

CAOS

Universidad de Guanajuato - División de Ciencias e Ingenierías

Proyecto Final

Mecánica Analítica

Rodrigo Aguilar Meneses

12 de noviembre de 2018

Resumen

En el presente artículo se discute el caos en un sentido físico y matemático, aplicando los conceptos y técnicas revisados en el curso de Mecánica Analítica. Se presentan distintos temas a los que se aplica el estudio del caos, así como códigos programados en Python para la ejemplificación de los mismos, que incluyen, entre otros, soluciones numéricas de ecuaciones diferenciales no lineales y gráficas para el análisis de distintos sistemas físicos complejos. El propósito de estas es mostrar las construcciones a las cuales se puede llegar partiendo de constructos matemáticos relativamente simples, reflejando así en lo que consiste la teoría del caos.

1. Introducción

Hemos pues de considerar el presente estado del universo como el efecto de su estado previo y como la causa de lo que seguirá. Una inteligencia que, en un instante dado, pudiese comprender todas las fuerzas por las cuales la naturaleza es animada y la respectiva situación de los seres que la componen, y más aún si fuese lo suficientemente vasta para someter estos datos al análisis, abarcaría en la misma fórmula los movimientos de los grandes cuerpos del universo y aquellos de los más ligeros átomos. Para tal inteligencia nada sería incierto, y el futuro, como el pasado, estarían abiertos a sus ojos.

-Pierre-Simon Laplace

Coloquialmente, utilizamos el término *caos* para referirnos a un estado de desorden. Sin embargo, el caos matemático o físico tiene una definición distinta, que no refleja un estado desordenado, sino una extrema sensibilidad a las condiciones iniciales de un sistema. Citando a la RAE ¹, es un *comportamiento aparentemente errático e impredecible de algunos sistemas dinámicos deterministas con gran sensibilidad a las condiciones iniciales*.

Algunos ejemplos de sistemas caóticos pueden ser el clima, puesto que cualquier variación en sea presión o temperatura de algún punto puede ocasionar un huracán, o el crecimiento de población, donde si se incluyen efectos como epidemias, fertilidad, condiciones de vida y otros, se vuelve muy susceptible al estado inicial que se considere. Otro ejemplo pueden ser sistemas con aceleración variable (conocido como *jerk* o *tirón*) que conducen a ecuaciones diferenciales de tercer grado. Este puede ser un punto de partida para soluciones que muestran un comportamiento caótico, y se ha demostrado que las ecuaciones diferenciales de este tipo son las más simples que pueden llevar al caos. [1]

A continuación se discutirán los siguientes temas relacionados intrínsecamente con el caos:

1. Mapeo Logístico
2. Exponentes de Lyapunov
3. Atractor de Lorenz
4. Secciones de Poincaré
5. Fractales
6. Ecuaciones de Lotka-Volterra
7. Sistema Caótico Mecánico: Péndulo con Pivote Oscilador

¹*Caos*. Real Academia Española. (2018). Diccionario de la lengua española (22.a ed.). Consultado en <http://dle.rae.es/?id=7HD3hMJ>.

2. Mapeo Logístico

En 1976, Robert May publicó un artículo en el cual proponía una ecuación para describir el crecimiento de una población año con año. [3] La ecuación, conocida como **ecuación logística**, es la siguiente:

$$x_{t+1} = \lambda x_t(1 - x_t) \quad (1)$$

donde x_{t+1} es la población en un año $t + 1$, que depende de la población del año previo, x_t . La constante λ es un parámetro de la fertilidad de la especie, y no puede ser mayor a 4. Otra restricción es mantener el valor inicial x_t entre 0 y 1, pues para otros valores, la ecuación diverge a $-\infty$.

Para $0 < \lambda < 1$, la población decaerá exponencialmente con el tiempo, pues la fertilidad no es suficiente como para que la población incremente. Esto se muestra en la gráfica de la figura 1:²

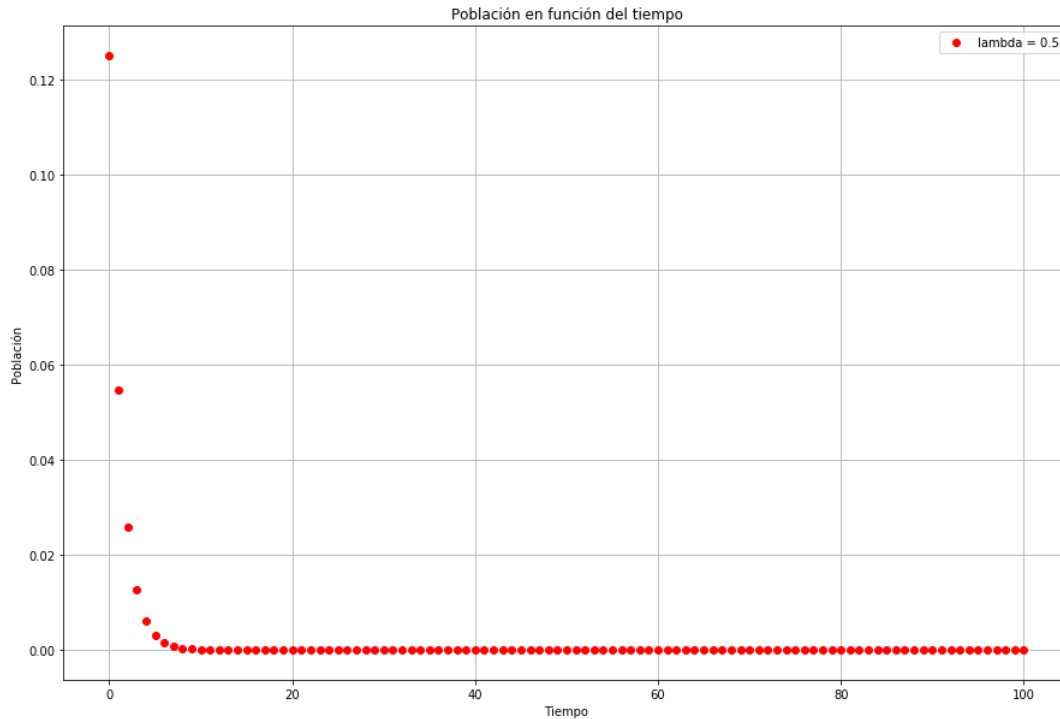


Figura 1: Población decauyente con los valores iniciales $x_t = 0.5$ y $\lambda = 0.5$.

Aquí podemos considerar que la población 0 es un atractor, puesto que en un tiempo grande la población tiende a este número.

Para un valor $\lambda = 1$, encontramos que la población disminuye de la misma forma exponencial, pero el atractor deja de ser 0; en este caso es un valor cercano a 0.1. Si se toman valores en $1 < \lambda < 2$, se tiene una gráfica muy similar, donde el valor del atractor se acerca más y más a la población inicial. Es, sin embargo, cuando se tiene $\lambda = 2$ y la misma población inicial de 0.5 que la población en cualquier t es la misma: el valor inicial es el atractor.

²Las gráficas de esta sección fueron generadas con el programa `logistic.py`, anexo en el Notebook *Chaos.ipynb*.

Manteniendo la misma población inicial de 0.5 y aumentando la fertilidad λ a un valor mayor a 2, se observa ya algo más interesante: la población oscila alrededor del valor que será el atractor y finalmente converge a éste. En la figura 2 se muestra la ecuación para $\lambda = 2.6$:

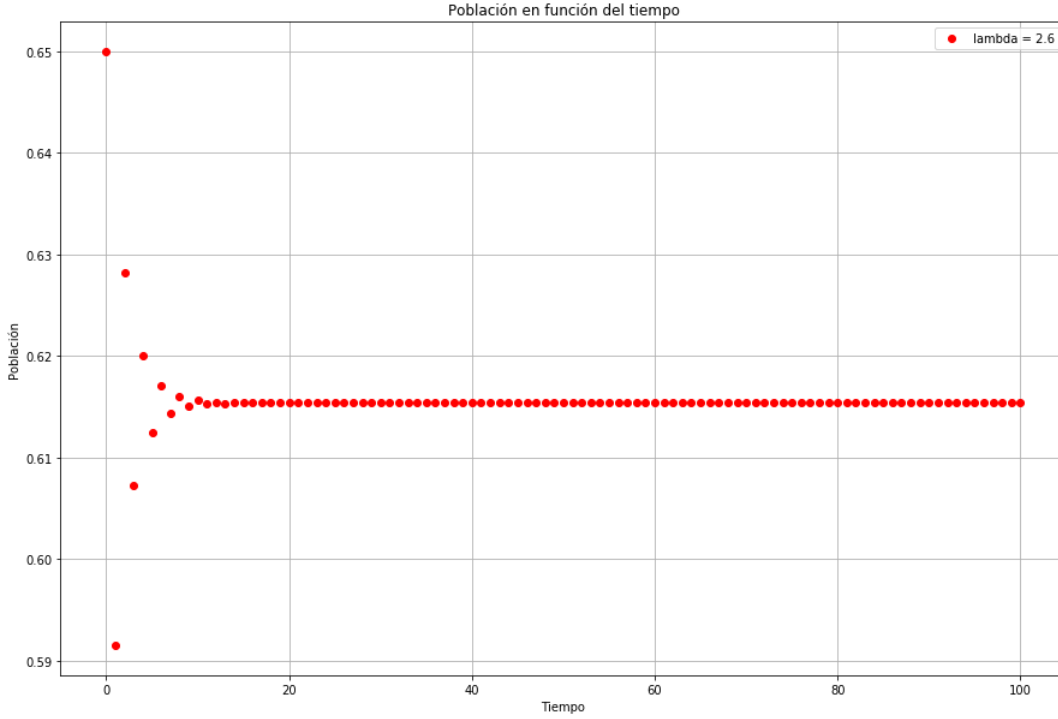


Figura 2: Población oscilante con los valores iniciales $x_t = 0.5$ y $\lambda = 2.6$.

No obstante, tenemos algo aún más interesante cuando $\lambda > 3$: ya no sólo se trata de un atractor sino de varios, por ejemplo, para $\lambda = 3.4$, hay dos atractores, como se observa en la figura 3. Para valores mayores, llegan a existir más de 2 atractores, lo que se conoce comúnmente como atractores extraños, puesto que el sistema nunca se estabiliza para un cierto valor.

En la figura 4 se pueden observar los atractores extraños mencionados, puesto que no parece que los puntos sigan algún patrón definido. De la misma manera, en la gráfica se pueden observar las propiedades caóticas de la ecuación 1, puesto que los valores utilizados para λ difieren solamente en 0.05: condiciones iniciales ligeramente distintas producen patrones muy diferentes.

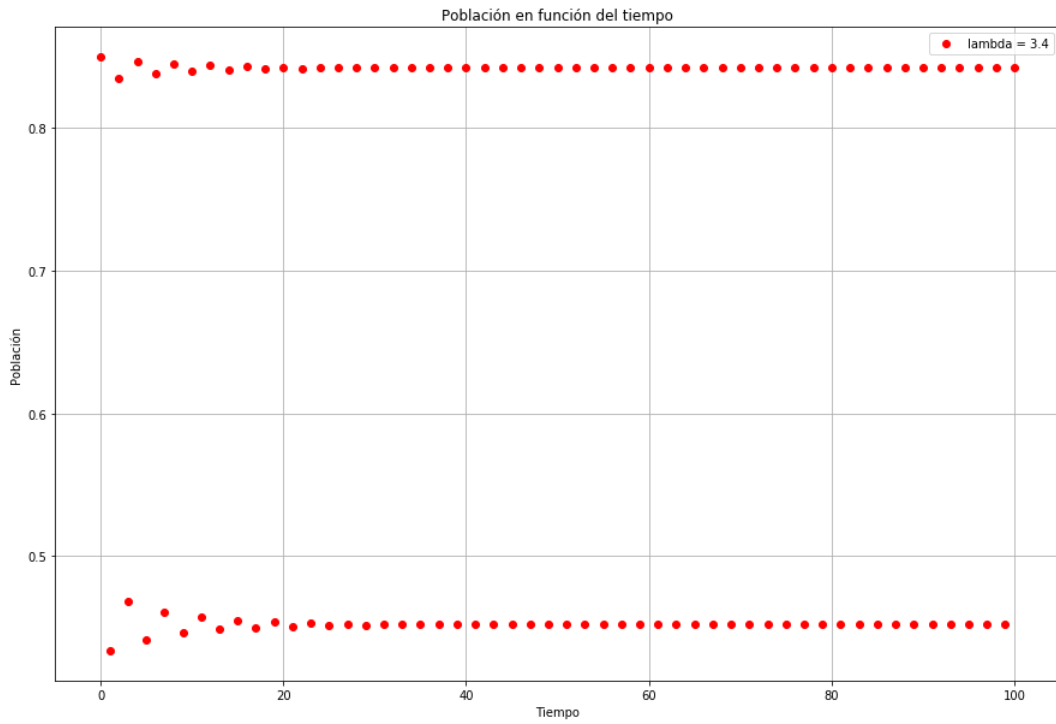


Figura 3: Población con dos atractores para $\lambda = 3.4$.

