

Proyecto Caos.

Universidad de Guanajuato División de Ciencias e Ingenierías Curso de Mecánica Analítica

Loma del Bosque 103, Lomas del Bosque, Lomas del Campestre
C. P. 37150 León, Guanajuato México

Muñoz López Fabián (munozlf2016@licifug.ugto.mx)

I. INTRODUCCIÓN

Los sistemas caóticos así como los no lineales son el caso más realista para el estudio de los sistemas, ya que un sistema lineal es muy "idealista", se logran solo resolver mediante consideraciones y aproximaciones, de ahí que el estudio de sistemas caóticos y no lineales sea de gran interés por el hecho de representar un desafío a los métodos convencionales, puesto que sus soluciones solo se logran mediante métodos numéricos, los cuales en su mayoría se basan en iteraciones, en este artículo se abarca de forma breve mapeos, atractores extraños, secciones de Poincaré, fractales y exponentes de Lyapunov, así como una explicación de cómo estos se relacionan con la teoría del caos.

II. MAPEOS

Si nosotros usamos n para denotar un sistema y x para denotar las variables físicas del sistema, podemos describir la progresión de un sistema no-lineal del movimiento de partículas investigando cómo el $(n-1)^{th}$ estado depende del $(n)^{th}$ estado. Un ejemplo de un sistema no lineal es:

$$X_{n+1} = (2x_n + 3)^2$$

La relación $x_{n+1} = F(x_n)$ es llamada mapeo, y generalmente se usa para describir la progresión del sistema. Las secciones de Poincaré son un ejemplo de un mapeo dos-dimensional. [2] Podemos escribir diferentes ecuaciones usando $f(\alpha, x_n)$ donde x_n es restringido a los números reales en el intervalo $(0, 1)$ y α es un parámetro dependiente del modelo. [2]

$$X_{n+1} = f(\alpha, x_n) \quad (1)$$

La función f genera el valor de x_{n+1} a partir de x_n y la colección de puntos generados es llamado "mapa de la función misma". Las ecuaciones, que por lo general son no-lineales, son resueltas por métodos numéricos por iteración, iniciando con x_1 . [2] Se restringe el problema a un mapeo de una dimensión, basta con observar un ejemplo para entender mejor que es un mapeo, consideremos el mapeo "Logístico", una simple ecuación de dimensión 1, dado por:

$$F(\alpha, x) = \alpha x(1 - x) \quad (2)$$

Entonces la ecuación de iteraciones está dada por;

$$x_{n+1} = \alpha x_n(1 - x_n) \quad (3)$$

El resultado de la ecuación logística es fácil de observar gráficamente por el mapeo logístico. La iteración x_{n+1} se

gráfica contra x_n , en la figura 3 para un valor de $\alpha = 2,00$. Iniciando con un valor inicial x_1 en el eje horizontal, nos movemos en la intersección de la curva $x_{n+1} = \alpha x_n(1 - x_n)$, moviéndonos hacia la izquierda encontramos el valor de x_n en el eje vertical (x_{n+1}), reiterando el proceso varias veces, el sistema converge en el valor de $x = 0,5$, se llega al mismo resultado independientemente del valor inicial x_1 , si este es diferente de 0 o 1. [2]

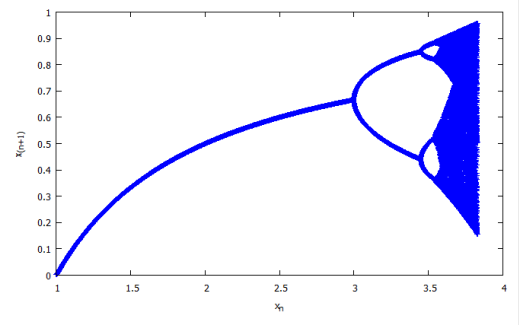


Figura 1. Mapeo logístico, se gráfica x_n vs x_{n+1} . [4]

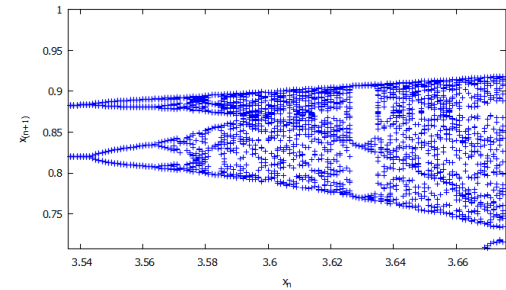


Figura 2. Se logra distinguir cómo las figuras se reiteran a una escala menor.

