Teoría del Caos
Introducción y aplicaciones

René Samael Flores Ortega

División de Ciencias e Ingenierias de la Universidad de Guanajuato
Lomas del Bosque No.103

11 de Noviembre del 2018
Mecánica Analitica, Dr. Gustavo Niz

Abstract: Los sistemas caóticos rigen parte de la naturaleza que nos rodea, modela grandes sistemas no solo fisicos o de la naturaleza, sino sistemas sociales, biológicos y hasta psicológicos conductuales, los cuales son de gran importancia en el mundo moderno, y es un paso muy grande para entender por que las consas funcionan como funcionan, la teoria del caos es una rama aparentemente nueva de las matemáticas y dedicarle tiempo significa querer entender que es lo que esta pasando en realidad.

introducción

Las leyes de la fisica han podido sentar las bases de muchas predicciones en el entorno que nos desarrollamos y han partido de experimentaciónes en base a observaciones que cada individuo hace y que parte de una curiosidad como el saber por qué de muchos fenomenos, asi, se desarrollan diferentes postulados y principios que posteriormente se sustentan de rigor matemático, con un poco de suerte y manipulación las matematicas que sustentan dicha teoria se pueden desarrollar y llegar a soluciones claras y conscisas, pero, muchos de los casos, no se puede llegar a una solución de manera efectiva, los procesos suelen complicarse y poco a poco se pone en claro ciertas particularidades que hacen diferentes estos sistemas, dichos procesos y eventos toman lugar en aproximadamente 70 por ciento de los eventos generales que toman papel en la reaidad tanto fisicamente asi como socialmente, esta rama de la fisica en especial de las matemáticas se llama toeria del caos la cual lleva aproximadamente 100 aos de su conocimiento,varios matemáticos se dieron cuenta de la falta de determinismo y la complejidad de la situación entre ellos fue Henri Poincaré el cual al haber tenido un error en un desarrollo matemático se dio cuenta del verdadero problema que estaba afrontando.

1. Fractales

Parte de esta introducción al caos, es tambien estar familiarizado con la formalidad de la teoria, por lo que es requerrido explicar ciertos temas de relevancia que a continuación se abordaran.

Los fractales y la geometria fractal ha sido de gran importancia a finales del siglo XX y ahora en la actualidad, un fractal es una forma geometrica con propiedades de dimensionalidad, su particularidad es que dada su geometria, podriamos hacer aproximaciones o inclusive la ampliación de la figura y encontrar mucha similitud y seriados patrones los cuales se siguen repitiendo infinitamente en todo el término de la palabra, vino de la mano de el desarrollo tecnologico de la computación en el ultimo siglo, ya que los fractales se conocian pero no se habian analizado de manera detallada.

Benoit Maldebrot fue de los primeros precursores de esta rama llamada geometria fractal y fue

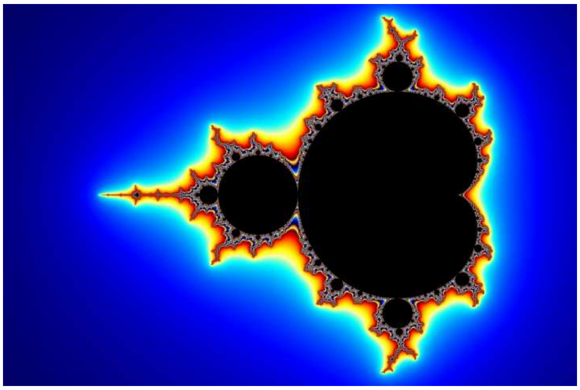

Fig. 1. Conjunto de Maldebrot, al hacer un incremento en la imagen se observaran subpatrones conocidos como los conjuntos de Julia

