(3) (a)

PREGUNTA 3

a) Usando coordenadas polares,

La energía cinética es:

$$E_c = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2)$$

Para la energía potencial

componente gravitacional : $mgh$

Con un angulo $\theta$, $h = -r\cos\theta$

componente elastico $\frac{1}{2}k(r-l)^2$.

$$E_p = \frac{1}{2}k(r-l)^2 - mgr\cos\theta$$

El Lagrangiano del sistema es:

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r\dot{\theta}^2) - \frac{1}{2}k(r-l)^2 + mgr\cos$$

Para la ecuación en r

$$m\ddot{r} - mr\dot{\theta}^2 + k(r-l) - mg\cos\theta = 0$$

La ecuación en $\theta$ es

$$\frac{d}{dt}(mr^2\dot{\theta}) + mgr\,sen\theta = 2mr\dot{r}\dot{\theta} + mr^2\ddot{\theta} + mgr\,sen\theta = 0$$

(b) Para Determinar los puntos de equilibrio

$$\frac{\partial E_p}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{2}k(r-l)^2 - mgr\cos\theta\right)$$

$$\frac{\partial E_p}{\partial r} = \underline{k(r-l) - mg\cos\theta = 0}$$

$$\frac{\partial E_p}{\partial \theta} = \frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{1}{2}k(r-l)^2 - mgr\cos\theta\right)$$

$$\frac{\partial E_p}{\partial \theta} = \underline{mgr\,sen\theta}$$

Hay dos puntos de equilibrio uno es con el resorte totalmente vertical con $\theta = 0$ y $r = l + mg/k$. Y el otro punto es con el resorte vertical, pero $\theta = \pi$ y $r = l - mg/k$

Claramente el primer punto de equilibrio con $\theta = 0$ es mucho mas estable, con la masa del pendulo colgando hacia abajo.

El segundo punto de equilibrio es muy poco estable ya que con el mínimo movimiento la estabilidad se rompe.

$\theta = \pi$

(C) Para hacer la aproximación agregamos nuevas variables con valores pequeños.

Así $\theta = \theta + \phi$ y $r = r_1 + R$

con $\phi$ y $R$ muy pequeños

Así sustituyendo

$$m\ddot{R} - m(r_1 + R)\dot{\phi}^2 + k(r_1 + R - l) - mg\cos(\theta + \phi) = 0$$

y $$2m(r_1 + R)\dot{R}\dot{\theta} + m(r_1 + R)^2\ddot{\phi} + mg(r_1 + R)\operatorname{sen}(\theta + \phi) = 0$$

Haciendo la expansión y considerando que $\operatorname{sen}\theta = 0$ para ambos puntos de equilibrio.

Para $\phi$ pequeños podemos tomar $\operatorname{sen}\phi \approx \phi$ y $\cos\phi \approx 1$

Los términos con cantidades que no son pequeños

$k(r_1 - l) - mg\cos(\theta) = 0$ y $0 = 0$

Los terminos de primer orden ( que contienen una sola cantidad pequeña )

$m\ddot{R} + kR = 0$ y $mr_1^2\ddot{\phi} + mgr_1\cos(\theta)\phi = 0$

Para los términos lineales, la solución es la de un oscilador armónico, en R

$$R = A\,\text{sen}\,wt + B\cos wt$$

con w real y $w = \sqrt{K/m}$ y $r = r_1 + A\,\text{sen}\,wt + B\cos wt$

La solucion en $\phi$

$$\ddot{\phi} \pm \gamma\phi = 0$$

con $\gamma = \sqrt{g/r_1}$, para $\theta = 0$ la solución es:

$$\phi = C\,\text{sen}\,\gamma t + D\cos\gamma t$$

Con $\theta = \pi$

$$\phi = Ee^{\gamma t} + Fe^{-\gamma t}$$ (Por la identidad de Euler)

Para ambos casos $\Theta = \theta + \phi$

Scanned by CamScanner

PREGUNTA 4

(a) Para calcular las ecuaciones de Euler-Lagrange

esta será $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q}$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} = e^{bt}\left(-k^2 q^2\right) \qquad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} = e^{bt}\left(m\dot{q}\right)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}}\right) = e^{bt}\left(m\ddot{q}\right)$$

La ecuación es:

$$e^{bt}\left(m\ddot{q} + mbq + k^2 q\right)$$

bt no es cero para t infinito, lo que lleva a la ecuación de un oscilador armónico lineal amortiguado

(b) Substituyendo $Q$ en el lagrangiano

$$L = \frac{1}{2} m \left( \dot{Q} - \frac{\beta}{2} Q \right)^2 - \frac{1}{2} k^2 Q^2$$

El término $Q\dot{Q}$ puede ser omitido ya que la derivada total depende del tiempo

Así $$L = \frac{1}{2} m \dot{Q}^2 - \frac{1}{2} \left( k - \frac{mb^2}{4} \right) Q^2$$

Lo que es la ecuación de un oscillador armónico lineal.

