

Ensayo sobre el Caos

Saúl Alí Caudillo Rodríguez

12 de noviembre de 2018

Resumen

Una serie de problemas para entender distintos fenómenos de la naturaleza, tales como el problema de los tres cuerpos, la hipótesis de ergodicidad de Boltzmann, y los sistemas dinámicos no lineales produjeron el desarrollo de una amplia y novedosa rama de las matemáticas y física, la teoría del caos, provocando una extensión del paradigma científico actual. En este ensayo se explora brevemente dicha teoría tomando sus principales componentes.

1. Introducción

Los orígenes de la teoría del caos se remontan aproximadamente a los años de 1890 cuando Henry Poincaré estudió la estabilidad del sistema solar.

2. Fractales

La esencia de los comportamientos caóticos en los sistemas dinámicos yace en la no linealidad. Es entonces importante preguntarse acerca de la geometría de dichos fenómenos. Para comenzar con nuestra primera aproximación a la geometría subyacente de los fenómenos caóticos es necesario recurrir al concepto de autosimilitud. La autosimilitud extiende una de las nociones más fructíferas de la geometría elemental: la similitud[1].

La autosimilitud se describe como la propiedad que tiene cierto objeto geométrico de ser en su totalidad semejante a una parte del mismo. Para detallar mejor esta propiedad podemos aludir a las diversas figuras geométricas ya conocidas que poseen dicha autosimilitud.

Uno de estos objetos geométricos son los llamados triángulos de Sierpinski, introducido en 1916 por el matemático polaco Waclaw Sierpinski. Para construir este objeto partimos de un triángulo equilátero:

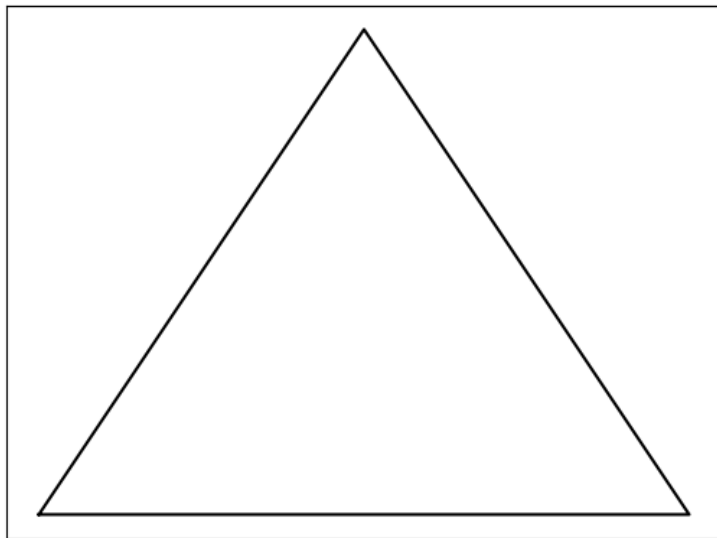


Figura 1: Triángulo de Sierpinski, 0 iteraciones.

Se toman los puntos medios de las aristas del triángulo de tal forma que éstos sean los vértices de otro triángulo interior al primero. Quedando de la siguiente forma:

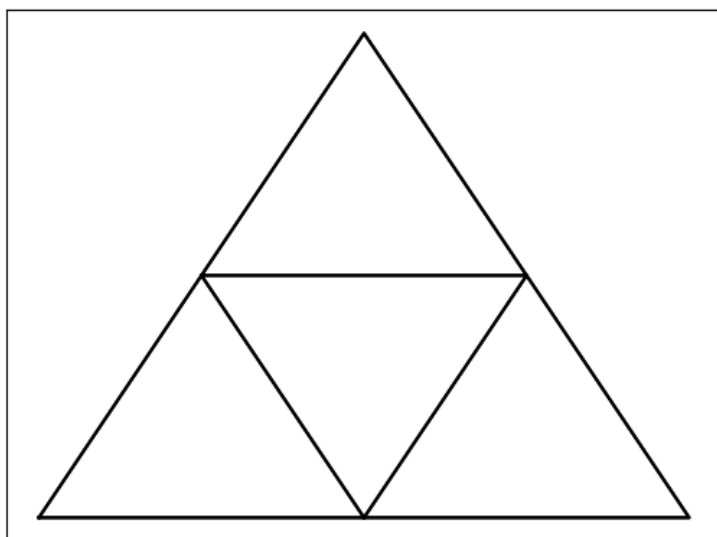


Figura 2: Triángulo de Sierpinski, 1 iteración.

Una vez obtenida esta nueva figura geométrica, se vuelve a repetir el proceso anterior para cada uno de los tres triángulos obtenidos en las esquinas. A continuación se muestra el resultado para diversas iteraciones obtenidas mediante la implementación del código[].

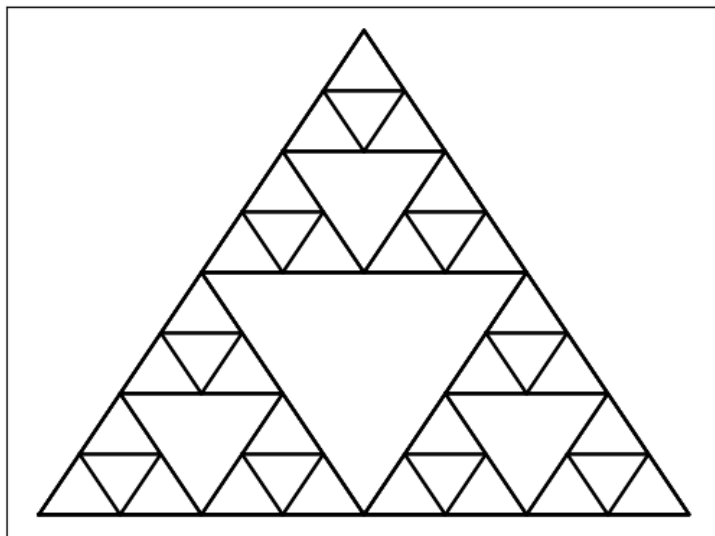


Figura 3: Triángulo de Sierpinski, 3 iteraciones.

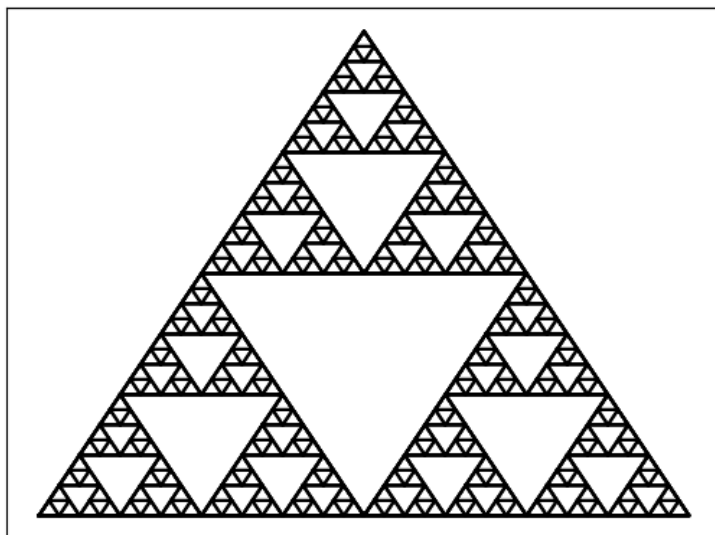


Figura 4: Triángulo de Sierpinski, 5 iteraciones.