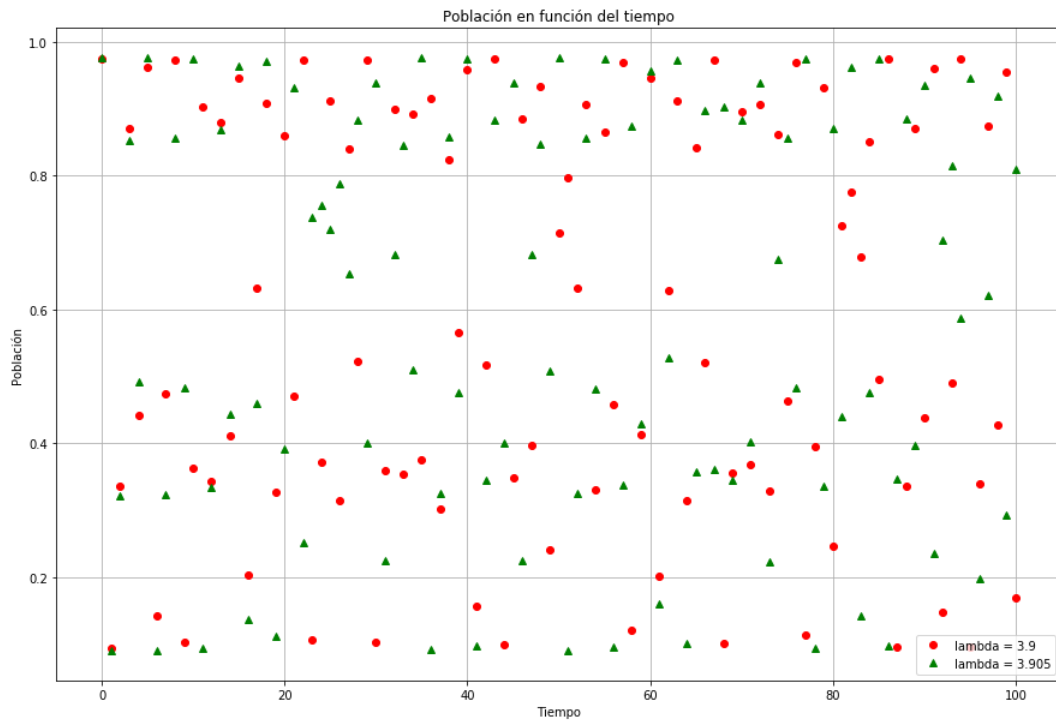


Figura 4: Atractores extraños y propiedades caóticas del sistema para λ s muy cercanos.

El diagrama de bifurcación de la ecuación logística es una gráfica (un mapeo) de los valores

de la constante de fertilidad λ contra los valores de población atractores. En este diagrama se condensan las gráficas anteriores, pues se puede ver la cantidad de atractores para un cierto λ , todo concordando con lo que ya se observó. El diagrama de bifurcación obtenido se muestra en la figura 5:³

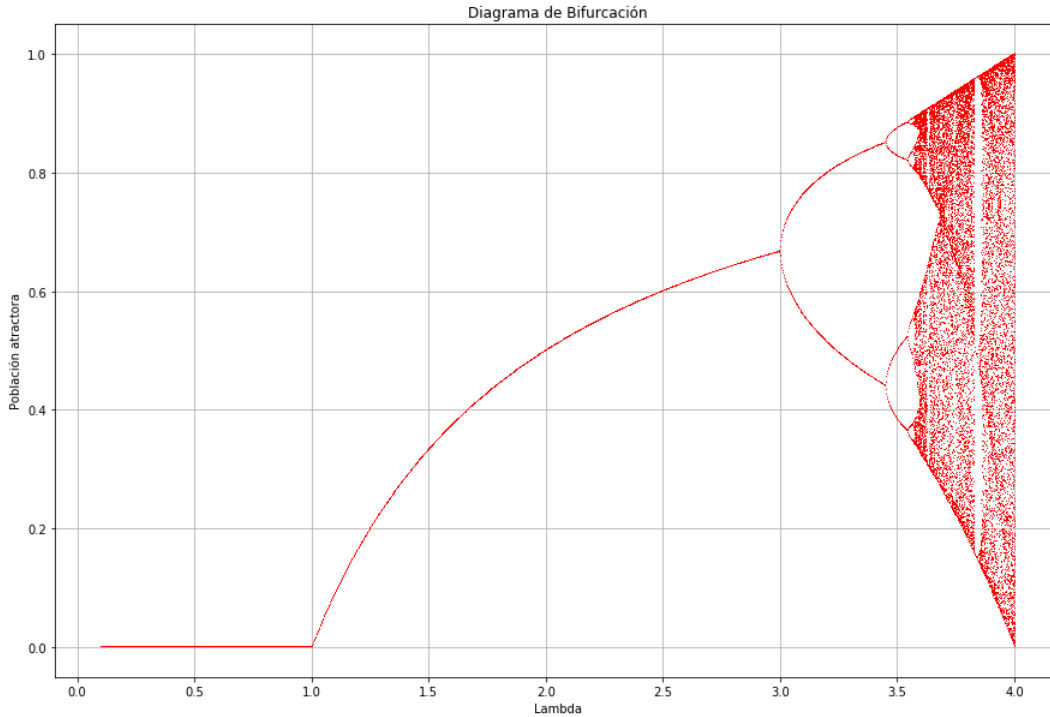


Figura 5: Diagrama de bifurcación con poblaciones iniciales de 0.5.

El diagrama claramente concuerda con las gráficas mostradas anteriormente. Para $\lambda < 1$, se tiene que el atractor es 0; para $1 < \lambda < 3$, el atractor va aumentando su valor y es en $\lambda = 3$ cuando se bifurca, es decir, cuando se tienen dos atractores. Alrededor de $\lambda = 3.5$ el diagrama se bifurca nuevamente, lo que indica la presencia de 4 atractores, y así sucesivamente. El patrón formado por la gráfica tiene propiedades de fractal: si se sigue haciendo un acercamiento a la gráfica se observará el mismo patrón no importando en qué escala se encuentre.

Para tener una idea más concreta de lo que sucede, se realiza una ampliación de la imagen. Esto se puede observar en la figura 6, donde se tienen los valores en el intervalo $3.5 < \lambda < 4$. Se puede ver cómo las bifurcaciones son continuas y cómo en cierto punto se tienen espacios en blanco, que van creciendo en magnitud. Se puede incluso medir la distancia promedio entre los puntos de bifurcación, y se encontrará que éste es un valor constante, conocido como la **constante de Feigenbaum**, con un valor aproximado de $\delta = 4.669$ [2].

³El diagrama de bifurcación fue generado con `bifurcation.py`, segundo programa anexado en el Notebook *Chaos.ipynb*.

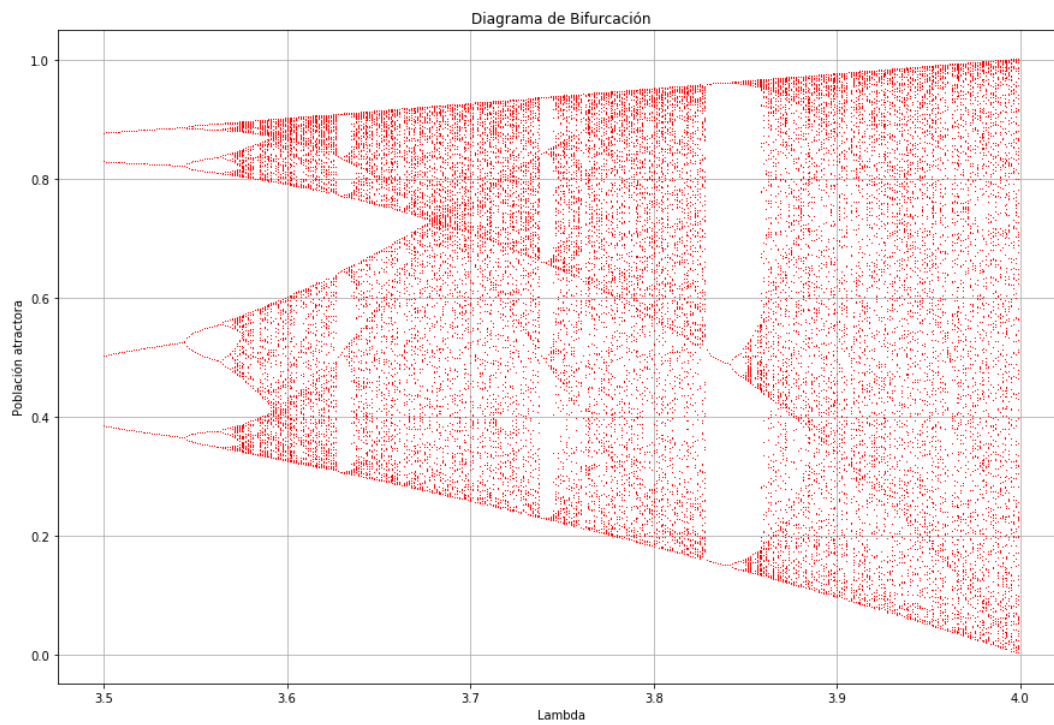


Figura 6: Ampliación del diagrama de bifurcación mostrado en la figura 5.

3. Exponente de Lyapunov

No es de extrañarse que sea de suma importancia saber si un sistema dado es caótico o no: de esto depende si es que es posible determinar soluciones analíticas. Es entonces necesaria una herramienta con la que se pueda determinar esto, y en esta sección se hablará de ella: el **exponente de Lyapunov**.

Medir el exponente de Lyapunov es una manera de cuantificar qué tan caótico es un sistema es obtener una medición de la distancia entre trayectorias y observar qué tan rápido divergen: es medir la razón de divergencia de dos trayectorias cercanas. [6]

Otra importancia de esto es que la magnitud del exponente indica qué tan precisas deben ser las mediciones de las condiciones iniciales del sistema para poder predecirlo en un cierto tiempo. En general, entre más grande sea el exponente, más precisión requerirá. Si el exponente es negativo, entonces se sobreentiende que no existe una divergencia en las trayectorias y por ende el sistema no es caótico.

En esta sección nuevamente se utilizará el mapeo logístico como ejemplificación del tema, y se calcularán los exponentes de Lyapunov para éste.⁴

El exponente de Lyapunov está dado por:

$$\lambda_L = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n-1} \ln |f'(x_i)| \quad (2)$$

Escribiendo la ecuación logística (1) como

$$x_{t+1} = \lambda x_t - \lambda x_t^2 \quad (3)$$

tenemos que la derivada a evaluar en el exponente es

$$f'(x_t) = \lambda - 2\lambda x_t \quad (4)$$

Como se mencionó, se hizo uso del diagrama de bifurcación para medir el exponente de Lyapunov en función de λ en la ecuación 1. La gráfica obtenida se muestra en las figuras 7 y 8. Regresemos a lo establecido previamente sobre que el exponente de Lyapunov es una medida de qué tan caótico es el sistema: es interesante notar que inicialmente el exponente es negativo, y su valor va aumentando hasta alcanzar $\lambda_L = 0$ en $\lambda = 1$. En este rango el sistema claramente no es caótico; el tener un exponente de Lyapunov con valor 0 se puede interpretar como que el sistema es conservativo. No obstante, al seguir incrementando el valor de λ , el exponente de Lyapunov vuelve a decrecer, alcanzando su valor más negativo en $\lambda = 2$. A partir de aquí el exponente vuelve a crecer y nuevamente alcanza otro valor cero en $\lambda = 3$. Es aquí cuando sus propiedades comienzan a volverse interesantes: se vuelve a visualizar el patrón de decremento hasta un valor muy negativo para después crecer y volver a llegar a 0, sin cruzar el eje x, pero entonces, finalmente se atraviesa éste alrededor de $\lambda = 3.6$. Coincidentemente, es en este punto del diagrama de bifurcación que se comienzan a observar bifurcaciones muy cercanas para dar lugar al patrón mostrado en la figura 6. Claramente aquí el sistema es caótico y esto es representado por el exponente de Lyapunov positivo.

⁴La gráfica de los exponentes de Lyapunov fue generada con una modificación del programa `bifurcation.py`, anexo en el Notebook *Chaos.ipynb*.

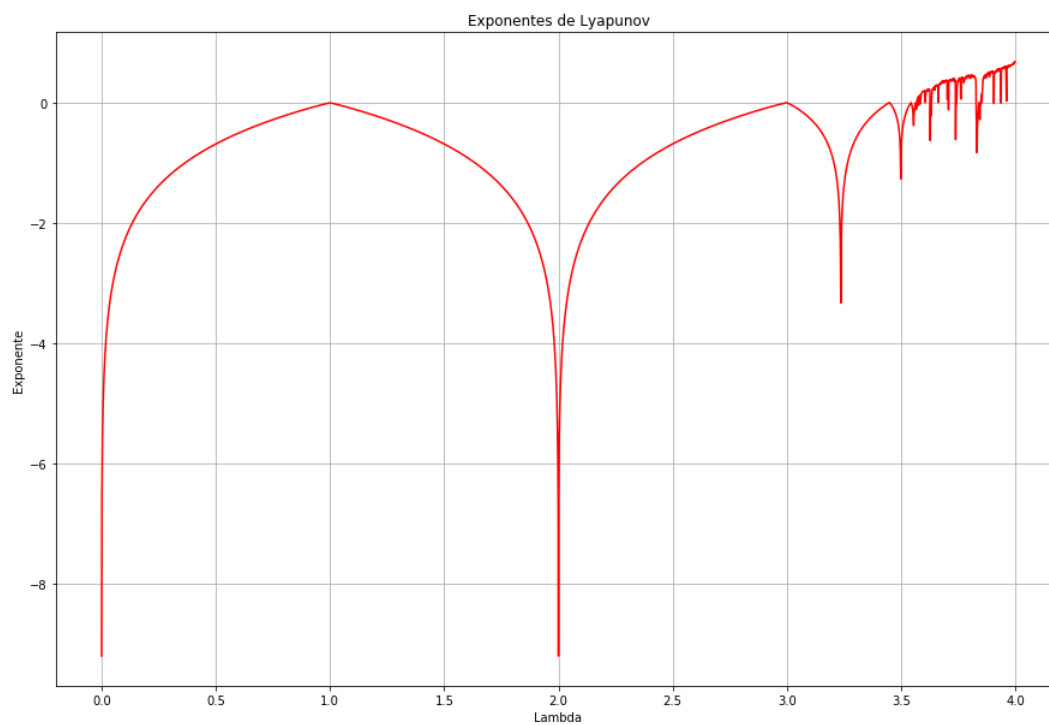


Figura 7: Exponentes de Lyapunov en función de λ para la ecuación logística.