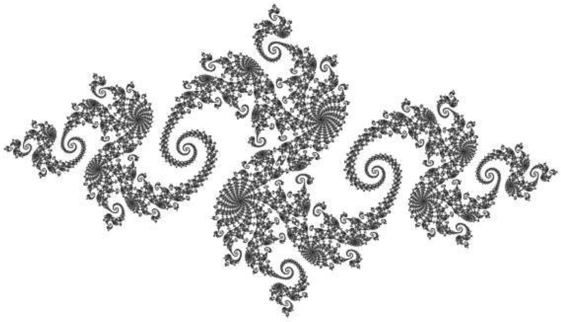

Fig. 2. Representación del conjunto de julia para el campo de los complejos

en base a su famoso conjunto de Maldebrot (Maldebrot Set).

y que posteriormente se pudo observar que parte del conjunto de Maldebrot llegaba a los conjuntos de Julia, los cuales son una enorme intervención en lo que hoy se conoce como Calculo complejo o variable compleja en especifico de aplicación de funciones holomórfas.
conjunto de Julia:

$$F_c(z) = z + c$$

Fractal de Maldebrot para potencias generales de z:

$$F_c(z) = z^n + c$$

No profundizaremos en la geometria fractal y su desarrollo, sino que aterrizaremos los conceptos y definiciónes para ver la importancia y extensa aplicación que los fractales tienen.

Parte de las aplicaciones de los Fractales es en muchos casos propiedades especificas de sistemas fisicos que pueden ser analizados por fractales, como es el caso de la fisiologia humana, cito una investigación de los doctores Goldberger, Rigney y West (1990), de la Harvard Medical School, El cual propusieron que ”la dinmica saludable est marcada por es- tructuras fsicas fractales, como la estructu- ra del sistema nervioso, las ramificaciones de los tubos bronquiales en el pulmn y las fibras rectoras del corazn, que permiten una amplia serie de ritmos. Los ritmos bio- lgicos podran ser interpretados como la sincronizacin de la misma dinmica de estructuras fractales que reproducen un modelo escalar. Las estructuras fractales asociadas con es- pectros escalares y de banda amplia son ri- cos en información”. Los sistemas dinámicos que presentan propiedades caóticos tienen a ser analizados de manera fractal, ya que la forma del sistema tiene

Fig. 3. Fractal natural observado en la superficie de una hoja

Fig. 4. coliflor de Romanesco

partes abstractas que hacen mucha relación a los fractales. A continuación se aprecian fractales presentes en la naturaleza.

2. Atractores

Otro pilar de lo que se empezo a fundamentar la teoria del caos y por el cual se pudo observar de manera mas gráfica y no tanto matemática, fueron los atractores extraos, sunconjunto de los atractores que se manejan en mecánica clasica mayormente en la dinamica de los sistemas plasmados en los espacio de fase. Antes de entrar en definición de lo que son los atractores extraos tendremos que definir el concepto de atractor.

Un atractor es un punto, lineal o espacio geométrico (que se define para diferentes geometrias dadas en el uso de atractores) en particular en el cual el espacio de fases de un sistema dinámico tiende despues de transcurrir temporalmente hacia un cierto espacio especifico en el cual todas las trayectorias convergen y son atraidas desde sus condiciones iniciales dadas en el sistema, esta extrechamente ligado con los puntos estables e inestables del sistema dada sus propiedades, un oscilador armonico en el punto

$$\chi_0$$

donde es el punto de equilibrio definido como atractor .

Los atractores debida a sus propiedades se subdividen en diferentes tipos de atractores definidos a continuación. Los atractores pueden ser caracterizados por su dimensionalidad. un atractor que tiene dimensión 0 es llamado sistema estático, el sistema es invariante en el tiempo. Un atractor de dimensión 2 corresponde a un sistema con periodicidad establecida y es llamado sistema periódico (ej: ciclos limite). Un atractor de dimensión mayor con cierta periodicidad corresponde a un sistema llamado ”cuasi periódico

