿Si las distancias entre dos cuerpos aumentarán o disminuirán infinitamente, o incluso si permanecerán dentro de ciertos límites? ¿No se podrían hacer mil preguntas de este tipo que se resolverían cuando se pudiera construir cualitativamente las trayectorias de los tres cuerpos? y si se considera un mayor número de cuerpos, ¿cuál es la cuestión de la invariabilidad de los elementos de los planetas, si no es una cuestión real de geometría cualitativa, ya que muestran que el eje mayor no tiene variaciones seculares que muestran que oscila constantemente entre ciertos limites." -Poincaré and the three body problems. (1953). 1st ed. June Barrow-Green, p.30.-*"

La implicación de este estudio hecho por Poincaré llevo a lo que se conoce como "Caos determinista", esto quiere decir que cada movimiento depende solamente del movimiento anterior, pero en una trayectoria bien definida. Lo que lleva nuevamente a discutir que el caos no es un movimiento al azar, sin ningún sentido, sino que éste se rige por las condiciones iniciales de un sistema y cada movimiento posterior en el trayecto está relacionado con el movimiento anterior. El caos determinista fue de gran impacto, en ese entonces Newton había descubierto que cada sistema podía expresarse mediante ecuaciones de movimiento, cuyas soluciones eran analílitcas y dadas las condiciones iniciales sus trayectorías eran suaves. Actualmente se puede estudiar el comportamiento de sistemas caóticos y complejos mediante el uso de computadoras, existen herramientas matemáticas como el espacio fase que ayudan a entender el comportamiento de dichos sistemas.

### 1.1. Secciones de Poincaré

Como se mencionó anteriormente, Poincaré al interesarse en el problema de los tres cuerpos por lo cual desarrolló un método que se conoce como "Secciones de Poincaré" consiste en generar un subespacio a manera de "corte" plano transversal en el espacio de configuraciones de las partículas, de tal manera que la partícula al "cruzar" genera un punto en el plano, es decir una trayectoría completa representa un punto en el mapeo de Poincaré.

La idea en síntesis es generar un subespacio en el cual se pueda interpretar el movimiento de un sistema en menos dimensiones, cada sistema es descrito por una ecuación diferencial, podemos llamar entonces a este tipo de transformaciones como "mapeos de Poincaré", la construcción de mapeos de Poincaré no tiene un método específico, es decir no existe con exactitud una manera ”única” de construir este tipo de mapeos, por lo general, para construir este tipo de mapeos es necesario tener cierto conocimiento de lo que es el espacio fase, y conocer que clase de sistema se quiere analizar, generalmente se aplica a sistemas periódicos en ciertas órbitas, por ejemplo el problema de los tres cuerpos, existen otros sitemas como oscilaciones periódicas forzadas, y otros más complicados como sistemas de Hamiltonianos.

A modo de ejemplo, se resolverá un péndulo amortiguado. La ecuación diferencial asociada es:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \beta\frac{d\theta}{dt} + \omega sin(\theta) = A\cos(\omega_0 t) \tag{1}$$

Donde el lado izquierdo representa la aceleración, el término asociado a la gravedad y el amortiguamiento, del lado derecho el término forzado.

Tomando $\beta = 0.5$, A $= 1.2$, $\omega = 1$ y variando $\omega_0$ se puede obtener el espacio fase, véase figura 1.

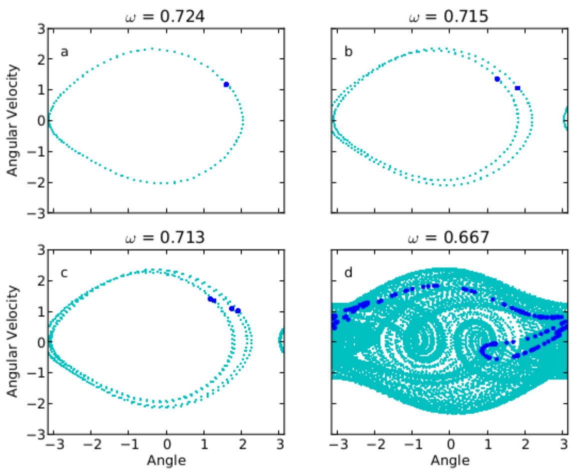


**FIGURE 1.** Espacio Fase para diferentes valores de la frecuencia externa

Los puntos azules representan un punto en la sección de Poincaré, es decir al completar una ”vuelta” o periodo, algunas veces cuasi-periodo, se toma el punto de cruce y cada punto se agregan al mapeo de Poincaré, véase figura 2.

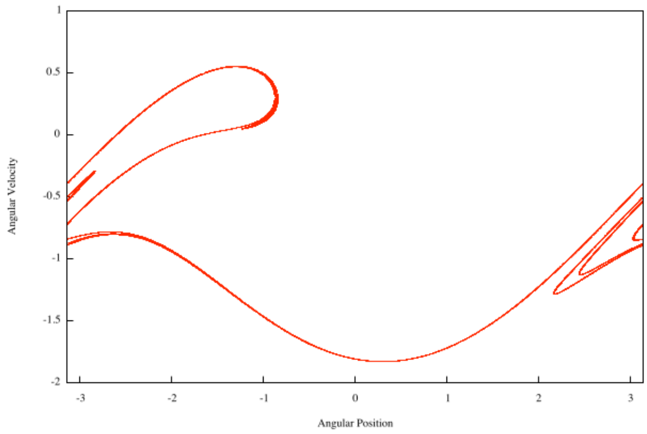


**FIGURE 2.** Superposición de secciones de Poincaré, llamadas Mapeo de Poincaré del péndulo caótico

Estos tipos de mapeos, son muy importantes para ayudar a entender y describir un sistema, por ejemplo en la figura 1 d) podemos notar un atractor extraño en el péndulo e incluso ver en que valores el sistema es caótico, incluso algunas veces el sistema contiene fractales; un atractor es el movimiento al que finalmente llega un sistema independientemente de sus condiciones iniciales, ésto al igual que los mapeos y fractales se discutirán el las siguientes secciones.