III. FRACTALES

Benoit Mandelbrot creó el término fractal, que derivó de la palabra latina fractus (roto). Mandelbrot hizo referencia a todos los objetos que se parecen a sí mismos en diferentes escalas. [6] Lo que ilustra con una coliflor. Mirando una parte de la coliflor, en la figura 2, las estructuras más pequeñas se parecen a la coliflor entera. La superficie de la coliflor es, por lo tanto, similar a sí misma y, por lo tanto, un fractal.



Figura 3. La colibrí es un ejemplo de fractal en la naturaleza.[4]

En matemáticas, se pueden usar fórmulas sorprendentemente simples para generar fractales de aspecto estéticamente fascinante. el mas famoso aquí fue el llamado Mandelbrotmengo. La teoría fractal abre la puerta de entrada al mundo real de las superficies rugosas.[6] Antes de Mandelbrot, las matemáticas solo podían describir objetos perfectamente suaves: círculos, cubos o triángulos. Ahora con la llegada de Mandelbrot, no solo los diferentes tipos de rugosidad, sino también los diferentes grados de caos podrían distinguirse con precisión. Las teorías de los fractales y el caos están estrechamente relacionadas.[6]

IV. SECCIONES DE POINCARÉ

La siguiente técnica de discretización es tan importante porque la dimensión del sistema resultante se reduce en uno. Consideramos una trayectoria recurrente c en el espacio de fase n -dimensional. Ahora elegimos una hiper superficie Σ de dimensión $n - 1$

$$g(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$$

De modo que corta la curva de fase transversalmente en todas partes. Para un sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\frac{\partial x}{\partial t} = F(x) \quad (4)$$

El lado derecho $F(x)$ indica la dirección de la tangente a la trayectoria c en el punto x . La superficie normal n de Σ está dada por:

$$n = \frac{\nabla g}{|\nabla g|}$$

Con:

$$\nabla g = \left\{ \frac{\partial g}{\partial x_1}, \frac{\partial g}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial g}{\partial x_n} \right\}$$

Asumiendo que la trayectoria Σ cruzar c transversalmente, entonces exigimos en las intersecciones:

$$F^t n = 0$$

Se elije un hiper plano como la porción. Los puntos de c en los que la trayectoria Σ penetra en una dirección definida, es decir, cada uno después de una revolución completa, se denota por $P^{(0)}, P^{(1)}, P^{(2)}$. Dado que el estado anterior de la trayectoria también está determinado por el estado actual, se pueden determinar los puntos previos $P^{(-1)}, P^{(-2)}, P^{(-3)}$. [1] En la figura 3, se muestra el llamado corte Poincaré para un espacio de fase tridimensional. [?]

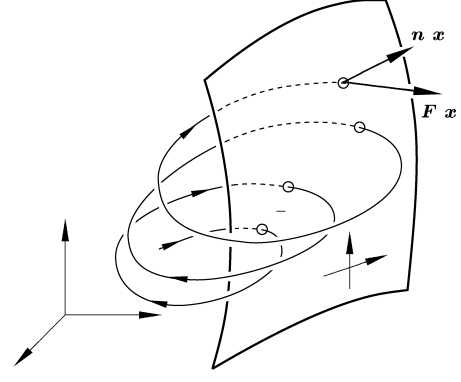


Figura 4. Secciones de Poincaré.

En este método, la discretización no se realiza sobre la base de intervalos de tiempo fijos, pero uno selecciona solo aquellos puntos de la trayectoria que se encuentran en una "superficie" fija Σ . [?] Si tomamos cada punto $P^{(i+1)}$ como la imagen de su predecesor $P^{(i)}$:

$$P^{(i+1)} = f(P^{(i)})$$

Así se obtiene una Regla de mapeo iterativa no lineal de la hiper superficie en sí misma, a la que se hace referencia como una figura de Poincaré o como un mapa de retorno (primer mapa de retorno). [1] Dado que la imagen es reversiblemente única, mantiene:

$$P^{(i)} = f^{-1}(P^{(i+1)})$$

Si se introducen nuevas coordenadas $\xi_k, k = 1, 2, \dots, N-1$ en la hiper superficie, y asignamos el vector de puntos $P^{(i)}$ se le asigna el vector de posición:

$$\xi_k = \left\{ \xi_1^i, \xi_2^i, \dots, \xi_{n-1}^i \right\}$$

Podemos obtener el sistema n -dimensional de ecuaciones diferenciales 4 a un sistema $(n-1)$ dimensional de ecuaciones diferenciales ordinarias:

$$\xi^{(i+1)} = f(\xi)^{(i)}$$

La función de mapeo f no puede determinarse explícitamente. Por lo que se sigue dependiendo de las integraciones numéricas. [?] La ventaja del mapeo de Poincaré es que uno reduce la dimensión del sistema en uno, en donde la experiencia demuestra que no se pierde información sustancial sobre el comportamiento a largo plazo de las trayectorias. [?] Sin embargo, la reducción de dimensión pierde información topológica acerca de cuántas veces la trayectoria ha girado alrededor de sí misma durante una revolución. [1]