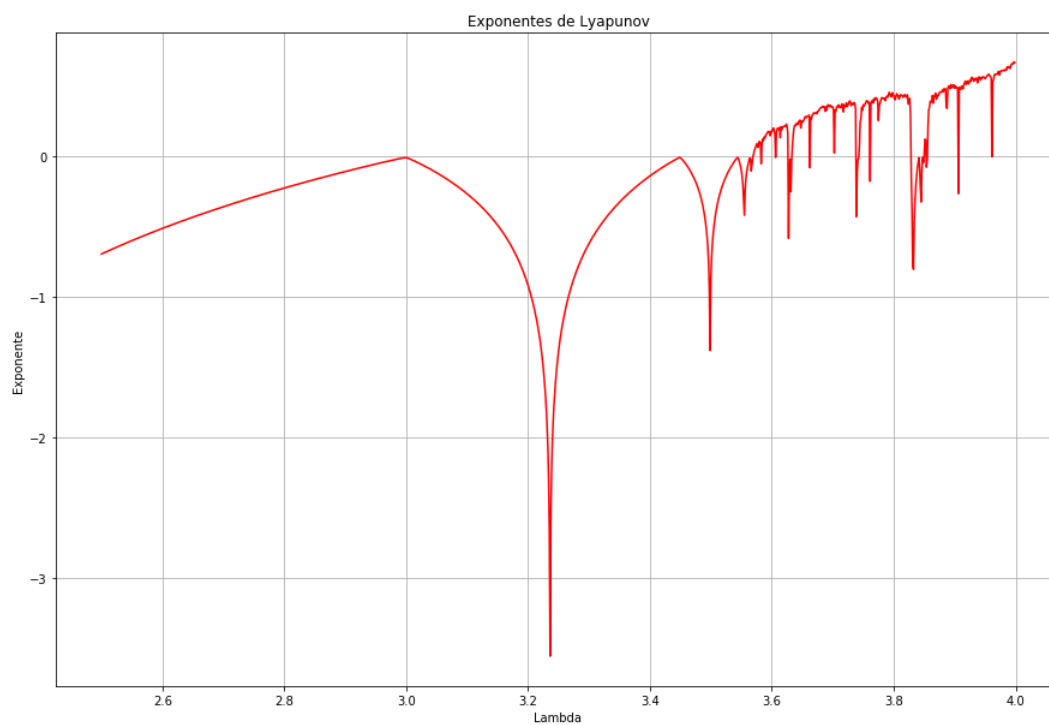


Figura 8: Ampliación de los exponentes de Lyapunov de la figura 7.

4. Atractores Extraños

A veces la ciencia es más arte que ciencia.

-Rick Sánchez

4.1. Atractor de Lorenz

En 1963, el meteorólogo Edward Lorenz publicó un artículo [8] en el que se discuten sistemas de ecuaciones diferenciales deterministas no lineales con el propósito de estudiar la hidrodinámica y meteorología. En este se incluyen temas como el estudio de los flujos turbulentos y flujos no periódicos, pero su estudio de la convección es el enfoque de esta sección.

La convección es la transferencia de calor por medio del flujo de un fluido que puede ser líquido o gaseoso. En 1916, Lord Rayleigh estudió el flujo de un fluido cuyas superficies se calentaban a temperaturas diferentes, teniendo una diferencia de temperaturas ΔT en sus extremos. Dadas ciertas condiciones iniciales, se desarrolla convección en el fluido. Rayleigh escribió un sistema de ecuaciones diferenciales parciales que después fueron analizadas por Saltzman para obtener un sistema simplificado de **ecuaciones de convección**, que si bien no es el sistema de ecuaciones completo, es una buena aproximación:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= \sigma(y - x) \\ \frac{dy}{dt} &= x(r - z) - y \\ \frac{dz}{dt} &= xy - bz\end{aligned}\tag{5}$$

donde x es la intensidad de la convección y es la diferencia de temperatura en los extremos del fluido, y z es proporcional al gradiente de temperatura. r , b , y σ son constantes, y las dos últimas se conocen como número de Rayleigh y número de Prandtl, respectivamente. [9] El propósito del programa escrito para esta sección es resolver las ecuaciones diferenciales para distintos valores de r , b , y σ .⁵

Este sistema tiene ciertas soluciones caóticas para ciertos valores específicos de sus constantes. En su artículo [8], Lorenz utiliza los valores $\sigma = 10$, $r = 28$, y $b = \frac{8}{3}$ para generar un patrón en específico. Son estos valores los más comunes en la literatura y la gráfica de los atractores en este caso se muestra en la figura 9.

No obstante, hay diferentes valores que se pueden probar para obtener las propiedades caóticas del sistema. En la gráfica de la figura 10, se utilizaron los valores $\sigma = 28$, $r = 46.92$, y $b = 4$.

Es interesante notar que las condiciones iniciales sí producen patrones diferentes, sin embargo, los atractores permanecen en los mismos lugares para los mismos valores ya mencionados de las constantes.

Otro caso interesante surge al utilizar los valores $\sigma = 10$, $r = 15$, y $b = \frac{8}{3}$. La gráfica generada con estos valores se muestra en la figura 11, y se puede observar que el patrón general se sigue preservando, pero sólo existe un atractor para este caso, a diferencia de los otros.

⁵Las gráficas de los atractores de Lorenz fueron generadas con el programa `lorenz.py`, anexo en el Notebook *Chaos.ipynb*.

Las gráficas tridimensionales de los atractores se presentan en la figura 12.

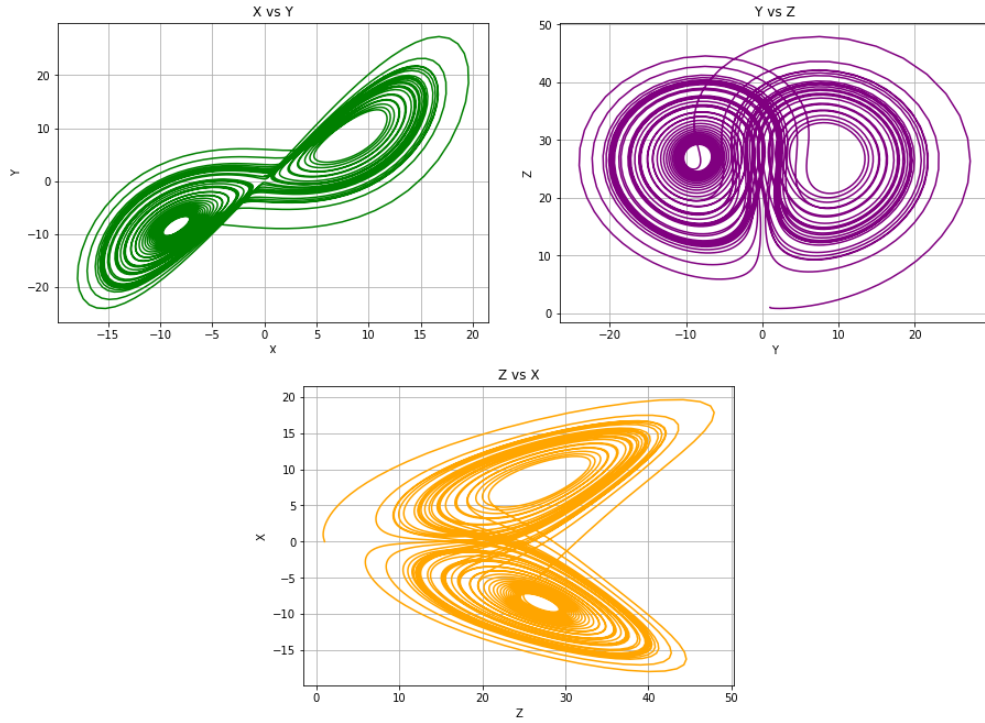


Figura 9: Atractores de Lorenz para $\sigma = 10$, $r = 28$, y $b = \frac{8}{3}$.

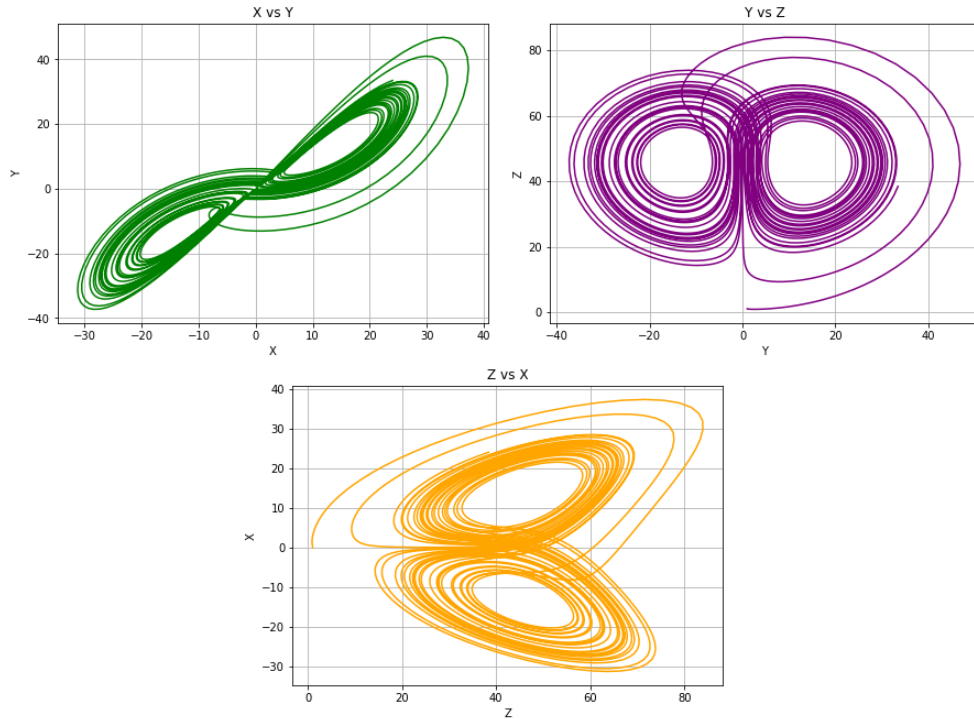


Figura 10: Atractores de Lorenz para $\sigma = 28$, $r = 46.92$, y $b = 4$.

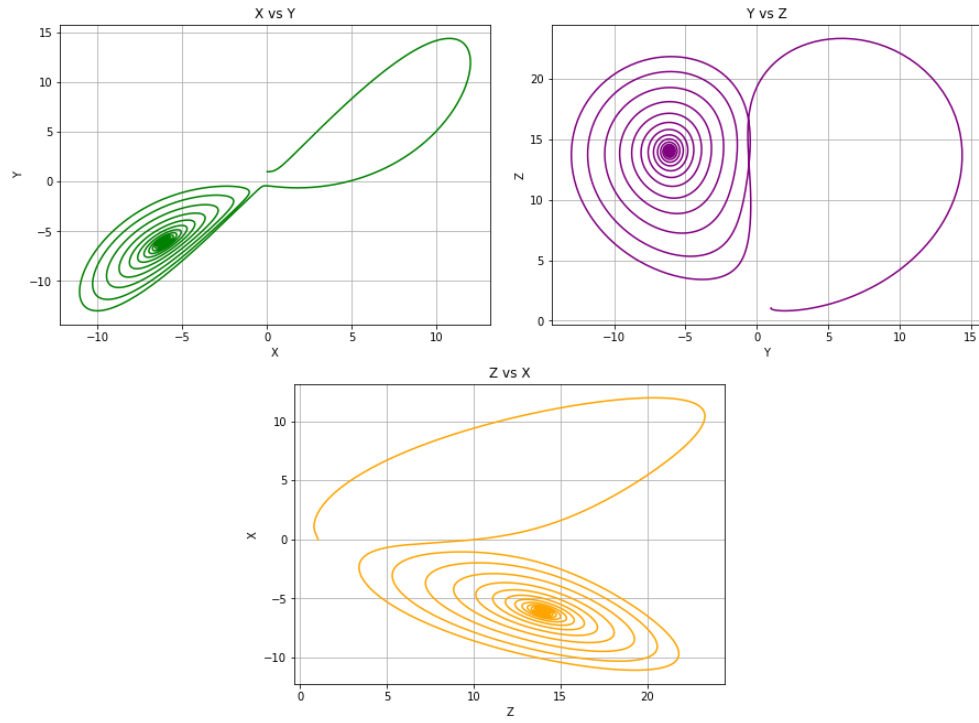


Figura 11: Atractores de Lorenz para $\sigma = 10$, $r = 15$, y $b = \frac{8}{3}$.

