Fenómeno Caótico

Universidad de Guanajuato
División de Ciencias e Ingenierías
Mecánica Analítica
David Cabrera Martínez

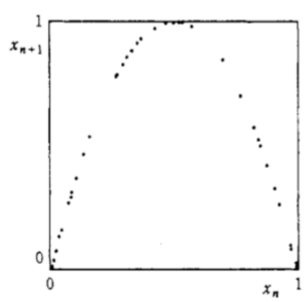
I. Introducción

Subsección: ¿Qué es el Caos?
La Palabra Çaos.es originaria del griego $\chi\alpha'o\varsigma$ y su significado cotidiano es " un estado sin orden" . Esta palabra nos recuerda a un estado totalmente desorganizado, en contraste con el cosmos, un estado ordenado. Aunque el çaos"no es un estado ordenado, indica un fenómeno que no está totalmente desordenado sino moderadamente desordenado y muestra un movimiento temporalmente irregular. Además, se refiere a üna oscilación irregular gobernada por una regla relativamente simpleoscilación"simplemente representa una variación de ciertas cantidades.

Suponemos que el $(n+1)-$ésimo término(x_{n+1}) depende del n-ésimo término y lo puede ser escrito como el Ansatz:

$$x_{n+1} = f(x_n)$$

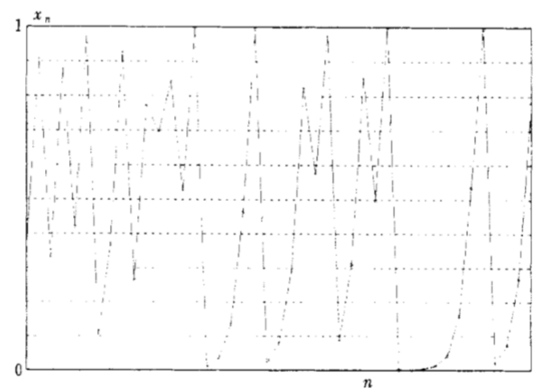
para visualizar ésta relación concretamente, cosideraremos un plano cuales coordenadas son x_n como absisa y x_n+1 como la ordenada. esto es los puntos (x_n, x_{n+1}) donde (n=1,2,3,4,....), son graficados en orden, esto revela una parabola , la cual es convexa hacia arriba.



Esta relación es llamada mapa de x_n a x_{n+1}, Ahora en este mapa

$$x_{n+1} = L(x_n) = x_n(1-x_n)$$

En otras palabras la función esta dada por $f(x) = 4x(1-x)$, la relación donde el valor de x_{n+1} es determinado solamente por x_n es llamado tradicionalmete como un mapa uno-dimencional. El mapa definido por $x_{n+1} = f(x_n)$ es llamado el mapa logístico. Es sorprendende que series genredas por una regla tan simple luzca aparentemente irregular. La irregularidad de éstas series es mejor vista si es graficada en una coordenada n más larga, por ejemplo:



Las series entonces se comporta como si tomara casi cualquier valor en el intervalo [0,1]. Es una peculiaridad fenomenológica de el caos que se comporta irrgularmente incluso cuando es generado por una ecuación tan simple.
Hay infinitas reglas simples ademas de las ecuaciones pasadas que generan series irregulares. Dos ejemplos irregulares son:

$$x_{n+1} = T(x_n) = \begin{cases} 2x_n & 0 \leq x_n \leq 0{,}5 \\ 2-2x_n-1 & 0{,}5 < x \leq 1 \end{cases}$$

$$= 1 - |1-2x_n|$$

$$x_{n+1} = TB = \begin{cases} 2x_n & 0 \leq x_n \leq 0{,}5 \\ 2x_n - 1 & 0{,}5 < x \leq 1 \end{cases}$$