Si no se está interesado en el comportamiento detallado de un problema dinámico particular, sino en las propiedades cualitativas generales de clases enteras de sistemas dinámicos, se puede separar completamente del estudio de las ecuaciones diferenciales o sus mapeos de Poincaré y examinar directamente las propiedades generales de las fórmulas de recursión. [1] Al especificar la función de mapeo, las integraciones numéricas ya no son necesarias para que el tiempo de cálculo

entre dos cortes de Poincaré se reduzca al tiempo para realizar un paso de iteración. Con lo que puede obtener rápidamente una visión general del comportamiento a largo plazo del sistema y lograr una mayor precisión, ya que los errores por integración numérica ya no ocurren. Si se elige una regla de mapeo reversiblemente única, puede interpretarse como un mapeo de Poincaré de un sistema dinámico.[1]

V. ATRACTORES EXTRAÑOS

El término atractor "extraño" fue acuñado por Ruelle y Takens (1971) en su artículo "Sobre la naturaleza de la turbulencia", en el que explican por qué el "escenario de Landau" no es adecuado para modelar la turbulencia. Su objetivo no era describir la turbulencia como una superposición de modas infinitas, sino como un atractor "extraño". El término extraño pretende aclarar que este atractor no es un punto fijo ni un ciclo límite, ni un toro, ni forma una variedad.[5]

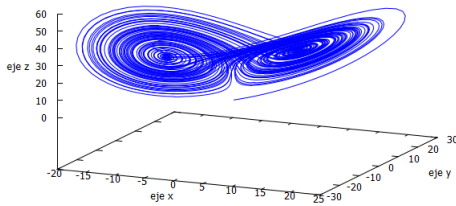


Figura 5. Gráfica en 3D del atractor de Lorenz

Las ecuaciones que describen el comportamiento caótico del atractor de Lorenz son:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \sigma(y - x) \\ \dot{y} &= rx - y - xz \\ \dot{z} &= -\beta x + xy\end{aligned}\quad (5)$$

Para $\sigma, \beta, r > 0$

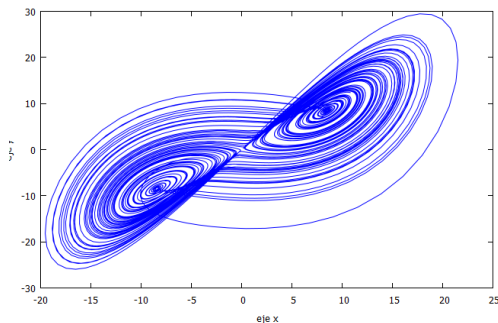


Figura 6. Atractor de Lorenz plano (x, y)

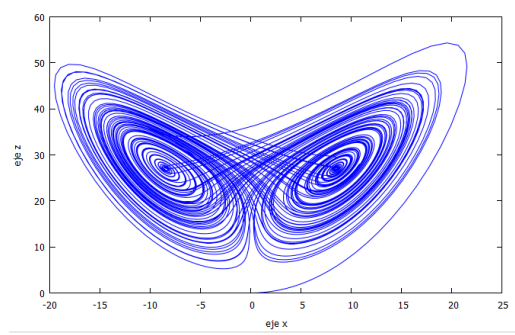


Figura 7. Atractor de Lorenz plano (x, z)

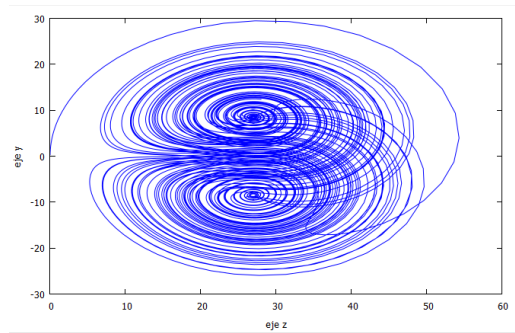


Figura 8. Atractor de Lorenz plano (y, z)

