

Caos: del determinismo al fatalismo

Universidad de Guanajuato

División de Ciencias e Ingenierías

Mecánica Analítica

Loma del Bosque 103, Lomas del Campestre

C. P. 37150

León, Guanajuato

México

López Vega Juan Manuel (e-mail: lopezvj2015@licifug.ugto.mx)}

Resumen—La teoría del caos como una nueva rama de las matemáticas y de la física, en las últimas décadas ha sufrido uno de los mayores impulsos gracias al implemento de softwares que permiten una amplia visualización de la evolución del sistema.

En el presente trabajo se analiza los principales exponentes de la teoría del caos; ecuación logística, atractores extraños, fractales, todo esto haciendo uso del lenguaje de programación Python, además se mostrara cuales son las herramientas matemáticas que nos permiten determinar el caos tales como; secciones de Poincare, diagramas de bifurcación, exponentes de Lyapunov.

Más que una simple curiosidad sus implicaciones en la visión determinista de la ciencia son relevantes.

El caos es el orden por descifrar

*-EL HOMBRE DUPLICADO
José Saramago*

I. INTRODUCCIÓN

Adentrarnos en los sistemas caóticos implica salir del determinismo que generalmente se emplea en las ciencias, claramente no ocurre esto en general, tomando como ejemplo la mecánica cuántica, pero si con gran frecuencia cuando optamos por leyes efectivas de la naturaleza.

Pierre S. Laplace, aseguraba que si conocemos con total certeza y precisión las condiciones iniciales de un objeto, podremos saber cual será su estado final con la misma precisión y exactitud con la que medimos sus valores iniciales.

No solo el desarrollo de la mecánica cuántica rompió con esa visión, si no también el estudio de sistemas cuya evolución es muy sensible al variar las condiciones iniciales, el ejemplo clásico que podemos emplear es el problema de los 3 cuerpos cuya, discusión había

iniciado en tiempos de Issac Newton (1642-1727) hasta que Henry Poincare (1854-1912) dio una solución restringida al problema, sin embargo el impacto que debía de causar llegó tarde, específicamente en 1963 con un simple modelo para estudiar el clima que consta de 3 ecuaciones diferenciales. Lo especial de este sistema es su inestabilidad, pues si hacemos una pequeña variación en sus condiciones iniciales su evolución será totalmente diferente comparada con no hacerla.

Los sistemas no lineales dejaron de ser ignorados y se comenzó a buscar soluciones, tomemos el caso de un péndulo simple cuya ecuación movimiento es:

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l} \sin(\theta) = 0 \quad (1)$$

Este es un ejemplo de una ecuación no lineal, lo podemos ver por la función trigonométrica. Para solucionar el problema lo que tendemos a hacer es linealizarlo, pues tenemos las herramientas matemáticas para dar una solución analítica sin ningún problema, para este caso consideramos pequeñas oscilaciones de tal forma que podamos hacer la siguiente aproximación:

$$\sin(\theta) \approx \theta \quad (2)$$

Con esto obtenemos una ecuación de segundo orden lineal, donde su solución no presenta ningún problema:

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l} \theta = 0 \quad (3)$$

Más sin embargo el proceso de linealización provoca la pérdida de exactitud en la solución, esto podemos verlo en la siguiente gráfica comparativa de las soluciones de un oscilador simple:

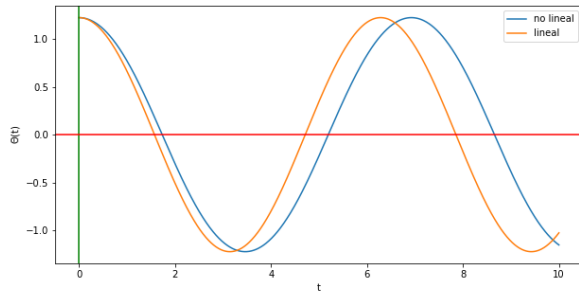


Figura 1. Solución lineal y no lineal para un pendulo simple

Para evitar esta pérdida de exactitud podemos hacer correcciones a la solución lineal, empleando el método de perturbaciones. Lo sorprendente es que un sistema tan simple pueda presentar esta clase de problemas, esto nos hace cuestionarnos sobre la naturaleza lineal de las cosas.

II. ECUACIÓN LOGÍSTICA

Los registros históricos que se tienen documentan que la ecuación logística fue introducida por el matemático belga Pierre F. Verhulst, que a través de una ecuación trato de modelar el crecimiento poblacional de varias de las ciudades mas importantes de la época, sin embargo este problema ya había sido abordado varios años atrás.

Uno de los primeros fue el estadístico Alemán Johann Peter Süßmilch, es su obra mas celebre “la reproducción” se aborda su interés por conocer la distribución poblacional en Alemania, respaldado por datos estadísticos de decesos y nacimientos, sus estudios impulsaron la demografía. En paralelo a Johann Peter, el estadístico inglés Jhon Graunt realizo los mismos estudios a mayor profundidad, pues llevaba un exhaustivo registro de nacimiento y decesos de la población de Londres.