Subsección: Características del Caos

El caos es bastante vulnerable al error numérico, que está controlado por la precisión de la computadora. Esto equivale a introducir ruido aleatorio en el décimo dígito, por ejemplo, en un proceso algebraico con precisión infinita. El caos es muy sensible a este tipo de pequeña perturbación. Este hecho tiene una gran implicación en el caos como fenómeno natural. Esto se debe a que siempre existe perturbación aleatoria en el mundo natural. Este sistema de çaos mas una pequeña perturbación"hace al caos, que es esencialmente determinista, indeterminista en la práctica. En otras palabras, el sistema en un momento posterior se determinará si un sistema caótico, con un mapa dado y una condición inicial, no tiene ninguna perturbación. Si. en contraste, existen alteraciones, por pequeñas que sean, el valor de la serie puede especificarse solo como un intervalo, como [0, 1] o una distribución de probabilidad, como máximo, debido a su sensibilidad a la condición inicial. Este es un aspecto práctico importante del caos. Ciertamente, se requiere introducir una definición de caos más regorosa que la intuitiva, es decir, üna oscilación irregular generada por una regla simple", mencionada en este capítulo. Esto equivale a definir qué se entiende por ïrregularidad". Existen irregularidades tales como las series generadas por los mapas mencionados anteriormente, una serie de puntos de un dado o una secuencia de caras de una moneda cuando se lanza repetidamente. El caos se genera no solo por un mapa unidimensional sino también por mapas más complicados o un sistema de ecuaciones diferenciales. También se debe tener en cuenta que el caos se observa en los fenómenos del mundo real. La existencia del caos en realidad lo convierte no solo en un tema de matemáticas o física computacional, sino también en un tema de experimentos u observaciones en muchos campos.

Subsección: Caos en la naturaleza La relación entre los mapas unidimensionales y el caos en el mundo real. También se menciona la importancia del caos. Los mapas unidimensionales, siendo tan simples, parecen no tener nada que ver con el caos existente en el mundo real. Este no es el caso, sin embargo, y pueden extraerse de oscilaciones irregulares encontradas en experimentos u observaciones.

Uno no encuentra ningún sistema en la mecánica clásica que muestre un comportamiento tan complejo como el caos. Por ejemplo, la caída libre, un péndulo simple y el movimiento planetario tienen soluciones con un comportamiento simple. En otras palabras, estos sistemas dinámicos son matemáticamente integrables y sus soluciones se comportan bien. Parece que estos ejemplos han llevado a la ilusión de que cualquier sistema determinista debería comportarse igualmente bien. El caos es un contraejemplo a este punto de vista en la mecánica. También nos obliga a pensar en el sesgo de que un sistema con un comportamiento complejo es un sistema de muchos cuerpos y el sistema en sí mismo debe ser complejo. Un péndulo doble, que es un sistema simple, pero que muestra un comportamiento complejo. Este es un ejemplo de un sistema conservativo. Aunque este es un ejemplo familiar, este no es un caos asociado con un atractor. Otro significado del caos es que el comportamiento futuro del sistema combinado (caos + pequeñas perturbaciones) es impredecible porque el caos muestra una inestabilidad orbital. Esta impredecibilidad aparece en un sistema para el cual se aplica la mecánica macroscópica clásica y, por lo tanto, tiene importancia práctica, en contraste con el principio de incertidumbre en la mecánica cuántica, que a menudo se discute en el contexto de la epistemología en un mundo microscópico. Es bastante reciente que la existencia del caos en un sistema realista ha atraído mucha atención y aún es un tema nuevo en física. Aunque el caos es un fenómeno único hasta el momento, se convertirá en un tema estándar, como una oscilación regular, y su posición en la naturaleza se apreciará adecuadamente. Aunque el caos generado por un mapa unidimensional parece ser un juguete, sirve como la base del caos en general. El caos no se caracteriza por su comportamiento irregular en la serie de oscilaciones.

II. Rutas al Caos

Un sistema que muestra un comportamiento caótico experimenta transiciones entre estados no caóticos y caóticos en general. Hay varias formas en que un sistema experimenta una transición al caos; Tres típicas son:
(a) A través de consecutivas bifurcacines Pitchfork al caos. Esto se llama comúnmente la ruta Feigenbaum.
(b) A través de bifurcaciones tangentes inversas o caos intermitente a caos. Esta ruta al caos se llama la ruta Pomeau-Manneville.
(c) A través de repetidas bifurcaciones de Hopf al caos. Esta es una ruta al caos acentuada por Ruelle y Takens.

