Ana Isabel Moreno Hernández

Mecánica Analítica

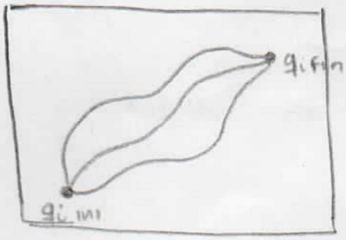
Tarea #3

Pregunta 1.

Deduce paso a paso las ecuaciones de Euler-Lagrange para un Lagrangiano que dependa de la aceleración, además de la velocidad y la posición, es decir, $L = L(\ddot{q}_i, \dot{q}_i, q_i, t)$.

Se consideran caminos suaves en C entre $q_{i\,in} \equiv q_i(t_{in})$ y $q_{i\,fin} \equiv q_i(t_{fin})$. Sólo un camino es el verdadero que sigue el sistema clásicamente.

C



A cada camino se le asigna un número llamado la acción S.
Se varía un poco el camino verdadero, pero manteniendo fijos los puntos iniciales y finales $\Rightarrow \delta q_i(t_{ini}) = 0 = \delta q_i(t_{fin})$

Si $L = L(\ddot{q}_i, \dot{q}_i, q_i, t)$, el cambio en la acción es

$$\delta S(q_i) = \delta \int_{t_{in}}^{t_{fin}} L(\ddot{q}_i, \dot{q}_i, q_i, t)\, dt$$

cambio en camino, no tiene que ver con integral en t

$$= \int_{t_{ini}}^{t_{fin}} \delta L(\ddot{q}_i, \dot{q}_i, q_i, t)\, dt$$

$$= \int_{t_{ini}}^{t_{fin}} \left(\frac{\partial L}{\partial \ddot{q}_i} \delta \ddot{q}_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i + \frac{\partial L}{\partial q_i} \delta q_i \right) dt$$

Pero $\delta \dot{q}_i = \dfrac{d(\delta q_i)}{dt}$ y $\delta \ddot{q}_i = \dfrac{d(\delta \dot{q}_i)}{dt}$

$$\Rightarrow \delta S(q_i) = \int_{t_{ini}}^{t_{fin}} \left[\frac{\partial L}{\partial \ddot{q}_i} \frac{d}{dt}(\delta \dot{q}_i) + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{d}{dt}(\delta q_i) + \frac{\partial L}{\partial q_i} \delta q_i \right] dt$$

$$= \int_{t_{ini}}^{t_{fin}} \frac{\partial L}{\partial \ddot{q}_i} \frac{d}{dt}(\delta \dot{q}_i)\, dt + \int_{t_{ini}}^{t_{fin}} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{d}{dt}(\delta q_i)\, dt + \int_{t_{ini}}^{t_{fin}} \frac{\partial L}{\partial q_i} \delta q_i\, dt \qquad (1)$$

Integramos por partes $\int_{t_{ini}}^{t_{fin}} \frac{\partial L}{\partial \ddot{q}_i} \frac{d}{dt}(\delta \dot{q}_i)\, dt$

Así, $u = \frac{\partial L}{\partial \ddot{q}_i}$ $\qquad dv = \frac{d}{dt}(\delta \dot{q}_i)\, dt$

$du = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \ddot{q}_i}\right) dt \qquad v = \delta \dot{q}_i$

Entonces

$$\int_{t_{ini}}^{t_{fin}} \frac{\partial L}{\partial \ddot{q}_i} \frac{d}{dt}(\delta \dot{q}_i)\, dt = \delta \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \ddot{q}_i}\Bigg|_{t_{ini}}^{t_{fin}} - \int_{t_{ini}}^{t_{fin}} \delta \dot{q}_i \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \ddot{q}_i}\right) dt \qquad \text{pero } \delta \dot{q}_i = \frac{d}{dt}\delta q_i$$

$$\Rightarrow \int_{t_{ini}}^{t_{fin}} \frac{\partial L}{\partial \ddot{q}_i} \frac{d}{dt}(\delta \dot{q}_i)\, dt = \delta \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \ddot{q}_i}\Bigg|_{t_{ini}}^{t_{fin}} - \underbrace{\int_{t_{ini}}^{t_{fin}} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \ddot{q}_i}\right) \frac{d}{dt}(\delta q_i)\, dt}_{\text{De nuevo, integramos por partes.}}$$