Thomas Malthus retoma los estudios demográficos que se tenían y publico su ensayo “El principio de la población” donde la premisa principal de su ensayo es: “la población se va doblando cada 25 años en una progresión geométrica mientras que los medios para subsistir aumentan de manera aritmética”.

Sin embargo muchos naturalistas estaban en desacuerdo con la propuesta de Thomas Malthus, sugiriendo que debía haber factores que obstaculizan el crecimiento poblacional y por lo tanto no se puede modelar con una progresión geométrica.

Inspirado con este problema Pierre F. Verhulst introduce una ecuación basado en los factores que impiden el crecimiento:

$$\frac{dP}{dt} = rP\left(1 - \frac{P}{k}\right) \quad (4)$$

Donde los parámetros r y k miden la capacidad y la tasa de crecimiento respectivamente, dichos parámetros fueron ajustados comparando la población de Francia en los años 1817 y 1831, en Bélgica en 1815 y 1835 y en Rusia en 1796 y 1817.

Hasta el siglo XX ese era el modelo que se utilizaba, sin embargo las pruebas en laboratorios con bacterias y demás organismos bajo condiciones controladas no ajustaban a la ecuación de Verhulst, pues en reiteradas ocasiones quedaban lejos de la predicción de la ecuación logística, fue en 1976 cuando el fisico-biologo Robert May, bajo la idea que la población tiende a detenerse conforme crece, propuso un modelo no lineal donde se tiene en cuenta la población inicial y un único parámetro que representa la influencias externas.

$$x_{n+1} = rx_n(1 - x_n) \quad (5)$$

La información que podemos obtener con cada nueva interacción es el crecimiento o decremento de la población inicial después de un cierto periodo de tiempo.

Para r menores a uno, vemos una tendencia de la población en decrecer hasta desaparecer.

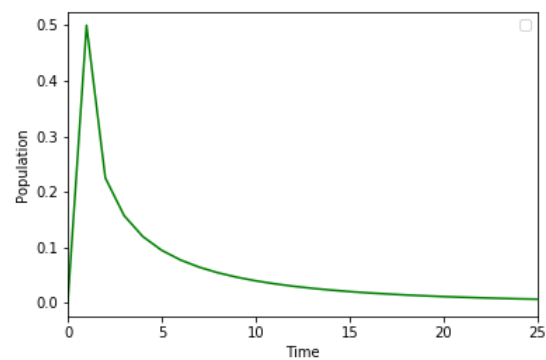


Figura 2. Population growth $r < 1$

Conforme el parámetro r alcanza valores mas cercanos a 4, podemos ver que las oscilaciones de la gráfica son no periodicas, si graficamos una pequeña variación del valor de $r=3.9$ a $r=3.8$ vemos un régimen caótico de acuerdo a la definición que dimos.

Una de las herramientas que nos permite ver este régimen caótico en nuestro sistema son los diagramas de

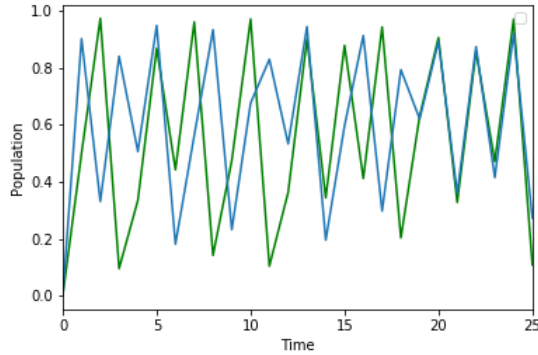


Figura 3. Sensibilidad del sistema al variar el parámetro r de 3.8 a 3.9

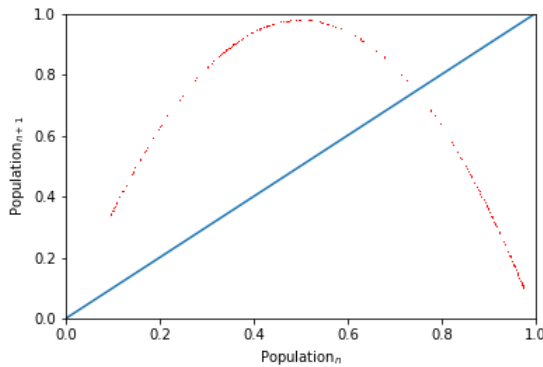


Figura 4. hola

bifurcación, donde las soluciones estables están representadas gráficamente por líneas continuas, por el contrario las soluciones inestables están representadas por puntos, analizando los diagramas de bifurcación podemos hallar los límites en la estabilidad del sistema que estudiamos.