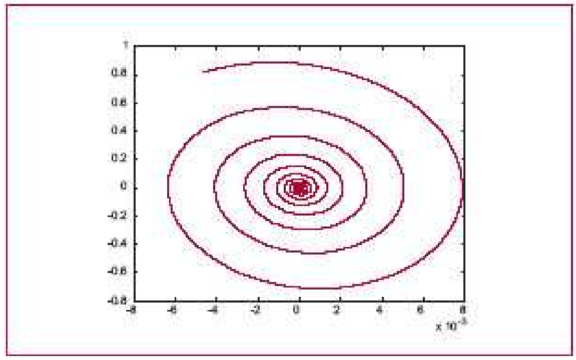

Fig. 5. Ejemplo de atractor punto fijo

2.0.1. Punto Fijo:

El atractor de tipo de punto fijo es el cual tiene un punto estable para todo el tiempo en el cual el sistema convergue y es fuertemente estable y se requiere de fuerzas exteras del sistema dinamica para alterar esa condiciones existen 3 tipos de estos Punto fijo que tomaremos de la bibliografia de Peter planschko ”Sistemas Dinamicos No Lineales Mecánica clasica y Transición al Caos” donde tomaremos las definiciones: Definido el sistema en el origen al haber hecho un desplazamiento

$$\xi = x - x_0(\lambda)$$

donde el punto fijo en xi=0 y teniendo en cuenta los puntos fijos hiperbolicos los cuales se definen cuando la parte real del eigenvalor es diferente de cero (cabe especificar que los sistemas dinámicos se les puede asociar un vector y un valor propio que definen al sistema en particular, y los eigenvalores pueden ser reales o complejos) y su clasificación esta dada:

1) Algunos de los Valores Propios tienen partes reales negativas, los otros, partes reales positivas. A este tipo de Puntos fijos se le llama punto de silla (saddle). A través de este punto hay variedades estables e inestables que atraen o repelen las trayectorias.
2) Todos los Valores Propios son reales y positivos (negativos). Entonces el Punto Fijo es inestable (estable) llamado fuente (sumidero).
3) los Puntos Fijos con Valores Propios complejos con partes reales positivas (negativas). Son llamados Puntos Espirales Inestables (estables).

Por el contrario, los Puntos Fijos no hiperbólicos (los cuales la parte real del valor propio es cero) con Valores Propios Puramente imaginarios son llamads centros (o puntos elípticos).

2.0.2. Ciclo Limite:

Son trayectorias cerradas en el espacio las cuales se auto sostienen sin necesidad de una fuerza externa en el sistema no lineal y la cual tiene asociada ”una” amplitud y una ”frecuencia unica que los cierra, son llamados comunmente como atractores periódicos.

2.0.3. limite toro

Estos tipos de atracores tienen gran similitud con los ciclo limite, pero estos toros limite son de dimensión mayor, de dos dimensiones, y dada su dimensionalidad, asi como en el ciclo limite, tiene 2 frecuencias y amplitudes asociadas, las cuales forman un ciclo cerrado bidimensional en las cuales las oscilaciones se generan alrededor del toro y a lo largo del toro, y estas propiedades de bidimensonalidad relacionado con periodicidad son llamados ”cuasi periódico. su invarianza en el tiempo tiene que cumplir que

$$x(t+T) = x(t)0 < t < T$$

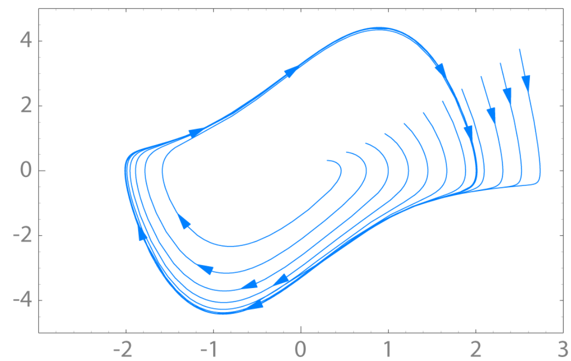

Fig. 6. Ejemplo de atractor punto ciclo limite, se puede apreciar una trayectoria periodica que se mantiene constante ene el tiempo y es por eso que es llamada ciclo limite

2.0.4. Atractores Extraos:

Estos atractores tienen total relevancia en la teoria del caos por que modelan el plano dinámico que generan gran parte de los sistemas dinamicos de la naturaleza y empiezan por tener un comportamiento en extremo sensibe, impredecibles en periodos amplios del tiempo y muchas de las veces tienen geometria extraa o de dificil visualizacion del proceso dinámico Antes que nada es bueno recalcar lo que ya sabiamos aunado con un poco de historia.

