Tarea 3
Mecanica Analitica
René Samuel flores Ortega

1.

tenemos que la acción de un Lagrangiano que dependia de x y ẋ esta dada por:

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(x, \dot{x}; t)\, dt$$

donde ahora agregaremos la dependencia de la aceleración como

$$S = \int L(x, \dot{x}, \ddot{x}; t)\, dt$$

procedemos a derivarla con respecto a un parametro λ y queda de la forma

$$\frac{\partial s}{\partial \lambda} = \frac{\partial s}{\partial \lambda} \int_{t_1}^{t_2} L(x, \dot{x}, \ddot{x}; t)\, dt$$

Metemos el diferencial ya que no es sobre el tiempo y desarrollamos

$$\frac{\partial s}{\partial \lambda} = \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L}{\partial \lambda} \frac{\partial x}{\partial \lambda} + \frac{\partial L}{\partial \lambda} \frac{\partial \dot{x}}{\partial \lambda} + \frac{\partial L}{\partial \lambda} \frac{\partial \ddot{x}}{\partial \lambda} \right) dt$$

Reescribimos y hacemos un cambio de variable

$$\frac{\partial x}{\partial \lambda} = \xi(t) \;,\; \frac{\partial \dot{x}}{\partial \lambda} = \frac{d\,\xi(t)}{dt} \;,\; \frac{d\ddot{x}}{d\lambda} = \frac{d^2\xi(t)}{dt^2}$$

tenemos que

$$\frac{\partial s}{\partial \lambda} = \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L}{\partial \lambda}\xi(t) + \frac{\partial L}{\partial \lambda}\frac{d\xi(t)}{dt} + \frac{\partial L}{\partial \lambda}\frac{d^2\xi(t)}{dt^2} \right) dt$$

Separamos

$$= \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial L}{\partial \lambda}\xi(t)\,dt + \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial L}{\partial \lambda}\frac{d\xi(t)}{dt}\,dt + \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial L}{\partial \lambda}\frac{d^2\xi(t)}{dt^2}$$

Resolvemos la integral

en los extremos son 0

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial L}{\partial \lambda}\frac{d\xi(t)}{dt}\,dt = \left.\left(\frac{\partial L}{\partial \lambda}\right)\left(\xi(t)\right)\right|_{t_1}^{t_2} - \underbrace{\int_{t_1}^{t_2} \left(\xi(t)\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \lambda}\right)\right) dt}_{!!}$$

$$u = \frac{\partial L}{\partial \lambda} \qquad dv = \frac{d\xi(t)}{dt}$$

$$du = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \lambda}\right) \qquad v = \xi(t)$$

ahora

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial L}{\partial \lambda}\left(\frac{d^2\xi(t)}{dt^2}\right) dt$$

$$dv = \frac{d^2\xi(t)}{dt^2} \qquad u = \frac{\partial L}{\partial \lambda} \qquad du = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \lambda}\right)$$

$$v = \frac{d\xi(t)}{dt}$$

$$\Rightarrow \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\lambda}} \frac{d^2 \xi(t)}{dt^2}\right) dt = \cancel{\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\lambda}}\right)\left(\frac{d\xi(t)}{dt}\right)\Bigg|_{t_1}^{t_2}}^{\,0} - \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\lambda}}\right)\right)\left(\frac{d\xi(t)}{dt}\right) dt$$

Resolvemos la integral

$$u = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\lambda}}\right) \qquad dv = \frac{d\xi(t)}{dt}$$

$$du = \frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\lambda}}\right) \qquad v = \xi(t)$$

$$\Rightarrow + \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\lambda}}\right)\left(\frac{d\xi(t)}{dt}\right) dt = \cancel{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\lambda}}\right)\xi(t)\Bigg|_{t_1}^{t_2}}^{\,0}$$

$$+ \int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\lambda}}\right)\right] \xi(t)\, dt$$

Rescribimos los resultados

$$\Rightarrow \frac{\partial S}{\partial \lambda} = \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial L}{\partial \lambda} \xi(t)\, dt - \int_{t_1}^{t_2} \xi(t)\left(\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\lambda}}\right)\right) dt$$

$$+ \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{\partial L}{\partial \ddot{\lambda}}\right)\right) \xi(t)\, dt$$

$$\frac{\partial S}{\partial \lambda} = \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial}{\partial \lambda}\xi(t) - \xi(t)\left(\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\lambda}}\right)\right) + \frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{\partial L}{\partial \ddot{\lambda}}\right)\xi(t)\right) dt$$

Factorizando

$$\frac{\partial s}{\partial \lambda} = \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L}{\partial \lambda} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\lambda}}\right) + \frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{\partial L}{\partial \ddot{\lambda}}\right) \right) \xi(t)\, dt$$

$\therefore$ queda la ecuación de Euler Lagrange

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\lambda}}\right) + \frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{\partial L}{\partial \ddot{\lambda}}\right) = 0$$