### 1.2. Mapeos

De manera más general un mapeo es una regla de asignación uno a uno de un elemento que pertenece a un conjunto a otro elemento de otro conjunto. Este tipo de relaciones tienen gran importancia en las ciencias exactas, permiten entender un fenómeno y su comportamiento, así como entes matemáticos a través de una transformación. El caso más simple y útil de mapeo matemático es una función; Una función es un objeto matemático que representa la dependencia uno a uno de dos conjuntos, u otros objetos matemáticos. Sin embargo existen muchos tipos de mapeos, para esta secicción se tomarán mapeos con relación al caos como los mapeos de Poincaré que se trataron en el aparatdo anterior.

#### *1.2.1. Diagrama de Feibenbaum o de bifurcación*

Otro tipo de mapeo que se utiliza en el análisis de sistemas dinámicos, es el diagrama de Feigenbaum, tambien conocido como diagrama de bifurcación.

Los diagramas de bifuración se hacen mediante la variación de un parámetro en un sistema dinámico, dadas las condiciones iniciales, ésta variación da información sobre bajo que condiciones el sistema es estable o inestable.

Mapeo Logístico

Es un mapeo de recurrencia o polinomial, este mapeo suele utilizarse para mapeos poblacionales y es de la forma:

$$f(x) = \mu x(1-x) \tag{2}$$

Mediante la variación del parámetro $\mu$ podemos generar un mapeo logístico, véase figura 3

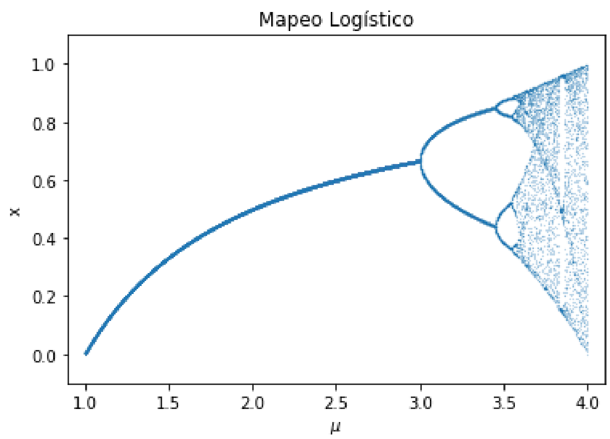


**FIGURE 3.** Mapeo Logístico, mediante la variación de parámetro $\mu$ de la funcion f(x) con x de [0,1]

Este tipo de mapeos da información sobre que valores el parámetro vuelve inestable y caótico el sistema, podemos notar que hay un atractor que se representa con una "línea" posteriormente el sistema se bifurca es decir el sistema encuentra un repulsor y se divide en dos atractores, este suceso se repite hasta que llega a un valor caótico y se representa con muchos puntos en la gráfica. Posteriormente en otra sección se definirá lo que es un atractor, sin embargo es importante entender como se ven los atractores en este tipo de mapeos.

Mapeo Ecológico

Este tipo de mapeos al igual que el logístico es un mapeo de bifuración, y es de la forma:

$$f(x) = xe^{\mu(1-x)} \tag{3}$$

Mediante la variación del parámetro $\mu$ de la función se puede obtener su respectivo diagrama, véase figura 4.

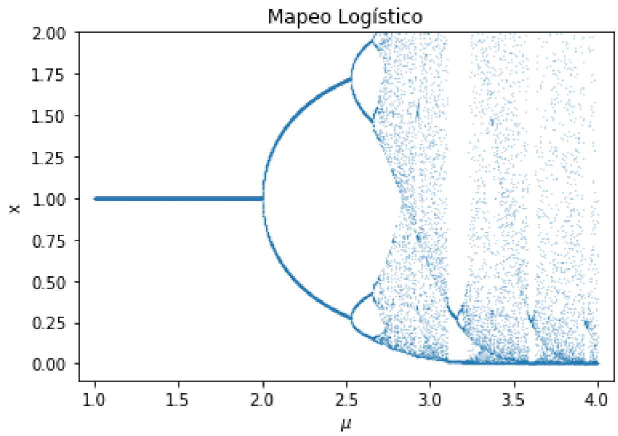


**FIGURE 4.** Mapeo Ecológico, mediante la variación de parámetro $\mu$ de la funcion f(x) con x de [0,2]

En general para cualquier sistema dinámico se puede obtener un diagrama de bifurcación, que ayude al entendimiento del sistema mismo, como se hizo mención anteriormente el diagrama ayuda a saber en que valores los parámetros se vuelven caóticos, a su vez como el sistema está compuesto por atractores y su comportamiento.

*1.2.2. Espacio Fase*

Por último otro mapeo muy utilizado es el espacio fase. Partiendo de la necesidad de representar el movimiento de un cierto número de partículas o un sistema en el espacio de configuraciones, para resolver este problema se hace el mapeo de espacio fase, el cual consta en mostrar la relación entre la posición y el momento ambas en función del tiempo. En la sección pasada se dieron ejemplos de espacio fase para entender la sección de Poincaré. Véase figura 1.

### 1.3. Atractores y Atractores Extraños

Anteriormente se ha mencionado la palabra atractor, incluso en la primera sección se definió de manera simple lo que es una atractor, para no perder generalidad en esta sección se explciará de manera detallada que es un atractor y su importancia en los sistemas caóticos.