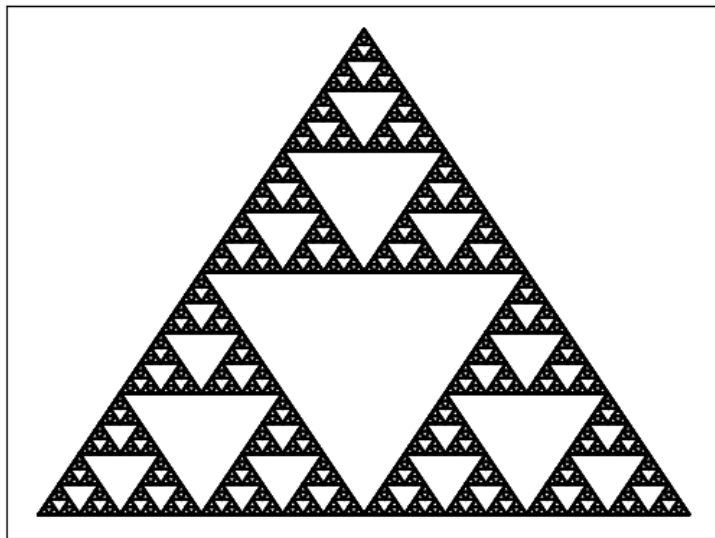


Figura 5: Triángulo de Sierpinski, 6 iteraciones.

Este objeto es sólo uno de tantos existentes y desarrollados a lo largo de la historia de las matemáticas. Otro objeto fractal con propiedad de autosimilitud lo podemos encontrar en la llamada *Alfombra de Sierpinski*, igualmente, introducida por el matemático polaco Waclaw Sierpinski. Se construye de la siguiente forma: se toma un cuadrado, y a este se le añaden 8 cuadrados más pequeños a los lados de la siguiente forma:

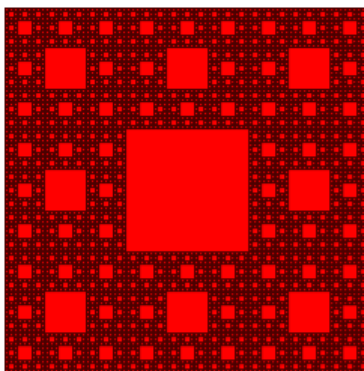


Figura 6: Alfombra de Sierpinski

Las formas geométricas con la propiedad de automilitud no sólo se presentan abstractamente como objetos matemáticos aislados en la mente de unos cuantos, ya que es común que aparezcan en muchas ocasiones de distintas formas producidas genuinamente en la naturaleza. Es inesperado y difícil de imaginar, sin embargo, se han encontrado esta clase de formas en ríos vistos desde una gran altitud, en la textura tridimensional de las montañas,

diversos objetos vegetales, en el paisaje de la superficie lunar con repleta de cráteres, y la lista sigue de forma tan vasta y tan variada como la misma naturaleza. A continuación se muestran unos cuántos ejemplos de ello.



Figura 7: Fractales en ríos. Imagen obtenida de [1].

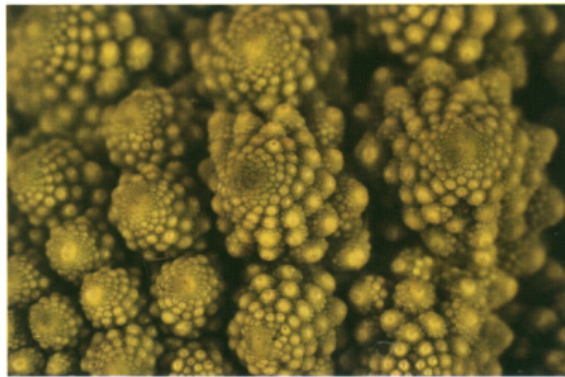


Figura 8: Broccoli Romanesco, un ejemplo clásico de geometría fractal en la naturaleza. Imagen obtenida de [1]

Es importante notar, que generalmente al percibir este tipo de imágenes, se tiene la noción de estar viendo algo estático, cuando de hecho es imposible el desarrollo de la geometría fractal sin considerar la dinamicidad de la misma. Por ejemplo al observar la geometría fractal de un árbol o de un hoja del mismo, conforme van creciendo se van generando más formas similares a la totalidad de todo el objeto, lo cual es totalmente análogo al acto de ir iterando el conjunto de Cantor, o los distintos fractales debidos a Sierpinski.