Alrededor de el ao 1970 a 1980 un famoso Matemático y meteorólogo llamado Edward Lorentz estaba estudiando el comportamiento ambiental y atmosférico. Lorentz conjunto un par de ecuaciones diferenciales acopladas que determinaban el sistema dinámico del ambiente, al graficarlo y observar su comportamiento se dio cuenta que presentaba ciertas particularidades ajenas a los demás sistemas, teniendo su sistema de ecuaciones empezo a iterar para ciertas condiciones inciales,en las cuales una de esas condiciones el tomo la decisión de redondear unas ciertas milesimas de la predicción del clima que habia calculado dias anteriores, al ver el comportamiento dinámico, se dio cuenta que poco a poco que pasaba el tiempo, las trayectorias empezaron a diverger y tomar caracteristicas completamente diferentes entre los espacios de fase, dandose cuenta de la extrema sensibilidad del sistema a condiciones iniciales y descubriend el famoso Atractor de Lorentz que actualmente se conoce como uno de los atractores extraos mas famosos.

Unas de las diferencias entre los atractores normales y los caóticos es la dimensionalidad, ”un sistema se dice periódico si su D2 es un numero entero (ej: 2,3,6,8) y es caótico si D2 es fraccionario (ej: 2,6 , 3,5) y esta es la razón de por que se usa la geometria fractal para estudiarlos. enunciaremos en breve la definicion de D2 cuando abrodemos mapeos. Otros Atractores extraos pero no menos importantes seran brevemente enunciados y se podran visualizar a continuación.

2.1. Exponentes de Lyaponuv

Para el estudio del caos requerimos de una medida de tendencia, que quiere decir esto, una regla o ley que nos pueda proporcional tal divergencia o la medida en cual cambian ciertos sistemas, y que pueda generalizarse para el análisis de los comportamientos caóticos que abordamos en este texto. El factor de convergencia o divergencia vamos a representarlo como convencionalmente se usa en el termino divergencia, para puntos o curvas que divergan o sean exteriormente su valor sera positivo, para curvas dadas que se concentran y convergan su valor sera negativo, haremos uso de la notación del Dr. Guillermo Abramson del Centro Atómico Bariloche, Instituto Balseiro y CONICET de Rio negro, Argentina. sobre su trabajo acerca del Caos. Cada que la ecuación diferencial se vaya iterando ira creciendo su distancia desde el punto inicial al punto p donde p es el punto inestable por un factor dado por:

$$\left| f\acute{(}p) \right| > 1$$

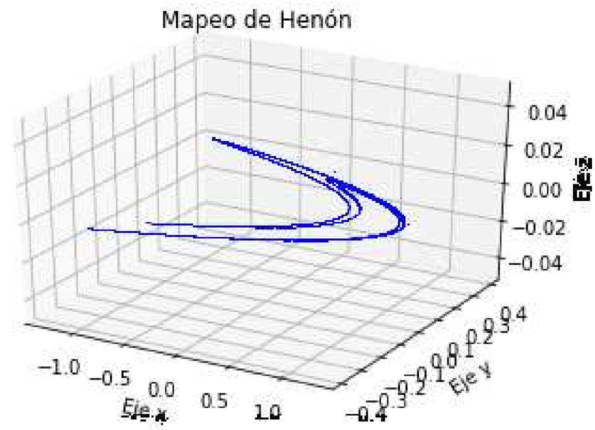

Fig. 7. Mapeo de Henón

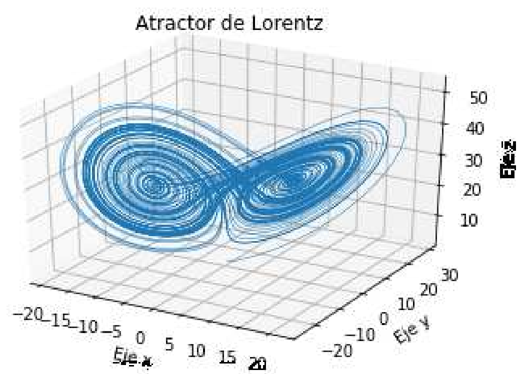

Fig. 8. El famoso atractor de lorenz que representa lo caótico del clima.

Y para su analogo estable, si tiende a atraerse a un punto q (estable) su factor de atracción sera de

$$\left|f(\acute{q})\right| < 1$$

Esto, escribiendolo de manera formal, para los exponentes de Lyaponuv nos interesara el caso 1 de inestabilidad, ya que los sistemas caoticos presentan en todo momento esta propiedad de inestabilidad, y su movimiento o divergencia estara dado por el exponente de Lyaponuv (mayor a 0 claramente) El numero de Lyaponuv es la medida promedio de cambio divergente de una ecuación o un sitema de ecuaciones diferenciales que interactuan en el espacio de fases y esta dado por:

$$\left|f(\acute{q})\right|$$

Llamado Numero de Lyaponuv Ahora queremos generalizar este concepto para orbitas periodicas en puntos intestables, que no necesariamente tengan puntos fijos o ciclos limite, para orbitas periodicas nos interesa la derivada k-ésima (geleraizando para cualquier ED) de la ecuación diferencial ya que en esa derivada define la periodicidad del la ecuación diferencial y por la relación anterior, cada derivada representa el cambio divergente (o de separación de las trayectorias, asi que el numero k representa el numero de iteracciones en los cuales tendra la ecuación diferencial como los "tantos cambios que tiene la función,la función se puede representar como el producto de sus derivadas antesesoras por regla de la cadena en los puntos inestable p's definido para la primera derivada, como el factor de cambio de la ecuacion diferencial en el punto intestable inicial y asi sucesivamente para los puntos consecutivos, El factor de cambio de la función es:

$$A^{1/k}$$

donde el factor de A como crecen las iteracciones va convergiendo a 1 por lo que el punto se va inestabilizando. Generalizamos el resultado para cualquier función que sea periodica o no, por lo que el k-ésimo valor puede ser muy grande asi que lo podemos poner en forma de limite (1), despues escribiendolo con propiedades de logaritmos (2) obtenemos las siguientes relaciones:

1)
$$L_0(p_0) = \lim_{n\to\infty} ((f(\acute{p_0})f(\acute{p_1})...f(\acute{p_n}))^{1/n}$$

2)
$$\Lambda_0(x_0) = \lim_{n\to\infty} 1/n(ln((f(\acute{p_0})f(\acute{p_1})...f(\acute{p_n})))^{1/n}$$

. Donde el exponente de Lyaponuv esta expresado de manera general.

2.2. Mapeos

Un mapeo es la estructura en la que hemos estado trabajando hasta ahora, en terminos simples, es el ”papel” en el cual analizamos los sistemas dinámicos, En general las aplicaciónes matematicas o ”mapeos” son maneras de relación directa de conjuntos que hacen mas fácil el analisis de cierto conjunto o generalidad. Existen muchos tipos de mapeos pero los que nos interesaran son Los Mapeos que facilitan la visualización de ciertos sistemas, como son los siguientes