$m = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \ddot{q}_i}\right) \qquad dn = \frac{d}{dt}\delta q_i\, dt$

$dm = \frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{\partial L}{\partial \ddot{q}_i}\right) dt \qquad v = \delta q_i$

Por lo tanto,

$$\int_{t_{ini}}^{t_{fin}} \frac{\partial L}{\partial \ddot{q}_i} \frac{d}{dt}(\delta \dot{q}_i)\, dt = \delta \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \ddot{q}_i}\Bigg|_{t_{ini}}^{t_{fin}} - \delta q_i \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \ddot{q}_i}\right)\Bigg|_{t_{ini}}^{t_{fin}} + \int_{t_{ini}}^{t_{fin}} \delta q_i \frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{\partial L}{\partial \ddot{q}_i}\right) dt \qquad (2)$$

Luego, integramos por partes $\int_{t_{ini}}^{t_{fin}} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\left(\frac{d\,\delta q_i}{dt}\right) dt$

$r = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \qquad ds = \frac{d}{dt}(\delta q_i)\, dt$

$dr = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) dt \qquad s = \delta q_i$

$$\Rightarrow \int_{t_{ini}}^{t_{fin}} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\left(\frac{d}{dt}\delta q_i\right) dt = \delta q_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\Bigg|_{t_{ini}}^{t_{fin}} - \int_{t_{ini}}^{t_{fin}} \delta q_i \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) dt \qquad (3)$$

Finalmente, sustituimos en (1) las ecuaciones (2) y (3)

$$\delta S(q_i) = \int_{t_{ini}}^{t_{fin}} \frac{\partial L}{\partial \ddot{q}_i}\frac{d}{dt}(\delta \dot{q}_i)dt + \int_{t_{ini}}^{t_{fin}} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\frac{d}{dt}(\delta q_i)dt + \int_{t_{ini}}^{t_{fin}} \frac{\partial L}{\partial q_i}\delta q_i\, dt$$

$$= \delta \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \ddot{q}_i}\Big|_{t_{ini}}^{t_{fin}} - \delta q_i \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \ddot{q}_i}\right)\Big|_{t_{ini}}^{t_{fin}} + \int_{t_{ini}}^{t_{fin}} \delta q_i \frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{\partial L}{\partial \ddot{q}_i}\right)dt + \delta q_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\Big|_{t_{ini}}^{t_{fin}} -$$

$$- \int_{t_{ini}}^{t_{fin}} \delta q_i \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)dt + \int_{t_{ini}}^{t_{fin}} \delta q_i \frac{\partial L}{\partial q_i}\, dt$$

$$= \int_{t_{ini}}^{t_{fin}} \left[\frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{\partial L}{\partial \ddot{q}_i}\right) - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) + \frac{\partial L}{\partial q_i}\right]\delta q_i\, dt + \delta \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \ddot{q}_i}\Big|_{t_{ini}}^{t_{fin}} - \delta q_i \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \ddot{q}_i}\right)\Big|_{t_{ini}}^{t_{fin}} +$$

$$+ \delta q_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\Big|_{t_{ini}}^{t_{fin}}$$

Pero se mantuvieron fijos los puntos iniciales y finales al variar el camino $\Rightarrow \delta q_i(t_{ini}) = 0 = \delta q_i(t_{fin})$

Por lo tanto:

$$\delta q_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\Big|_{t_{ini}}^{t_{fin}} = 0 \ ; \quad \delta q_i \frac{\partial L}{\partial \ddot{q}_i}\Big|_{t_{ini}}^{t_{fin}} = 0 \quad \text{y} \quad \delta \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \ddot{q}_i}\Big|_{t_{ini}}^{t_{fin}} = \frac{d\,\delta q_i}{dt}\frac{\partial L}{\partial \ddot{q}_i}\Big|_{t_{ini}}^{t_{fin}} = 0$$

Así,

$$\delta S(q_i) = \int_{t_{ini}}^{t_{fin}} \left[\frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{\partial L}{\partial \ddot{q}_i}\right) - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) + \frac{\partial L}{\partial q_i}\right]\delta q_i\, dt$$

Si queremos un extremo ($\delta S = 0$) independiente de δq_i, entonces el integrando debe ser igual a cero en general, lo que implica que

$$\frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{\partial L}{\partial \ddot{q}_i}\right) - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) + \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \quad //$$

$\longrightarrow$ Ecuaciones de Euler-Lagrange para $L = L(\ddot{q}_i, \dot{q}_i, q_i, t)$

Pregunta 2

Encuentra las ecuaciones de Euler–Lagrange del modelo sigma

$$L(\dot{q},q,t) = \frac{1}{2} g_{ab}(q^c)\,\dot{q}^a \dot{q}^b$$

donde $g_{ab}(q^c)$ es una matriz simétrica e invertible, que es función de las coordenadas.