Como se mencionó anteriormente cada sistema dinámico es descrito por una ecuación o varias ecuaciones diferenciales, la mayor parte de estos sistemas tienen fricción y su movimiento se reduce en un periodo breve de tiempo, dicho de otra forma son disipativos, a excepción de los sistemas que son afectados por una fuerza externa, al detener esta fuerza externa los sistemas entran en un estado típico de movimiento, este estado en el espacio fase se le conoce como atractor.

Podemos clasificar entonces los atractores en tres tipos, los atractores punto, los atractores cíclicos o predecibles y atractores extraños. Los atractores punto pueden verse como el punto en el cual el sistema termina, véase 5.

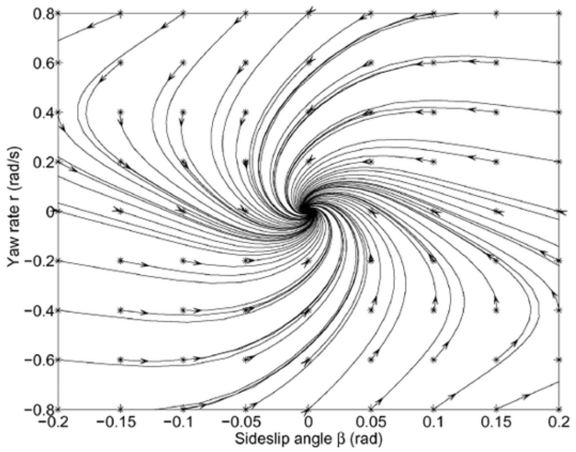


**FIGURE 5.** Atractor punto, el movimiento del sistema se reduce al punto (0,0)

Sin embargo pueden existir ecuaciones de las cuales en su espacio fase existan más de un atractor.

Los atractores cíclicos o predecibles son aquellos en los cuales el sistema genera un movimiento periódico. Un ejemplo clásico y fácil de entender es un oscliador ideal, el cual no pierde energía, incluso si el sistema es afectado por una fuerza no periódica el sistema recae al movimiento típico, es decir al atractor, véase fuigura 7.

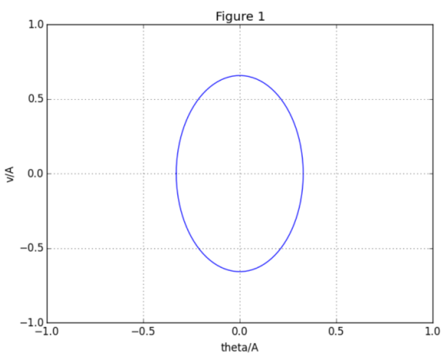


**FIGURE 6.** Atractor cíclico de un oscliador, el movimiento se restringe a movimientos periódicos

Ahora que se tiene más en claro que es un atractor, se puede definir que es un atractor extraño. Lo que caracteriza a un atractor extraño es su sensibilidad a las condiciones iniciales, es decir el sistema puede variar infinitesimalmente en las condiciones iniciales y su comportamiento es completamente diferente.

### *1.3.1. Atractor de Rössler*

El atractor de Rössler se le atribuye a Otto E. Rössler por estudiar un sistema dinámico de tres ecuanciones diferenciales ordinarias no lineales de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -y - z \\ \frac{dy}{dt} &= x + Ay \\ \frac{dz}{dt} &= B + z(x - C) \end{aligned}$$

Otto E. Rössler estudió el atractor caótico con A = 0.2, B = 0.2 y C = 5.7. Vease figura 7.

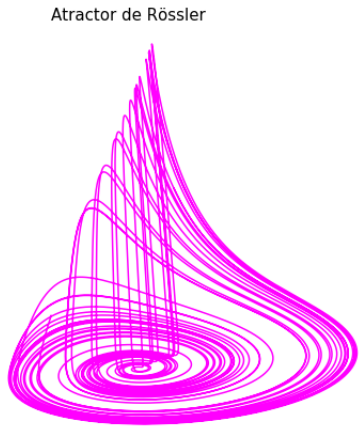


**FIGURE 7.** Atractor de Rössler para A = 0.38, B = 0.35, C = 4.5

### *1.3.2. Atractor de Ueda*

El atractor Ueda se le atribuye a Yoshisuke Ueda, por encontrar un oscilador de tipo "duffing" este tipo de osciladores se atribuyen a Georg Duffing. El oscliador de Ueda es de la forma:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + k\frac{dx}{dt} + x^3 = Bcos(\omega t) \tag{4}$$

Para los valores de k = 0.05, B = 7.5 y $\omega = 1$. Véase figura 8.

### *1.3.3. Atractor de Lorenz*

El atractor de Lorenz se le atribuye a Edward Lorenz por estudiar un sistema dinámico de tres ecuanciones diferenciales ordinarias de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= s(y - x) \\ \frac{dy}{dt} &= rx - y - xz \\ \frac{dz}{dt} &= xy - yz \end{aligned}$$

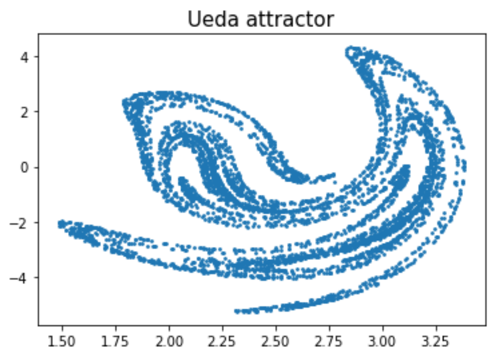


**FIGURE 8.** Atractor de Ueda

Usando los valores de s = 10, r = 28 y b = 2.667. Véase figura 8.