2.- tenemos que $L(q^a, \dot{q}^a, t) = \frac{1}{2} g_{ab}(q^c)\dot{q}^a \dot{q}^b$

Para comenzar generalizaremos el problema y calcularemos el principio de mínima acción para cualquier curva, sabiendo que calcular cualquier distancia esta dado por la longitud de arco denotado como ds, lo haremos en coordenadas generalizadas dadas en terminos del tensor metrico

$$ds^2 = g_{ab}\, dq^a dq^b$$

$\therefore$ calculemos $s = \int_\sigma ds$

$$= S = \int \sqrt{g_{ab}\, dq^a dq^b}$$ parametrizando con t tenemos

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{g_{ab}\, d\dot{q}^a d\dot{q}^b} dt$$

donde hacemos la variación δs

tenemos el lagrangiano en terminos de Las Ecuaciones de Euler - Lagrange

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial q^i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q} = \frac{1}{2} g_{ab,i}\, q^a q^b$$

donde la coma indica derivada parcial

pero el lado derecho es igual

$$\frac{1}{2} g_{ab,i}\, \dot{q}^a \dot{q}^b = g_{ib}\, \ddot{q}^i$$

por lo que escribimos

$$\frac{1}{2} g_{ab,i}\, \dot{q}^a \dot{q}^b - g_{ib}\, \ddot{q}^i = 0$$

Y por definición del tensor metrico $g_{ab} = \bar{e}_a \cdot \bar{e}_b$ al derivar covariantemente tenemos que $g_{ab,i} = \hat{e}_{a,i}\, \bar{e}_b + \bar{e}_a\, \bar{e}_{b,i}$

se separa esa suma en 2 terminos por regla de Leibniz.

y dada la definición del símbolo de christoffel tenemos que:

$$\Gamma^{i}_{lk} = e^{i} \cdot \frac{\partial \bar{e}_{l}}{\partial x^{k}}$$

Rescribimos

$$\frac{1}{2} \bar{e}_{a,i} \cdot e_{b} + e_{a} \cdot e_{b,i} - g_{ib} \ddot{q}^{i} = 0$$

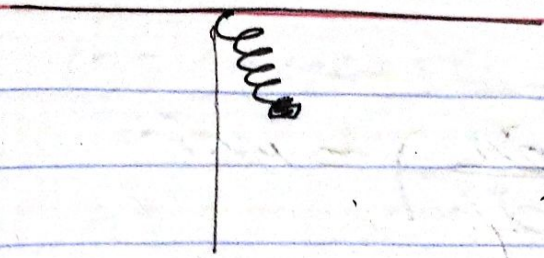
tenemos que la expresión queda como

$$\Gamma^{i}_{ab} = \frac{1}{2} g^{is} \Gamma_{s,ab}$$

tenemos que

$$\underline{\ddot{q}^{a} + \Gamma^{i}_{ab} \dot{q}^{a} \dot{q}^{b} = 0}$$

3.



Construimos el Lagrangiano

$$L = K - V$$

donde V serán dos potenciales, el del oscilador armónico y el gravitatorio

$$L = \frac{1}{2} m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^2 - \frac{1}{2} K(x^2+y^2) + mgy$$

haciendo una transformación de coordenadas tenemos $x = r\cos\theta$, el radio es $r(t)$

$$y = r\,sen\,\theta$$

$$\dot{x} = -r\,sen\,\theta + \dot{r}\cos\theta$$

$$\dot{y} = r\cos\theta + \dot{r}\,sen\,\theta$$

Se construye

$$L = \frac{1}{2} m((-r\,sen\,\theta + \dot{r}\cos\theta)^2 + (r\cos\theta + \dot{r}\,sen\,\theta)^2)^2$$

$$-\frac{1}{2} K(r-l)^2 + mgr\cos\theta \qquad \gamma = r - l$$

desarrollando

$$L = \frac{1}{2} m(\dot{x}^2 + r^2\dot{\theta}^2) + \frac{1}{2} K\gamma^2 + mgr\cos\theta$$

Aplicando Euler Lagrange

para r)

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\dot{r} \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{r}}\right) = m\ddot{r}$$

$$\frac{\partial L}{\partial r} = mr\dot{\theta}^2 + k\gamma + mg\cos\theta$$

$\therefore$ EL r)

$$\underbrace{m\ddot{r} - mr\dot{\theta}^2 - k\gamma - mg\cos\theta = 0}$$

EL θ)

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = mr^2\dot{\theta} \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) = mr^2\ddot{\theta} + 2mr\dot{\theta}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = -mgr\,\mathrm{sen}\,\theta$$