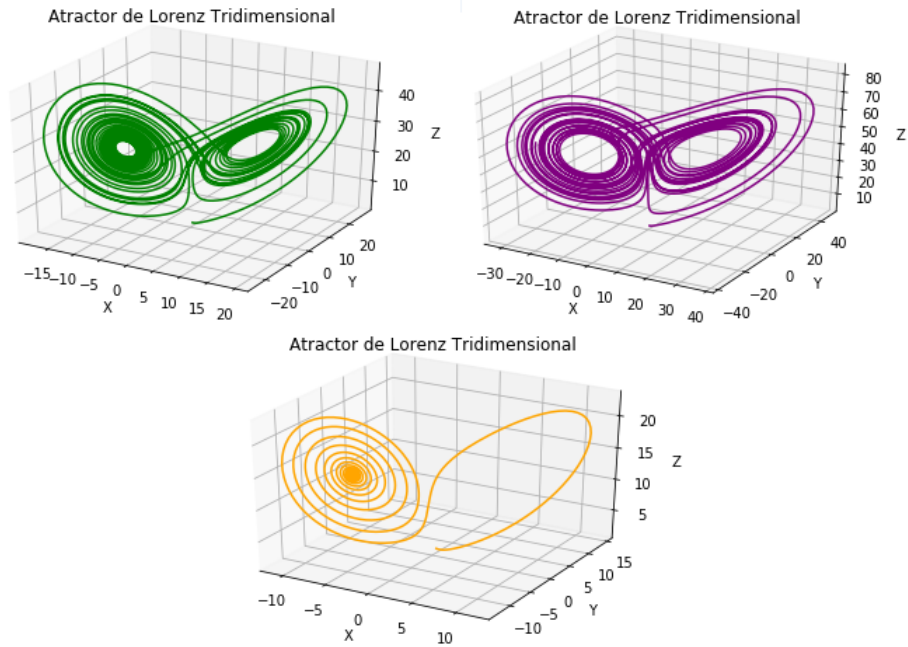


Figura 12: Gráficas tridimensionales de los diferentes atractores en el mismo orden en el cual se presentaron los grupos de gráficas previos.

4.2. Atractor de Rossler

Basándose en el sistema de ecuaciones diferenciales propuesto por Lorenz, en 1976, el bioquímico Otto Rossler publicó un artículo [10] en el cual propone otro sistema de ecuaciones diferenciales que conducen al caos:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= -y - z \\ \frac{dy}{dt} &= x + Ay \\ \frac{dz}{dt} &= B + z(x - C)\end{aligned}\tag{6}$$

Rossler menciona en su artículo que su objetivo al construir este sistema de ecuaciones diferenciales era un análisis más simple de algo similar a las ecuaciones de Lorenz, aunque no tuviesen una aplicación inmediata. Después se encontró que el modelo puede ser útil para modelar ciertas reacciones químicas, como lo es la reacción $\text{NH}_3 - \text{HCl}$ [12].

También es interesante notar que, a diferencia de las ecuaciones de Lorenz, este es un sistema donde dos de sus ecuaciones son ecuaciones diferenciales lineales. Esto puede ser la causa de que la gráfica de las soluciones genere sólo un atractor, a diferencia de los dos atractores ya observados para las ecuaciones de Lorenz. El programa escrito para esta sección tiene como objetivo resolver y graficar las soluciones del sistema para distintos valores de A , B , y C .⁶

Inicialmente se probaron los valores de las constantes $A = B = 0.2$ y $C = 5.7$, que son las condiciones mencionadas en el artículo de Rossler [10]. Los resultados se muestran en la figura 13. A partir de las condiciones iniciales $(0, 1, 1.05)$ se tiene un movimiento casi constante hacia el atractor: se puede visualizar que en la espiral mostrada, los espacios entre cada vuelta son algo irregulares, al igual que sus grosores. En los otros planos, las subidas tienen grosores similares pero su espaciamiento sigue siendo irregular.

En la figura 14 se muestran las gráficas para los valores $A = B = 0.1$ y $C = 14$. Inicialmente, podemos notar por el rango de la gráfica que se “estiró” y ahora la espiral del plano XY es mucho más homogénea y espaciada por igual. En los otros planos igualmente se puede notar el estiramiento.

Finalmente, se graficaron las soluciones para $A = 0.32$, $B = 0.3$, y $C = 5.7$. Aquí se puede apreciar una especie de contracción en el rango de las gráficas, y ya no se tiene la previa espiral característica del plano XY . En su lugar, en los 3 planos se puede observar una banda casi homogénea de líneas que realizan una trayectoria muy parecida a las previas, pero ya no se ve un espaciamiento tan pronunciado.

Todas estas características se pueden apreciar de mejor manera en la figura 16, donde se muestran las representaciones tridimensionales de los atractores ya mostrados y discutidos.

⁶Las gráficas del atractor de Rossler fueron generadas con el programa `rossler.py`, anexo en el Notebook *Chaos.ipynb*.

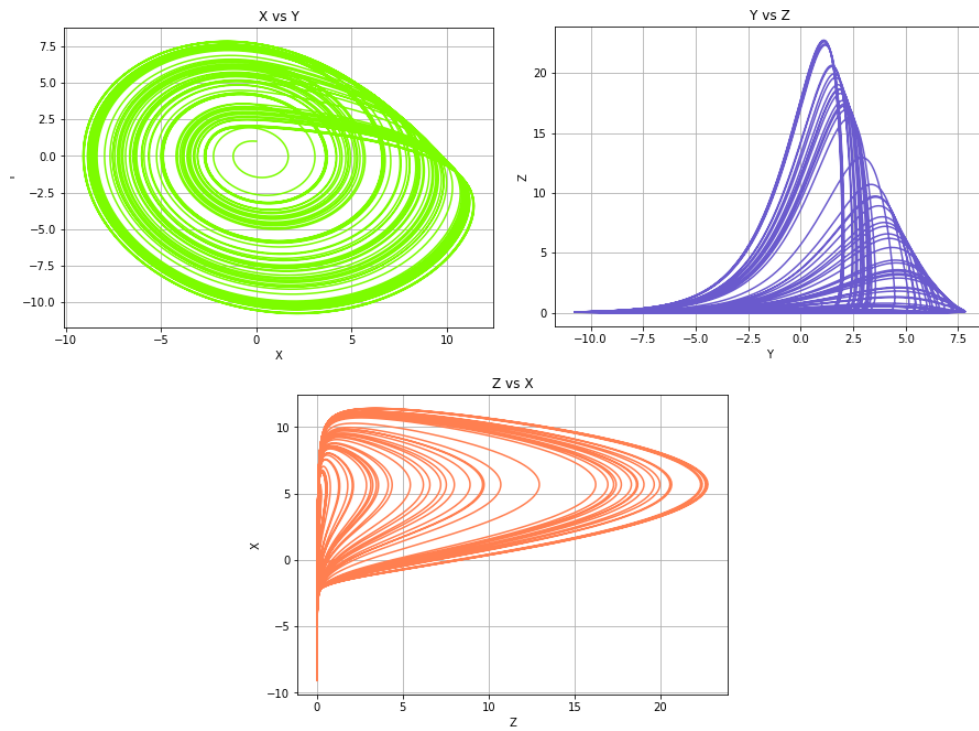


Figura 13: Atractor de Rossler para $A = B = 0.2$ y $C = 5.7$.

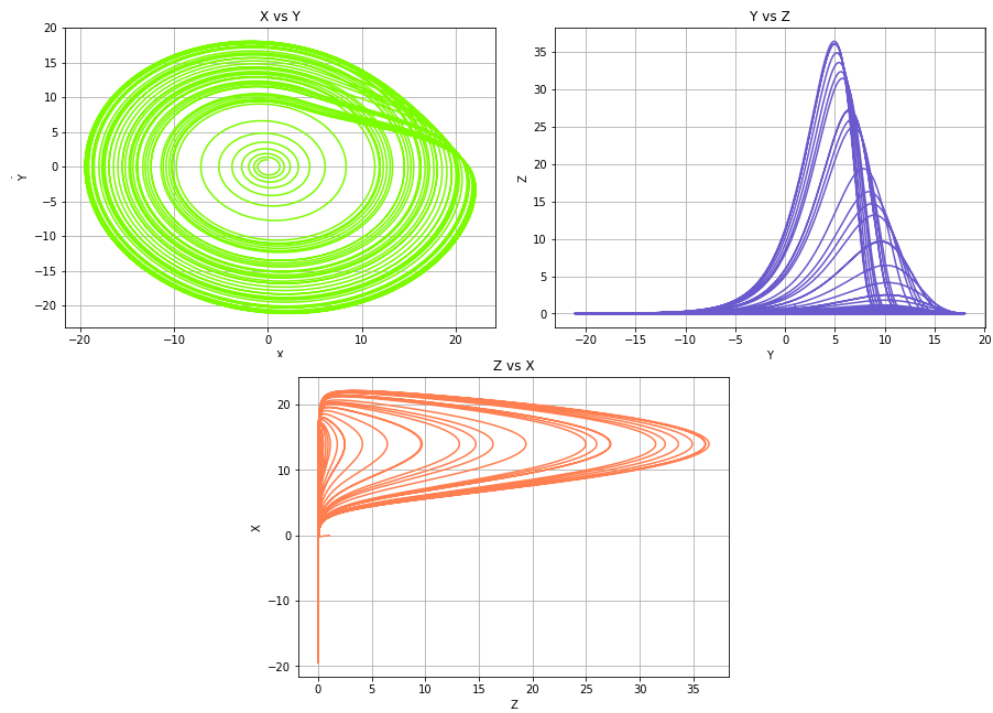


Figura 14: Atractor de Rossler para $A = B = 0.1$ y $C = 14$.

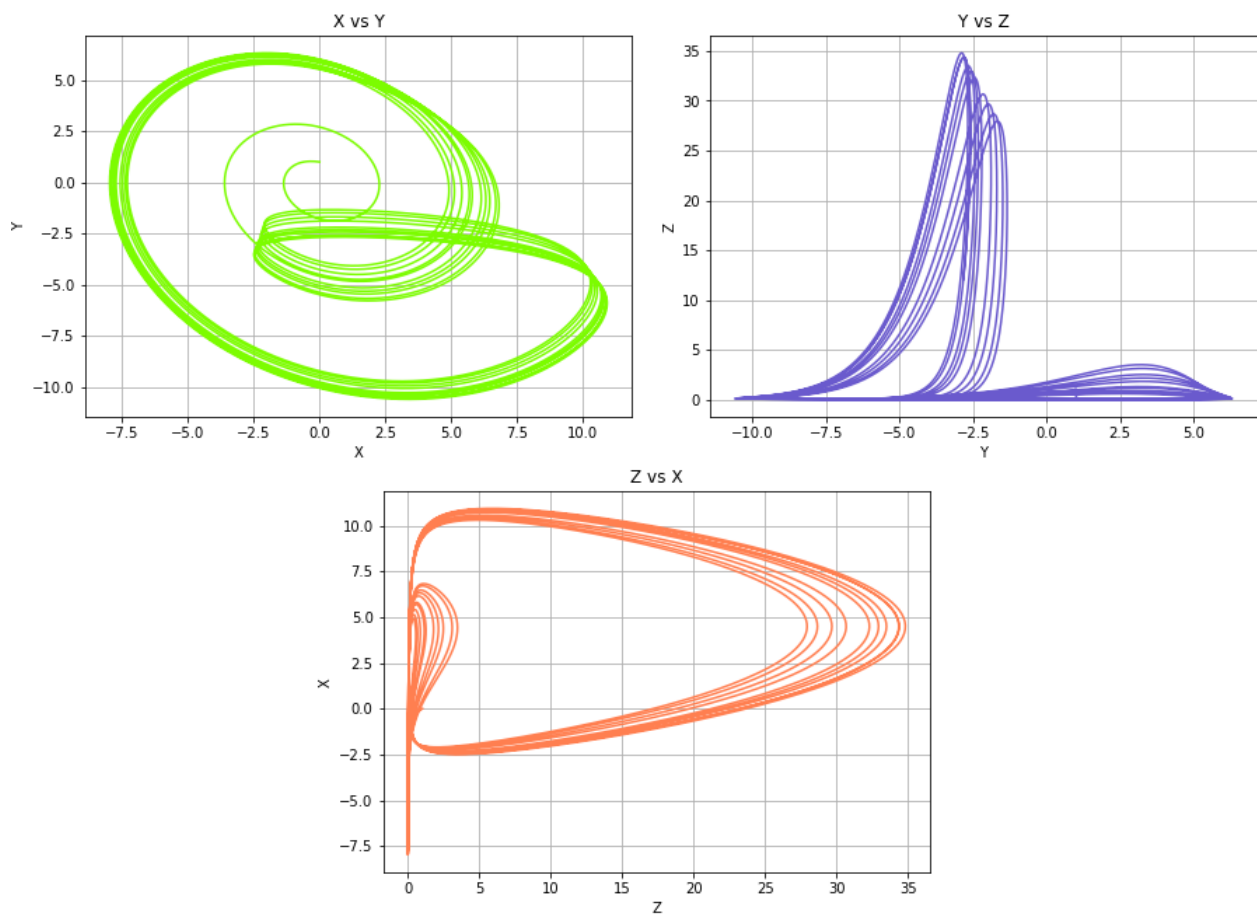


Figura 15: Atractor de Rossler para $A = 0.32$, $B = 0.3$, y $C = 5.7$.

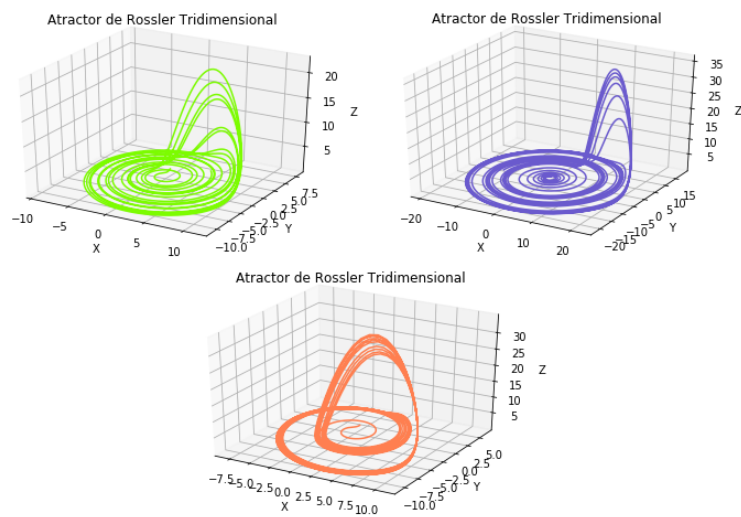


Figura 16: Gráficas tridimensionales de los diferentes atractores, en el mismo orden en el que se presentaron los grupos de gráficas previos.