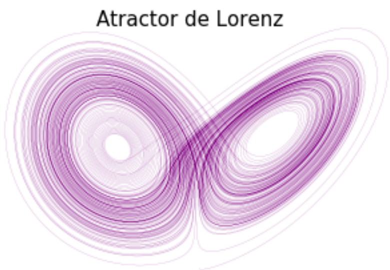


**FIGURE 9.** Atractor de Lorenz

Una observación respecto a los atractores, es que en ellos pueden aparecer fractales, tema que se verá acontinuación.

### 1.4. Fractales

Los fractales son entes matemáticos o geométricos con la propiedad de repetirse a diferentes escalas. Estos objetos son más comunes de lo que se creen, y la suelen verse en la naturaleza, desde flores hasta el mundo microscópico. Véase figura 10.
Si se es observador en las imágenes de éste presente documento, pueden verse fractales, en los mapeos de bifurcación, en los atractores, entonces ¿Cómo se relacionan los fractales con el caos?

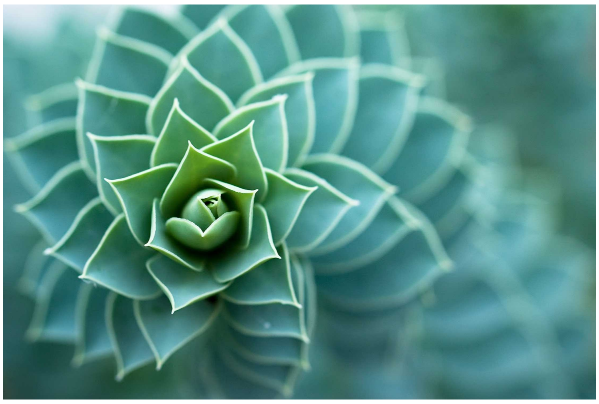

**FIGURE 10.** Fractales de una planta

Para empezar los fractales han estado presente inclusive en las matemáticas, el Conjunto de Cantor es una representación matemática de un fractal. Véase figura 11.

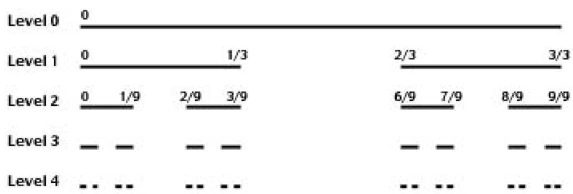


**FIGURE 11.** El conjunto de Cantor es un fractal

Entonces la relación de un sistema caótico y los fractales, es en esencia los atractores extraños vistos en la sección anterior.

La dimensión de un fractal no es única, de hecho existen diferentes dimensiones para cada fractal, ésta depende del fractal, algunos ejemplos de dimensiones son: la dimensión de Hausdorff-Besicovitch, la dimensión de la dimensión de empaquetamiento etc. Todas éstas están relacioandas.

Si un fractal es un objeto que se repite a diferentes escalas, y los atractores son sistemas muy sensibles a las condiciones iniciales, cuando un atractor tiene fractales, de alguna manera puede ser más fácil su entendimiento, es decir se sabe que el atractor seguira generando el mismo patrón pero a diferentes escalas. Véase figura 12

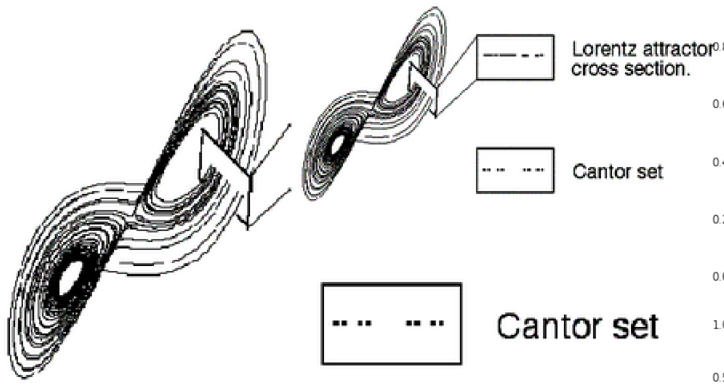


**FIGURE 12.** Análisis del atractor de Lorenz mediante el conjunto de Cantor que es un fractal

Así pues, los atractores contienen fractales, y se conoce una manera de medir la dimensión de éstos, pero ¿Cómo medir la distancia o el cambio en los atractores? la respuesta es mediante los exponentes de Lyapunov y éste tema se trata en la siguiente sección.

### 1.5. Exponentes de Lyapunov

Una manera de medir la sensibilidad del cambio en los atractores, es mediante los exponentes de Lyapunov, éstos dan un valor promedio del cambio infinitesimal sobre dos puntos cercanos, estos cambios suelen ser exponenciales.

Supongamos entonces en un mapeo M, y se quiere calcular una distancia de tal manera que:

$$dx_n \sim e^{hn} dx_0 \tag{5}$$

Donde $dx_n$ denota la separación infinitesimal entre los dos puntos, que han sido iterados n veces. Podemos definir los exponentes de Lyapunov h de la siguiente manera:

$$h = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} ln \left| \frac{dx_T}{dx_0} \right|$$

Si el factor h > 0 denota caos.

La útilidad de los exponentes de Lyapunov radica también en la medición de estabilidad de sistemas dinámicos, a como de comparación de los exponentes de Lyapunov con un mapeo logístico visto anteriormente véase figura 13.