V-A. Atractor de Henon

El atractor de Henon es un ejemplo de sistema dinámico discreto en el tiempo, el cual depende de dos variables, α y β , se muestra el comportamiento caótico en dos dimensiones.[3] La ecuación que describe su progresión en el tiempo es:

$$\begin{aligned}x_{(i+1)} &= 1 + \alpha \times x_i^2 + \beta \times y_i; \\ y_{(i+1)} &= x_i\end{aligned}\quad (6)$$

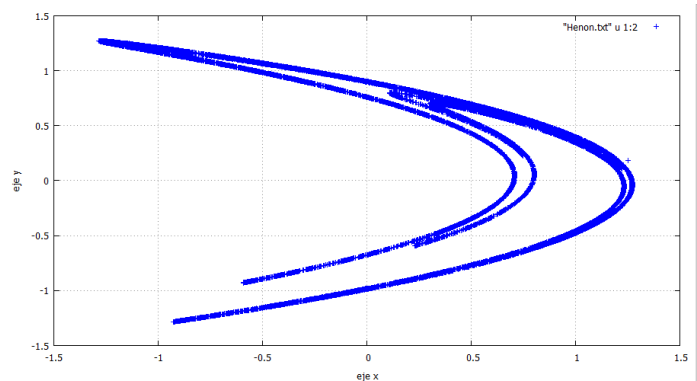


Figura 9. Ejemplo de atractor extraño en dos dimensiones, atractor de Henon, para los valores: $\alpha = 1,4$ y $\beta = ,3$

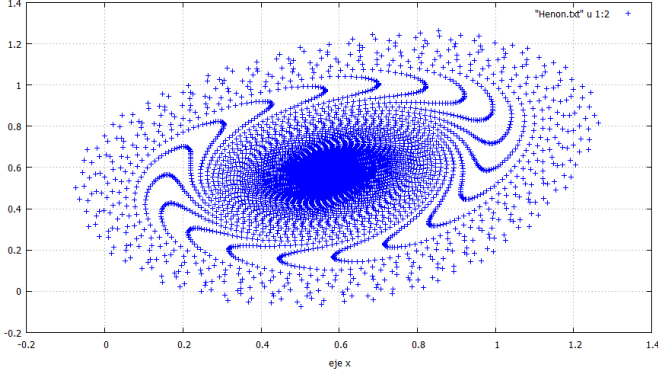


Figura 10. Atractor de Henon para valores de $\alpha = ,42$ y $\beta = -,999$, con condiciones iniciales $x_0 = 0,63135448$ y $y_0 = 0,18940634$

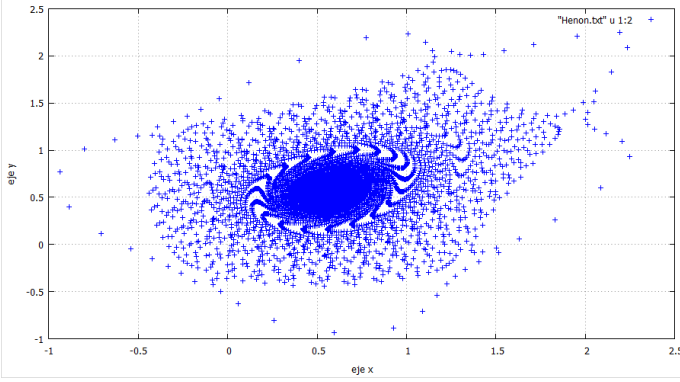


Figura 11. Atractor de Henon para valores de $\alpha = ,22$ y $\beta = -,999$, con condiciones iniciales $x_0 = 0,18425$ y $y_0 = 0,99849815$

VI. EXPONENTES DE LYAPUNOV

El concepto del exponente de Lyapunov proporciona información sobre el comportamiento de estabilidad de las trayectorias dadas. Los atractores regulares, como el enfoque estable, el ciclo límite y el toro, son tales que todas las trayectorias de un entorno determinado se aproximan al atractor de manera asintótica, y las órbitas vecinas permanecen adyacentes.[5] Los atractores extraños también tienen la capacidad de atraer todas las órbitas de una determinada área de captación, pero en las trayectorias atractivas que están originalmente juntas, explotan exponencialmente. Se pueden distinguir los diferentes tipos de atractores, esto debido al comportamiento de estabilidad de un sistema dinámico.[5]

