Tarea 4 - Mecánica Analítica

Rodrigo Aguilar Meneses

Entrega: 5/12/18

1. a) Prueba que las siguientes transformaciones son canónicas para cualquier μ.

$$q_1 = x\cos\mu + P_y \sin\mu \qquad q_2 = y\cos\mu + P_x \sin\mu$$

$$P_1 = P_x \cos\mu - y\sin\mu \qquad P_2 = P_y\cos\mu - x\sin\mu$$

Se debe probar que $\mathcal{J} J \mathcal{J}^T$

$$J\mathcal{J}^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\mu & 0 & 0 & -\sin\mu \\ 0 & \cos\mu & -\sin\mu & 0 \\ 0 & \sin\mu & \cos\mu & 0 \\ \sin\mu & 0 & 0 & \cos\mu \end{pmatrix}$$

$$J\mathcal{J}^T = \begin{pmatrix} \sin\mu & 0 & 0 & \cos\mu \\ 0 & \sin\mu & \cos\mu & 0 \\ 0 & -\cos\mu & \sin\mu & 0 \\ -\cos\mu & 0 & 0 & \sin\mu \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{J}J\mathcal{J}^T = \begin{pmatrix} \cos\mu & 0 & 0 & \sin\mu \\ 0 & \cos\mu & \sin\mu & 0 \\ 0 & -\sin\mu & \cos\mu & 0 \\ -\sin\mu & 0 & 0 & \cos\mu \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \sin\mu & 0 & 0 & \cos\mu \\ 0 & \sin\mu & \cos\mu & 0 \\ 0 & -\cos\mu & \sin\mu & 0 \\ -\cos\mu & 0 & 0 & \sin\mu \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{J}J\mathcal{J}^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = J$$

entonces las transformaciones son canónicas.

b) Si el Hamiltoniano original es

$$\mathcal{H} = (q_1^2 + q_2^2 + P_1^2 + P_2^2)/2$$

encuentre un nuevo Hamiltoniano como función de x, y, y sus momentos conjugados.

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2}\left(x^2\cos^2\mu + 2xP_y \sin\mu\cos\mu + P_y^2\sin^2\mu + y^2\cos^2\mu + \dots\right.$$

$$\dots + 2yP_x\sin\mu\cos\mu + P_x^2\sin^2\mu + P_x^2\sin^2\mu - 2yP_x\sin\mu\cos\mu + \dots$$

$$\left.\dots + y^2\sin^2\mu + P_y^2\cos^2\mu - 2xP_y\sin\mu\cos\mu + x^2\sin^2\mu\right)$$

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2}(x^2 + y^2 + P_x^2 + P_y^2)$$

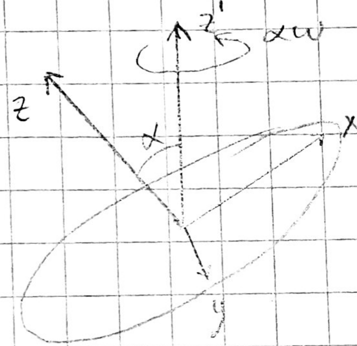
c) Usa el nuevo Hamiltoniano para resolver la dinámica con la restricción $y = P_y = 0$.

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2}(x^2 + \cancel{y^2}^{\,0} + P_x^2 + \cancel{P_y^2}^{\,0}) = \frac{1}{2}(x^2 + P_x^2$$

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial P_x} = P_x \qquad \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial x} = -x$$

$\boxed{2.-}$ Un disco delgado uniforme de masa M y radio A rota sin fricción con una velocidad angular uniforme ω sobre un eje vertical fijo que pasa sobre su centro y tiende un ángulo α con el eje de simetría del disco.

a) Determina los momentos de inercia y los ejes principales.



Los momentos de inercia son los elementos en la diagonal del tensor de inercia. $\exists$ una matriz O tq $O I O^T = I_{diag}$; los eigenvalores I_a son los momentos principales de inercia.

$$I = \begin{pmatrix} I_{11} & & \\ & I_{22} & \\ & & I_{33} \end{pmatrix}$$

$\rho = \dfrac{M}{\pi A^2}$. Por simetría, $I_{11} = I_{22}$; $I_{11} \neq I_{33}$

$$I_{11} = \int \rho y^2 \, dy = I_{22} = \int \rho x^2 \, dx$$

$$I_{33} = \int \rho (x^2 + y^2) \, dx dy = \int \rho r^2 \, dx dy = \int \rho r^3 \, dr d\varphi$$

$$\rightarrow I_{33} = 2\pi\rho \frac{r^4}{4}\Bigg|_0^A = \frac{2\pi M}{\pi A^2}\frac{A^4}{4} = \frac{MA^2}{2}$$

entonces $I_{11} = I_{22} = \dfrac{MA^2}{4}$.