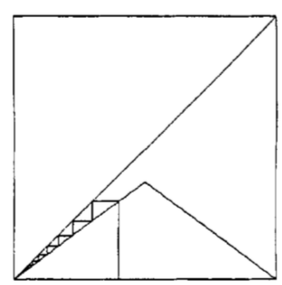
Subsección: Bifurcación Pitchfork y Feigenbaum route

Introduzcamos un parámetro en el mapa logístico L(x) y el mapa de tienda T(x):

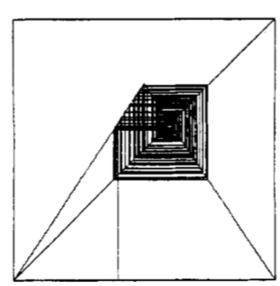
$$T_A(x) \equiv A(1-|2x-1|) \to (0 < A \leq 1)$$

$$L_r(x) = \frac{R}{4}L(x) = Rx(1-x) \to (0 < R \leq 4)$$

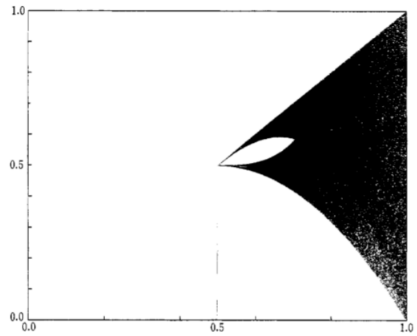
Estos mapas parametrizados LR (x) y TA (x) también se llamarán el mapa logístico y el mapa tent como antes. El dominio de x también se toma como [0, 11. Consideremos primero el mapa tent . La figura muestra que todas las órbitas que comienzan dentro del dominio se aproximan a 0 asintóticamente cuando A <1/2. Por lo tanto el caos no se produce. En el caso A>1/2, en contraste, aparece un punto fijo inestable en x = 2A / (2A + 1) y, al mismo tiempo, el punto x = 0 también se vuelve inestable. La pendiente del



mapa es mayor que 1 y el número de Lyapunov es un número positivo $\log 2A$ y, por lo tanto, estos hechos conducen al caos. De hecho, una órbita aperiódica, que es característica del caos, se observa en el cálculo numérico como se muestra en la figura: Cabe señalar que las órbitas aperiódicas en este



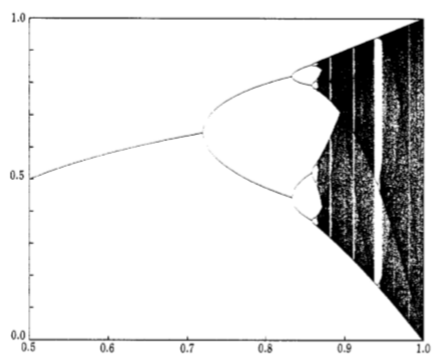
caso no se distribuyen en todas partes del intervalo [0, 1] sino que se localizan dentro del intervalo [2A(1 -A), A]. Además, las órbitas se localizan aún más dentro de partes del intervalo anterior para$\frac{1}{2} < A \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$.mientras que la órbita se extiende a lo largo del intervalo $\frac{\sqrt{2}}{2} < A \leq 1$, como se muestra en la siguiente figura: En resumen, la órbita



estacionaria (es decir, una órbita después de un gran número de iteraciones) del mapa de la tienda hace una transición repentina en A = de una órbita periódica estable x=0 a una órbita caótica a medida que A aumenta. Si A aumenta más, la región caótica se propaga a lo largo del intervalo [0,1].

Ejemplos de diagrama de bifurcación son los mapas:

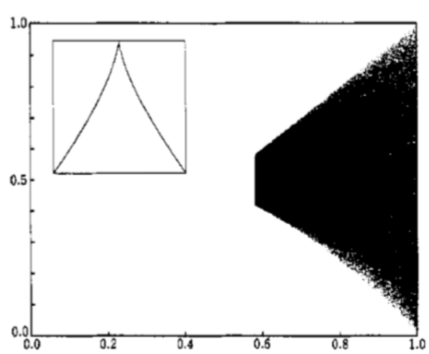
$$x_{n+1} = A \sin_n$$

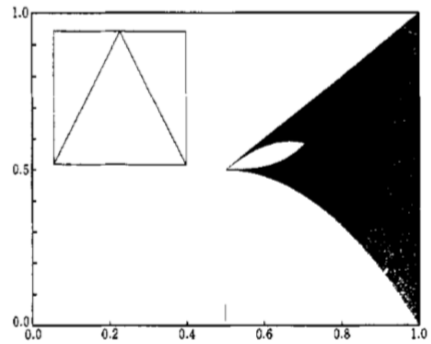


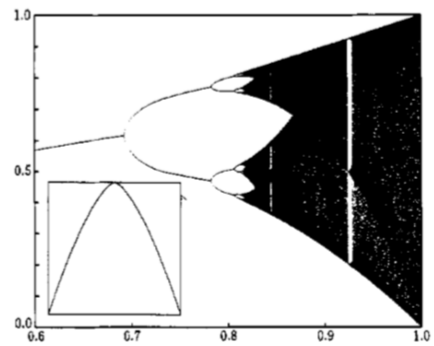
Orbitas estacionarias del mapa:

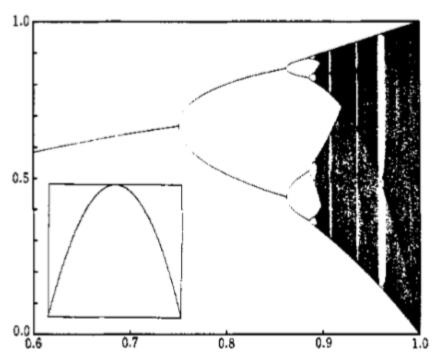
$$x_{n+1} = A(1 - \left|1 - x^{2n}\right|^p)$$

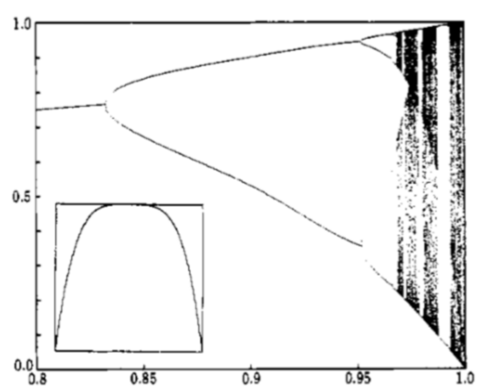
C el parametro p=0.7, p=1.0,p=1.5,p=2 y p=4.





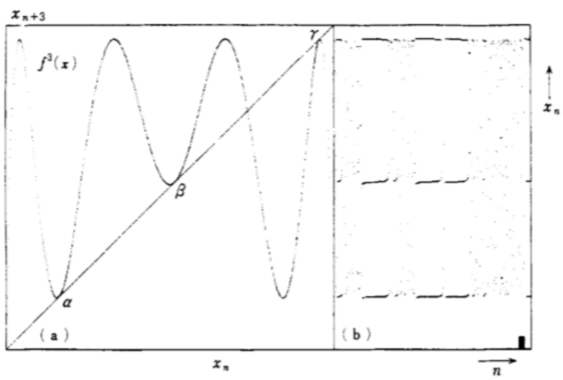




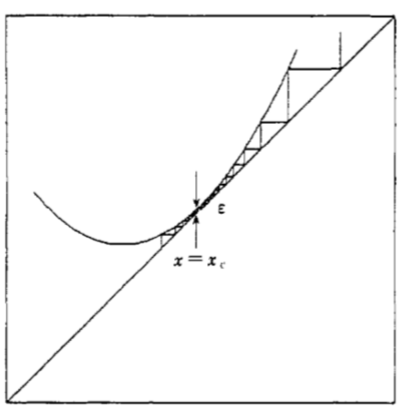


Subsección: Caos intermitente

El caos intermitente se observa cuando el parámetro R es ligeramente más pequeño que el valor en el que comienza una ventana. Al hacer que R sea más pequeño que el rango de parámetros correspondiente a la ventana, se puede seguir la bifurcación tangente en la dirección inversa. Pongamos $R = 1 + \sqrt{8} - \delta$ para ver el comportamiento del mapa inmediatamente debajo de $R = R_c = 1 + \sqrt{8}$, el comienzo del período 3.
La figura muestra un ejemplo de caos obtenido cuando $\delta = 0{,}0001$, a partir del cual se encuentra que una órbita se compone de una parte periódica con el período 3 y una parte dispersa en toda la región.