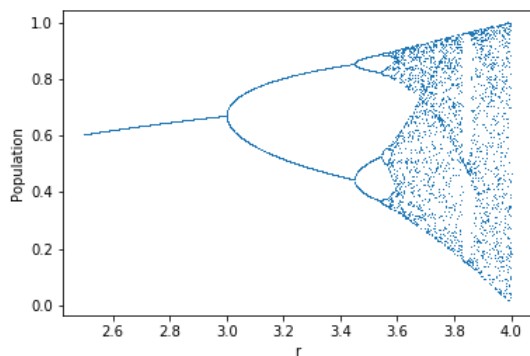


Figura 5. Diagrama de Bifurcación

Para el caso de la ecuación logística el régimen caótico comienza para $r > 3.6$ sin embargo para valor de r

superiores podemos tener “islas” en las cuales el sistema no presenta caos, estas regiones podemos identificarlas como la secciones para $r > 3.6$ donde no se tienen puntos.

III. EXPONENTES DE LYAPUNOV

El estudio de sistemas caóticos nos lleva a desarrollar herramientas que nos permitan determinar y cuantificar el caos, ya sea de forma gráfica como en el diagrama de bifurcación o de una forma más analítica, auxiliados de parámetros de los cuales podamos obtener dicha información.

Uno de estos parámetros fue introducido por el matemático ruso Aleksandr Lyapunov, cuyo campo de estudio eran las ecuaciones diferenciales, principalmente estudiaba la estabilidad de sus soluciones.

Para introducirlos exponentes de Lyapunov, recordemos que la más mínima alteración en las condiciones iniciales provoca que el sistema evolucione a un estado totalmente diferente, esto de otra forma: si dos trayectorias empiezan lo suficientemente juntas la distancia entre ellas aumentará.

Comenzemos introduciendo dos puntos iniciales: x_0 y $x_0 + \Delta x_0$. Podemos calcular la distancia para cada uno de los puntos de la siguiente forma:

$$d = |f^n((x_0 + \Delta x_0) - f^n(x_0))| \quad (6)$$

Lo anterior lo podemos visualizar en la siguiente imagen

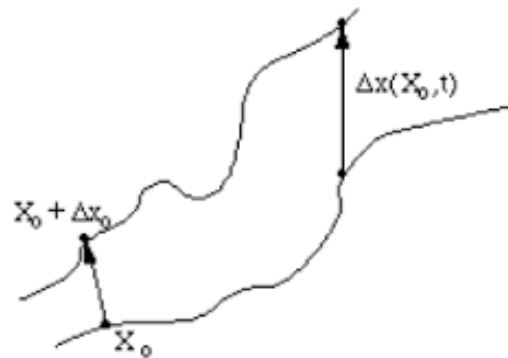


Figura 6. Distancia entre dos puntos para una trayectoria con variación

Modelamos la distancia utilizando una exponencial $e^{\lambda n}$ donde λ será el parámetro de divergencia entre las dos trayectorias

$$|f^n((x_0 + \Delta x_0) - f^n(x_0))| \equiv e^{\lambda n} \quad (7)$$

Para encontrar λ hacemos lo siguiente

$$\lambda = \frac{1}{n} \ln \left(\frac{|f^n(x_0 + \Delta x_0) - f^n(x_0)|}{\Delta x_0} \right) \quad (8)$$

E identificamos el argumento del logaritmo natural como las sumas de derivadas en n

$$\lambda = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |f'(x_i)| \quad (9)$$

Tomemos el ejemplo logístico y calculemos sus exponente de Lyapunov:

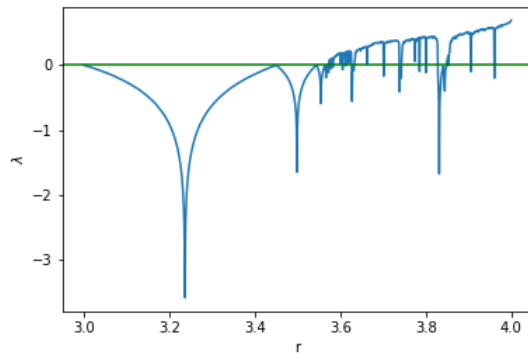


Figura 7. Exponentes de Lyapunov del mapeo logístico

La información que obtenemos es la estabilidad en las soluciones, el criterio es si $\lambda < 0$ las trayectorias para los valores de r correspondientes se consideran estables, por el contrario para valores de λ positivos se pierde, además podemos ver para que valores de r se tienen “islas” o zonas estables.

Algo que debemos decir es que el exponente de Lyapunov no es exclusivo para sistemas caóticos, es un requisito necesario mas no suficiente para determinar si el sistema que estudiamos entra en esa categoría.

IV. ATRACTORES EXTRAÑOS

Sin duda estos son uno los objetos matemáticos más representativos en la teoría del caos, sus formas tan peculiares han causado gran fascinación por esta teoría, pero veremos que podemos encontrar atractores en menor dimensión desde punto hasta ciclos.

