MECÁNICA ANALÍTICA. Saúl Alí Caudillo Rodríguez. Tarea 3.

Pregunta 1:

Sea el funcional $f\{y(x), y'(x), y''(x); x\}$ de tal forma que, dadas todas las variaciones posibles de $y(x)$, podemos escribir en forma parametrizada:

$$y(\alpha, x) = y(0, x) + \alpha\eta(x) \qquad \text{con} \quad y(0,x) = y(x)$$

donde la integral:

$$J = \int_{x_1}^{x_2} f\{y(x), y'(x), y''(x); x\}\, dx$$

sea un mínimo o un máximo, fijando los puntos extremos de tal forma que: $\eta(x_1) = \eta(x_2) = 0$, por lo tanto $y(\alpha, x_1) = y(0, x_1)$ y $y(\alpha, x_2) = y(0, x_2)$.

Usando el parámetro α se tiene:

$$J(\alpha) = \int_{x_1}^{x_2} f\{y(\alpha,x), y'(\alpha,x), y''(\alpha,x); x\}\, dx$$

donde $y'(\alpha,x) = y'(0,x) + \alpha \frac{d\eta(x)}{dx}$ y $y''(\alpha,x) = y''(0,x) + \alpha \frac{d^2\eta(x)}{dx^2}$

Para que $J(\alpha)$ sea un extremo es necesario establecer que: $\left.\frac{\partial J(\alpha)}{\partial \alpha}\right|_{\alpha=0} = 0$, entonces derivando respecto de alfa a ambos lados se tiene que:

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} J(\alpha) = \frac{\partial}{\partial \alpha}\int_{x_1}^{x_2} f\{y, y', y''; x\}\, dx$$

$$= \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial}{\partial \alpha} f\{y, y', y''; x\}\, dx$$

Que, al hacer uso de la regla de la cadena, se obtiene

$$\frac{\partial J(\alpha)}{\partial \alpha} = \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \alpha} + \frac{\partial f}{\partial y'}\frac{\partial y'}{\partial \alpha} + \frac{\partial f}{\partial y''}\frac{\partial y''}{\partial \alpha} \right) dx$$

Donde: $\frac{\partial y}{\partial \alpha} = \frac{\partial}{\partial \alpha}\left(y(0,x) + \alpha \eta(x) \right) = \eta(x)$

$\frac{\partial y'}{\partial \alpha} = \frac{\partial}{\partial \alpha}\left(y'(0,x) + \alpha \frac{d\eta}{dx} \right) = \frac{d\eta(x)}{dx}$ y $\frac{\partial y''}{\partial \alpha} = \frac{\partial}{\partial \alpha}\left(y''(0,x) + \alpha \frac{d^2\eta}{dx^2} \right) = \frac{d^2\eta}{dx^2}$

Sustituyendo:

$$\frac{\partial J(\alpha)}{\partial \alpha} = \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial f}{\partial y}\eta(x) + \frac{\partial f}{\partial y'}\frac{d\eta(x)}{dx} + \frac{\partial f}{\partial y''}\frac{d^2\eta(x)}{dx^2} \right) dx \qquad (1)$$

Del segundo término del integrando, mediante Integración por sustitución:

$\int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial f}{\partial y'}\frac{d\eta}{dx}dx$; Hacemos $u = \frac{\partial f}{\partial y'} \Rightarrow du = \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right)dx$ y $dv = d\eta \Rightarrow v = \eta(x)$

Por lo tanto:

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial f}{\partial y'}\frac{d\eta}{dx}dx = \frac{\partial f}{\partial y'}\eta(x)\Big|_{x_1}^{x_2} - \int_{x_1}^{x_2} \eta(x)\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right)dx$$

Donde: $\frac{\partial f}{\partial y'}\eta(x)\Big|_{x_1}^{x_2} = 0$ por que $\eta(x_1) = \eta(x_2) = 0.$, por lo tanto:

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial f}{\partial y'}\frac{d\eta}{dx}dx = -\int_{x_1}^{x_2} \eta(x)\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right)dx$$