El primero se llama laminar, mientras que el segundo ráfaga. (La palabra 'laminar' se origina en el flujo laminar, es decir, una parte estacionaria, mientras que las variaciones en la parte 'estallido' son explosivas). La parte laminar se produce cuando una parte del mapa está cerca de la línea diagonal $x_{n+1} = x_n$, por lo que toma mucho tiempo antes de que una órbita pase a través de la región manteniendo el valor de x, casi constante en muchas iteraciones.



III. Caos en sistemas relistas.

Se ha explicado el caos tomando como ejemplo los sistemas unidimensionales hasta ahora. Sin duda, varios aspectos del caos pueden explicarse claramente si se consideran los mapas unidimensionales. Sin embargo, una pregunta natural es si estas simples ecuaciones son significativas en la descripción de los fenómenos naturales.

Subsección: Sistemas conservativos y sistemas disipativos

Hablando intuitivamente, un sistema conservador es algo así como un oscilador sin fricción. No hay disipación de energía en este caso y el oscilador ejecuta un movimiento periódico para siempre. Un sistema no conservador se denomina sistema disipativo, un ejemplo típico de los cuales es una oscilación amortiguada. Si la energía de todo un sistema no se disipa, este sistema se denomina sistema conservador, mientras que si la energía aumenta o disminuye con el tiempo, se denomina sistema disipativo, como se ve en los ejemplos anteriores. Consideremos un oscilador armónico simple con masa m y constante de resorte k como ejemplo. La ecuación de movimiento es:

$$m\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = -kx$$

Cuya solución general es:

$$x = A\cos\omega_0 t + B\sin\omega_0 t$$

donde $\omega_o^2 = k/m$

si ponemos $m\dot{x} = y$, obtenemos :

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{1}{m}y \\ \dot{y} = -kx \end{cases}$$

Físicamente y es el momentum del oscilador. De estas ecuaciones, se obtiene

$$\frac{dy}{dx} = -mk\frac{x}{y}$$

Usando la fórmula $\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{dy}{dx}$ obtenemos :

$$\frac{1}{2m}y^2 + \frac{1}{2}kx^2 = E$$

El parámetro E es la constante de integración con la dimensión de la energía y la ecuación (indica que la suma de la energía cinética y la energía potencial permanecen constantes. Esta relación, cuando se expresa en el plano xy, define una elipse. El plano xy es llamado el plano de fase, mientras que la elipse se llama la órbita.

SubsecciónAtractor y Sección de Poincaré

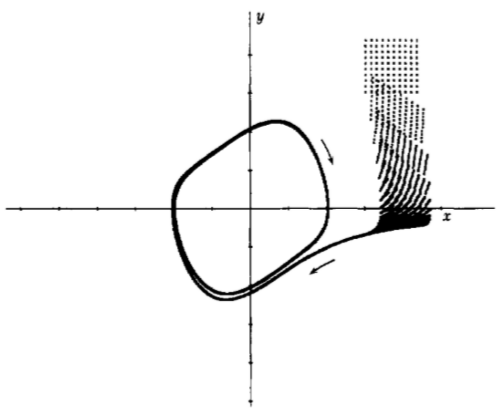
Una órbita de un oscilador armónico amortiguado se expresa como una solución a la ecuación que toma la forma:

$$x = Ae^{-rt} \sin \sqrt{\omega^2 - r^2 t} + t$$

y asintóticamente aborda el origen como$T \to \infty$ The origin in the present case attracts all the orbits and is called the attractor. It is known when the phase space is two dimensional that there are attracting points as above and attracting closed curves called limit cycles as the set which the orbits approach as$T \to \infty$ Consideremos el atractor de la ecuación de van der Pol.

$$\ddot{x} - \varepsilon(1 - x^2)\dot{x} + x = 0$$

como un ejemplo de curvas cerradas atractoras. La figura muestra las órbitas y el atractor obtenidos mediante cálculos numéricos. La solución de la ecuación de van der Pol en un tiempo suficientemente posterior es solo el movimiento de un punto que se mueve en la curva cerrada. Este movimiento es una oscilación con una amplitud fija. La ecuación de van der Pol es un ejemplo de oscilaciones autónomas. Tal atractor se llama un ciclo límite.