—Mapeo Logístico: Es una visualización enfocada a la sociologia y explica la demografia de una cierta región o un cierto evento en el cual se visualizan sus caracteristicas mas notorios y significativas, este mapeo se genera simplemente por un la aplicación de un polinomio de 2do grado que define el cambio poblacional (crecimiento) con restricciones a ciertos valores poblacionales. dada por la ecuación:

$$\chi_{n+1} = r\chi_n(1-\chi_n)$$

imagen

—Mapas de Poincaré: Estos mapas en particular facilitan la visualización de los sistemas dinámicos, tomaremos definiciones especificas de los tipos de mapas de Poincaré de la bibliografia ”SISTEMAS DINÁMICOS NO LINEALES MECANICA CLASICA Y TRANSICION AL CAOS” De Paschko, Luis Mier y Casanueva, donde define 3 tipos:

1) Intersección de trayectorias con superficies dadas (en muchas aplicaciones, planos o hiperplanos). Éstos son, muchas veces, llamados mapas o cartas de Poincaré (MP) o secciones de Poincaré
2) Instantáneas, estroboscópicas tomadas a multiplos de un tiempo dado (por ejemplo, el periodo de un sistema). Tales mapas son llamados MP globales.
3) Discretización o integración de las ecuaciones de movimiento.
   Otro tipo de mapeos no menos importantes es el de Dimensión de Corrleación, tomaremos la definición de Cristina Andreu, Jess de Echave y Gualberto Buela-Casaesta de Ministerio de Educacin y Cultura (Zaragoza), definido como el minimo de dimensiones de un espacio que puede tener las trayectorias generadas por ell sistema, la dimensión de un sistema es su número de grados de libertad.

2.3. Secciones de Poincaré/Cartas de Poincaré

Como subconjunto de los mapas de Poincaré tenemos las secciones de Poincaré que son ”Intersección de trayectorias con superficies dadas” donde son subconjuntos del sistema dinámico.

3. Caos Conductual

Anteriormente se hablo sobre el caos y su relevancia en todas las ramas de la ciencia y en la sociologia, parece curioso el ponerse a pensar de que manera modelaria un sistema dinámico caótico y su respectiva teoria que lo forman, a un proceso fuera de la teoria fisica, pero parece de mayor relevancia cuando el caos puede explicar procesos neurobiologicos asociados con patologias y deficiencias en el conductismo, se ha estado desarrollando de manera fortuita y con un poco de extraeza. Se hara una introducción de la actividad Electroencefálica explicada por la teoria del caos.