Del tercer término del integrando, mediante doble integración por sustitución se tiene:

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial f}{\partial y''} \frac{\partial^2 \eta}{dx^2} dx \quad , \text{ haciendo } u = \frac{\partial f}{\partial y''} \Rightarrow du = \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y''}\right) dx \quad y \; dv = \frac{d^2 \eta}{dx^2} dx \Rightarrow v = \frac{d\eta}{dx}$$

entonces:

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial f}{\partial y''} \frac{d^2 \eta}{dx^2} dx = \frac{\partial f}{\partial y''} \frac{d\eta}{dx}\Bigg|_{x_1}^{x_2} - \int_{x_1}^{x_2} \frac{d\eta}{dx} \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y''}\right) dx$$

donde el término primero se anula ya que, por construcción $\eta(x)$ tiene primera derivada contínua y se anula en x_1 y x_2

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial f}{\partial y''} \frac{d^2 \eta}{dx^2} dx = -\int_{x_1}^{x_2} \frac{d\eta}{dx} \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y''}\right) dx \quad , \text{ haciendo ahora } u = \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y''}\right) \Rightarrow du = \frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{\partial f}{\partial y''}\right) dx$$

$y \; dv = \frac{d\eta}{dx} dx \Rightarrow v = \eta(x)$, de tal forma que:

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial f}{\partial y''} \frac{d^2 \eta}{dx^2} dx = -\left[\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y''}\right) \eta(x)\Bigg|_{x_1}^{y_2} - \int_{x_1}^{y_2} \eta(x) \frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{\partial f}{\partial y''}\right) dx\right]$$

$$= \int_{x_1}^{x_2} \eta(x) \frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{\partial f}{\partial y''}\right) dx$$

Sustituyendo lo obtenido para el segundo y tercer integrando de (1) en (1), se obtiene:

$$\frac{\partial J(\alpha)}{\partial \alpha} = \int_{x_1}^{y_2} \left[\frac{\partial f}{\partial y} \eta(x) + (-)\eta(x) \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right) + \eta(x) \frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{\partial f}{\partial y''}\right)\right] dx$$

$$\frac{\partial J(\alpha)}{\partial \alpha} = \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right) + \frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{\partial f}{\partial y''}\right)\right] \eta(x)\, dx$$

Haciendo uso de la condición para que $J(\alpha)$ sea un extremo, hacemos $\alpha = 0$, $\Rightarrow y(0,x) = y(x)$ y $\left.\frac{\partial J(\alpha)}{\partial \alpha}\right|_{\alpha=0} = 0$, por tanto:

$$0 = \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y'} + \frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{\partial f}{\partial y''}\right)\right] \eta(x)\, dx$$

Obteniendo finalmente:

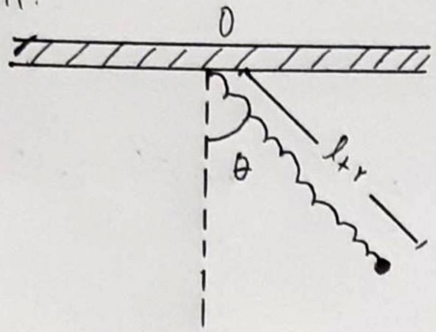
$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right) + \frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{\partial f}{\partial y''}\right) = 0$$

Donde, si $f = L(\ddot{q}_i, \dot{q}_i, q_i, t)$ es el lagrangiano que depende de la aceleración generalizada $\ddot{q}_i$ se obtiene:

$$\boxed{\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) + \frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{\partial L}{\partial \ddot{q}_i}\right) = 0}$$

PREGUNTA 3.

A un péndulo se le reemplaza el cable por un resorte de longitud en reposo l y constante K:



(a) En coordenadas polares, con origen O como se muestra, se estira el resorte obteniendo así una longitud $l+r$ y formando un ángulo θ con la vertical.