La ecuación de Euler–Lagrange está dada por

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^c}\right) - \frac{\partial L}{\partial q^c} = 0$$

Obtenemos primero $\frac{\partial L}{\partial q^c}$

$$\frac{\partial L}{\partial q^c} = \frac{1}{2}\frac{\partial g_{ab}}{\partial q^c}\dot{q}^a \dot{q}^b$$

Procedemos a obtener el otro término

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^c} = \frac{1}{2} g_{ab}\left(\dot{q}^b \frac{\partial \dot{q}^a}{\partial \dot{q}^c} + \dot{q}^a \frac{\partial \dot{q}^b}{\partial \dot{q}^c}\right) = \frac{1}{2} g_{ab}\dot{q}^b \frac{\partial \dot{q}^a}{\partial \dot{q}^c} + \frac{1}{2} g_{ab}\dot{q}^a \frac{\partial \dot{q}^b}{\partial \dot{q}^c}$$

Pero $\frac{\partial \dot{q}^a}{\partial \dot{q}^c} = 1$ si $a=c$ y $\frac{\partial \dot{q}^b}{\partial \dot{q}^c} = 1$ si $b=c$, de lo contrario $\frac{\partial \dot{q}^b}{\partial \dot{q}^c} = \frac{\partial \dot{q}^a}{\partial \dot{q}^c} = 0$

Por lo tanto, en el primer término sustituimos $a=c$ y en el segundo término $b=c$

$$\Rightarrow \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^c} = \frac{1}{2} g_{cb}\dot{q}^b \frac{\partial \dot{q}^c}{\partial \dot{q}^c} + \frac{1}{2} g_{ac}\dot{q}^a \frac{\partial \dot{q}^c}{\partial \dot{q}^c} = \frac{1}{2} g_{cb}\dot{q}^b + \frac{1}{2} g_{ac}\dot{q}^a$$

Pero b es un índice contraído, podemos llamarlo como sea, por eso cambiamos a "b" por "a", es decir, $b=a$

$$\Rightarrow \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^c} = \frac{1}{2} g_{ca}\dot{q}^a + \frac{1}{2} g_{ac}\dot{q}^a$$

Dado que $g_{ca} = g_{ac}$ $\Rightarrow \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^c} = \frac{1}{2} g_{ac}\dot{q}^a + \frac{1}{2} g_{ac}\dot{q}^a = g_{ac}\dot{q}^a$

Así, las ecuaciones de Euler–Lagrange son:

$$\frac{d}{dt}\left(g_{ac}\dot{q}^a\right) - \frac{1}{2}\frac{\partial g_{ab}}{\partial q^c}\dot{q}^a \dot{q}^b = 0$$

Luego, obtenemos $\frac{d}{dt}(g_{ac}\dot{q}^a)$

$$\frac{d}{dt}(g_{ac}\dot{q}^a) = g_{ac}\frac{d\dot{q}^a}{dt} + \dot{q}^a\frac{dg_{ac}}{dt}$$

Como g_{ac} depende de las coordenadas y las coordenadas dependen del tiempo:

$$\frac{d}{dt}(g_{ac}\dot{q}^a) = g_{ac}\frac{d\dot{q}^a}{dt} + \dot{q}^a\frac{\partial g_{ac}}{\partial q^b}\frac{dq^b}{dt} = g_{ac}\ddot{q}^a + \dot{q}^a\dot{q}^b\frac{\partial g_{ac}}{\partial q^b}$$

Por lo tanto, la ecuación de E-L cambia a

$$\frac{d}{dt}(g_{ac}\dot{q}^a) - \frac{1}{2}\frac{\partial g_{ab}}{\partial q^c}\dot{q}^a\dot{q}^b = g_{ac}\ddot{q}^a + \dot{q}^a\dot{q}^b\frac{\partial g_{ac}}{\partial q^b} - \frac{1}{2}\frac{\partial g_{ab}}{\partial q^c}\dot{q}^a\dot{q}^b = 0$$