3. Mapeos y Exponentes de Lyapunov

Para describir matemáticamente la evolución temporal de algún sistema, generalmente se hace mediante un conjunto de ecuaciones diferenciales que describan el cambio de las distintas variables en el tiempo. Una forma alternativa de estudiar sistemas dinámicos se realiza mediante la discretización del tiempo, entonces es posible convertir el conjunto de ecuaciones diferenciales en un conjunto de ecuaciones de diferencias o *mapeos*. [2]

Un mapeo generalmente puede escribirse como una función dependiente de un estado anterior al estado nuevo de tal forma que podemos escribir:

$$f(x_n) = x_{n+1} \quad (1)$$

El ejemplo más típico es el mapeo logístico. El mapeo logístico, introducido por el biólogo Robert May, tiene importantes aplicaciones en el campo de la biología, de hecho, surge como un modelo para describir la evolución temporal de una población para alguna determinada especie. Esta relación está dada por el mapeo cuadrático:

$$x_{n+1} = \alpha x_n(1 - x_n) \quad (2)$$

Donde el parámetro α varía según convenga para el estudio que se esté realizando y el tiempo n es medido en intervalos enteros, ya sea en segundos, minutos, horas, etc.

Aquí es importante recalcar que los mapeos cuadráticos poseen algunas características interesantes según [2]:

- Los mapeos cuadráticos son los mapeos mínimos posibles no lineales. Por lo tanto son los sistemas más simples que exhiben caos.
- Pueden ser graficados en una sencilla gráfica en dos dimensiones que nos dan un entendimiento gráfico del movimiento caótico.

A continuación se muestran una serie de gráficas en 2D (anteriormente mencionada) donde se podrá visualizar el comportamiento caótico del mapeo logístico para distintos parámetros de α , obtenido mediante el código en el apéndice[].

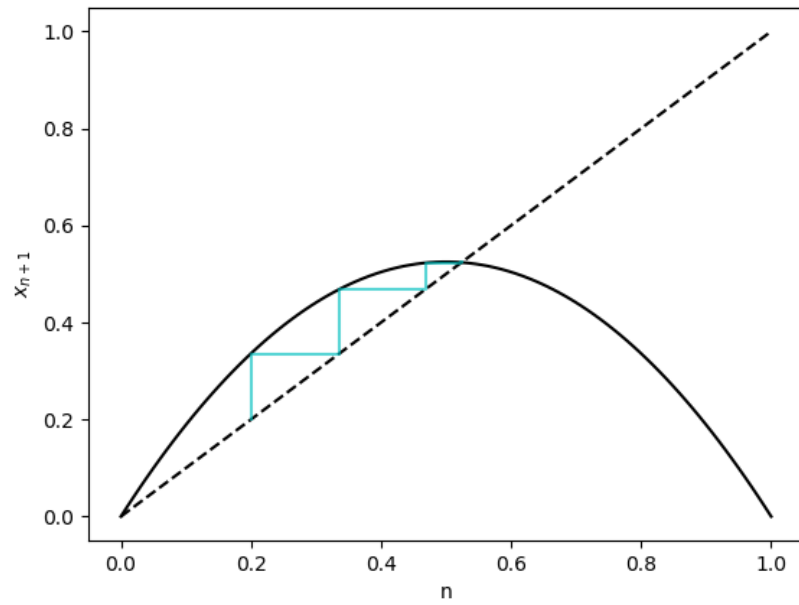


Figura 9: Mapeo logístico para $\alpha = 2,1$.