Para los ejes principales:

$$\det\left|\begin{pmatrix} \frac{1}{4}MA^2-\lambda & & \\ & \frac{1}{4}MA^2-\lambda & \\ & & \frac{1}{2}MA^2-\lambda \end{pmatrix}\right|$$

$$\rightarrow \left(\frac{1}{4}MA^2-\lambda\right)^2\left(\frac{1}{2}MA^2-\lambda\right) = 0$$

$$\rightarrow \lambda = \frac{1}{4}MA^2,\ \frac{1}{2}MA^2$$

Para el primer λ:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{4}MA^2-\frac{1}{4}MA^2 & & \\ & \frac{1}{4}MA^2-\frac{1}{4}MA^2 & \\ & & \frac{1}{2}MA^2-\frac{1}{4}MA^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & & \\ & 0 & \\ & & \frac{1}{4}MA^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \vec{0} \quad \rightarrow \quad \frac{1}{4}MA^2 z = 0$$

$$\underbrace{z = 0}$$

con x, y, parámetros libres

Para el segundo λ:

$$\begin{pmatrix} 1/4\, MA^2 - 1/2\, MA^2 & & \\ & 1/4\, MA^2 - 1/2\, MA^2 & \\ & & 1/2\, MA^2 - 1/2\, MA^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -1/4\, MA^2 & & \\ & -1/4\, MA^2 & \\ & & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \vec{0}$$

$-1/4\, MA^2 x = 0$ $\qquad$ $-1/4\, MA^2 y = 0$

$x = 0$ $\qquad$ $y = 0$

Ejes principales en las bases $\vec{\delta}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$

$\vec{\delta} = (\delta_1, \delta_2, 0)$, $\vec{\beta} = (\beta_1, \beta_2, 0)$, $\vec{\gamma} = (0, 0, \gamma_3)$

seleccionando $\delta_1 = 1$, $\delta_2 = 0$, $\beta_1 = 0$, $\beta_2 = 1$, $\gamma_3 = 1$ tal que

$\vec{\delta} = (1, 0, 0)$, $\vec{\beta} = (0, 1, 0)$; $\vec{\gamma} = (0, 0, 1)$

b) Encuentra el vector de momento angular (magnitud y dirección).

$$\vec{L} = I\vec{\omega} = \begin{pmatrix} 1/4\, MA^2 & & \\ & 1/4\, MA^2 & \\ & & 1/2\, MA^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ \omega \sin\alpha \\ \omega\cos\alpha \end{pmatrix}$$

$$\vec{L} = \left(0,\ \frac{MA^2}{4}\omega \sin\alpha,\ \frac{MA^2}{2}\omega\cos\alpha\right)$$

$$\|\vec{L}\| = \sqrt{\left(\frac{MA^2}{4}\omega\sin\alpha\right)^2 + \left(\frac{MA^2}{2}\omega\cos\alpha\right)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{M^2A^4}{16}\omega^2\sin^2\alpha + \frac{M^2A^4}{4}\omega^2\cos^2\alpha}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{M^2A^4}{16}\right)\left(\omega^2\sin^2\alpha + 4\omega^2\cos^2\alpha\right)} = \frac{MA^2}{4}\sqrt{(1+3\omega^2\cos^2\alpha)}$$

La dirección de $\vec{L}$ está dada por el ángulo θ que forma con respecto a z, donde

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{L_2}{L_3}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{\frac{1}{4}MA^2\sin\alpha}{\frac{1}{2}MA^2\cos\alpha}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\tan\alpha\right)$$

c) ¿Cuál es la magnitud y dirección de la torca relativa al sistema de referencia del cuerpo (x, y, z)?

$$\tau = \frac{dL}{dt} = \frac{d}{dt}\left(0, \frac{MA^2}{4}\omega\sin\alpha, \frac{MA^2}{2}\omega\cos\alpha\right)$$

$$= \vec{0}$$