Unos de las ramas que han abarcado gran análisis de las neurociencias ha sido la inteligencia artificial, que parte del análisis de un sistema inicialmente inflexible, citare un breve texto del libro de ”Redes Neurales” de James A. Anderson, que dice: ”Si uno examina la evolución de los sistemas nerviosos en los organismos, muy probabemente pasaron esta serie de eventos con respecto a nuestras obsevaciones. Primero, se formó un sistema inflexible que cumplía su función. Luego de un largo período de tiempo, un cierto grado de aprendizaje y flexibilidad se introdujo al sistema para hacerlo más adaptable al ambiente inmediato. la adaptación y el aprendizaje son habilidades peligrosas, porque involucran cambios conductuales, cambios en el cableado interno y una inestabilidad potencial. Son mantenidos bajo un estricto control biológico. En medicina y neurociencias hacemos uso del electrencefalograma (EEG) para estudiar la red neuronal de cerebro y ver su comportamiento eléctrico, esencialmente suma los potencias postinápticos que se originan inicialmente en el cortex cerebral en las cuales participan al rededor de un billón de neuronas. parte del extenso numero de neuronas interactuando, se presenta la idea de que tuviera conductas caóticas, en 1987 los doctores Mpitsos y Cohan asumen que el caos puede tener una gran relevancia en este tema en tema de evolución (lo antes mencionado por la (IA)) por que ”la generación de una adaptación rápida de los cambios ambientales, por ejemplo, las seales que permanecen invariantes en el tiempo, que nosotros llamamos ”ciclos limite” en los cuales tienen información de inicio, pero a la larga presentan poca relevancia por que pierden información hacerca de la actividad de manera rapida, sabiendo que el cerebro siempre genera nuevas respuestas y mucho de su desconocimiento parte de la falta de la información y la falla en apicaciones teoricas acerca del funcionamiento, debido a esto, Mpitsos en el mismo ao, asumio que ”una evolucion a largo plazo del caos es impredecible, por lo que podria explicar las nuevas respuestas posibles del cerebro. Poco poco nos damos cuenta que los EEG asi como conductas cerebrales tienden a ser caóticas para particularidades del evento, por ejemplo las transiciones en las ondas cerebrales (Delta, Theta, Alfa, Beta, Gamma) que son de cierta frecuencia y definen los estados del cerebro como vigilia, sueo profundo y estados de extrema relagación o alerta tienen mucho que decir, por que las ondas cerebrales o bifurcaciones pueden ser consideradas como importantes indicadores que posibles patologias en la función cerebral. En la psicopatologia aparecen valores D2 de actividad epiléptica con valores tan bajos como 2.05, muchos mas bajos que en sujetos SANOS. Y aun mas interesante, diversas formas de crisis epilépticas podrian ser clasificadas de acuerdo a su grado de coherencia, es decir, la correlación estadística registrada en la actividad electrica cerebral entre puntos simetricos del cuero cabelludo, parece tomar gran importancia el análisis caótico y veremos por que. ”se han apreciado propiedades de suma importancia al analizar el EEG, porque el estudio electrencefálico de una persona sana es irregular, los cambios en el potencial y sus amplitudes frecuenciales son mayores, entonces podriamos pensar en la analogia con la patologia, bajas valores de D2 se encuentran asociadas generalmente a estados de sueo profundo Ó a psicopatologias, tal parece que al al analizar el D2 se aprecian sistemas mas complejos para personas con actividad cerebral sana y para sujetos con coeficiente intelectual mayor, asi como una ligera disminución para sujetos que presentan deficiencias. El sistema fluctua intensamente en su dmensionalidad de las ondas alfas, significa que en este rango de frecuencias el cerebro tiene dos tipos de conducta: ruido y atractores extraos, es pertinente citar un texto de vital importancia:

”Se ha propuesto que el caos surge en el cerebro cuando dos o mas areas cumplen al menos

dos condiciones: se excitan una a otra con suficiente fuerza com para impedir que cualquiera de ellas quede en reposo, y , al mismo tiempo, son incapaces de coincidir en una frecuencia común oscilatoria, contribuyendo al aumento de la sensibilidad y la inestabilidad del sistema, al caos".

todo esto tiene un trasfondo de anánlisis en base a procesos biofisicos como los procesos de reacciones quimicas entre muchas otras mas.

los sistemas dinmicos enriquezen la informacion sobre la respuesta de los diferentes sistemas, favoreciendo la adaptacin de stos a las cambiantes demandas del ambiente, gracias a su especial sensibilidad ante pequeas modificaciones en las condi- ciones iniciales, que es la esencia principal del caos determinista. Esta mayor flexibilidad ex- plicara la fluctuación de las respuestas en- contradas en los sistemas y la imposibilidad de su prediccin exacta, no por la aleatorei- dad de los sistemas, sino por su dinmica catica. Las personas con patologias presentan estructuras D2 con baja y sistemas periodicos fuertemente estables (deterministicos) en contraste con las personas que presentan una salud mental tienen su estructura 2D mas compleja y caótica, que uno pensaria intuitivamente que fuera al revéz, pero es creible estas hipotesis, ya que las patologias en numerosos casos son dificiles de tratar y no tienen cura si no un tratamiento, eso podria esplicar la estabilidad presente en el 2D que en vez de ser flexible y producir nuevos valores se restringue a una cierta periodicidad, Babloyantz y Destexhe en 1986 sugirieron que las causas de crisis del tipo "petit mal" (petit mal o crisis de ausencia, en el cual se tienen breves alteraciones del estado de conciencia y es un tipo de convulsion generalizada) acarrean a la actividad cerebral hacia un movimiento peridico es- table, cambiar esos tales estados sera extraordinariamente difcil y slo posible mediante la dinmica catica de la actividad cerebral. para la investigación se cito varias veces el estudio "ACTIVIDAD ELECTROENCEFLICA SEGN LA TEORA DEL CAOS" Cristina Andreu, Jess de Echave y Gualberto Buela-Casal Ministerio de Educacin y Cultura (Zaragoza), Ayto. de Zaragoza, ** Universidad de Granada.