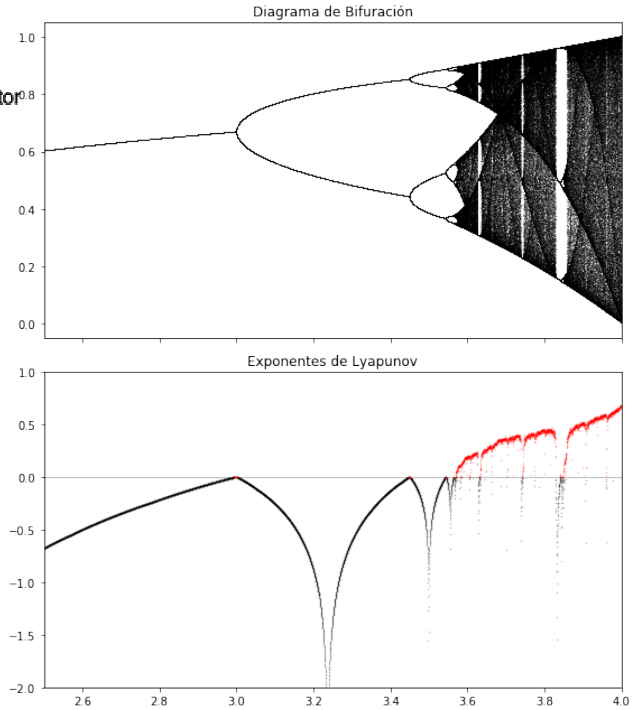


**FIGURE 13.** Comparación de mapeo logístico y los exponentes de Lyapunov, al ser estos positivos es decir h¿0 en el mapeo logístico se puede visualizar el caos.

Como podemos ver los exponentes de Lyapunov son una herramienta útil para medir las distancias de dos o más puntos a través de los diferentes cicos de mapeo de un sistema dinámico, y su estabilidad. Los exponentes de Lyapunov no solo se restringen a mapeos unidimensionales sino que pueden extenderse hasta mapeos n-dimensionales.

### 1.6. Caos determinista o ¿estocástico?

Hasta ahora se ha mencionado que el caos determinista no es azar, ni aleatoriedad en todo momento, sino que un sistema determinista está regido por las condiciones iniciales y la sensibilidad para cambiar su movimiento respecto a éstos, es decir cada movimiento previo es afectado por el anterior. Pero entonces ¿hasta donde el movimiento es "predecible" y se vuelve estocástico?

No se entrará en detalle lo que un proceso estócastico es, ni sus propiedades ya que no es el tema de este presente documento, sin embargo se introducirá algunos conceptos necesarios para el entendimiento de una transición caótica determinista a estocástica y sus aplicaciones.

Un sistema estocástico o proceo estocástico, es un proceso en el cual se rige por magnitudes aleatorias. La diferencia entre un sistema dinámico caótico determinista y uno estocástico se debe principalmente a que en un sistema caótico determinista se puede asociar un modelo matemáico, en cambio en un sistema estocástico no, éste solo se rige mediante probabilidad.

Modelo de Márkov

El módelo de Markov es un proceso estocástico en el cual la probabilidad de un evento depende solo del evento anterior, formalmente si se conoce el historial del sistema hasta su instante actual, su estado presente resume toda la información relevante para describir en probabilidad su estado futuro. A este fenómeno o característica de "falta de memoria" (nombrado así por las variables con o sin memoria) se le conoce como propiedad de Márkov.

El módelo de Markov tiene cierta similitud a la descripción de sistema caótico determinista, éste depende de las condiciones iniciales, su sensibilidad al cambio y el proceso anteorior, el módelo de Márkov tambien reconoce el historial de eventos y el evento anterior. Supongamos pues que se tiene un sistema de ecuaciones diferenciales, este sistema describe la evoluacion poblacional. Véase figuras 16.

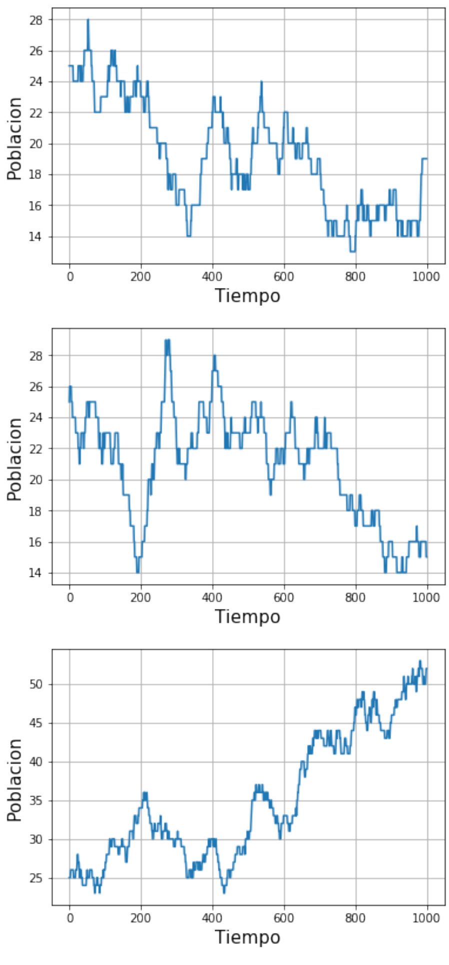


**FIGURE 14.** Tres modelos poblacionales usando el módelo de Márkov.

## 1.7. Ejemplo y Aplicación: Movimiento Browniano

El movimiento Browniano denominado así por su descubridor Robert Brown, es el movimiento que experimentan las partículas en medio de un fluido. Robert Brown observaba partículas atrapadas en las cavidades dentro de un grano de polen en el agua, pero no fue capaz de predecir su comportamiento ni que provocaba este movimiento, fue Einstein quien explicó a detalle este tipo de movimiento y esta explicación que posteriormente ayudó a verificar que existen los átomos y las moléculas.