Para introducir lo que es un atractor comenzaremos con una definición: un atractor lo podemos entender como un conjunto en que todas las posibles trayectorias que siga un sistema evolucionan hasta llegar a un mismo punto (puntos atractores) o ciclos limites.

Lo podemos ver en el espacio fase de un oscilador amortiguado, toda trayectoria converge a un punto atractor, para este caso el punto es el origen.

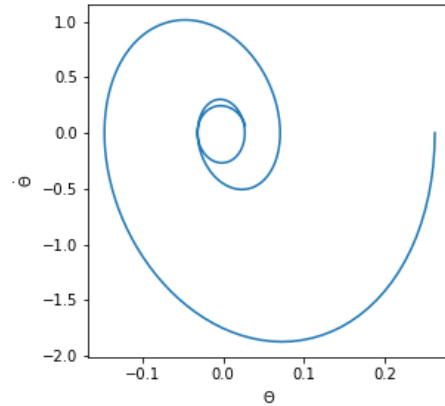


Figura 8. Espacio fase del oscilador amortiguado, la trayectoria converge al origen

Para un oscilador forzado las trayectorias convergen a lo que llamamos un ciclo limite.

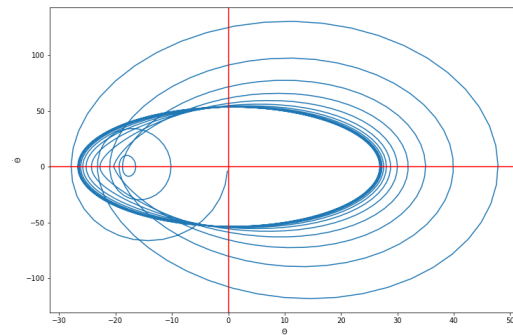


Figura 9. Espacio fase del oscilador forzado, toda trayectoria converge a un ciclo limite

Un atractor extraño tiene la misma definición, el termino extraño solo es empleado para denotar la geometría poco usual a la que pertenece.

En 1963 el matemático Edward Lorenz desarrollo un modelo determinista del clima con 3 ecuaciones diferenciales no lineales y con 3 parámetros que dependen de las observaciones directas, el objetivo era mejorar la predicción meteorológica, sin embargo al estudiar las soluciones el mas mínimo cambio en alguno de los tres parámetros arrojaba una solución totalmente

diferente.

Su trabajo fue presentado al ultimo minuto bajo el nombre El efecto mariposa esto como broma, ya que las perturbaciones del aleteo de una mariposa pueden causar efectos de amplia magnitud, como un huracán.

Las ecuaciones a las que Lorentz redujo su modelo del clima son las siguientes:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= a(y - x) \\ \frac{dy}{dt} &= x(b - z) - y \\ \frac{dz}{dt} &= xy - cz\end{aligned}$$

La solución al sistema de tres ecuaciones usando específicamente los valores para los parámetros $a=10$, $b=8/3$, $c=28$ dan como solución la siguiente trayectoria.

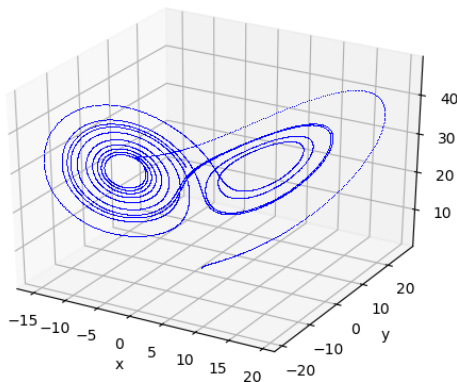


Figura 10. Atractor de Lorentz

Algo muy interesante es el echo que detrás del caos en las trayectorias podemos visualizar una estructura muy general, para la cual no importan las condiciones iniciales, el sistema caótico evoluciona hasta graficar la misma forma. Podemos entonces construir diferentes atractor que se diferenciaron de los otros por su estructura.

Ejemplos de Atractores Extraños

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= -y - z \\ \frac{dy}{dt} &= x + ay \\ \frac{dz}{dt} &= b + z(x - c)\end{aligned}$$

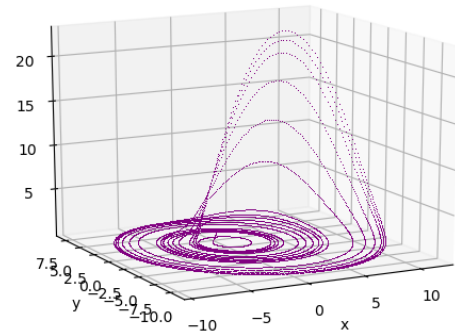


Figura 11. Atractor de Rössler los valores a los parametros son $a=0.2$, $b=0.2$ y $c=5.7$