La energía cinética del sistema está dada por: la suma de las componentes tangencial y radial:

$$T=\frac{1}{2}m\dot{r}^2+\frac{1}{2}mr^2\dot{\theta}^2=\frac{1}{2}m(\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2)$$

La energía potencial está dada por la energía potencial debida a la gravedad y a la elongación del resorte, resultando en:

$$V_{(r)}=\frac{1}{2}k(r-l)^2-mgr\cos\theta$$

Donde la primera parte es debida a la elongación del resorte y el segundo término debido a la gravedad. Por lo tanto el lagrangiano del sistema es:

$$\boxed{L=\frac{1}{2}m(\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2)+mgr\cos\theta-\frac{1}{2}k(r-l)^2}$$

Mediante las ecuaciones de Euler-Lagrange:

$$\frac{\partial L}{\partial x_i}-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}\right)=0 \qquad \text{con } x_1=r \text{ y } x_2=\theta$$

Obtenemos:

$$\frac{\partial L}{\partial r}=r\dot{\theta}^2m+mg\cos\theta-K(r-l) \qquad \text{y} \qquad \frac{\partial L}{\partial \dot{r}}=m\dot{r}\Rightarrow\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{r}}\right)=m\ddot{r}$$

Por lo tanto la ecuación de Euler-Lagrange para r es:

$$\boxed{mr\dot{\theta}^2 + mg\cos\theta - K(l-r) - m\ddot{r} = 0}$$

Luego:

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = -mgr\sin\theta \quad y \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = mr^2\dot{\theta} \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) = m\frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta}) = m(r^2\ddot{\theta} + 2r\dot{r}\dot{\theta})$$

Por lo tanto:

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) = \boxed{-mgr\sin\theta - mr^2\ddot{\theta} - 2r\dot{r}\dot{\theta} = 0}$$

(b) Para encontrar los puntos de equilibrio derivamos parcialmente el potencial del sistema: e igualando a cero:

$$\frac{\partial V(r,\theta)}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{2}(r-l)^2 K - mgr\cos\theta\right) = K(r-l) - mg\cos\theta \quad y,$$

$$\frac{\partial V(r,\theta)}{\partial \theta} = mgr\sin\theta, \text{ obteniendo las ecuaciones: } \begin{cases} K(r-l) - mg\cos\theta = 0 \\ mgr\sin\theta = 0 \end{cases}$$

Las soluciones para la segunda ecuación son $\theta = 0°$ y $\theta = \pi$, y sustituyendo dichas soluciones en la primer ecuación:

$$K(r-l) - mg\cos(0) = Kr - lK - mg = 0 \Rightarrow r = \frac{lK + mg}{K} = l + \frac{mg}{K} \quad y$$

$$K(r-l) - mg\cos(\pi) = Kr - Kl + mg = 0 \Rightarrow r = \frac{Kl - mg}{K} = l - \frac{mg}{K}$$

Por lo tanto, los puntos de equilibrio son: $(\theta_{1,eq}, r_{1,eq}) = \left(0, l + \frac{mg}{K}\right)$ y $(r_{2eq}, \theta_{2eq}) = \left(l - \frac{mg}{K}, \pi\right)$

Haciendo las segundas derivadas parciales de $V(r,\theta)$

Haciendo la segunda derivada parcial de $V(r,\theta)$

$$\frac{\partial^2 V(r,\theta)}{\partial r^2} = \frac{\partial^2}{\partial r^2} V(r,\theta) = \frac{\partial^2}{\partial r^2}\left(\frac{1}{2}K(r-l)^2 - mgr\cos\theta\right) = \frac{\partial}{\partial r}\left(K(r-l) - mg\cos\theta\right) = K$$

$$\frac{\partial^2 V(r,\theta)}{\partial \theta^2} = \frac{\partial}{\partial \theta}\left(mgr\sin\theta\right) = mgr\cos\theta$$