Pero

$$\dot{q}^a\dot{q}^b\frac{\partial g_{ac}}{\partial q^b} = \frac{1}{2}\dot{q}^a\dot{q}^b\frac{\partial g_{ac}}{\partial q^b} + \frac{1}{2}\dot{q}^a\dot{q}^b\frac{\partial g_{ac}}{\partial q^b} = \frac{1}{2}\dot{q}^a\dot{q}^b\frac{\partial g_{ac}}{\partial q^b} + \frac{1}{2}\dot{q}^b\dot{q}^a\frac{\partial g_{bc}}{\partial q^a}$$

En este último paso se separó en dos el término $\dot{q}^a\dot{q}^b\frac{\partial g_{ac}}{\partial q^b}$ y, al final, como a y b son índices repetidos, decidí cambiar b por a y a por b en el último término de la separación.

Así, sustituyendo $\dot{q}^a\dot{q}^b\frac{\partial g_{ac}}{\partial q^b}$, E-L cambia a

$$g_{ac}\ddot{q}^a + \frac{1}{2}\dot{q}^a\dot{q}^b\frac{\partial g_{ac}}{\partial q^b} + \frac{1}{2}\dot{q}^a\dot{q}^b\frac{\partial g_{bc}}{\partial q^a} - \frac{1}{2}\frac{\partial g_{ab}}{\partial q^c}\dot{q}^a\dot{q}^b = 0$$

$$\Longleftrightarrow g_{ac}\ddot{q}^a + \dot{q}^a\dot{q}^b\underbrace{\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{ac}}{\partial q^b} + \frac{\partial g_{bc}}{\partial q^a} - \frac{\partial g_{ab}}{\partial q^c}\right)}_{=\Gamma_{abc}} = 0$$

$$\Rightarrow g_{ac}\ddot{q}^a + \dot{q}^a\dot{q}^b\Gamma_{abc} = 0$$

Multiplicamos la última ecuación por g^{cd}

$$(g_{ac}\ddot{q}^a + \dot{q}^a\dot{q}^b\Gamma_{abc} = 0)\,g^{cd} \Rightarrow g^{cd}g_{ac}\ddot{q}^a + \dot{q}^a\dot{q}^b g^{cd}\Gamma_{abc} = 0$$

Lo anterior equivale a

$$g^{d}{}_{a}\ddot{q}^{a} + \dot{q}^{a}\dot{q}^{b}\Gamma^{d}_{ab} = 0 \Rightarrow \delta^{d}{}_{a}\ddot{q}^{a} + \dot{q}^{a}\dot{q}^{b}\Gamma^{d}_{ab} = 0$$

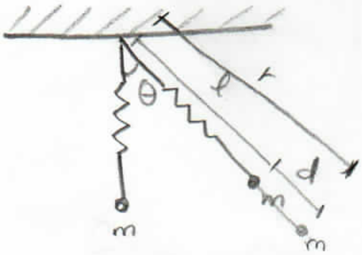
Finalmente, la ecuación de E-L es

$$\ddot{q}^{d} + \dot{q}^{a}\dot{q}^{b}\Gamma^{d}_{ab} = 0$$

Pregunta 3

A un péndulo simple se le reemplaza el cable por un resorte de longitud en reposo l y constante del resorte k.

a) Construye el Lagrangiano del sistema y deduce las ecuaciones de Euler-Lagrange.



En reposo la longitud es l, pero cuando se extiende la longitud es $r = l + d$.

La posición de la masa en x y y está dada por

$$x = r\sin\theta \Rightarrow \dot{x} = \dot{r}\operatorname{sen}\theta + r\cos\theta\,\dot{\theta}$$

$$y = -r\cos\theta \Rightarrow \dot{y} = -\dot{r}\cos\theta + r\operatorname{sen}\theta\,\dot{\theta}$$