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= -ax + 2y - 4z - y^3 + (3a + 15) \\ \frac{dy}{dt} &= -ay + 2z - 4x - z^2 + (3a + 15) \\ \frac{dz}{dt} &= -az + 2x - 4y - x^2 + (3a + 15)\end{aligned}$$

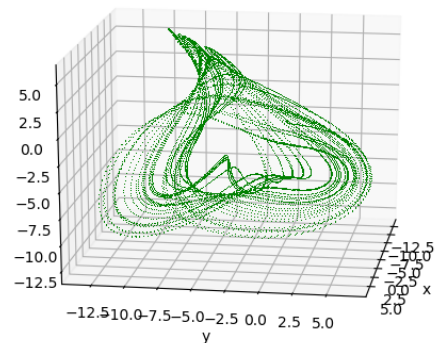


Figura 12. Atractor de Halvorsen con $a=1.4$ como parametro

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= \sin(y) - bx \\ \frac{dy}{dt} &= \sin(z) - by \\ \frac{dz}{dt} &= \sin(x) - bz\end{aligned}$$

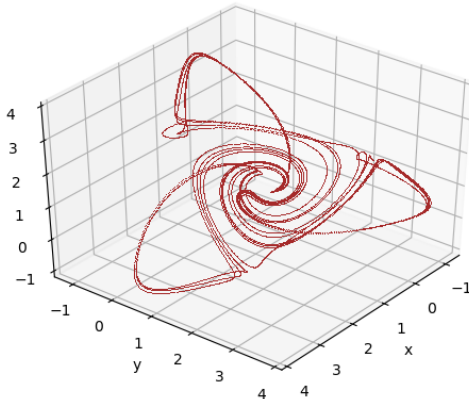


Figura 13. Atractor de Thomas con $b=0.208$ como parametro

V. SECCIONES DE POINCARÉ

Tenemos la tendencia de describir a la naturaleza mediante ecuaciones que involucran derivadas de primer y segundo orden mayormente, al intentar hallar la solución nos hemos dado cuenta, que la mayoría de las ecuaciones diferenciales no se pueden resolver, pues las técnicas desarrolladas piden linealidad en las ecuaciones, por desgracia tenemos modelos altamente no lineales, donde hallar una solución se vuelve un problema casi imposible, pero algo que si podemos hacer es estimar la forma que adopta la solución.

El problema con el que introducimos históricamente la teoría del caos, fue el problema de los 3 cuerpos, Henry Poincaré pudo dar una solución tomando en cuenta restricciones. Como habíamos mencionado estudiar sistemas caóticos es introducir herramientas que nos permitan dar un mejor análisis, lo hicimos con los exponentes de Lyapunov que indicaban la divergencia entre las soluciones, los diagramas de bifurcación y la estabilidad.

Para el problema de los tres cuerpos vemos que es mas complicado aplicarlos, primero el numero de dimensiones resulta ser problematico, una manera

de reducir el analisis fue introducido por el mismo Henry Poincaré, a traves de mapeos por secciones cuya dimension es menor al del sistema, pero conserva la misma informacion.

Podemos definir entonces una sección de Poincaré como una superficie cuya dimension es menor a la original, esta hipersuperficie siempre es transversal a la trayectoria del sistema, lo que se busca son los puntos de interseccion.

Una vez que tenemos los puntos de cruce, podemos modelar un mapeo recursivo que toma como argumento uno de estos puntos.

Llamemos P a una aplicacion

$$\begin{aligned}P : \sigma &\rightarrow \sigma \\ P(x_k) &= x_{k+1}\end{aligned}$$

Donde σ es la sección de Poincaré.

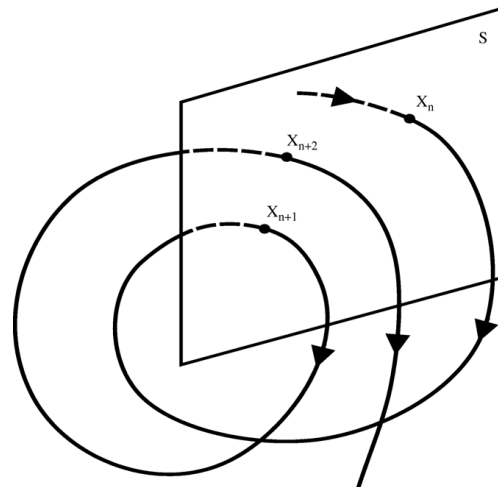


Figura 14. Ilustración de como luce una seccion de Poincaré

Esta herramienta puede ser aplicada a los atractores extraños, ya que si podemos establecer un mapeo de Poincaré podemos dar información de la estabilidad de los ciclos.