El movimiento Browniano suele ser clasificado como un movimiento estocástico, o aleatorio, véase figura 16, sin embargo si se ponen condiciones iniciales puede ser un movimiento caótico.

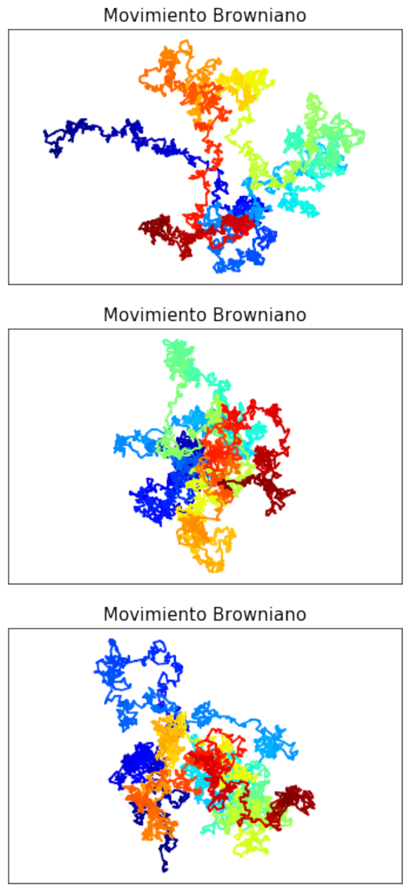


**FIGURE 15.** Movimiento Browniano para 3 diferentes simulaciones.

*"...El movimiento errático de una partícula browniana suele ser descrito por la Teoría de Langevin. Como es bien sabido, este método encuentra una manera de evitar la consideración detallada de muchos grados de libertad al representar con una fuente de ruido el efecto de las colisiones con moléculas en el fluido en el que se mueve la partícula. El acercamiento al*

*equilibrio térmico es producido por fuerzas aleatorias, y estas son suficientes para determinar las correlaciones dinámicas, la difusión y una forma básica para el teorema de fluctuación-disipación. Con el mismo espíritu, los atractores de mapas no lineales de baja dimensión bajo el efecto de ruido externo pueden utilizarse para modelar estados en sistemas con muchos grados de libertad. Tenga en cuenta que la fórmula general del movimiento:"*

$$x_{t+1} = x_t + h_\mu(x_t) + \sigma\chi_t \tag{6}$$

*"es una forma discreta para una ecuación de Langevin con un término no lineal de "fuerza de fricción" $h_\mu$ y $\chi_t$ es la misma variable aleatoria de ruido gaussiano, y $\sigma$ la intensidad del ruido" -Chaos, Nonlinearity, Complexity: The Dynamical Paradigm of Nature. 2006. Francisco Balibrea. pag. 97.*

Si para esta ecuación el término $\sigma = 0$ se pueden obtener movimientos brownianos caóticos, véase figura

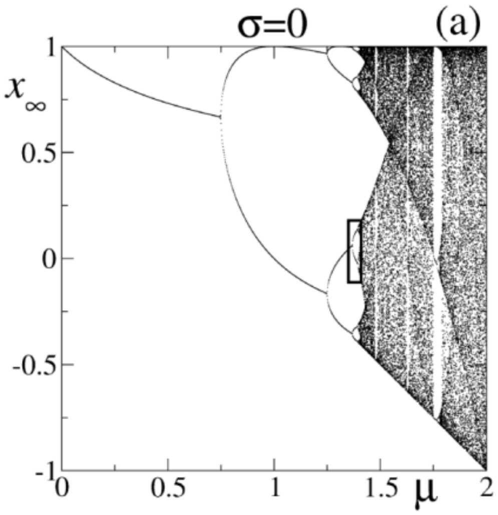


**FIGURE 16.** Mapeo Logístico de movimiento Browniano con condiciones iniciales, generando un movimiento caótico. Imágen extraída de -Chaos, Nonlinearity, Complexity: The Dynamical Paradigm of Nature. 2006. Francisco Balibrea. pag. 97

Como se puede notar los sistemas caóticos puedes volverse estocásticos, sin embargo también los sitemas estocásticos pueden ser caóticos mediande el análisis de condiciones iniciales y restricción de parámetros, esto para tratar de comprender sistemas dinámicos caóticos.

## 2. CONCLUSIONES

A través de este documento, se pueden ver diversas técnicas para el análisis de sistemas dinámicos caóticos, tener en cuenta que un sistema se puede describir mediante ecuaciones diferenciales, llamadas ecuaciones de movimiento, a estas ecuaciones se les suele dar condiciones iniciales que describen el sistema y determinar el tipo de movimiento que tendrá el sistema, es improtante entonces analizar el comportamiento del sistema bajo diversas condicones iniciales y explorar bajo que parámetros es caótico.

Mediante las secciones de Poincaré es una herramienta útil para representar el movimiento de sistemas n-diomensionales a través de cortes que indican la preciodicidad del movimiento, posteriormente estos cortes pueden suporponerse y determinar el mapeo de Poincaré.

Cuando el sistema decae en un movimiento típico podemos encontrar su respectivo atractor, estos atractores nos ayudan a entender la periodicidad del sistema, y mediante mapeos logísticos podemos ver donde se encuentran y en que puntos son caóticos, los exponentes de Lyapunov además de poder describir la separación de estos puntos, también determinan cuando el ssitema es caótico, es decir existen varios métodos para poder determinar cuando un sistema es caótico para poder hacer un modelo matemático que lo describa.

