Tarea # 4 Juan Manuel Lopez Vega

1) Probar que los siguientes transformaciones son canonicas para cualquier valor μ

$q_1 = x\cos\mu + P_y \operatorname{sen}\mu \qquad q_2 = y\cos\mu + P_x\operatorname{sen}\mu$

$p_1 = P_x\cos\mu - y\operatorname{sen}\mu \qquad p_2 = P_y\cos\mu - x\operatorname{sen}\mu$

Teniendo variables generalizadas p_i, q_i
y una transformacion

$Q = Q(q_i, p_i) \qquad P = p(q_i, p_i)$

si la transformacion es canonica cumple

$\mathcal{J} J \mathcal{J}^T = J$ donde J es una matriz simplectica

podemos tener la transformacion inversa

$q = q(Q_i, P_i) \qquad p = p(Q_i, P_i)$ Tambien cumple

$\mathcal{J}(J)\mathcal{J}^T = J$ (Transformacion inversa tambien es canonica)

$$\mathcal{J} = \begin{pmatrix} q_{1,x} & q_{1,y} & q_{1,p_x} & q_{1,p_y} \\ q_{2,x} & q_{2,y} & q_{2,p_x} & q_{2,p_y} \\ p_{1,x} & p_{1,y} & p_{1,p_x} & p_{1,p_y} \\ p_{2,x} & p_{2,y} & p_{2,p_x} & p_{2,p_y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\mu & 0 & 0 & \operatorname{sen}\mu \\ 0 & \cos\mu & \operatorname{sen}\mu & 0 \\ 0 & -\operatorname{sen}\mu & \cos\mu & 0 \\ -\operatorname{sen}\mu & 0 & 0 & \cos\mu \end{pmatrix}$$

$$J\mathcal{J}^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\mu & 0 & 0 & -\operatorname{sen}\mu \\ 0 & \cos\mu & -\operatorname{sen}\mu & 0 \\ 0 & \operatorname{sen}\mu & \cos\mu & 0 \\ \operatorname{sen}\mu & 0 & 0 & \cos\mu \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{J}J\mathcal{J}^T = \begin{pmatrix} \cos\mu & 0 & 0 & \operatorname{sen}\mu \\ 0 & \cos\mu & \operatorname{sen}\mu & 0 \\ 0 & -\operatorname{sen}\mu & \cos\mu & 0 \\ -\operatorname{sen}\mu & 0 & 0 & \cos\mu \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \operatorname{sen}\mu & 0 & 0 & \cos\mu \\ 0 & \operatorname{sen}\mu & \cos\mu & 0 \\ 0 & -\cos\mu & \operatorname{sen}\mu & 0 \\ -\cos\mu & 0 & 0 & \operatorname{sen}\mu \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{J} J \mathcal{J}^T = \begin{pmatrix} & & & 1 \\ & & 1 & \\ & -1 & & \\ -1 & & & \end{pmatrix} = J$$

la transformacion de la forma

$q = q(Q_i, P_i)$ $\quad p = p(Q_i, P_i)$ es canonica por lo

que $Q = Q(q_i, p_i)$ $\quad P = P(q_i, p_i)$ lo es tambien

b) si el Hamiltoniano Original es $H = (q_1^2 + q_2^2 + p_1^2 + p_2^2)/2$
encontrar el nuevo Hamitoniano en (x, y) y sus momentos

$$q_1^2 = x^2 \cos^2 \mu + 2x P_y \cos\mu \operatorname{sen}\mu + P_y^2 \operatorname{sen}^2\mu$$
$$q_2^2 = y^2 \cos^2 \mu + 2y P_x \cos\mu \operatorname{sen}\mu + P_x^2 \operatorname{sen}^2\mu$$
$$p_1^2 = P_x^2 \cos^2 \mu - 2P_x y \cos\mu \operatorname{sen}\mu + y^2 \operatorname{sen}^2\mu$$
$$p_2^2 = P_y^2 \cos^2 \mu - 2P_y x \cos\mu \operatorname{sen}\mu + x^2 \operatorname{sen}^2\mu$$

$$H = (x^2 + y^2 + P_x^2 + P_y^2)/2$$

para obtener los momentos Conjugados

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \qquad \frac{\partial H}{\partial P_x} = \dot{x} = P_x \qquad \frac{\partial H}{\partial P_y} = \dot{y} = P_y$$

momentos conjugados $\quad P_x = \dot{x} \quad P_y = \dot{y}$

c) Usa el nuevo Hamiltoniano para resolver la dinamica
con la restriccion $y = P_y = 0$

$$\frac{\partial H}{\partial q_i} = -\dot{p}_i \qquad \frac{\partial H}{\partial x} = -\dot{P}_x = x \qquad \frac{\partial H}{\partial y} = -\dot{P}_y = y$$

$-\dot{P}_x = x \qquad -\dot{P}_y = y = 0$

$\dot{x} = P_x \qquad \dot{y} = P_y = 0$

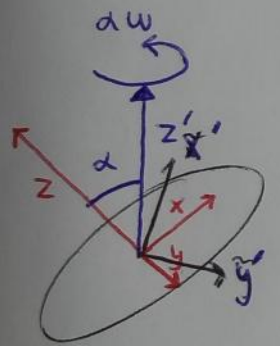
Tomamos una 2° derivada

$\ddot{x} = \dot{P}_x \qquad \ddot{x} = -x \longrightarrow$ Ecuacion del oscilador