Como puede verse: $\left.\frac{\partial^2 V(r,\theta)}{\partial r^2}\right]_{\text{puntos eq.}} = K > 0$ y $\left.\frac{\partial^2 V(r,\theta)}{\partial \theta^2}\right|_{\theta=0} = mgr > 0$

y $\left.\frac{\partial^2 V(r,\theta)}{\partial \theta^2}\right|_{\theta=\pi} = -mgr < 0$, por lo tanto, podemos concluir que el punto de equilibrio $(r_{eq}, \theta_{1eq}) = \left(l + \frac{mg}{K}, 0\right)$ es un punto de equilibrio estable, mientras que $(r_{2eq}, \theta_{2eq}) = \left(l - \frac{mg}{K}, \pi\right)$ es un punto de equilibrio inestable.

(c) Introducimos las variables nuevas: $\theta = \theta_{eq} + \theta_0$ y $r = r_{eq} + r_0$, donde θ_0 y r_0 son muy pequeños y θ_{eq} y r_{eq} son los puntos de equilibrio del inciso anterior.

Sustituyendo en las ecuaciones de movimiento originales:

$$m\ddot{r}_0 - m(r_{eq} + r_0)\dot{\theta}_0^2 + K(r_{eq} + r_0 + l) - mg\cos(\theta_{eq} + \theta_0) = 0$$

y

$$2m(r_{eq} + r_0)\dot{r}_0\dot{\theta}_0 + m(r_{eq} + r_0)^2\ddot{\theta}_0 + mg(r_{eq} + r_0)\sin(\theta_{eq} + \theta_0) = 0$$

Usando identidades trigonométricas de la suma de ángulos

$$m\ddot{r}_0 - m(r_{eq} + r_0)\dot{\theta}_0^2 + K(r_{eq} + r_0 + l) - mg\left[\cos(\theta_{eq})\cos(\theta_0) - \sin(\theta_{eq})\sin(\theta_0)\right]$$

y $2m(r_{eq}+r_0)\dot{r}_0\dot{\theta}_0 + m(r_{eq}+r_0)^2\ddot{\theta}_0 + mg(r_{eq}+r_0)[\sin(\theta_{eq})\cos\theta_0 + \sin\theta_0\cos(\theta_{eq})]$

Donde $\sin(\theta_{eq})=0$ (punto de equilibrio), quedando finalmente:

$$m\ddot{r}_0 - m(r_{eq}+r_0)\dot{\theta}_0^2 + k(r_{eq}+r_0-l) - mg\cos(\theta_{eq})\cos(\theta_0)=0 \qquad y:$$

$$2m(r_{eq}+r_0)\dot{r}_0\dot{\theta}_0 + m(r_{eq}+r_0)^2\ddot{\theta}_0 + mg(r_{eq}+r_0)\cos(\theta_{eq})\sin(\theta_0)=0$$

Y ya que θ_0 es pequeño, podemos hacer $\sin\theta_0 \approx \theta$ y $\cos(\theta_0)\approx 1$

Donde puede verse que los términos de primer orden son:

$$m\ddot{r}_0 + kr_0 = 0 \quad y \quad mr_{eq}^2\ddot{\theta}_0 + mgr_{eq}\cos(\theta_{eq})\theta_0 = 0$$

$$\Rightarrow \ddot{r}_0 + \frac{k}{m}r_0 = 0 \quad y \quad \begin{cases} \ddot{\theta}_0 + \frac{g}{r_{eq}}\theta_0 = 0 & \text{si } \theta_{eq}=0 \\ \ddot{\theta}_0 + \left(-\frac{g}{r_{eq}}\theta_0\right) = 0 & \text{si } \theta_{eq}=\pi \end{cases}$$

La solución para la primer ecuación diferencial está dada por:

Proponiendo $r_0 = e^{\alpha t}$, obteniendo entonces la ec. auxiliar: $\alpha^2 e^{\alpha t} + \frac{k}{m}e^{\alpha t}=0$

$\Rightarrow \alpha^2 + \frac{k}{m} = 0$, resolviendo: $\alpha_1 = i\sqrt{\frac{k}{m}}$ y $\alpha_2 = -i\sqrt{\frac{k}{m}}$, obteniendo entonces