Los fractales son un patrón que se repite en la naturaleza y lo más sorprendente es que incluso en el caos se puede encontrar patrones como estos, que nos indican no solo que el sistema no es aleatorio sino que puede ser medible y entendible, la teoría que estudia los fractales es muy reciente.

Para finalizar decidí agregar algo de procesos estocásticos para remarcar que un sistema caótico no es aquel en el que gobierna el azar sino es aquel que su comportamiento es sensible a cambios descritos en las condiciones iniciales, y más importante que un sistema dinámico puede tender de ser caótico a ser estocástico, esto es que el modelo que lo describe depende de probabilidades. Aun mejor que los procesos estocásticos pueden ser "controlados" mediante condiciones iniciales y restricción de parámetros y esto nos ayuda a entender un poco más el comportamiento de muchos fenómenos naturales, a su vez simularlos y determinar nuevos modelos que ayuden al entendimiento de la naturaleza, dado que al final de cuentas de eso se trata la física.

## 3. APÉNDICE

**Listing 1.** Código para secciones de Poincaré péndulo

```
from pylab import *
from scipy.integrate import odeint
import matplotlib.pyplot as plt

pasos = 1000                        #numero de pasos
theta_inicial = pi/6
#posicion inicial
v_inicial = 0
#velocidad angular inicial
#omega = 1
#frecuencia natural

beta = 0.5
#factor de amortiguamiento
amp = 1.2
#amplitud fuerza externa
#omega_d = 0.724
#velocidad angular fuerza externa
#omega_d= 0.715
#omega_d= 0.713
omega_d= 0.667
paso_tiempo = 2.0*pi/(omega_d*pasos)

N = 300
salto = 1

#Condiciones iniciales
condiciones_iniciales = array([theta_inicial ,
v_inicial])
tiempo = arange(0.0, N*(2.0*pi)/omega_d,
paso_tiempo)

def DE_pendulo(y, tiempo):
    g0 = y[1]
    g1 = -sin(y[0]) - beta*y[1] + amp*sin(omega_d*
    tiempo)
    return array([g0,g1])

#Calculando la solucion
sol = odeint(DE_pendulo, condiciones_iniciales, tiempo)
sol = sol[salto*pasos:]

#Soluciones de -pi a pi
for i, position in enumerate(sol[:,0]):
    while position > pi:
        position = position - (2.0*pi)
    while position < -pi:
        position = position + (2.0*pi)
    sol[i,0] = position

#Una "foto" del mapeo de poincare
offs = 50
max_index = (N-salto)*pasos - offs
P_thetas = []
P_omegas = []

for j in range(offs, max_index, pasos):
    P_thetas.append(sol[j,0])
    P_omegas.append(sol[j,1])

#Graficar resultados

plt.plot(sol[:,0],sol[:,1],'c')
plt.plot(P_thetas,P_omegas, 'b')
plt.xlabel(' ngulo ')
plt.ylabel('Velocidad Angular')

plt.xlim(-pi, pi)
plt.show()
```

**Listing 2.** Código para Mapeo Ecológico

```
from pylab import show, scatter, xlim, ylim
from random import randint

iter = 1000          # Numero de iteraciones
seed = 0.5           # Valores de x(0,1)
spacing = .0001      # Espacio entre los puntos
res = 8


rlist = []
xlist = []

def logisticmap(x, r):

    return x * exp(r * (1 - x))


def iterate(n, x, r):

    for i in range(1,n):
        x = logisticmap(x, r)

    return x


for r in [i * spacing for i in
range(int(1/spacing),int(4/spacing))]:
    rlist.append(r)
    xlist.append(iterate
    (randint(iter-res/2,iter+res/2), seed, r))

scatter(rlist, xlist, s = .01)
title('Mapeo Log stico')
xlim(0.9, 4.1)
xlabel('$ \mu $')
ylabel('x')
ylim(-0.1,2)
show()
```

**Listing 3.** Código para Mapeo Logístico

```
from pylab import show, scatter, xlim, ylim
from random import randint

iter = 1000          # Numero de iteraciones
seed = 0.5           # Valores de x(0,1)
spacing = .0001      # Espacio entre los puntos
res = 8


rlist = []
xlist = []

def logisticmap(x, r):

    return x * r * (1 - x)


def iterate(n, x, r):

    for i in range(1,n):
        x = logisticmap(x, r)

    return x


for r in [i * spacing for i in }
range(int(1/spacing),int(4/spacing))]:
```

```
    rlist.append(r)
    xlist.append(iterate(randint(iter-res/2,iter+res/2),
    seed, r))

scatter(rlist, xlist, s = .01)
title('Mapeo Log stico')
xlim(0.9, 4.1)
xlabel('$ \mu $')
ylabel('x')
ylim(-0.1,1.1)
show()
```

**Listing 4.** Código para Atractor de Rössler

```
from matplotlib import pyplot as plt
import numpy as np
from scipy.integrate import odeint
from mpl_toolkits.mplot3d import Axes3D

#parametros
a = 0.38
b = 0.35
c = 4.5

# R ssler
def rossler(X,t):
    x, y, z = X
    dx = -y - z
    dy = x + a*y
    dz = b*x - c*z + x*z
    return [dx, dy, dz]

X0 = [2, 2, 2]
time = np.arange(0, 300, 0.01)
result = odeint(rossler, X0, time)
x, y, z = result.T


fig = plt.figure(figsize=(13,9))
ax = fig.gca(projection='3d')
plt.title('Atractor de R ssler', size = 15)
ax.set_ylim(-6, 6)
ax.set_xlim(-6, 6)
ax.set_zlim(0, 12)
ax.view_init(20, 160)
ax.set_axis_off()
ax.plot(x,y,z,'magenta')
plt.show()
```