Así, la energía cinética está dada por

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2+\dot{y}^2) = \frac{1}{2}m\left[(\dot{r}\operatorname{sen}\theta + r\cos\theta\,\dot{\theta})^2 + (-\dot{r}\cos\theta + r\operatorname{sen}\theta\,\dot{\theta})^2\right]$$

$$= \frac{1}{2}m\left[\dot{r}^2\operatorname{sen}^2\theta + \cancel{2r\dot{r}\operatorname{sen}\theta\cos\theta\,\dot{\theta}} + r^2\cos^2\theta\,\dot{\theta}^2 + \dot{r}^2\cos^2\theta \cancel{- 2r\dot{r}\operatorname{sen}\theta\cos\theta\,\dot{\theta}} + r^2\operatorname{sen}^2\theta\,\dot{\theta}^2\right]$$

$$= \frac{1}{2}m\left[\dot{r}^2(\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta) + r^2\dot{\theta}^2(\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta)\right]$$

$$= \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2)$$

La energía potencial total será la suma entre la energía potencial gravitacional y la energía potencial debida elongamiento del resorte

$$V = mgy + \frac{1}{2}k(d)^2 = -mgr\cos\theta + \frac{1}{2}k(r-l)^2$$

Por lo tanto,

$$L = T - V = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) + mgr\cos\theta - \frac{1}{2}k(r-l)^2$$

Ahora, obtenemos las ecuaciones de Euler-Lagrange:

- Para r:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{r}}\right) - \frac{\partial L}{\partial r} = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial r} = mr\dot{\theta}^2 + mg\cos\theta - k(r-l)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot r} = m\dot r \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot r}\right) = m\ddot r$$

Sustituyendo en Euler-Lagrange:

$$m\ddot r - mr\dot\theta^2 - mg\cos\theta + k(r-l) = 0 \Rightarrow \ddot r - r\dot\theta^2 - g\cos\theta + \frac{k}{m}(r-l) = 0 \quad (1)$$

- Para θ:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot\theta}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = -mgr\,\text{sen}\,\theta$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot\theta} = mr^2\dot\theta \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot\theta}\right) = mr^2\ddot\theta + 2mr\dot r\dot\theta$$

Sustituyendo en Euler-Lagrange para θ:

$$\left[mr^2\ddot\theta + 2mr\dot r\dot\theta + mgr\,\text{sen}\,\theta = 0\right]\frac{1}{r}$$

$$\Rightarrow mr\ddot\theta + 2m\dot r\dot\theta + mg\,\text{sen}\,\theta = 0 \Rightarrow r\ddot\theta + 2\dot r\dot\theta + g\,\text{sen}\,\theta = 0 \quad (2)$$

b) Encuentra los puntos de equilibrio y describe su estabilidad.

Los puntos de equilibrio se encuentran derivando el potencial e igualando a cero, ya que en estos puntos no hay movimiento, no existe ninguna fuerza.

En este caso, el potencial efectivo es igual a la energía potencial del sistema, entonces es más sencillo encontrar estos puntos de equilibrio.

$$V = -mgr\cos\theta + \frac{1}{2}k(r-l)^2$$

Así, para r:

$$\frac{\partial V}{\partial r} = -mg\cos\theta + k(r-l) = 0 \Rightarrow r = \frac{mg\cos\theta}{k} + l \quad (3)$$

Para θ:

$$\frac{\partial V}{\partial \theta} = mgr\,\text{sen}\,\theta = 0 \Rightarrow \text{sen}\,\theta = 0$$

Nos damos cuenta que $\text{sen}\,\theta = 0$ cuando $\theta = 0, \pi, 2\pi, \ldots$

Sustituyendo $\theta = 0$ en (3) obtenemos:

$$r = \frac{mg\cos 0}{k} + l = \frac{mg}{k} + l$$

Sustituyendo $\theta = \pi$

$$r = \frac{mg\cos\pi}{k} + l = -\frac{mg}{k} + l$$

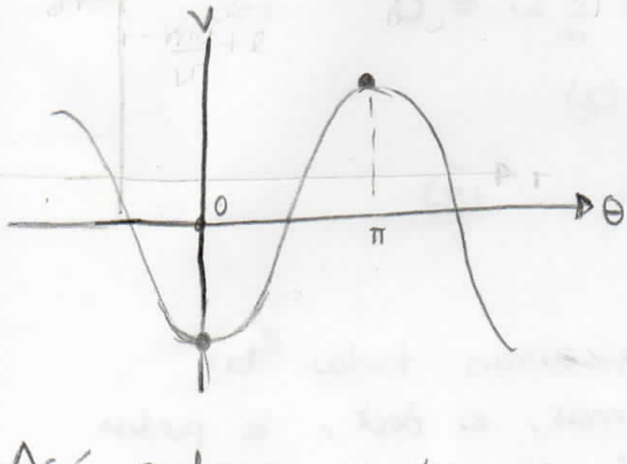
Por lo tanto, tenemos dos puntos de equilibrio:

Con $\theta = 0$, $r = \frac{mg}{k} + l$ y con $\theta = \pi$, $r = -\frac{mg}{k} + l$

La estabilidad de estos puntos de equilibrio depende de si son máximos o mínimos en la función de la energía potencial.

$$V = -mgr\cos\theta + \frac{1}{2}k(r-l)^2$$

Tomando a m, g, l y r como constantes, graficamos con respecto a θ



$\theta = 0$ es un mínimo, por lo tanto es un punto estable.

$\theta = \pi$ es un máximo, por lo tanto es un punto inestable.

Así, podemos concluir que $\theta = 0$ y $r = \frac{mg}{k} + l$ es un punto de equilibrio estable, mientras que $\theta = \pi$ y $r = -\frac{mg}{k} + l$ es un punto de equilibrio inestable.

c) Haz una expansión pequeña alrededor de los puntos de equilibrio y resuelve el sistema.

Los puntos de equilibrio estables son cuando $\theta = 0$ y $r = \frac{mg}{k} + l$

Hacemos una pequeña expansión alrededor de los puntos de equilibrio, es decir

$$\theta = \theta_0 + \delta\theta = \delta\theta$$

$$r = r_0 + \delta r = \frac{mg}{k} + l + \delta r$$

donde θ_0 y r_0 son los mínimos de la función de la energía potencial.

Así,

$$\dot{\theta} = \delta\dot{\theta} \Rightarrow \ddot{\theta} = \delta\ddot{\theta}$$

$$\dot{r} = \delta\dot{r} \Rightarrow \ddot{r} = \delta\ddot{r}$$

Sustituimos en la ecuación de movimiento (1)

$$\delta\ddot{r} - \left(\frac{mg}{k} + l + \delta r\right)\delta\dot{\theta}^2 - g\cos\delta\theta + \frac{k}{m}\left(\frac{mg}{k} + \cancel{l} + \delta r - \cancel{l}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \delta\ddot{r} - \left(\frac{mg}{k} + l + \delta r\right)\delta\dot{\theta}^2 - g\cos\delta\theta + g + \frac{k}{m}\delta r = 0 \qquad (4)$$

Luego en la ecuación de movimiento (2)

$$\left(\frac{mg}{k} + l + \delta r\right)\delta\ddot{\theta} + 2\delta\dot{r}\delta\dot{\theta} + g\,\mathrm{sen}\,\delta\theta = 0 \qquad (5)$$

Si son oscilaciones muy pequeñas, se descartan todas las cantidades que son de segundo orden o más, es decir, se pueden despreciar los términos $\delta\dot{\theta}^2$, $\delta\dot{r}\delta\dot{\theta}$, $\delta r\delta\ddot{\theta}$ y $\delta r\delta\dot{\theta}^2$.

Y como $\delta\theta$ es muy pequeño, $\mathrm{sen}\,\delta\theta \approx \delta\theta$ y $\cos\delta\theta \approx 1$

Así, las ecuaciones (4) y (5) se reescriben:

$$\delta\ddot{r} - \cancel{g} + \cancel{g} + \frac{k}{m}\delta r = 0 \quad \Rightarrow \quad \delta\ddot{r} + \frac{k}{m}\delta r = 0 \qquad (6)$$

$$\left(\frac{mg}{k} + l\right)\delta\ddot{\theta} + g\,\delta\theta = 0 \quad \Rightarrow \quad \delta\ddot{\theta} + \left(\frac{g}{\frac{mg}{k} + l}\right)\delta\theta = 0 \qquad (7)$$

Ahora, resolvemos la ecuaciones diferenciales lineales de segundo orden:

Para δr: Por coeficientes constantes

$$r^2 + \frac{k}{m} = 0 \Rightarrow r = \sqrt{\frac{k}{m}}\, i \quad \therefore \boxed{\delta r(t) = A\cos\sqrt{\frac{k}{m}}\,t + B\,\mathrm{sen}\sqrt{\frac{k}{m}}\,t}$$