$x(t) = A\cos(t) + B\,\mathrm{sen}(t)$

Pregunta 2

Un disco delgado uniforme de masa M y radio A, rota sin friccion con velocidad angular uniforme w sobre un eje vertical fijo que pasa por su centro y forma un angulo alfa con el eje de simetria



a) Determinar los momentos de inercia y los ejes principales

Para un disco su $\rho = \dfrac{M}{\pi A^2}$

Como es sobre los ejes principales

$$I = \int d^3r\, \rho(r) \begin{pmatrix} y^2+z^2 & -xy & -xz \\ -xy & x^2+z^2 & -yz \\ -xz & -yz & x^2+y^2 \end{pmatrix}$$

$$I_{11} = \int d^3r\, \rho(r)(y^2+z^2)$$

$\hat{z}$ lo tomo perpendicular al disco (eje de rotacion)

$$I_{11} = \int \rho y^2 \, da$$

$$I_{22} = \int da\, \rho(x^2+z^2) = \int \rho x^2 \, da$$

$$I_{33} = \int da\, \rho(x^2+y^2) = I_{11} + I_{22}$$

Para $\rho = \frac{M}{\pi A^2}$

$$I_{33} = \frac{M}{\pi A^2} \int_0^A \int_0^{2\pi} r^2 \, r\, d\theta\, dr = \frac{2M}{A^2} \int_0^A r^3 \, dr = \frac{2M}{A^2} \frac{r^4}{4} \Big|_0^A$$

$$I_{33} = \frac{A^2 M}{2}$$

Por simetria en direccion x, y decimos $I_{11} = I_{22}$

$$I_{11} = \frac{A^2 M}{4}$$

Construimos el tensor de Inercia

$$\underline{I} = \begin{pmatrix} \frac{A^2 M}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{A^2 M}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{A^2 M}{2} \end{pmatrix}$$

b) Encuentre el vector momento angular (magnitud y dirección)

Ecuaciones de Euler

$I_1 \dot{\omega}_1 + \omega_2 \omega_3 (I_3 - I_2) = 0$

$I_2 \dot{\omega}_2 + \omega_1 \omega_3 (I_1 - I_3) = 0$

$I_3 \dot{\omega}_3 + \omega_1 \omega_2 (I_2 - I_1) = 0$

donde $I_1 = I_2 \neq I_3$

$\dot{\omega}_1 = -\frac{(I_3 - I_2)}{I_1} \omega_3 \omega_2 \qquad \dot{\omega}_2 = -\frac{(I_1 - I_3)}{I_2} \omega_3 \omega_1$

$\dot{\omega}_3 = 0 \qquad$ defino $-\frac{(I_3 - I_2)}{I_1} \omega_3 = \Omega$

obtenemos $\omega_3 = \omega_0$

y obtenemos las ecuaciones de movimiento para ω_1, ω_2

$\dot{\omega}_1 = \Omega \omega_2 \qquad \dot{\omega}_2 = -\Omega \omega_1$

$\ddot{\omega}_1 = \Omega \dot{\omega}_2$

$\ddot{\omega}_1 = -\Omega^2 \omega_1 \qquad$ y $\qquad \ddot{\omega}_2 = -\Omega^2 \omega_2$

donde las soluciones son osciladores armónicos

$\omega_1 = A \cos(\Omega t) + B \operatorname{sen}(\Omega t) = A \cos(\Omega t + \delta)$

$\omega_2 = \tilde{A} \cos(\Omega t) + \tilde{B} \operatorname{sen}(\Omega t) = \tilde{A} \operatorname{sen}(\Omega t + \delta)$

$\omega_3 = \omega_0 \rightarrow$ para el sistema del ~~tiempo~~. ~~Inercial~~ cuerpo

$$\omega = \begin{pmatrix} A\cos(\Omega t) \\ \tilde{A}\,\mathrm{sen}(\Omega t) \\ \omega_3 \end{pmatrix}$$

$$L = I\,\omega = \begin{pmatrix} \frac{1}{4}MR^2 & & \\ & \frac{1}{4}MR^2 & \\ & & \frac{1}{2}MR^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A\cos(\Omega t) \\ \tilde{A}\,\mathrm{sen}(\Omega t) \\ \omega_3 \end{pmatrix}$$

$$L = \begin{pmatrix} \frac{A}{4} MR^2 \cos(\Omega t) \\ \frac{\tilde{A}}{4} MR^2\,\mathrm{sen}(\Omega t) \\ \frac{1}{2} M \omega_3 R^2 \end{pmatrix}$$ por simetria $A = \tilde{A}$

$$\|L\| = \left(\frac{A^2}{16} M^2 R^4 + \frac{M^2 \omega_3^2 R^4}{4} \right)^{1/2}$$

$$\|L\| = \frac{MR^2}{2} \left(\frac{A^2}{4} + \omega_3^2 \right)^{1/2}$$

para el sistema del cuerpo