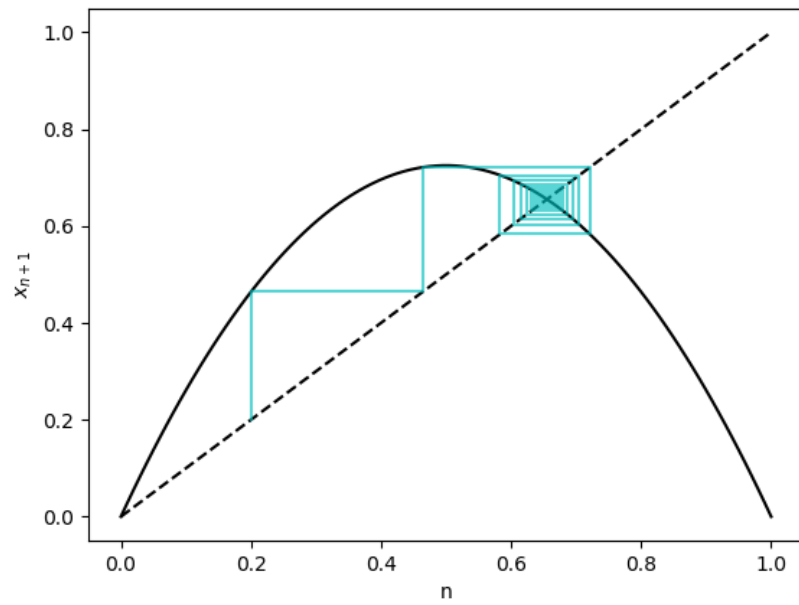


Figura 10: Gráfica del mapeo logístico para $\alpha = 2,9$

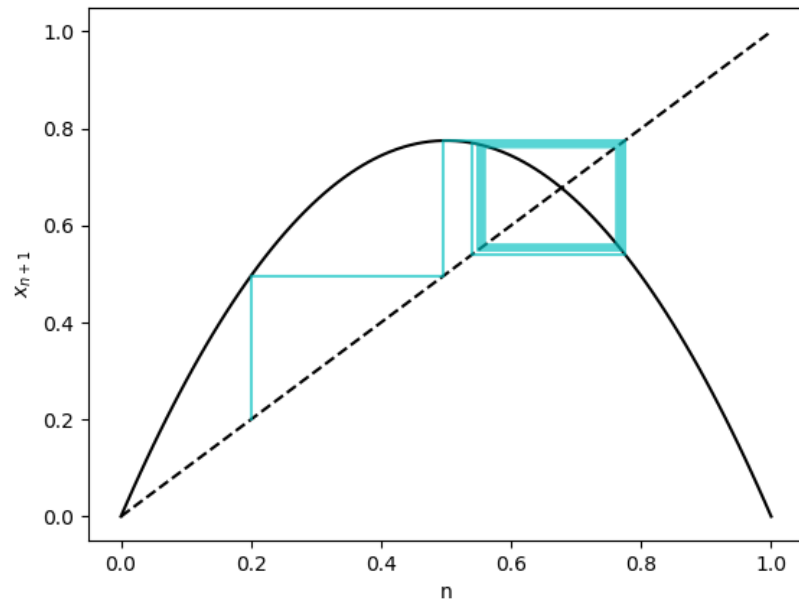


Figura 11: Mapeo logístico para $\alpha = 3,1$

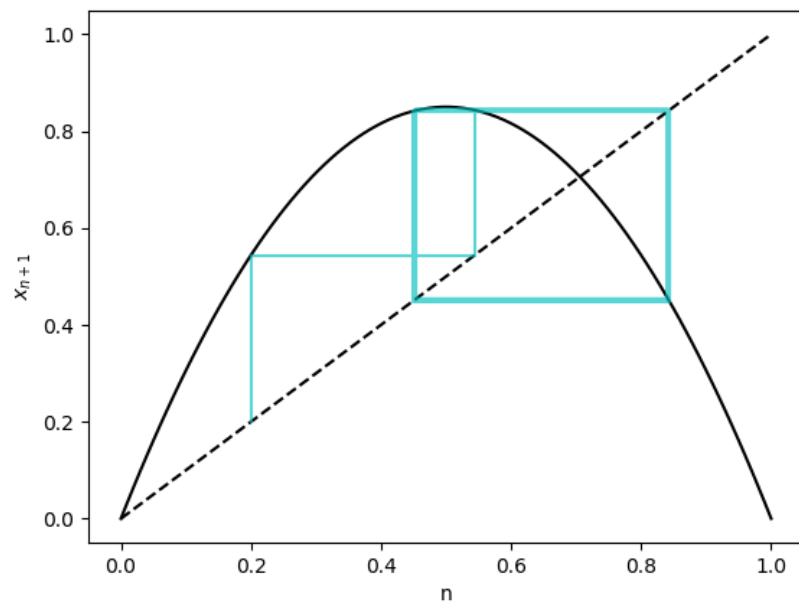


Figura 12: Mapeo logístico para $\alpha = 3,4$

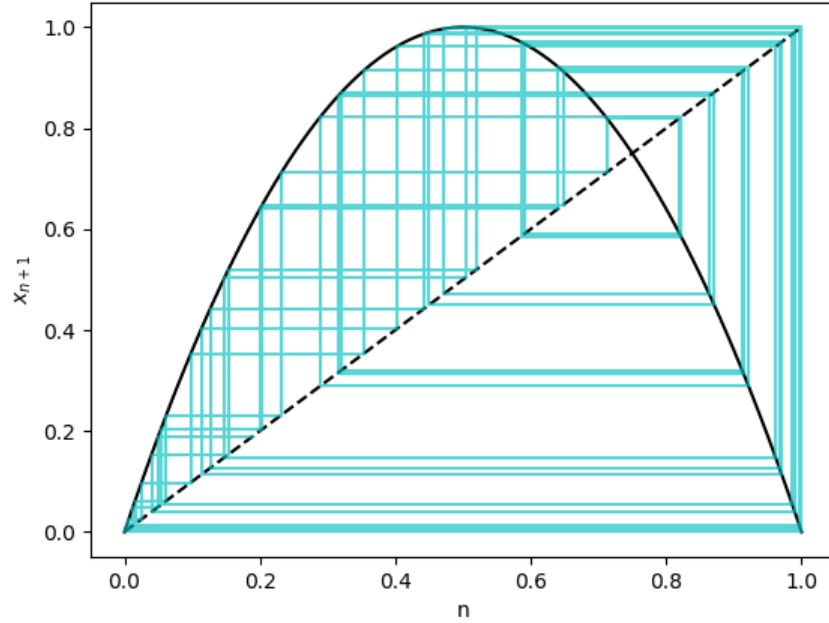


Figura 13: Mapeo logístico para $\alpha = 4,0$

Como puede mostrarse en las figuras anteriores, cuando $\alpha = 2,1$ las líneas de bifurcación convergen al punto $(x_{n+1} = 0,5)$ lo cual significa estabilidad en el sistema en dicho punto en la curva del mapeo logístico. Cuando $\alpha = 2,9$ se crea una espiral cuadrada que converge a un punto en la curva. A esta la existencia de esta convergencia se le relaciona con un ciclo, el cual es una órbita que regresa a su posición original después de n iteraciones. (Thornton, Marion, Classical Dynamics, 2008). Ya dicho esto podemos ver que para $\alpha = 3,1$ y $\alpha = 3,4$ las líneas en cian, convergen a dos puntos en la curva significando entonces dos ciclos. El sistema se va volviendo más caótico para valores $\alpha > 3,5$ culminando en $\alpha = 4,0$ donde puede verse claramente el comportamiento caótico.