Para $\delta\theta$: Por coeficientes constantes

$$r^2 + \left(\frac{g}{\frac{mg}{k} + l}\right) = 0 \Rightarrow r = \sqrt{\frac{g}{\frac{mg}{k} + l}}\, i \quad \therefore \boxed{\delta\theta(t) = D\cos\sqrt{\frac{g}{\frac{mg}{k} + l}}\,t + E\,\mathrm{sen}\sqrt{\frac{g}{\frac{mg}{k} + l}}\,t}$$

Si definimos a $w_r \equiv \sqrt{\frac{k}{m}}$ y $w_\theta \equiv \sqrt{\frac{g}{\frac{mg}{k} + l}}$ las soluciones son:

$$\delta r(t) = A\cos w_r t + B\,\mathrm{sen}\, w_r t$$

$$\delta\theta(t) = D\cos w_\theta t + E\,\mathrm{sen}\, w_\theta t$$

donde $A, B, D, E \in \mathbb{R}$. y dependen de las condiciones iniciales del sistema.

Pregunta 4

Considera el siguiente Lagrangiano dependiente del tiempo para un grado de libertad (q)

$$L = e^{bt}\left(\frac{1}{2}m\dot{q}^2 - \frac{1}{2}k^2q^2\right)$$

con k, b y m positivas

a) Encuentra las ecuaciones de Euler-Lagrange. ¿Se parece a algún sistema físico visto en clase?

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial L}{\partial q} = 0 \quad \rightarrow \text{Ecuación de Euler-Lagrange}$$

$$\frac{\partial L}{\partial q} = -e^{bt}k^2 q$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = me^{bt}\dot{q} \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) = me^{bt}\ddot{q} + bme^{bt}\dot{q}$$

Sustituimos en Euler-Lagrange

$$me^{bt}\ddot{q} + bme^{bt}\dot{q} - e^{bt}k^2q = 0$$

$$\Rightarrow e^{bt}(m\ddot{q} + bm\dot{q} - k^2q) = 0 \Rightarrow \ddot{q} + b\dot{q} - \frac{k^2}{m}q = 0$$

Sí, se parece a la ecuación de movimiento de un oscilador amortiguado.

b) Realiza el cambio de variable $Q = e^{bt/2}q$, y construye el Lagrangiano como función de Q y dQ/dt. Encuentra la simetría continua de este Lagrangiano y deduce la cantidad conservada asociada a ella usando el teorema de Noether. Re-escribe esta cantidad conservada en términos de la variable original q y discute el resultado.

Si $Q = e^{bt/2} q \Rightarrow q = e^{-bt/2} Q \Rightarrow \dot{q} = e^{-bt/2}\dot{Q} - \frac{b}{2} e^{-\frac{bt}{2}} Q$

Sustituimos q y $\dot{q}$ en el lagrangiano

$$L = e^{bt}\left(\frac{1}{2} m\dot{q}^2 - \frac{1}{2}k^2 q^2\right)$$

$$= e^{bt}\left(\frac{1}{2} m\left\{e^{-\frac{bt}{2}}\dot{Q} - \frac{b}{2} e^{-\frac{bt}{2}} Q\right\}^2 - \frac{1}{2}k^2 e^{-bt} Q^2\right)$$

$$= e^{bt}\left(\frac{1}{2} m\left\{e^{-bt}\dot{Q}^2 - b e^{-bt} Q\dot{Q} + \frac{b^2}{4} e^{-bt} Q^2\right\} - \frac{1}{2}K^2 e^{-bt} Q^2\right)$$

$$= \frac{1}{2} m\left(\dot{Q}^2 - bQ\dot{Q} + \frac{b^2}{4} Q^2\right) - \frac{1}{2}K^2 Q^2$$

Así, $L(\dot{Q}, Q, t) = \frac{1}{2} m\left(\dot{Q}^2 - \frac{b}{2} Q\right)^2 - \frac{1}{2}k^2 Q^2$

Podemos encontrar las ecuaciones de Euler-Lagrange de este nuevo sistema:

$$\frac{\partial L}{\partial Q} = -\frac{1}{2} mb\dot{Q} + \frac{1}{4} mb^2 Q - K^2 Q$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{Q}} = m\dot{Q} - \frac{1}{2} mbQ \quad \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{Q}}\right) = m\ddot{Q} - \frac{1}{2} mb\dot{Q}$$