En 1892, el matemático ruso Aleksandr M. Lyapunov publicó un trabajo sobre el problema de la estabilidad de los movimientos y el desarrollo de las propiedades básicas de los llamados exponentes característicos, que llevaron al concepto del exponente de Lyapunov.[5] Esto fue precedido por trabajos de G. Floquet sobre la estabilidad de movimientos periódicos y por Henri Poincaré, quien había estudiado la estabilidad de sistemas especiales de ecuaciones diferenciales de segundo orden y cuyos métodos fueron abordados y generalizados por Lyapunov. El objetivo de su trabajo era hacer declaraciones en tales casos sobre la estabilidad de un movimiento al que no se le pueden dar soluciones cerradas.[5] Lyapunov ha

desarrollado las condiciones y ha dado un procedimiento sobre cómo llegar a una declaración de estabilidad.[5]

VI-A. Teoría de Floquet

La teoría de Floquet es un análisis de estabilidad lineal de procesos periódicos. Las secuencias de movimiento periódico del período T , $x_r(t) = x_r(t + T)$, pueden realizarse de diferentes maneras. Pueden aparecer como una solución a diferentes tipos de ecuaciones diferenciales. Se distinguen entre dos casos principales:[3]

- $x_r(t) = x_r(t + T)$; solución de un sistema periódico de cuerpo excitado descrito por un sistema no homogéneo de ecuaciones diferenciales no autónomas

$$\dot{x} = F(x, t) = F(x, t + T) \quad \text{con} \quad F(0, t) \neq 0$$

- $x_r(t) = x_r(t + T)$; es la solución a un sistema autónomo.

$$\dot{x} = F(x)$$

La idea básica detrás de la teoría de la estabilidad de Floquet es que debido a la periodicidad de la matriz D , es posible una reducción a un sistema con coeficientes constantes, simplemente tomando el comportamiento de $\tilde{x}(t)$, en los tiempos discretos $t = 0, T, 2T, 3T$. Sin embargo, desde un punto de vista geométrico, esto corresponde exactamente a una intersección de Poincaré.[3]. En donde $\tilde{x}(t)$ es una pequeña perturbación a $x(t)$ y la matriz D esta dada por:

$$D(t) = \left. \frac{\partial F(x)}{\partial x} \right|_{x_r(t)}$$

VI-B. Exponentes de Lyapunov, en una dimensión

Para obtener los exponentes de Lyapunov, primero se obtiene el multiplicador de Floquet, λ :

$$\lambda = \left. \frac{\partial f}{\partial x_n} \right|_{x_s}$$

Donde x_n es un elemneto de x Si se cumple que $-1 < \lambda < 0$, entonces x_s un punto fijo estable, al cual la secuencia de puntos x_n tiende a aproximarse. El exponente de Floquet σ_F es ,para un período normalizado $T = 1$.[3]:

$$\sigma = \frac{1}{T} \ln(\lambda)$$

El exponente de Lyapunov σ_L ahora se define como la divergencia exponencial media o la convergencia de secuencias de puntos adyacentes [3]:

$$|\delta x_k| = \prod_{k=0}^{k-1} f'(x_k) \delta x_0$$

Entonces:

$$|\delta x_k| \approx |e^{k\sigma}| \delta x_0$$

Expresando así el exponente de Lyapunov de la siguiente manera:

$$|\sigma = \lim_{k \rightarrow \infty} \lim_{|\delta x_0| \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \ln \left(\frac{\delta x_k}{\delta x_0} \right)|$$

VII. CONCLUSIONES

En general la teoría del caos sirve para explicar fenómenos o al menos llegar a una primera aproximación del mismo, tal es el caso del crecimiento poblacional, ya sea de los seres humanos o de algún otro ser vivo, el estudio del clima así como realizar predicciones del mismo, son situaciones claramente no lineales. Hay muchas aplicaciones que pueden estar dirigidas a sistemas caóticos, tal es el caso de los fractales, ya que estos son una herramienta de análisis que ha permitido afrontar diversos problemas, tales como la propagación de fracturas, fuego o humo, pueden ser descritos como fractales. Con las secciones de Poincaré es posible reducir el grado de dificultad al momento de realizar soluciones analíticas o numéricas, puesto que como ya se vio, reduce en uno la dimensión del problema. Con los exponentes de Lyapunov obtenemos información sobre las trayectorias en el vecindario de una en particular, observando como estas se alejan o acercan a la misma.