5. Secciones de Poincaré

Una sección de Poincaré es un sistema dinámico discreto que representa el flujo continuo de algún otro sistema. Es una herramienta utilizada para representar los aspectos más importantes de un sistema dinámico que puede ser periódico o caótico, con el fin de determinar alguna estructura que el sistema posea. Un ejemplo común es el análisis de órbitas planetarias, donde se puede graficar un punto en la sección de Poincaré cada vez que un planeta atraviesa un cierto punto, para analizar su órbita y revisar si esta varía año con año (como la de Mercurio). [14]

En esencia, la gráfica de una sección de Poincaré no es más que graficar cualquier plano en el espacio intersectando al espacio fase de algún sistema. La intersección constante de un plano en el espacio fase es útil puesto que se puede observar la evolución del espacio fase en el tiempo, y con esto se puede estudiar la evolución temporal del sistema. Es fácil notar que este tipo de análisis son muy poderosos pues remueven una dimensión del análisis del sistema sin necesidad de quitar información muy importante acerca de él.

Algo muy importante de esta herramienta es que las propiedades del sistema analizado se mantienen al graficar la sección de Poincaré, esto es, las propiedades caóticas o periódicas del sistema se mantendrán y se podrán seguir observando en el nuevo mapeo. Una aplicación muy útil de las secciones de Poincaré es que se puede modelar alguna observación realizada (encontrar ecuaciones con las que describir sus propiedades) haciendo intersecciones en su espacio fase. [15]

Los programas ⁷ y gráficas realizados son secciones de Poincaré de los atractores extraños previamente mostrados (Lorenz y Rossler), cuyo propósito es mostrar y recalcar el hecho de que las propiedades del sistema o flujo en cuestión se mantienen al intersectar un plano. No se muestran todas las intersecciones puesto que no todas son de interés, sólo se anexan aquellas donde se encontró un plano apropiado en X , Y , o Z donde se pudieran seguir apreciando las características del atractor.

5.1. Secciones de Poincaré del Atractor de Lorenz

En primer lugar, se realizaron las secciones de Poincaré para el primer atractor de Lorenz (figura 9) que se mostró en secciones previas. Se intersectaron los planos $X = 0$, $Y = 5$, y $Z = 16$, puesto que en estos planos se encontró el mayor número de intersecciones de interés. Las secciones se muestran en las figuras 17, 18, y 19. Se puede observar que al intersectar los planos X y Y se tiene una trayectoria convergente hacia abajo, que en la gráfica tridimensional (figura 12) son los dos anillos atractores. En contraste, en el eje Z se tienen las curvas que siguen los anillos atractores.

El procedimiento fue el mismo para el segundo atractor, cuyas secciones se muestran en las figuras 20, 21, y 22. Como se mencionó en su respectiva sección, los atractores son muy similares y por tanto sus secciones de Poincaré también (incluso se intersectaron los mismos planos). De igual manera se tiene una convergencia hacia los anillos atractores al intersectar los planos X y Y , y un corte perpendicular a estos al intersectar el plano Z .

El tercer atractor no genera tantos puntos en su sección de Poincaré, y por tanto se eligió no mostrarlo. No obstante, se pueden generar las gráficas respectivas con el programa correspondiente.

⁷Se realizaron meramente extensiones de los programas `rossler.py` y `lorenz.py` para generar las gráficas mostradas.

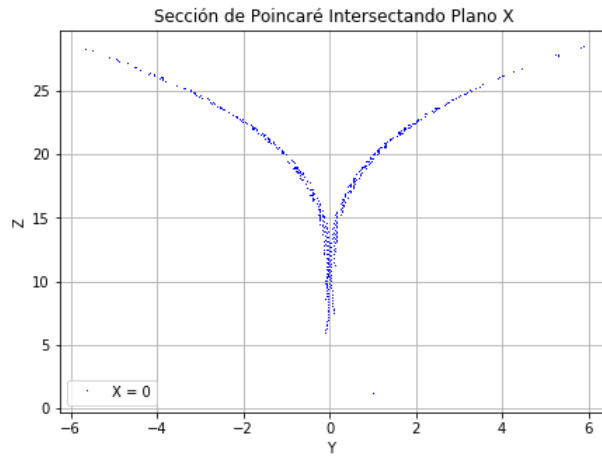


Figura 17: Sección de Poincaré del primer atractor de Lorenz con el plano $X = 0$ (figura 9).

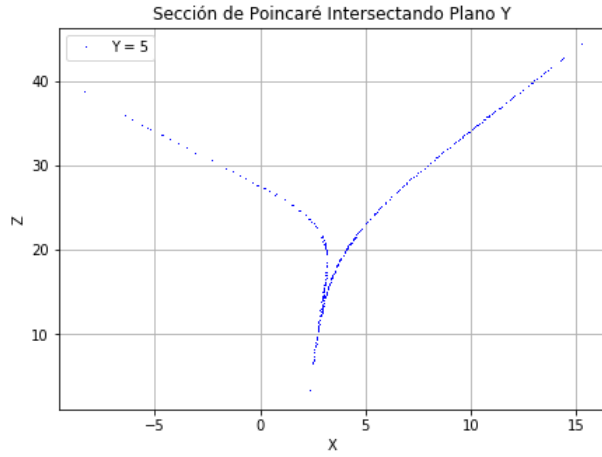


Figura 18: Sección de Poincaré del primer atractor de Lorenz con el plano $Y = 5$ (figura 9).

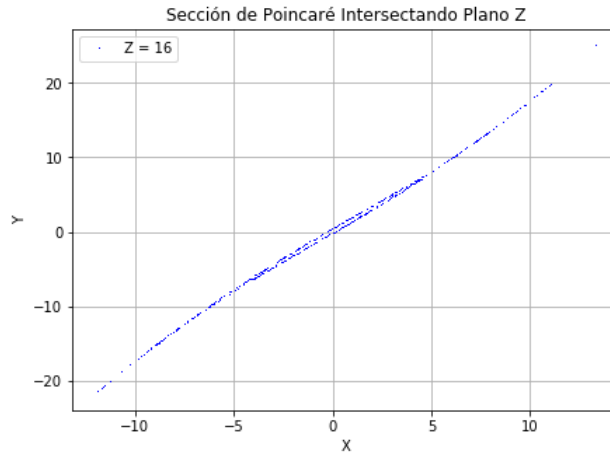


Figura 19: Sección de Poincaré del primer atractor de Lorenz con el plano $Z = 16$ (figura 9).

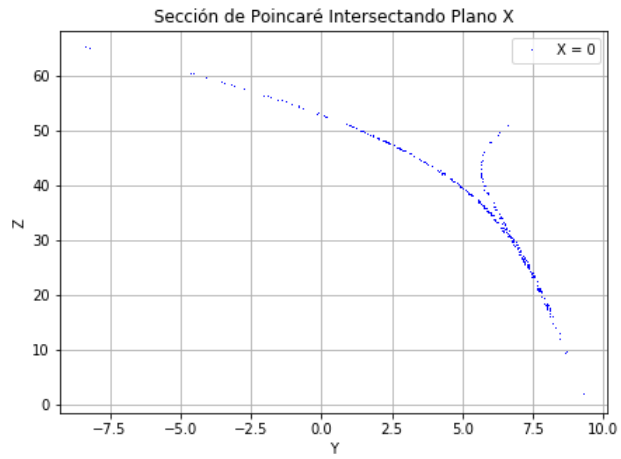


Figura 20: Sección de Poincaré del segundo atractor de Lorenz con el plano $X = 0$ (figura 10).



Figura 21: Sección de Poincaré del segundo atractor de Lorenz con el plano $Y = 5$ (figura 10).

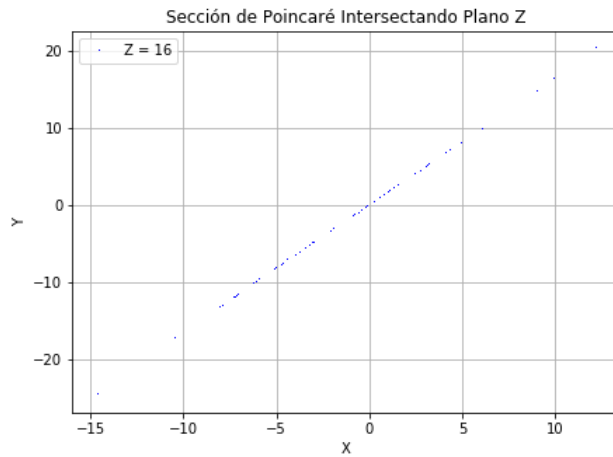


Figura 22: Sección de Poincaré del segundo atractor de Lorenz con el plano $Z = 16$ (figura 10).

5.2. Secciones de Poincaré del Atractor de Rossler

En la opinión del autor, las secciones de Poincaré del atractor de Rossler son más interesantes y estéticas, y además ilustra de mejor manera la utilidad de las secciones de Poincaré.

En primer lugar, se muestran las secciones de Poincaré para el primer atractor de Rossler (figura 13) en las figuras 23, 24, y 25. En éstas, al intersectar los planos X y Y , se puede observar (aunque vagamente por una cantidad de puntos pequeña) la estructura vertical de la figura tridimensional 16: una subida súbita hacia arriba en el plano Z . En contraste, al intersectar el plano $Z = 0$, se puede observar la espiral base de la estructura, y el espaciamiento de sus trayectorias.

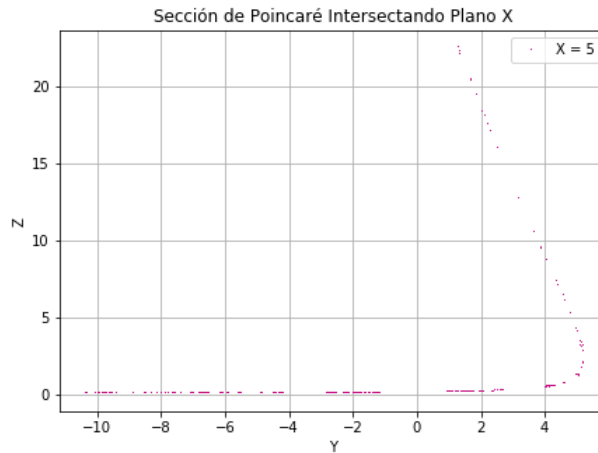


Figura 23: Sección de Poincaré del primer atractor de Rossler con el plano $X = 5$ (figura 13).

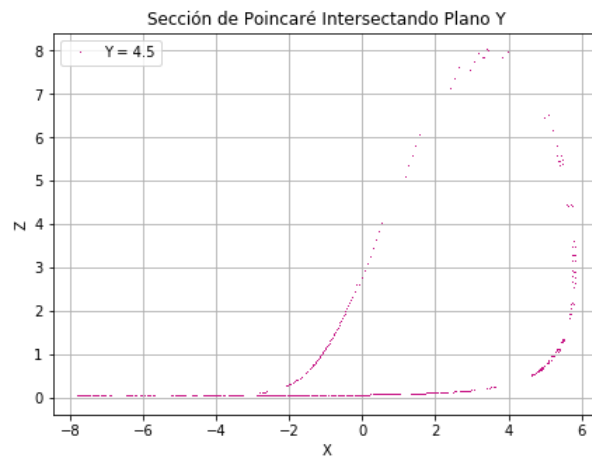


Figura 24: Sección de Poincaré del primer atractor de Rossler con el plano $Y = 4.5$ (figura 13).

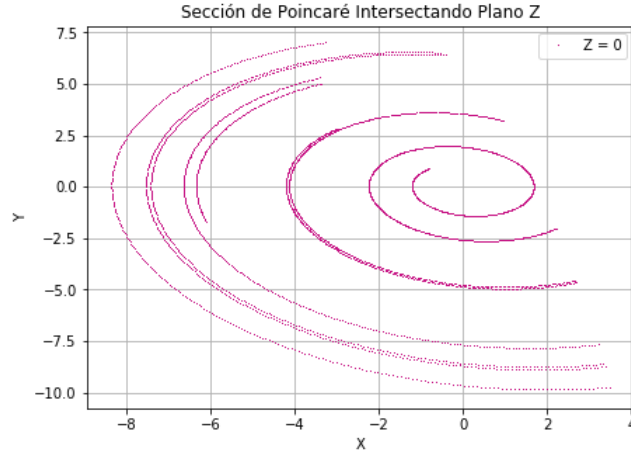


Figura 25: Sección de Poincaré del primer atractor de Rossler con el plano $Z = 0$ (figura 13).

En las secciones de Poincaré para el segundo atractor de Rossler, mostradas en las figuras 26, 27, y 28, se tiene algo similar a las figuras previas. Al igual que en las primeras figuras, al intersectar los planos X y Y se puede visualizar levemente la subida que tiene la estructura tridimensional. De acuerdo a las diferencias entre los atractores, las gráficas de estos planos están de cierta manera estiradas. Más aún, la sección de Poincaré obtenida al intersectar el plano $Z = 0$ (que muestra la base de la estructura) es de las mejores imágenes obtenidas. Aquí claramente se puede visualizar la espiral base desde su origen, y el corte que se tiene del lado derecho superior corresponde con la subida que se menciona y se observa en la figura 16.