$\therefore$ EL θ)

$$\underbrace{mr^2\ddot{\theta} + 2mr\dot{\theta} + mgr\,\mathrm{sen}\,\theta = 0}$$

b) ptos de equilibrio

$\theta = 0$

1) $$-\frac{\partial V_{eff}}{\partial t} = 0$$

para r tenemos

$$\frac{\partial V}{\partial r} = -mg\cos\theta + k\gamma$$

$\therefore = r = \frac{mg\cos\theta}{K} + l$

para θ:

$$\frac{\partial V}{\partial \theta} = mgr\, sen\theta = 0$$

$\therefore\ sen\theta = 0$

$sen\theta$ se hace 0 en $\theta = n\pi \quad n \in \mathbb{Z}^+$

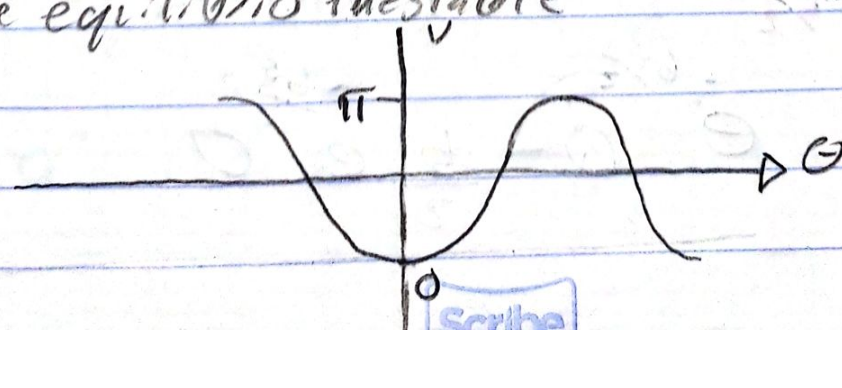
sustituimos para $\theta = \pi$

$$r = \frac{mg\cos\pi + l}{K} = \underbrace{-\frac{mg}{K} + l}$$

para $\theta = 0$

$$r = \frac{mg\cos(0) + l}{K} = \underbrace{\frac{mg}{K} + l}$$ donde son los ptos de equilibrio

donde los puntos de equilibrio son en $\theta = 0$ y $\theta = 0$, como es una funcion senoidal donde corta el minimo en 0 y punto de equilibrio inestable



4)

a) tenemos el sistema

$$L = e^{bt}\left(\frac{1}{2}m\dot{q}^2 - \frac{1}{2}K^2q^2\right)$$

tenemos las Ec de EL:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial L}{\partial q} = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial q} = -e^{bt}K^2 q \quad , \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) = bme^{bt}\dot{q} + me^{bt}\ddot{q}$$

$\therefore$ EL es:

$$me^{bt}\ddot{q} + bme^{bt}\dot{q} - e^{bt}K^2q = 0$$

factorizando

$$\Rightarrow e^{bt}(m\ddot{q} + bm\dot{q} - K^2q) = 0$$

como e^{bt} no puede ser 0

$$\underline{m\ddot{q} + bm\dot{q} - K^2q = 0} \rightarrow \text{Oscilador Amortiguado}$$

b) $Q = e^{bt/2} q$

$$q = Qe^{-bt/2}$$

$$\frac{d}{dt}q = e^{-bt/2}\dot{Q} - \frac{b}{2}e^{-\frac{bt}{2}}Q$$

sustituimos

$$L = e^{bt}\left(\frac{1}{2}m(e^{-bt/2}\dot{Q} - \frac{b}{2}e^{-bt/2}Q)^2 - \frac{1}{2}k^2 e^{-bt}Q^2\right)$$

$$L = e^{bt}\left(\frac{1}{2}m(e^{-bt}\dot{Q}^2 - be^{-bt}Q\dot{Q} + \frac{b^2}{4}e^{-bt}Q^2)\right.$$

$$\left. - \frac{1}{2}k^2 e^{-bt}Q^2\right)$$

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{Q}^2 - bQ\dot{Q} + \frac{b^2}{4}Q^2) - \frac{1}{2}k^2Q^2$$

$$\therefore \quad L = \frac{1}{2}m(\dot{Q}^2 - \frac{b}{2}Q)^2 - \frac{1}{2}k^2Q^2$$

Vemos que el lagrangiano es independiente del tiempo, por lo que la cantidad conservada es la energía

procedemos a calcular el Hamiltoniano, el cual es para sistemas conservados en tiempo

$$H = m\dot{Q}^2 - \frac{1}{2}mbQ\dot{Q} - \frac{1}{2}m\dot{Q}^2 + \frac{1}{2}mbQ\dot{Q} - \frac{1}{8}mb^2Q^2$$

$$+ \frac{1}{2}k^2Q^2$$

$$= \frac{1}{2} m\dot{Q}^2 + Q^2\left(\frac{1}{2} K^2 - \frac{1}{8} m b^2\right)$$

Si hacemos el cambio de variable notaremos que la energia <u>depende del tiempo</u>.