Así,

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{Q}}\right) - \frac{\partial L}{\partial Q} = m\ddot{Q} - \cancel{\frac{1}{2} mb\dot{Q}} + \cancel{\frac{1}{2} mb\dot{Q}} - \frac{1}{4} mb^2 Q + K^2 Q = 0$$

$$\Rightarrow m\ddot{Q} + \left(K^2 - \frac{1}{4} mb^2\right) Q = 0$$

$$\Rightarrow \ddot{Q} + \left(\frac{k^2}{m} - \frac{1}{4} b^2\right) Q = 0$$

Notamos que esta ecuación es parecida a la ecuación de movimiento de un oscilador armónico simple.

En la variable Q, el Lagrangiano no depende explícitamente del tiempo, por lo tanto el Lagrangiano es invariante ante traslaciones temporales. Como $\frac{\partial L}{\partial t} = 0$, entonces $\mathcal{H} = \frac{\partial L}{\partial \dot{Q}}\dot{Q} - L$ es la cantidad conservada (la energía se conserva).

Así,

$$\mathcal{H} = (m\dot{Q} - \tfrac{1}{2}mbQ)\dot{Q} - \tfrac{1}{2}m(\dot{Q}^2 - bQ\dot{Q} + \tfrac{b^2}{4}Q^2) + \tfrac{1}{2}k^2Q^2$$
$$= m\dot{Q}^2 - \tfrac{1}{2}mbQ\dot{Q} - \tfrac{1}{2}m\dot{Q}^2 + \tfrac{1}{2}mbQ\dot{Q} - \tfrac{1}{8}mb^2Q^2 + \tfrac{1}{2}k^2Q^2$$
$$= \tfrac{1}{2}m\dot{Q}^2 - \tfrac{1}{8}mb^2Q^2 + \tfrac{1}{2}k^2Q^2$$
$$= \tfrac{1}{2}m\dot{Q}^2 + Q^2\left(\tfrac{1}{2}k^2 - \tfrac{1}{8}mb^2\right) \quad //$$

Esta energía conservada, la cual es la energía total del oscilador armónico simple (por lo concluido anteriormente de las ecuaciones de movimiento del sistema) es proporcional a la amplitud del oscilador armónico simple, ya que la amplitud es una constante en este tipo de oscilador.

Luego, hacemos el cambio de variable $Q = e^{\frac{bt}{2}}q \Rightarrow$ donde

$$\dot{Q} = e^{\frac{bt}{2}}\dot{q} + \frac{b}{2}e^{\frac{bt}{2}}q$$

$$\mathcal{H} = \tfrac{1}{2}m\left(e^{\frac{bt}{2}}\dot{q} + \tfrac{b}{2}e^{\frac{bt}{2}}q\right)^2 + e^{bt}q^2\left(\tfrac{1}{2}k^2 - \tfrac{1}{8}mb^2\right)$$
$$= \tfrac{1}{2}m\left(e^{bt}\dot{q}^2 + be^{bt}q\dot{q} + \tfrac{b^2}{4}e^{bt}q^2\right) + e^{bt}q^2\left(\tfrac{1}{2}k^2 - \tfrac{1}{8}mb^2\right)$$
$$= \tfrac{1}{2}m\left(e^{bt}\dot{q}^2 + be^{bt}q\dot{q}\right) + \tfrac{1}{2}k^2e^{bt}q^2 + \cancel{\tfrac{1}{8}mb^2e^{bt}q^2} - \cancel{\tfrac{1}{8}mb^2e^{bt}q^2}$$
$$= e^{bt}\left(\tfrac{1}{2}m\dot{q}^2 + \tfrac{1}{2}mbq\dot{q} + \tfrac{1}{2}k^2q^2\right)$$
$$= \tfrac{1}{2}me^{bt}\left(\dot{q}^2 + bq\dot{q} + \tfrac{k^2}{m}q^2\right) \quad //$$

Es notorio que para la variable q, la energía no es constante, ésta depende del tiempo. Con la analogía anterior hecha de la energía y la amplitud para el oscilador simple descrito por el lagrangiano de la variable Q, podemos hacer la misma analogía para la variable q en la que su lagrangiano describe un oscilador amortiguado. En este caso, la amplitud que decae exponencialmente con el tiempo del oscilador amortiguado dependerá de la energía no conservada en el sistema descrito por q.