En última instancia, se muestra una sola sección de Poincaré para el tercer atractor de Rossler (figura 15) en la figura 29. Esta es la única gráfica que se considera relevante puesto que al intersectar los planos X y Y no se tienen suficientes puntos de intersección. En la gráfica se puede observar el inicio de una espiral que posteriormente sube constantemente en el plano Z , en lugar de tener una subida repentina como las de los otros atractores. Esto también corresponde con la estructura tridimensional ya mostrada.

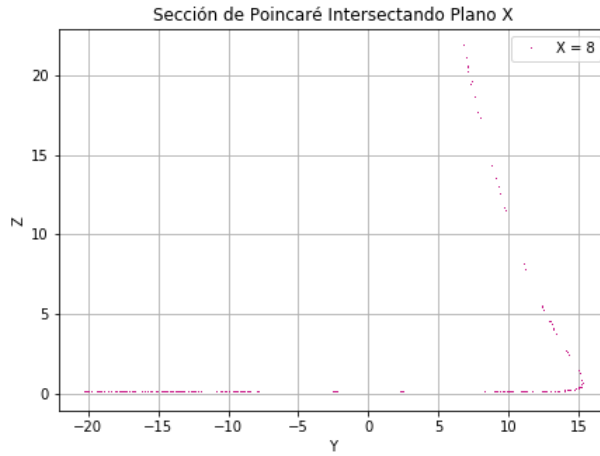


Figura 26: Sección de Poincaré del segundo atractor de Rossler con el plano $X = 8$ (figura 14).

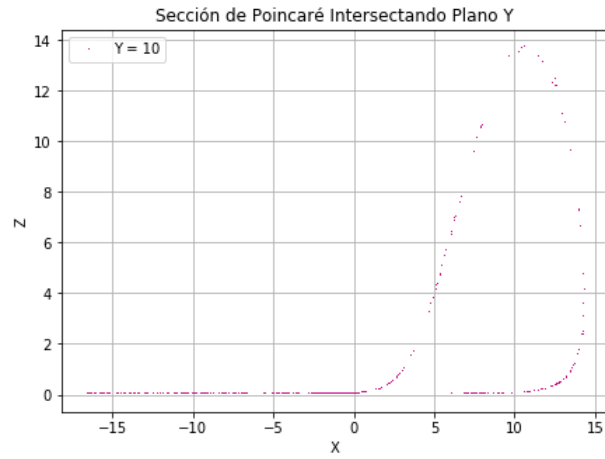


Figura 27: Sección de Poincaré del segundo atractor de Rossler con el plano $Y = 10$ (figura 14).

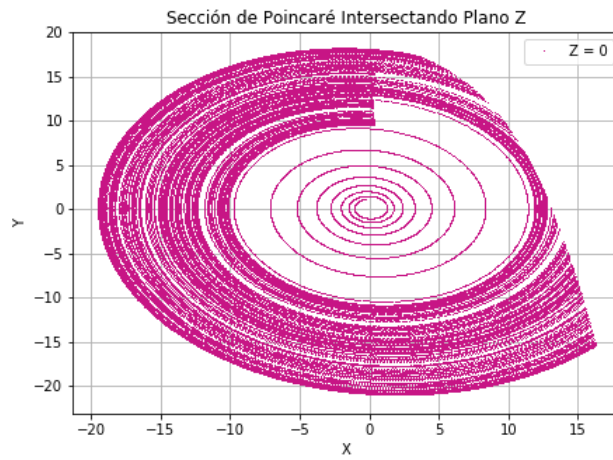


Figura 28: Sección de Poincaré del segundo atractor de Rossler con el plano $Z = 0$ (figura 14).

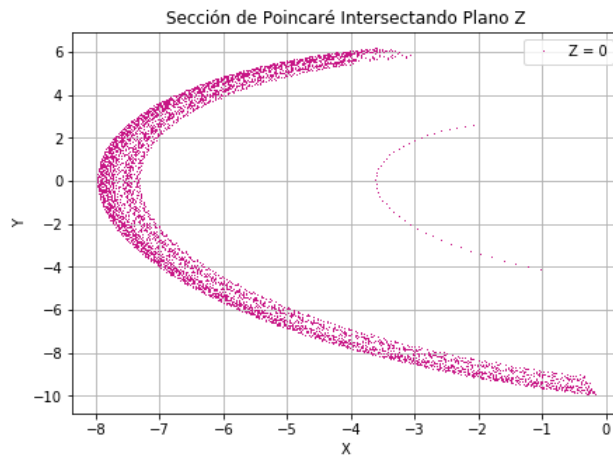


Figura 29: Sección de Poincaré del segundo atractor de Rossler con el plano $Z = 0$ (figura 15).

6. Fractales

En general, un fractal es cualquier objeto cuya estructura geométrica se repite infinitamente en cierto grado a diferentes escalas: esto es, si se realizan acercamientos o alejamientos a la imagen de un fractal, se podrán observar algunas similitudes entre éstos y la imagen original, incluso llegando a ser una copia exacta. La mayoría de las gráficas de procesos caóticos tienen propiedades de fractales, e incluso algunas de las gráficas ya mostradas en este artículo son fractales, como el diagrama de bifurcación (figura 5) o los atractores de Lorenz (figura 12) y Rossler (figura 16).

Aunque los fractales surgen a partir de ecuaciones diferenciales no lineales, como ya se revisó, también se pueden encontrar de manera natural en objetos como el brócoli, los copos de nieve, las líneas costeras, y el arreglo de vasos sanguíneos en el cuerpo humano.

Una propiedad muy interesante de los fractales es su **dimensión**. Consideremos el caso más simple: una línea, de longitud a . Si hacemos una copia más grande de ésta, tendremos que su longitud es ahora ka , y entonces su longitud aumentó k veces. Siguiendo ahora con un rectángulo de lados a y b (y área ab), si lo escalamos por un factor k , sus lados tendrán ahora longitudes ka y kb respectivamente, pero su área será de k^2a . Entonces el área aumentó k^2 veces. De manera análoga podemos entender que el volumen de un prisma aumentaría k^3 veces. El exponente del factor de aumento es lo que llamamos dimensión, y así, una línea es unidimensional, una superficie bidimensional, y un cuerpo tridimensional.

Yendo un poco más allá, Benoit Mandelbrot, un matemático polaco, estudió objetos que al ampliarse, aumentaban en factores con exponentes fraccionales. A estos les llamó **fractales**, y en efecto, existen construcciones como el copo de nieve de Koch, que tiene dimensión $d = 1.26186$. Mandelbrot discute a profundidad este concepto en [16].

En esta sección no se realizó un código como tal, puesto que las diversas gráficas de las secciones previas tienen propiedades de fractales y representan bien sus características (en especial el diagrama de bifurcación). No obstante, a continuación se muestran algunos de los fractales más comunes, junto con su dimensión, en las figuras 30 ⁸, 31 ⁹, y 32 ¹⁰.

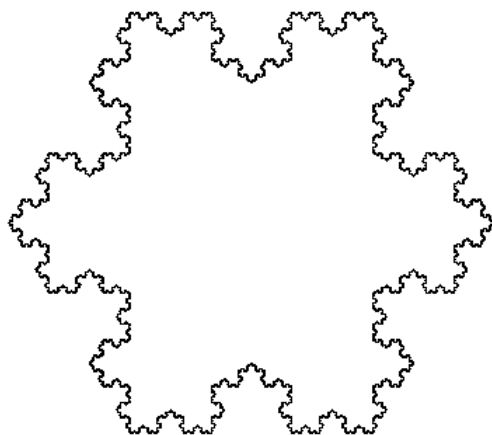


Figura 30: Copo de nieve de Koch, de dimensión $d = 1.26186$.

⁸Imagen obtenida de <https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Flocke.PNG>

⁹Imagen obtenida de https://commons.wikimedia.org/wiki/Dragon_curve

¹⁰Imagen obtenida de https://commons.wikimedia.org/wiki/Julia_set

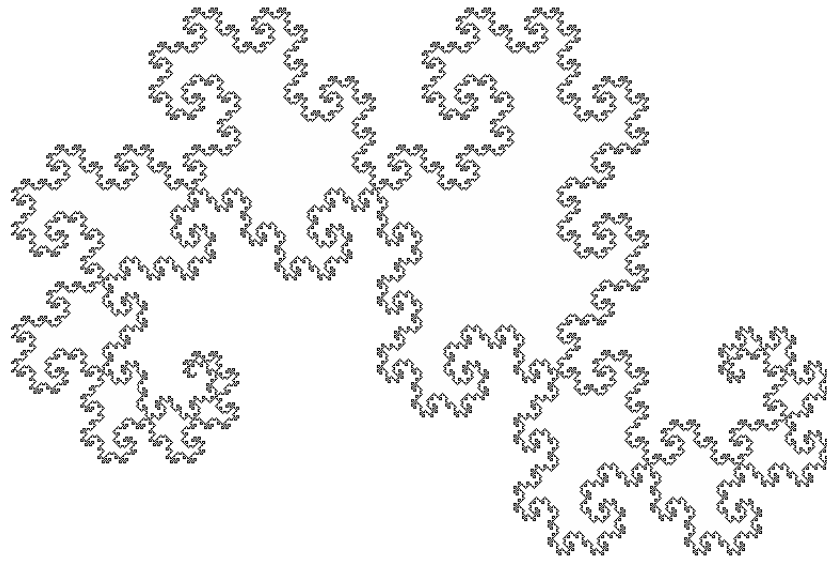


Figura 31: Curva del dragón, de dimensión $d = 1.5236$.

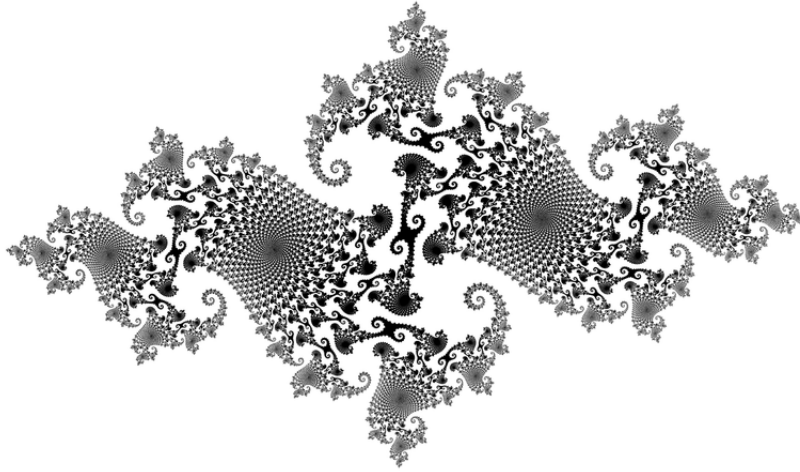


Figura 32: Conjunto de Julia, de dimensión $d = 2$.

Como información adicional, las dimensiones de los fractales de secciones previas son las siguientes, en orden ascendente:

- Diagrama de bifurcación: $d = 0.538$.
- Atractor de Rossler: $d = 2.01$.
- Atractor de Lorenz: $d = 2.06$.

7. Ecuaciones de Lotka-Volterra

En general, en cualquier curso de ecuaciones diferenciales se propone un modelo para describir el crecimiento de una población en el tiempo. Sin embargo, este modelo está sobresimplificado y no toma en cuenta todos los factores que intervienen en el crecimiento de una especie. Propuestas al mismo tiempo de manera independiente por Lotka y Volterra en 1920, las ecuaciones de Lotka-Volterra son un sistema de ecuaciones diferenciales no lineales con los cuales se pretende describir la relación entre dos especies: una depredadora y una presa. El sistema es el siguiente:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= \alpha x - \beta xy \\ \frac{dy}{dt} &= \delta xy - \gamma y\end{aligned}\tag{7}$$

donde x es el número de presas, y el número de depredadores (con sus derivadas, por definición, representando el crecimiento o decrecimiento instantáneo de la población), y α , β , γ , y δ son constantes reales positivas con las que se describe la interacción entre las especies. Estos parámetros pueden incluir factores externos a las especies como epidemias, fertilidad, temporadas de apareamiento, efectos ambientales o climáticos, entre otros.

El programa realizado para esta sección ¹¹ genera gráficas con los distintos patrones de oscilación y los atractores a los que dan lugar diferentes valores de los parámetros mencionados.

La primera gráfica de las propiedades de las poblaciones de depredadores y presas se muestra en la figura 33, con su espacio fase mostrado en la figura 34. Estos son los valores más comunes para el modelo, y lo más interesante es que el patrón se repite infinitamente. Tanto depredadores como presas comparten la población inicial de 10, y podemos observar que el patrón en general consiste en lo siguiente: la población inicial de presas no es suficiente para alimentar a todos los depredadores, lo cual causa que estos mueran, mientras que la población de presas se dispara (nótese que sí hay una pequeña disminución en la población de presas al inicio, lo cual es lógico, pues los depredadores consumen algunas antes de casi extinguirse). Al aumentar la población de presas lo suficiente, los depredadores pueden sostener una población más grande, que se ve reflejado en la disminución de presas. Después de esto, el ciclo se repite. El espacio fase refleja esta información en la forma de un elipse achatado, que es muy reminscente de un oscilador armónico.

El segundo par de gráficas generado se muestra en las figuras 35 (patrón de oscilaciones) y 36 (espacio fase). Este caso es en cierta manera similar al previo, sin embargo, éstos parámetros claramente no se pueden aplicar a la realidad, y esto se nota una vez observada la gráfica. Teniendo las mismas condiciones iniciales de población (10 para cada especie), hay una estructura similar a la previa, sin embargo, ahora son los depredadores los que tienen una población en crecimiento y las presas un decaimiento, a tal grado de llegar a extinguirse. Una vez extintas, los depredadores igualmente comienzan a extinguirse y llega un punto en el que ambas especies están extintas. Esto es muy lógico y tiene sentido, lo que no cuadra con la realidad es que después de estar extintas, repentinamente se tiene un crecimiento en la población de presas y luego le sigue uno igual para los depredadores. La única interpretación posible para esto es la inserción de nuevos especímenes en el ecosistema analizado. El espacio fase tiene una estructura similar al previo, pero mostrando las etapas de extinción.