Para $Q, \dot{Q}$ el lagrangiano es independiente del tiempo lo que implica que la simetría es continua, lo que lleva a pensar que si el Hamiltoniano es:

$$\frac{1}{2} m \dot{Q}^2 + \frac{1}{2} \left( k - mb^4/4 \right) Q^2$$

Entonces este se conservará.

PREGUNTA 1

Escribiendo en forma parametrizada

$$\eta\, y(x)$$

$$y(\alpha,x) = y(0,x) + \alpha\,\eta(x)$$

Considerando $\eta(x_1)=\eta(x_2)=0$, $y(\alpha,x_1) = y(0,x_1)$

$$y(\alpha,x_2) = y(0,x_2)$$

Así $y'(\alpha,x) = y'(0,x) + \alpha \frac{d\eta(x)}{dx}$

$$y''(\alpha,x) = y''(0,x) + \alpha \frac{d^2}{dx^2}\eta(x)$$

Con $\left.\frac{\partial J(\alpha)}{\partial \alpha}\right|_{\alpha=0} = 0$

Entonces

$$\frac{d J(\alpha)}{d\alpha} = \frac{d}{d\alpha}\int_{x_1}^{x_2} f(y, y', y'', x)\,dx$$

$$= \int_{x_1}^{x_2} \frac{d}{d\alpha} f(y, y', y'', x)\,dx$$

Scanned by CamScanner

Tomando en cuenta la regla de la cadena

$$\frac{\partial J(\alpha)}{\partial \alpha} = \int_{x_1}^{x_2} \left( \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \alpha} + \frac{\partial f}{\partial y'} \frac{\partial y'}{\partial \alpha} + \frac{\partial f}{\partial y''} \frac{\partial y''}{\partial \alpha} \right) dx$$

Con $\frac{\partial y}{\partial \alpha} = \eta(x) = \frac{\partial}{\partial \alpha} \left( y(0,x) + \alpha \eta(x) \right)$

$$\frac{\partial y'}{\partial \alpha} = \frac{\partial}{\partial \alpha} \left( y'(0,x) + \alpha \frac{\partial \eta}{\partial x} \right) = \frac{\partial \eta(x)}{\partial x}$$

$$\frac{\partial y''}{\partial \alpha} = \frac{\partial}{\partial \alpha} \left( y'(0,x) + \alpha \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} \right) = \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2}$$

Así $\frac{\partial J(\alpha)}{\partial \alpha} = \int_{x_1}^{x_2} \left( \frac{\partial f}{\partial y} \eta(x) + \frac{\partial f}{\partial y'} \frac{\partial \eta}{\partial x}(x) + \frac{\partial f}{\partial y''} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \eta(x) \right) dx$

Donde $\int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial f}{\partial y'} \frac{\partial \eta}{\partial x} dx = \frac{\partial f}{\partial y'} \eta(x) \Big|_{x_1}^{x_2} - \int_{x_1}^{x_2} \eta(x) \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial f}{\partial y'} \right) dx$

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial f}{\partial y'} \frac{\partial y}{\partial x} dx = - \int_{x_1}^{x_2} \eta(x) \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial f}{\partial y'} \right) dx$$

Scanned by CamScanner

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial f}{\partial y''} \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} dx$$

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial f}{\partial y''} \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} dx = \frac{\partial f}{\partial y''} \frac{\partial \eta}{\partial x}\Big|_{x_1}^{x_2} - \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y''}\right) dx$$

Lo que haciendo otra sustitución

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial f}{\partial y''} \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} dx = \int_{x_1}^{x_2} \eta(x) \frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{\partial f}{\partial y''}\right) \partial x$$

Con lo que se tiene

$$\frac{\partial \Pi(\alpha)}{\partial \alpha} = \int_{x}^{x_2} \left[ \frac{\partial f}{\partial y} \eta(x) - \eta(x) \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right) + \eta(x) \frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{\partial f}{\partial y''}\right) dx \right.$$