APÉNDICE

A

Código en `c++` empleado para la generación de los gráficos del mapeo logístico.

```
#include <iostream>
#include <fstream>
#include <string>
#include <cmath>
using namespace::std;
using std::setprecision;
enum cont = 500;
int main()
{
    ofstream fp;
    fp.open("Datos.txt");
    ifstream fp1("Datos.txt");
    long double x_1, x_0 = 0.51, k;
    int n, m;
    for (k = 1; k <= 3.83; k += 0.001 )
    {
        for ( n = 1; n <= cont; n++ )
        {
            x_1 = k*x_0*( 1 - x_0 );
            x_0 = x_1;
        }
        for ( m = 1; m <= 50; m++ )
        {
            x_1 = k*x_0*( 1 - x_0 );
            x_0 = x_1;
            fp << setprecision(4) << k << " " << x_1 << endl; }
            x_0 = .51; }
        fp.close();
        return 0;}
B
```

Código en `C++` empleado para la generación de los gráficos del atractor de Lorentz.

```
#include <iostream>
#include <fstream>
```

```
#include <stdio.h>
#include <cmath>
using namespace std;
#define N 10000
int main()
{
    ofstream fp;
    fp.open(".^tractor.txt");
    ifstream fp1(".^tractor.txt");
    int i=0;
    float x_0,y_0,z_0,x_1,y_1,z_1;
    float df = 0.01;
    float a = 10.0;
    float b = 28.0;
    float c = 8.0 / 3.0;
    x_0 = 0.1;
    y_0 = 0;
    z_0 = 0;
    for (i=0; i<N; i++)
    {
        x_1 = x_0 + df * a * (y_0 - x_0);
        y_1 = y_0 + df * (x_0 *(b - z_0) - y_0);
        z_1 = z_0 + df * (x_0 * y_0 - c * z_0);
        x_0 = x_1;
        y_0 = y_1;
        z_0 = z_1;
        if (i >10)
            fp << x_0 << y_0 << z_0 << endl;
    }
    fp.close();
    return 0;}
B
```

Código en `C++` empleado para la generación de los gráficos del atractor de Henon, los diferentes gráficos se lograron cambiando las condiciones iniciales, x_0 y y_0 , en el programa así como también los valores de a y b

```
#include <iostream>
#include <fstream>
#include <stdio.h>
#include <cmath>
using namespace std;
#define N 10000
int main()
{
    ofstream fp;
    fp.open("Henon.txt");
    ifstream fp1("Henon.txt");
    int i=0;
    double x_0, y_0, x_1, y_1;
    float a = 0.42;
    float b = -0.999;
    x_0 = .18425;
    y_0 = .99849815;
    cout << "***** Valores iniciales para Henon *****" << endl;
    cout << y_0 << x_0 << endl << endl;
    for (i=0; i<N; i++)
    {
```

```

x_1 = 1+x_0*x_0*a+b*y_0;
y_1 = x_0;
x_0 = x_1;
y_0 = y_1;
fp x_0 y_0 endl;
} fp.close();
return 0;}

```

»»REFERENCIAS

- [1] »» ARGYRIS, J., FAUST, G., HAASE, M. AND FRIEDRICH, R. (2017). DIE ERFORSCHUNG DES CHAOS. 3RD ED. SPRINGER VIEWEG, PP.62-64.
- [2] »»RECUPERADO EL 5 DE NOVIEMBRE 2018 **Thornton, S. and Marion, J. (2014). Classical dynamics of particles and systems. 5th ed. Andover: Cengage Learning, pp.183-188.**
- [3] »» ARGYRIS, J., FAUST, G., HAASE, M. AND FRIEDRICH, R. (2017). DIE ERFORSCHUNG DES CHAOS. 3RD ED. SPRINGER VIEWEG, PP.184-227.
- [4] »»RECUPERADO EL 4 DE NOVIEMBRE 2018 **[https://es.m.wikipedia.org/wiki/Romanesco_\(br%C3%A9col\)](https://es.m.wikipedia.org/wiki/Romanesco_(br%C3%A9col))**
- [5] »» ARGYRIS, J., FAUST, G., HAASE, M. AND FRIEDRICH, R. (2017). DIE ERFORSCHUNG DES CHAOS. 3RD ED. SPRINGER VIEWEG, PP.214-215.
- [6] »»RECUPERADO EL 4 DE NOVIEMBRE 2018 **<https://www.welt.de/wissenschaft/article10361079/Mandelbrot-bewies-die-Schoenheit-der-Mathematik.html>**