¹¹Las gráficas de los espacios fase y las oscilaciones fueron generadas con el programa `lotka.py`, anexo en el Notebook *Chaos.ipynb*.

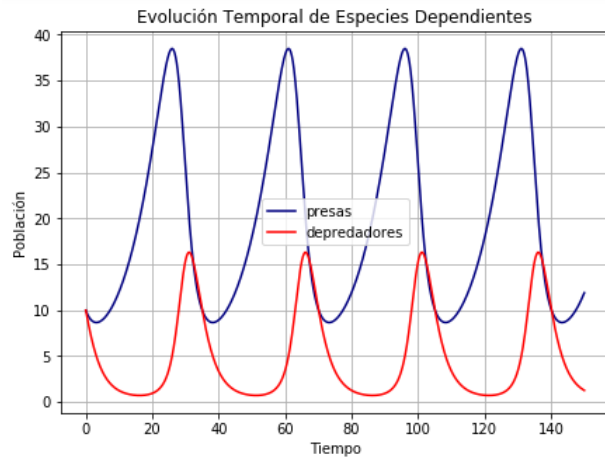


Figura 33: Patrón de oscilaciones de depredador-presa para $\alpha = .1$, $\beta = .02$, $\gamma = .4$, y $\delta = .02$.



Figura 34: Espacio fase de poblaciones para $\alpha = 0.1$, $\beta = 0.02$, $\gamma = 0.4$, y $\delta = 0.02$.

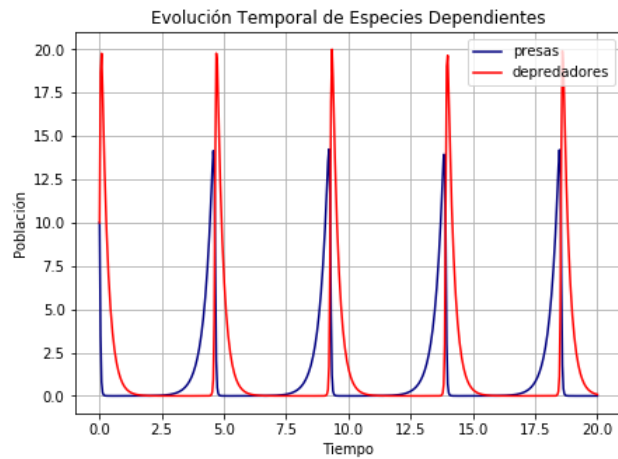


Figura 35: Patrón de oscilaciones de depredador-presa para $\alpha = 3$, $\beta = 2$, $\gamma = 4$, y $\delta = 3$.

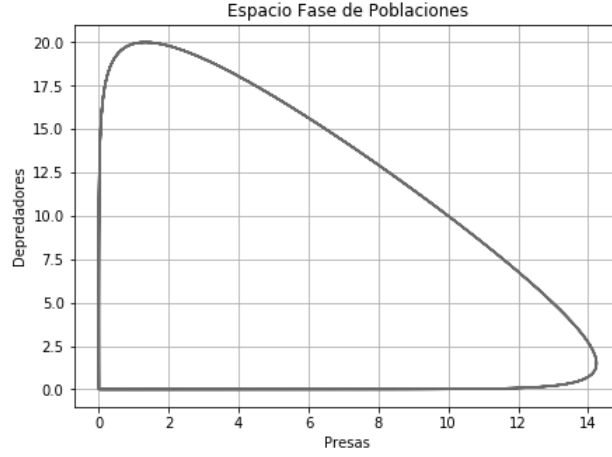


Figura 36: Espacio fase de poblaciones para $\alpha = 3$, $\beta = 2$, $\gamma = 4$, y $\delta = 3$.

7.1. Condiciones para el Caos

Como ya se mencionó, con este sistema se puede describir la interacción entre dos especies. Sin embargo, está demostrado por el teorema de Poincaré-Bendixson [18] que no existen soluciones caóticas para un sistema que sólo considera 2 especies. Entonces, se puede escribir un modelo más general que considere N especies:

$$\frac{dx_i}{dt} = r_i x_i \left(1 - \sum_{j=1}^N a_{ij} x_j \right) \quad (8)$$

donde r_i , $i = 1, 2, \dots, N$ es la tasa de fertilidad de la especie i , x_i la población de esa misma especie, y a_{ij} es una matriz de interacciones representando qué tanto una especie j compite por los recursos de una especie i . Todos los elementos a_{ii} se pueden establecer como 1, y de igual manera se establece $r_1 = 1$, midiendo las demás r en función de ésta.

En general, este sistema puede generar soluciones caóticas, sin embargo, los valores de la matriz de interacciones deben ser muy precisos, y por tanto estas soluciones son poco comunes. Sin embargo, al aumentar el número de especie, es más común encontrar propiedades caóticas. Para este caso, por ejemplo, se tienen exponentes de Lyapunov positivos pero muy pequeños, pero no es difícil aumentar su valor en dimensiones más altas [19].

8. Sistema Mecánico Caótico: Péndulo con Pivote Oscilador

En esta sección se analizará un sistema que consiste en un péndulo común y corriente, cuyo pivote (extremo opuesto a la masa) se encuentra sujeto a un resorte que se estira y contrae, provocando un movimiento oscilatorio en el pivote además del de la masa. El sistema se muestra en la figura

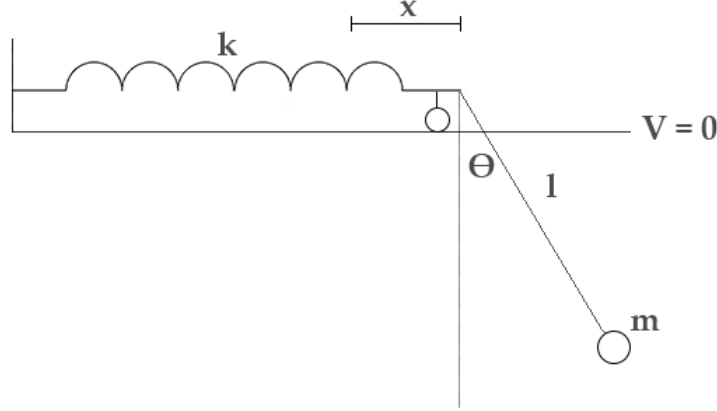


Figura 37: Sistema mecánico a analizar.

Como se muestra en la figura, k es la constante del resorte, x la distancia que se estira, θ es el ángulo que forma la varilla del péndulo (que se asume sin masa y rígida) con la vertical, y l su distancia. Como puntos de energía potencial 0 se tiene la superficie sobre la cual oscila el resorte, y la energía potencial 0 de este es, claramente, cuando $x = 0$.

Iniciando con el análisis del problema, se escribirá la energía cinética T . Escribiendo la velocidad horizontal, encontramos que ésta tiene dos componentes: la velocidad del pivote y la de la masa, entonces tenemos

$$v_x = \dot{x} + l\dot{\theta} \cos \theta \quad (9)$$

La velocidad vertical no es distinta a la encontrada en un péndulo ordinario:

$$v_y = l\dot{\theta} \sin \theta \quad (10)$$

Entonces la energía cinética está dada por

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m[(\dot{x} + l\dot{\theta} \cos \theta)^2 + (l\dot{\theta} \sin \theta)^2] \\ T &= \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + 2\dot{x}\dot{\theta}l \cos \theta + l^2\dot{\theta}^2) \end{aligned} \quad (11)$$

Para la energía potencial U debemos considerar tanto la energía potencial gravitatoria de la masa, como la de estirar el resorte, entonces tenemos la suma de ambas:

$$U = \frac{1}{2}kx^2 - mgl \cos \theta \quad (12)$$

Finalmente, restamos la energía potencial de la cinética para obtener el Lagrangiano:

$$L = T - U = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + 2\dot{x}\dot{\theta}l \cos \theta + l^2\dot{\theta}^2) - \frac{1}{2}kx^2 + mgl \cos \theta \quad (13)$$

De aquí observamos que se tienen dos grados de libertad en el sistema: x y θ , y recordamos que l es constante. Entonces aplicaremos dos veces la ecuación de Euler-Lagrange; iniciando con las correspondientes para θ , obtenemos la primera ecuación de movimiento:

$$l\ddot{\theta} + \ddot{x} \cos \theta + g \sin \theta = 0 \quad (14)$$

Realizando el mismo procedimiento para x , obtenemos la segunda ecuación de movimiento:

$$\ddot{x} + l\ddot{\theta} \cos \theta - l\dot{\theta}^2 \sin \theta + \frac{k}{m}x = 0 \quad (15)$$

Este es el sistema de ecuaciones diferenciales con el que se puede describir el movimiento del sistema en su totalidad. Las propiedades del sistema son claramente caóticas, y esto se puede observar en el hecho de que las ecuaciones de movimiento son no lineales y acopladas de segundo orden. La intención original de esta sección era resolver numéricamente las ecuaciones y demostrar así el caos inherente, reduciendo el sistema de dos ecuaciones de segundo grado a uno de cuatro ecuaciones de primer grado para poder utilizar la integración numérica en Python con `odeint`. No obstante, el entorno no es el apropiado para la resolución de un sistema de cuatro ecuaciones, por lo que no se presentan las gráficas originalmente deseadas. Sin embargo, se cumple el propósito de mostrar un sistema inherentemente caótico.

9. Conclusiones

A pesar de que es altamente deseable el tener la habilidad de resolver cualquier sistema físico de manera analítica, en este artículo se ha demostrado una y otra vez que esto no es posible. Esto, sin embargo, no nos deja en desventaja, sino que nos abre todo un nuevo campo de estudio en la teoría del caos.

A lo largo de las diferentes secciones, se analizaron distintos sistemas que si bien pueden parecer simples (como lo es la ecuación logística), generan patrones y atractores extraños con formas muy interesantes, y con propiedades muy particulares, como por ejemplo fue encontrar la constante de Feigenbaum.

Asimismo se aprendió y utilizó una herramienta para poder cuantificar el caos de un sistema en la forma del exponente de Lyapunov, y se observaron distintos sistemas de ecuaciones diferenciales que, dadas ciertos parámetros, conducían a atractores muy hermosos y que demuestran el orden inherente en el caos. En general se considera que los programas escritos para generar estos gráficos son de buena calidad, puesto que las figuras mostradas son de igual o mejor calidad que los mostrados en la literatura. El análisis de los atractores también se llevó a cabo utilizando las secciones de Poincaré, y se aprendieron algunas de sus aplicaciones en, por ejemplo, astronomía.

Si bien no se pudieron generar fractales propios, se entendieron los conceptos detrás de éstos, y más aún, se comprendió el muy interesante concepto de la dimensión de un fractal, y se discutieron las posibles figuras a generar con simples pasos.

Se revisaron aplicaciones del caos a campos como la biología y la economía en las ecuaciones de Lotka-Volterra, demostrando que la teoría del caos es completamente aplicable a un escenario de la vida diaria. A pesar de que no hubo secciones específicas sobre el tema, sería incorrecto no mencionar que estas ecuaciones no son el único ejemplo, sino que se pueden encontrar sistemas físicos caóticos en cualquier lugar, como lo son los fractales en el arreglo de los pulmones del ser humano, o en aplicaciones más prácticas, como circuitos electrónicos caóticos.

Como comentario final y en opinión del autor, no se esperaba encontrar que la teoría del caos fuese tan aplicable más allá de las matemáticas, y se considera que se han aprendido técnicas útiles para el estudio de cualquier área, sin duda entre ellas la física.

10. Apéndice

A continuación se adjuntan los códigos mencionados a lo largo del artículo (también anejados en el Notebook `Chaos.ipynb`).