4. conclusiones

La teoría del caos tiene suma relevancia en las estructuras mas importantes que conocemos hoy en dia, los sistemas de dificil comprensión o donde la teoria actual falla por aproximaciónes o deficiencias en la matemática, la dinámica caótica viene a explicar eficientemente y mas aun, nos ofrece mas de donde buscar, y sobre todo, mas de que pensar, tal pareciera que mientras mas nos damos cuenta de como en verdad se comportan las cosas, menos sabemos sobre ellas, esta teoria promete grandes avances en todas las ramas de la ciencia y la sociologia entre muchas otras mas, y no es raro ya que estos sistemas rigen el 70 por cierto de todos los procesos en existencia, nnos falta mucho por recorrer y saber.

todos las imagenes y textos seran puestos en la bibliografia.

5. Códigos

import math valores de las constantes a = 1.4 b = 0.3 def maph(a,b,x,y): return y + 1.0 - a *x*x, b * x

iterates = 10000

Condiciones iniciales a = 1.4 b = 0.3 xtemp = 0.1 ytemp = 0.3

x = [xt] y = [yt]

for n in range(0,iterates): iteraciones xtemp, ytemp = HenonMap(a,b,xt,yt) x.append(xt) y.append(yt)

plotear las figuras en 3D fig = plt.figure() ax = fig.gca(projection='3d') ax.set x label (" Eje x ") ax.set ylabel("Eje y") ax.set zlabel("Eje z") ax.set title("Mapeo de Henn") plot(x,y, 'b,') show()

....

from pylab import* from mpl toolkits.mplot3d import Axes3D import matplotlib.pyplot as plt from matplotlib import pyplot import numpy as np import sympy from scipy import integrate import math

s = 10 r = 28 b = 2.667 def atraclorenz(x, y, z): x dot = s*(y - x) y dot = r*x - y - x*z z dot = x*y - b*z return x dot, y dot, z dot dt = 0.01 pasos = 10000

xs = np.empty((pasos + 1,)) ys = np.empty((pasos + 1,)) zs = np.empty((pasos + 1,)) xs[0], ys[0], zs[0] = (0., 1., 1.05)
for i in range(pasos):
x dot, y dot, z dot = lorenz(xs[i], ys[i], zs[i]) xs[i + 1] = xs[i] + (x dot * dt) ys[i + 1] = ys[i] + (y dot * dt) zs[i + 1] = zs[i] + (z dot * dt)
fig = plt.figure() ax = fig.gca(projection='3d') ax.plot(xs, ys, zs, lw=0.5) ax.set xlabel("Eje x") ax.set ylabel("Eje y") ax.set zlabel("Eje z") ax.set title("Atractor de Lorentz")
plt.show().

References

[1] T. Gregory Dewey,year 1997, Fractals in molecular biophysics, edition 1, Oxford University Press,198 Madison Avenue, New York, New York 10016.
[2] Martin C. Gutzwller, year 1990, Chaos in Classical and Quantum Mechanics,edition 1, McGRAW-HILL,175 Fifth Avenue, New York, NY, 10010, USA.
[3] Benoit Mandelbrot, year 1997, la geometria fractal de la naturaleza, edition 1, Tusquets Editores,Cesare Cantu,8 - 08023 Barcelona.
[4] Thornton y Marion, year 2008, classical dynamics of particles and sistems,edition 5, Brooks/code Cengage Learning, adress 20 Channel Center Street, Boston M.A 02201, USA.
[5] Peter Plaschko, Luis Mier y Teran Casanueva, 2002, Sistemas dinamicos no lineales Mecanica clasica y transicion al caos,edition 1, McGRAW-HILL,Mexico, DF.