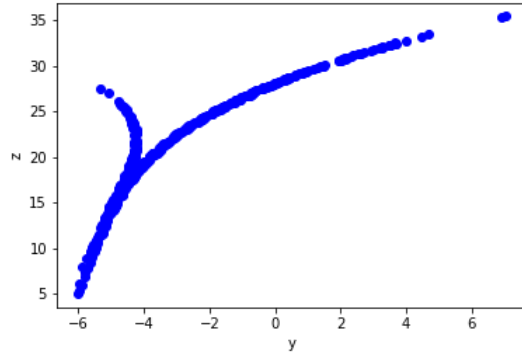


Figura 15. Sección de poincare del atractor de Lorentz

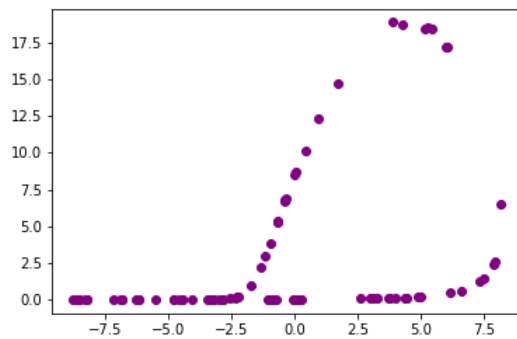


Figura 16. Sección de poincare del atractor de Rossler

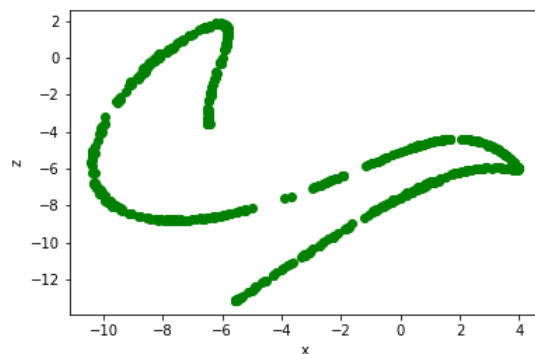


Figura 17. Sección de poincare del atractor de Halvorsen

VI. FRACTALES

Los fractales uno de los objetos mas fascinantes, por su estructura y dimensión, su introducción formal como una nueva geometría estuvo llena de rechazos por propios matemáticos que creían que catalogarlos dentro de la geometría, junto a la euclídea era simplemente un error aborrecible. El rechazo a nuevas ideas ha estado presente, sucedió con la teoría de relatividad de Einstein que al inicio no fue aceptada, pues iba en contra de la concepción del Universo de Newton.

Unas de las principales características que la geometría pide es la suavidad en las formas, esto lo interpretamos que no tengan pliegues o picos, si no cumple con esta característica ya no podemos decir mucho.

Pero no todo es así, y solo basta con ver estructuras naturales, montañas, arboles, el sistema sanguino de diferentes seres vivos, hojas de arboles, conchas de moluscos etc. Podríamos decir que los fractales surgen de esta necesidad de explicar formas fuera de la geometría tradicional, generalizando a estructuras mas complejas y con un gran esfuerzo consolidando una nueva geometría.



Figura 18. Auto similitud en estructuras naturales

Definamos un fractal como un objeto geométrico que esta compuesto por objetos con la misma forma pero en escalas y orientaciones diferente, esto es si nos concentramos en un único sector de la figura, la forma se repite, estas estructuras habían sido usadas en distintos grabados de época, al igual que los ambigramas.

El problema para diseñar un fractal es encontrar una relación entre las formas geométricas, esto para cumplir

con la característica principal, autisimilitud. Gaston Julia Matemático francés fue uno de los primeros en estudiar a profundidad estas nuevas estructuras, propuso la siguiente relación en el plano complejo:

$$f_c(z) = z^2 + c \quad (10)$$

En 1974 estas estructuras fueron totalmente renovadas por Benoît Mandelbrot matemático Polaco, retomó los trabajos de Gaston Julia y obteniendo ventaja de su trabajo en IBM, pudo consolidar esta nueva geometría.

Sin embargo los matemáticos aborrecían las estructuras fractales, para ellos eran imágenes bonitas pero que no servían para nada.

Con la meta de demostrar que las estructuras fractales son tanto novedosas como útiles Benoît Mandelbrot publicó su libro "La geometría fractal de la naturaleza", la principal idea que se expone es que se puede medir con total precisión estructuras naturales, con esto se comenzaron a ver y analizar forma que siempre habían estado ahí pero eran ignoradas.