10.1. Ecuación Logística

```
1 #logistic.py
2 #Este programa genera valores para la ecuacion logistica , dado una
   poblacion inicial y un parametro lambda.
3 import matplotlib.pyplot as plt
4 import numpy as np
5
6 def logistic(pop, fertility):
7     return fertility * pop * (1 - pop)
8
9 def generate_logistic_data(pop, fertility , NMAX, tValues , popValues
   ):
10
11     iteration = 0
12     t = 0
13
14     while(iteration < NMAX):
15
16         pop = logistic(pop, fertility)
17
18         tValues.append(t)
19         popValues.append(pop)
20
21         t += 1
22         iteration += 0.1
23
24
25 tValues , popValues = [] , []
26 pop, fertility , NMAX = 0.5, 0.5, 10
27 generate_logistic_data(pop, fertility , NMAX, tValues , popValues)
28
29 plt.figure(figsize=(15,10))
30 plt.plot(tValues , popValues , 'ro' , label = 'lambda = ' + str(
   fertility))
31 plt.title('Poblacion en funci n del tiempo')
32 plt.ylabel('Poblacion')
33 plt.xlabel('Tiempo')
34 plt.grid()
35 plt.legend()
36 plt.show()
37
38 tValues , popValues = [] , []
```

```

39 pop, fertility , NMAX = 0.5, 2.8, 10
40 generate_logistic_data(pop, fertility , NMAX, tValues, popValues)
41
42 plt.figure(figsize=(15,10))
43 plt.plot(tValues, popValues, 'ro', label = 'lambda = ' + str(
    fertility))
44 plt.title('Poblacion en funcion del tiempo')
45 plt.ylabel('Poblacion')
46 plt.xlabel('Tiempo')
47 plt.grid()
48 plt.legend()
49 plt.show()
50
51 tValues, popValues = [], []
52 pop, fertility , NMAX = 0.5, 3.4, 10
53 generate_logistic_data(pop, fertility , NMAX, tValues, popValues)
54
55 plt.figure(figsize=(15,10))
56 plt.plot(tValues, popValues, 'ro', label = 'lambda = ' + str(
    fertility))
57 plt.title('Poblacion en funcion del tiempo')
58 plt.ylabel('Poblacion')
59 plt.xlabel('Tiempo')
60 plt.grid()
61 plt.legend()
62 plt.show()
63
64 tValues1, popValues1 = [], []
65 pop, fertility1 , NMAX = 0.5, 3.9, 10
66
67 generate_logistic_data(pop, fertility1 , NMAX, tValues1, popValues1)
68
69 tValues2, popValues2 = [], []
70 pop, fertility2 , NMAX = 0.5, 3.905, 10
71
72 generate_logistic_data(pop, fertility2 , NMAX, tValues2, popValues2)
73
74 plt.figure(figsize=(15,10))
75 plt.plot(tValues1, popValues1, 'ro', label = 'lambda = ' + str(
    fertility1))
76 plt.plot(tValues2, popValues2, 'g^', label = 'lambda = ' + str(
    fertility2))
77 plt.title('Poblacion en funcion del tiempo')
78 plt.ylabel('Poblacion')
79 plt.xlabel('Tiempo')
80 plt.grid()
81 plt.legend()
82 plt.show()

```

10.2. Diagrama de Bifurcación y Exponentes de Lyapunov

```
84 #bifurcation.py
85 #Este programa genera el diagrama de bifurcacion y los exponentes
    de Lyapunov mencionados en el articulo.
86 import matplotlib.pyplot as plt
87 import numpy as np
88
89 def logistic(pop, fertility):
90     return fertility * pop * (1 - pop)
91
92 def lyapunov(pop, fertility):
93     return np.log(np.absolute(fertility - 2 * fertility * pop))
94
95 NMAX = 1000
96 FMAX = 4
97 pop = 0.5
98 #fertility = 3.5
99 fertility = 0.0001
100 lyapunovExponents, fertilityValues = [], []
101 lya = 0
102
103 result = []
104
105 plt.figure(figsize=(15,10))
106
107 while(fertility < FMAX):
108     t = 0
109     pop = 0.5
110     lya = 0
111
112     while(t < NMAX):
113
114         pop = logistic(pop, fertility)
115         lya = lya + lyapunov(pop, fertility)
116
117         if(t > 900):
118             plt.plot(fertility, pop, color = 'red', ls='', marker
                = ',', ) #para graficar bifurcacion
119
120             t += 1
121
122     lambdas.append(mean(result))
123     lyapunovExponents.append(lya/NMAX)
124     fertilityValues.append(fertility)
125
126     fertility += 0.00125
127
```



```

128 plt.plot(fertilityValues , lyapunovExponents , color = 'red') #para
    graficar lyapunov
129 plt.title('Exponentes de Lyapunov')
130 plt.ylabel('Exponente')
131
132 plt.title('Diagrama de Bifurcacion') #para graficar bifurcacion
133 plt.ylabel('Poblacion atractor')
134
135 plt.xlabel('Lambda')
136 plt.grid()
137 plt.show()

```

10.3. Atractor de Lorenz y Secciones de Poincaré

```

138 #lorenz.py
139 #Este programa resuelve numericamente el sistema de ecuaciones de
    Saltzman para generar un atractor de Lorenz.
140
141 from scipy.integrate import odeint
142 from mpl_toolkits import mplot3d
143 import matplotlib.pyplot as plt
144 import numpy as np
145
146
147 #sistema de ecuaciones a resolver
148 def saltzman(AR, t, sigma = 10, r = 28, b = 8/3):
149     x = AR[0]
150     y = AR[1]
151     z = AR[2]
152
153     dxdt = sigma * (y - x)
154     dydt = x * (r - z) - y
155     dzdt = x * y - b * z
156
157     return [dxdt, dydt, dzdt]
158
159 #condiciones iniciales
160 initialConditions = [0, 1, 1.05]
161
162 #t = np.linspace(0, 50, 5000)
163 t = np.linspace(0, 1000, 100000)
164
165 solution = odeint(saltzman, initialConditions, t)
166
167 x = solution[:,0]
168 y = solution[:,1]
169 z = solution[:,2]
170
171 axis1, axis2 = [], [] #poincare section

```

```

172
173 for i in range(100000):
174     if float(format(solution[:, 2][i], '0.1f')) == 16: #plano
175         intersectante
176         axis1.append(solution[:, 0][i])
177         axis2.append(solution[:, 1][i])
178
179 plt.figure(figsize=(7,5))
180 plt.plot(x, y, color = 'green')
181 plt.title('X vs Y')
182 plt.xlabel('X')
183 plt.ylabel('Y')
184 plt.grid()
185 plt.show()
186
187 plt.figure(figsize=(7,5))
188 plt.plot(y, z, color = 'purple')
189 plt.title('Y vs Z')
190 plt.xlabel('Y')
191 plt.ylabel('Z')
192 plt.grid()
193 plt.show()
194
195 plt.figure(figsize=(7,5))
196 plt.plot(z, x, color = 'orange')
197 plt.title('Z vs X')
198 plt.xlabel('Z')
199 plt.ylabel('X')
200 plt.grid()
201 plt.show()
202
203 ax = plt.axes(projection='3d')
204 ax.set_title('Atractor de Lorenz Tridimensional')
205 ax.set_xlabel('X')
206 ax.set_ylabel('Y')
207 ax.set_zlabel('Z')
208 ax.plot3D(x, y, z, 'orange')
209
210 plt.figure(figsize=(7,5))
211 plt.plot(axis1, axis2, color = 'blue', ls='', marker=',', label = 'Z
    = 11')
212 plt.title('Seccion de Poincare Intersectando Plano Z')
213 plt.xlabel('X')
214 plt.ylabel('Y')
215 plt.grid()
216 plt.legend()
217 plt.show()

```

10.4. Atractor de Rossler y Secciones de Poincaré

```
217 #rossler.py
218 #Este programa resuelve numericamente el sistema de ecuaciones para
    generar un atractor de Rossler.
219
220 from scipy.integrate import odeint
221 from mpl_toolkits import mplot3d
222 import matplotlib.pyplot as plt
223 import numpy as np
224
225 #sistema de ecuaciones a resolver
226 def rossler(AR, t, A = 0.32, B = 0.3, C = 4.5):
227     x = AR[0]
228     y = AR[1]
229     z = AR[2]
230
231     dxdt = -y - z
232     dydt = x + A * y
233     dzdt = B + z * (x - C)
234
235     return [dxdt, dydt, dzdt]
236
237 #condiciones iniciales
238 initialConditions = [0, 1, 1.05]
239
240 t = np.linspace(0, 100, 20000)
241 #t = np.linspace(0, 1000, 100000) #usable
242
243 solution = odeint(rossler, initialConditions, t)
244
245 x = solution[:,0]
246 y = solution[:,1]
247 z = solution[:,2]
248
249 axis1, axis2 = [], [] #poincare section
250
251 for i in range(20000):
252     if float(format(solution[:, 2][i], '0.1f')) == 0: #plano
        intersectante
253         axis1.append(solution[:, 0][i])
254         axis2.append(solution[:, 1][i])
255
256 plt.figure(figsize=(7,5))
257 plt.plot(x, y, color = 'lawngreen')
258 plt.title('X vs Y')
259 plt.xlabel('X')
260 plt.ylabel('Y')
```

```

261 plt.grid()
262 plt.show()
263
264 plt.figure(figsize=(7,5))
265 plt.plot(y, z, color = 'slateblue')
266 plt.title('Y vs Z')
267 plt.xlabel('Y')
268 plt.ylabel('Z')
269 plt.grid()
270 plt.show()
271
272 plt.figure(figsize=(7,5))
273 plt.plot(z, x, color = 'coral')
274 plt.title('Z vs X')
275 plt.xlabel('Z')
276 plt.ylabel('X')
277 plt.grid()
278 plt.show()
279
280 ax = plt.axes(projection='3d')
281 ax.set_title('Atractor de Rossler Tridimensional')
282 ax.set_xlabel('X')
283 ax.set_ylabel('Y')
284 ax.set_zlabel('Z')
285 ax.plot3D(x, y, z, 'coral')
286
287 plt.figure(figsize=(7,5))
288 plt.plot(axis1, axis2, color = 'mediumvioletred', ls='', marker='',
          label = 'Z = 0')
289 plt.title('Seccion de Poincare Intersectando Plano Z')
290 plt.xlabel('X')
291 plt.ylabel('Y')
292 plt.grid()
293 plt.legend()
294 plt.show()

```

10.5. Ecuaciones de Lotka-Volterra

```

295 #lotka.py
296 #Este programa resuelve numericamente el sistema de ecuaciones de
    Lotka-Volterra para 2 especies.
297
298 from scipy.integrate import odeint
299 from mpl_toolkits import mplot3d
300 import matplotlib.pyplot as plt
301 import numpy as np
302
303 #sistema de ecuaciones a resolver
304 def lotka(AR, t, alpha = 0.1, beta = 0.02, gamma = 0.4, delta =

```

```

0.02):
305     x = AR[0]
306     y = AR[1]
307
308     dxdt = alpha * x - beta * x * y
309     dydt = delta * x * y - gamma * y
310     return [dxdt, dydt]
311
312 #condiciones iniciales
313 initialConditions = [10, 10]
314
315 t = np.linspace(0, 200, 1000)
316 #t = np.linspace(0, 1000, 100000) #usable
317
318 solution = odeint(lotka, initialConditions, t)
319
320 x = solution[:,0]
321 y = solution[:,1]
322
323 plt.figure(figsize=(7,5))
324 plt.plot(t, x, color = 'navy', label = 'presas')
325 plt.plot(t, y, color = 'red', label = 'depredadores')
326 plt.title('Evolucion Temporal de Especies Dependientes')
327 plt.xlabel('Tiempo')
328 plt.ylabel('Poblacion')
329 plt.grid()
330 plt.legend()
331 plt.show()
332
333 plt.figure(figsize=(7,5))
334 plt.plot(x, y, color = 'dimgrey')
335 plt.title('Espacio Fase de Poblaciones')
336 plt.xlabel('Presas')
337 plt.ylabel('Depredadores')
338 plt.grid()
339 plt.show()

```

Referencias

- [1] Sprott, J. C. (1996). Some Simple Chaotic Jerk Functions. *American Journal of Physics*, 1–7.
- [2] Haran, B. (2017). *The Feigenbaum Constant (4.669) - Numberphile* [Video]. Obtenido 11, 2018, de <https://www.youtube.com/watch?v=ETrYE4MdoLQ>.
- [3] May, R. M. (1976). Simple Mathematical Models With Very Complicated Dynamics. *Nature Publishing Group*, 1–10.
- [4] Boeing, G. (2015, 03). Chaos Theory and the Logistic Map. *geoffboeing*. Obtenido 11, 2018, de <https://geoffboeing.com/2015/03/chaos-theory-logistic-map/>.
- [5] H. N., A. S. (2013). Poincaré, la Mecánica Clásica, y el Teorema de la Recurrencia. *Revista Mexicana De Física*, 1(59), 91-100.
- [6] A. Aragoneses. (2018). *Chaos, Poincaré Sections, and Lyapunov Exponent* [Video]. Obtenido 11, 2018, de <https://www.youtube.com/watch?v=ENo4dZc1st0>.
- [7] Young, P. (2014). The Logistic Map. *UCSC Physics*, 11–15.
- [8] Lorenz, E. (1963). Deterministic Nonperiodic Flow. *Journal of the Atmospheric Sciences*, 20(130), 5-10.
- [9] Ghys, É. (2013). The Lorenz Attractor: A Paradigm for Chaos. *Poincaré Seminar*, 1, 24-28.
- [10] Rossler, O.E. (1976). An Equation for Continuous Chaos. *Physics Letters*, 57A(5), 1-2.
- [11] S. M., S. K., D.B. (2014). Is a One-Dimensional Return Map Sufficient to Describe the Chaotic Dynamics of a Three-Dimensional System? *Cornell University Library*, 1-12.
- [12] Shinn, J. (2010). Chemical Kinetics and the Rossler System. *Dynamics at the Horsetooth*, 2, 1-12.
- [13] Gaspard, P. (2005). Rossler Systems. *Encyclopedia of Nonlinear Sciences*, 808-811.
- [14] Albahaca, J. (2015). Analytical and Numerical Study of the Poincaré Map with Applications on the Computation of Periodic Orbits. *Uppsala University*, 6-9.
- [15] W. (2016). *Poincaré Maps and Interpretation*. Obtenido 11, 2018, de <https://physics.stackexchange.com/questions/141493/poincaré-maps-and-interpretation>.
- [16] Mandelbrot, B. (1967). How Long Is the Coast of Britain? Statistical Self-Similarity and Fractional Dimension. *Science*, 156(3775), 636-638.
- [17] Wikipedia contributors. (2018). List of fractals by Hausdorff dimension. *Wikipedia, The Free Encyclopedia*. Obtenido 11, 2018, de https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=List_of_fractals_by_Hausdorff_dimension.
- [18] Zeeman, M.L. (1994). Differential Equations and Applications to Biology and to Industry. *World Scientific*, 563-572.
- [19] J. V., J. W., M. A., J. N., J. S. (2004). Chaos in Low-Dimensional Lotka-Volterra Models of Competition. *University of Winsconsin*, 1-19.

- [20] Van Biezen, M. (2016). *Physics - Adv. Mechanics: Lagrangian Mech. (14 of 25) Pendulum w/ Oscillating Fulcrum* [Video]. Obtenido 11, 2018, de https://www.youtube.com/watch?v=_Ey_1avQAWc.