$r_0 = Ae^{i\sqrt{k/m}\,t} + Be^{-i\sqrt{k/m}\,t}$, que mediante la fórmula de Euler podemos

escribir como $r_0 = A\sin\omega t + B\cos\omega t$, donde $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$

$$\therefore \boxed{r = r_{eq} + A\sin(\omega t) + B\cos(\omega t)}$$

De igual forma de proceder resolvemos las restantes dos ec. diferenciales

$$\theta = \theta_{eq} + C\sin(\mu t) + D\cos(\mu t) \quad \text{para } \theta_{eq} = 0$$

y $\theta = \theta_{eq} + C\sin(\mu t) + D\cos(\mu t)$ para $\theta_{eq} = \pi$

Donde $\mu = \sqrt{\frac{g}{r_{eq}}}$

Pregunta 4

Considerando el lagrangiano:

$$L = e^{bt}\left(\frac{1}{2}m\dot{q}^2 - \frac{1}{2}k^2q^2\right)$$

a) Obtenemos las ecuaciones de Euler-Lagrange:

$$\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) = 0 \Rightarrow \frac{\partial L}{\partial q} = \frac{\partial}{\partial q}\left[e^{bt}\left(\frac{1}{2}m\dot{q}^2 - \frac{1}{2}k^2q^2\right)\right] = -e^{bt}k^2q$$

$$y \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = e^{bt}m\dot{q} \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) = \frac{d}{dt}(e^{bt}m\dot{q}) = m\frac{d}{dt}(e^{bt}\dot{q}) = m(e^{bt}\ddot{q} + \dot{q}e^{bt}b)$$

$$\therefore \frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) = -e^{bt}k^2q - me^{bt}\ddot{q} - be^{bt}\dot{q}m = 0$$, multiplicando por -1

$$e^{bt}k^2q + e^{bt}m\ddot{q} + e^{bt}b\dot{q}m = 0$$

$$e^{bt}(m\ddot{q} + b\dot{q}m + k^2q) = 0 \Rightarrow \boxed{\ddot{q} + b\dot{q} + \frac{k^2}{m}q = 0}$$ si $\beta \equiv b$ y $\omega \equiv \frac{k^2}{m}$

$$\boxed{\ddot{q} + \beta\dot{q} + \omega q = 0}$$

Como podemos ver, esta ecuación se asemeja a la ecuación de movimiento para el oscilador armónico amortiguado.

b) Haciendo el cambio de variable $Q = e^{bt/2}q$ cuya derivada temporal es $\dot{Q} = e^{bt/2}\dot{q} + q\frac{b}{2}e^{bt/2}$, despejamos q y $\dot{q}$ para ambas ecuaciones, obteniendo:

$$q = \frac{Q}{e^{bt/2}} \quad y \quad \dot{q} = \frac{\dot{Q} - q\frac{b}{2}e^{bt/2}}{e^{bt/2}} = \frac{\dot{Q} - \frac{Q}{e^{bt/2}}\frac{b}{2}e^{bt/2}}{e^{bt/2}} = \frac{\dot{Q} - \frac{Qb}{2}}{e^{bt/2}}$$

$$\dot{q} = \frac{\frac{2\dot{Q} - Qb}{2}}{e^{bt/2}} = \frac{2\dot{Q} - Qb}{2e^{bt/2}}$$
, sustituyendo q y $\dot{q}$ en el lagrangiano original:

$$L = e^{bt}\left[\frac{1}{2}m\left(\frac{2\dot{Q} - Qb}{2e^{bt/2}}\right)^2 - \frac{1}{2}k^2\left(\frac{Q}{e^{bt/2}}\right)^2\right] = \frac{e^{bt}}{2e^{bt}}\left[\frac{m(2\dot{Q} - Qb)^2}{4} - k^2Q^2\right]$$

$$\therefore \boxed{L = \frac{1}{2}\left[\frac{m(2\dot{Q} - Qb)^2}{4} - k^2Q^2\right]}$$