Ejemplo de fractales

Como mencionamos para la construcción de fractales unicamente requerimos una función de auto similitud. A continuación se muestran estructuras fractales obtenidas a partir de una relación general de Mandelbrot.

$$z_0 = 0 + 0i$$

$$f(z) = z^2 + c$$

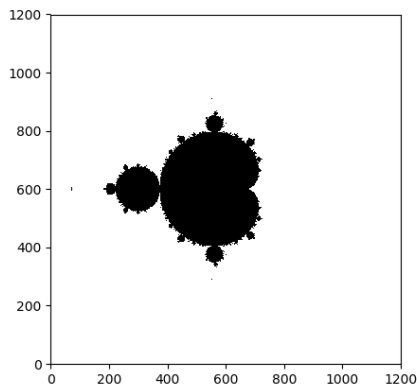


Figura 19. Conjunto de Mandelbrot

$$z_0 = 0 + 0i$$

$$f(z) = z^7 + c$$

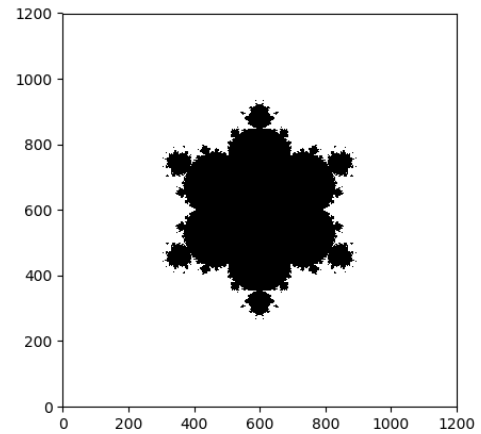


Figura 20. Ejemplo de fractal del tipo Mandelbrot

$$z_0 = 0 + 0i$$

$$f(z) = z^5 + \frac{1}{c}$$

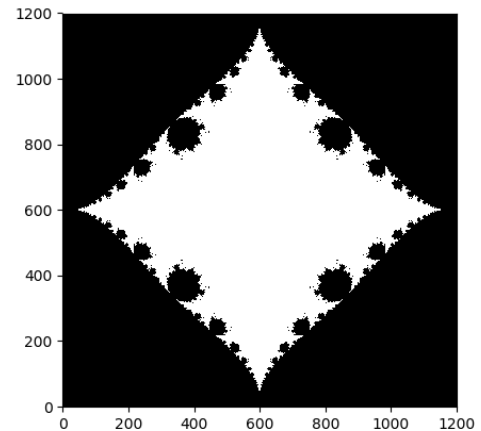


Figura 21. Ejemplo de fractal del tipo Mandelbrot

$$z_0 = 1 + 0i$$

$$f(z) = \sin(zc^2)$$

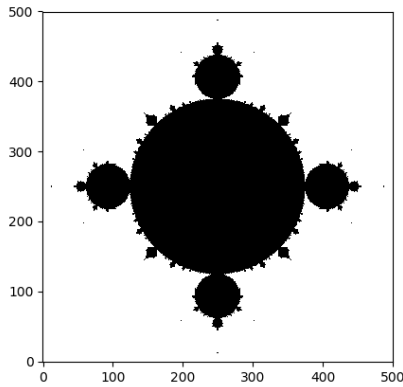


Figura 22. Ejemplo de fractal del tipo Mandelbrot

VII. MODELO DE LOTKA-VALTERRA

A diferencia de la ecuación logística, donde el único parámetro r , es el que dictamina la evolución y crecimiento poblacional, la población se encuentra aislada, ya que el único medio de interacción es consigo misma, si queremos desarrollar un modelo más realista tenemos que considerar también la interacción con otros organismos de vida, animales, bacterias etc, donde la evolución de cada población dependa tanto de los parámetros de ajuste como del crecimiento de las demás especies.

Esto lo podemos ver en la obra *El origen de las especies* de Charles Darwin baso sus ideas de la selección natural, en la competencia y la supervivencia de cada una de las especies.

En 1926 Alfred Lotka físico y estadístico Americano y Vito Volterra físico y matemático italiano, desarrollaron por separado un modelo de interacción entre 2 especies, el sistema que describe la interacción es altamente dependiente tanto de parámetros como de las dos poblaciones de estudio.

El modelo plantea la relación depredador-presa donde la supervivencia de la especie en el rol de depredador depende de la población de la especie con el rol de presa.

$$\frac{dx}{dt} = x(a - by)$$

$$\frac{dy}{dt} = -y(c - dx)$$

donde:

- x representara la población de depredadores
- y representara la población de la presa

Los parámetros de ajuste del sistema son:

- a es la tasa de crecimiento de la presa
- b es el éxito en la caza
- c es la tasa de crecimiento del depredador
- d la caza que afecta al depredador

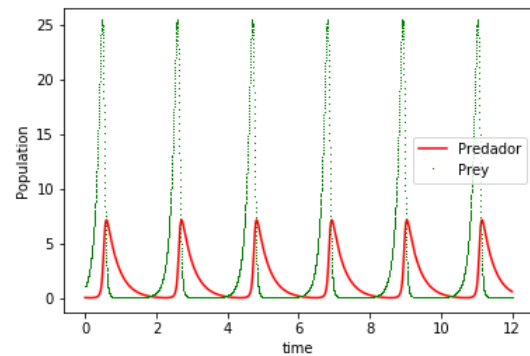


Figura 23. Interacción entre dos poblaciones, depredador presa

Lo que podemos observar es un comportamiento oscilatorio, esto se explica por la dependencia entre ambas especies y no por influencias externas o del mismo ecosistema.