**Listing 5.** Código para atractor de Lorenz

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from mpl_toolkits.mplot3d import Axes3D
from scipy.integrate import odeint

# Parametros
s = 10
r = 28
b = 2.667

# Lorenz
def lorenz(X, t):
    x, y, z = X
    dx = s*(y - x)
    dy = r*x - y - x*z
    dz = x*y - b*z
    return [dx, dy, dz]


X0 = [0, 1, 1.05]
time = np.arange(0, 200, 0.005)
orbit = odeint(lorenz, X0, time)
x, y, z = orbit.T

fig = plt.figure()
ax = fig.gca(projection='3d')
ax.plot(x, y, z, 'purple', linewidth=0.1)
ax.set_xlim(-18, 18)
ax.set_ylim(-18, 18)
ax.set_zlim(12, 38)
ax.set_axis_off()
plt.title('Atractor de Lorenz', size = 15)
plt.show()
```

**Listing 6.** Código para atractor de Ueda

```
from matplotlib import pyplot as plt
import numpy as np
from scipy.integrate import odeint

# Parametros
B = 7.5
k = 0.05

# Duffing
def system(X,t):
    x, y = X
    dx = y
    dy = -k*y - x*x*x + B*np.cos(t)
    return [dx, dy]

# numerical integration
X0 = [1, 0]
T = 2*np.pi
N =5000
h = T/N
time = np.arange(0.1, N*T, h)
result = odeint(system, X0, time)
x, y = result.T
X = []
Y = []
for i in range(3,N):
    X = X + [x[N*i]]
    Y = Y + [y[N*i]]

fig, ax = plt.subplots()
plt.title('Ueda attractor', size = 15)
ax.scatter(X, Y, s=3)
plt.show()
```

**Listing 7.** Código Exponentes de Lyapunov

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
%matplotlib inline

def logistic(r,x):
    return r*x*(1-x)

n=10000
r= np.linspace(2.5, 4.0, n)

iteraciones = 1000
last = 100

x = 1e-5 * np.ones(n)
lyapunov = np.zeros(n)

fig, (ax1, ax2) = plt.subplots(2, 1, figsize=(8, 9),
sharex=True)
for i in range(iteraciones):
    x = logistic(r, x)
```

```
    lyapunov += np.log(abs(r - 2 * r * x))

    if i >= (iteraciones - last):
        ax1.plot(r, x, ',k', alpha=.25)

ax1.set_xlim(2.5, 4)
ax1.set_title("Diagrama de Bifuraci n")
ax2.axhline(0, color='k', lw=.5, alpha=.5)
ax2.plot(r[lyapunov < 0],lyapunov[lyapunov < 0] /
iteraciones, '.k',
alpha=.5, ms=.5)
ax2.plot(r[lyapunov >= 0],lyapunov[lyapunov >= 0] /
iteraciones, '.r', alpha=.5, ms=.5)
ax2.set_xlim(2.5, 4)
ax2.set_ylim(-2, 1)
ax2.set_title("Exponentes de Lyapunov")
plt.tight_layout()
```

**Listing 8.** Código para proceso poblacional de Márkov

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
%matplotlib inline

N = 100
#maximo tamano poblacional
a = 0.5/N                #indice de natalidad
b = 0.5/N                #indice de mortalidad

nstep = 1000             #pasos
x = np.zeros(nstep)
x[0] = 25

for t in range(nstep - 1):
    if 0 < x[t] < N-1:
        nac = np.random.rand() <= a*x[t]
        muerte = np.random.rand() <= b*x[t]
        x[t+1] = x[t] +1*nac - 1*muerte

    else:
        x[t+1] = x[t]

plt.plot(x)
plt.grid()
plt.xlabel("Tiempo", size = 15)
plt.ylabel("Poblacion", size = 15)
```

**Listing 9.** Código para movimiento browniano

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
%matplotlib inline

n=5000

x = np.cumsum(np.random.randn(n))
y = np.cumsum(np.random.randn(n))

k = 7          #puntos intermedios
x2 = np.interp(np.arange(n*k), np.arange(n)*k,x)
y2 = np.interp(np.arange(n*k), np.arange(n)*k,y)

plt.title("Movimiento Browniano", size = 15)
plt.scatter(x2,y2, c=range(n*k), linewidths = 0,
marker = 'o', s=3, cmap=plt.cm.jet)
plt.axis('equal')
plt.xticks([])
plt.yticks([])
```

## REFERENCES


[1] LOUIS N. HAND, JANET D. FINCH *Analytical mechanics*, Cambridge University Press, 1998.

[2] EDWARD OTT *Chaos in dynamical systems*, Cambridge University Press, 1993.

[3] FLORIAN SCHECK *Mechanics: From Newton's Laws to Deterministic Chaos*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, Edition 5.

[4] HEINZ GEORG SCHUSTER, WOLFRAM JUST *Deterministic Chaos: An Introduction*, John Wiley Sons, Edition 4, 2005.

[5] *http://www.physics.udel.edu/ bnikolic/teaching/-phys660/lect ures/deterministic$_c$haos.pdf*.

[6] HEINZ-OTTO PEITGEN, HARTMUT JÜRGENS, DIETMAR SAUPE *Chaos and fractals: new frontiers of science*, Springer, Edition 2, 2004.

[7] CYRILLE ROSSANT *Ipython Interactive Computing and Visualization Cookbook*, Edition 2, 2018.

[8] FRANCISCO BALIBREA *Chaos, Nonlinearity, Complexity: The Dynamical Paradigm of Nature*, A. Sengupta Professor, 2006.