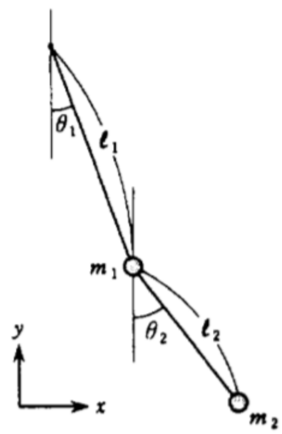
Debe agregarse que un área en el espacio de fase disminuye con el tiempo y eventualmente se aproxima a cero en sistemas tales como un oscilador amortiguado o una ecuación de van der Pol. Los puntos y las curvas cerradas son los únicos elementos de atracción en el espacio de fase bidimensional. Los atractores son cero y unidimensionales en estos ejemplos. A medida que aumenta la dimensión del espacio de fase, aparecen atractores más complejos. Ejemplo de comportaiento caótico : Modelo Rössler

$$\begin{cases} \dot{x} = -(y+z) \\ \dot{y} = x + \frac{1}{5}y \\ \dot{z} = \frac{1}{5} + z(x-\mu) \end{cases}$$

SubsecciónNúmeros de Lyapunov En muchos casos, un atractor extraño tiene la forma de una cinta plana, como la del modelo de Rossler, que refleja el carácter de un sistema dinámico disipativo.Si una región en el espacio de fase se estira a lo largo de una sola dirección mientras permanece dentro de un espacio finito, como el atractor del modelo de Rossler, debe haber un mecanismo para plegar la región. Por lo tanto, debe haber estiramiento y plegado en el presente caso como en un mapa unidimensional. Dado que el grado de estiramiento se mide por el número de Lyapunov, es razonable llamar a un sistema con un número de Lyapunov positivo caótico

Subsección: Caos en el Péndulo Doble

Un péndulo con su cuerda hecha de un resorte, es un sistema que muestra el caos. Sin embargo, un péndulo doble es superior a un péndulo con un resorte, ya que el primero es más fácil de construir y el caos es más fácil de observar en el primero. La figura muestra un péndulo doble real que hemos construido. Se puede observar un movimiento irregular antes de que desaparezca la oscilación si se usan rodamientos de bolas en sus ejes y si el soporte es lo suficientemente concreto como para que la propagación de la oscilación del sistema a la mesa sea despreciable. Las ecuaciones de movimiento de este sistema son más complicadas que las de un péndulo con un resorte. El análisis de este sistema se realiza fácilmente empleando el Lagrangiano. Si el lector no está familiarizado con este formalismo, debe referirse a un libro de texto sobre mecánica. La energía potencial P del sistema se muestra en la figura.



es:

$$P = m_1 l_1 g(1 - \cos\theta_1) + m_2[l_1(1 - \cos\theta) + l_2(1 - \cos\theta_2)]g$$

$$= (m_1 + m_2)l_1 g(1 - \cos\theta_1) + m_2 l_2 g(1 - \cos\theta_2)$$

Consideramos las variables:
$x_1 = l_1 \sin\theta_1$
$x_2 = l_1 \sin\theta_1 + l_2 \sin\theta_2$
$y_1 = l_1(1 - \cos\theta_1)$
$y_2 = l_1(1 - \cos\theta_1) + l_2(1 - \cos\theta)$
Para escribir las ecuación de la energía cinética y poder construir el lagrangiano L=K-P para obetener el Euler- Lagrange.

IV. Conclusiones

Antes de leer sobre la teoría del caos pensaba que era algo a lo que nunca se podria definir de forma matemática,que estaba fuera de las manos del estudio analítico pero ahora se la utilidad que le podemos dar a está teoría y sus aplicaciones están en todas la situaciones reales , y básicamente es la sensibilidad al cambio en tiempo de sus condiones iniciales.

REFERENCIAS

Devaney R. L. 1986 An Introduction to Chaotic Dynamical Systems
Per Bak's "How Nature Works: The Science of Self-Organized Criticality"(1996)
Introducing Chaos Ziauddin Sardar
Order Out of Chaos Ilya Prigogine
Nonlinear Dynamics and Chaos Steven H. Strogatz