La estrecha relación entre ambas especies podemos observar en las gráficas siguientes donde, si alguna de las dos poblaciones se extingue la otra tiende a aumentar en el caso de la población bajo el rol de la presa, y para el caso del depredador la población entera se extingue.

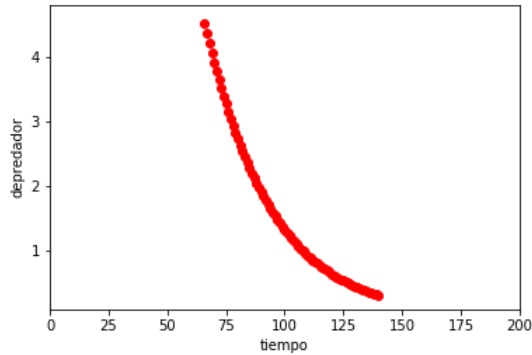


Figura 24. Dcremento poblacion de depredadores en ausencia de una presa

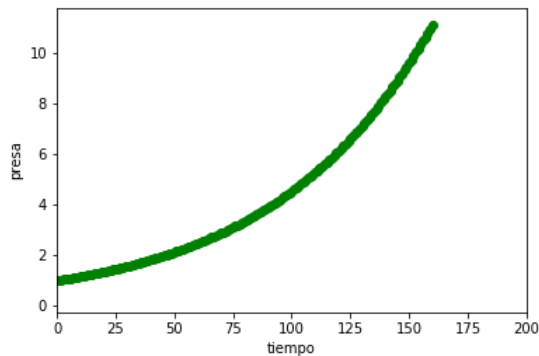


Figura 25. Crecimiento poblacional de la presa en ausencia de un depredador

Aun así modelos como estos se quedan fuera de la predicción real de las interacciones entre especies en la naturaleza, al igual que la logística nuestro sistema se encuentra aislado, y solo tomamos en cuenta dos especies, cuyo crecimiento y decremento en ausencia de la otra se pueden modelar exponencialmente por la tasa de cambio y si recordamos ese era el mismo problema de la ecuación logística por no contemplar parámetros que frenen el cambio.

VIII. CONCLUSIONES

A lo largo de la historia han habido revoluciones en la ciencia, las leyes de movimiento de Newton se consideran la primera revolución del pensamiento, la segunda gran revolución llegó en el siglo xx Albert Einstein y la teoría de relatividad general que cambió por completo la concepción que teníamos del universo, la cuestión es si el desarrollo de la teoría del caos también se puede considerar como una nueva revolución en la ciencia, prácticamente nos dice que no podemos

predecir el comportamiento de todos los sistemas que es lo contrario a lo que hemos tratado de hacer.

El amplio número de sistemas que podemos encontrar en la naturaleza o desarrollar de forma determinista y que presentan no linealidad nos lleva a pensar si una descripción matemática no lineal es más común de lo que pensábamos y los sistemas lineales que tanto nos gustan son los extraños en la naturaleza.

Si algo enseña la teoría del caos es que la estrecha relación entre el determinismo y predictibilidad no siempre se cumple, pues tenemos modelos desarrollados bajo la visión determinista que fallan en la predictibilidad por su alta sensibilidad a la variación de sus condiciones.

Más que una simple curiosidad, el carácter científico de la teoría del caos es innegable y muy relevante pues a veces olvidamos el objetivo de ser científico, queremos construir modelos tan complejos pero precisos con el fin de una mejor predicción que como resultado nos lleva a conocer más y por otro lado desarrollamos modelos tan simples con el objetivo de entender mejor.

REFERENCIAS

- [1] ROBERT C. HILBORN. *Chaos and Nonlinear Dynamics*. Second Edition. Oxford University Press.
- [2] STEVEN H. STROGATZ. *Nonlinear Dynamics and Chaos*. First Edition. Perseus Books
- [3] J. M. T. THOMSON AND H. B. STEWAR. *Nonlinear Dynamics and Chaos*. Second Edition. JOHN WILEY AND SONS, LTD
- [4] JAMES GLEICK. *Chaos, Making a new science*. First Edition. Viking
- [5] BENOÎT MANDELBROT. *La geometría fractal de la naturaleza*. First Edition. MATEMAS TUSQUETS EDITORES
- [6] STEPHEN T. THORNTON AND JERRY B. MARION. *Classical Dynamics of Particles and Systems*. First Edition. Thomson Books/Cole
- [7] K. T. ALLIGOOD, T. D. SAUER AND J. A. YARKE. *Chaos, An introduction to dynamical systems*. First Edition. Springer