Para formalizar el significado de los ciclos representados en las figuras anteriores, definimos lo siguiente:

Se dice que, dado un mapa de la forma (1), tiene uno o más puntos fijos en si la órbita (la trayectoria en cian de los mapas) convergen a uno o más punto en la curva del mapeo.

Al hecho de tener dos ciclos (dos convergencias) se le denomina *doblar el periodo* o *bifurcación* mientras a que a los puntos fijos se les denomina atractores. [4]

Existe una forma de poder visualizar mejor dicha bifurcación, mediante un diagrama de bifurcación. A continuación se muestra el diagrama de bifurcación para el mapeo logístico obtenido mediante el código [4].

En este diagrama puede apreciarse mejor como se van generando más ciclos conforme el parámetro α va variando. Puede apreciarse claramente como el diagrama de bifurcación corresponde con los mapas en 2d previamente mostrados donde se aprecian los ciclos convergiendo a la curva del mapeo.

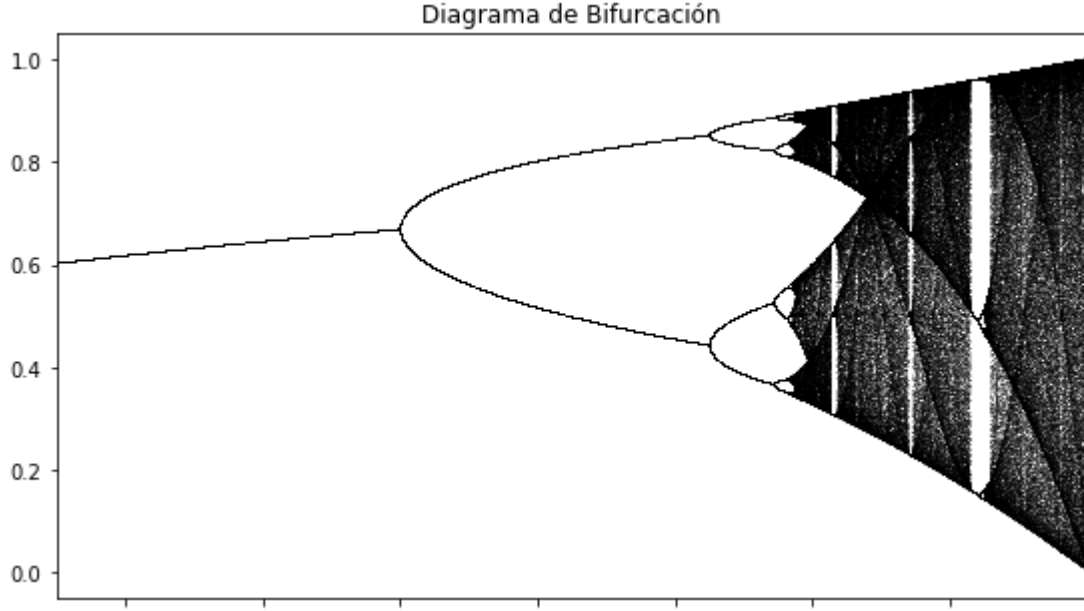


Figura 14: Diagrama de bifurcación para el mapeo logístico

3.1. Exponentes de Lyapunov

Una de las formas de cuantificar la sensibilidad de la dependencia de los valores iniciales de un sistema dinámico es mediante el uso de exponentes de Lyapunov. Existe un exponente de Lyapunov para cada variable del mapeo, es decir, para este caso (del mapeo logístico), al tener solamente una variable tenemos sólo un exponente de Lyapunov.

El exponente de Lyapunov para una variable se define como el promedio:

$$\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \ln \left(\frac{df(x_i)}{dx} \right) \quad (3)$$

A continuación se muestra la gráfica de el exponente de Lyapunov para el mapeo logístico λ contra el parámetro α obtenido mediante el código [].

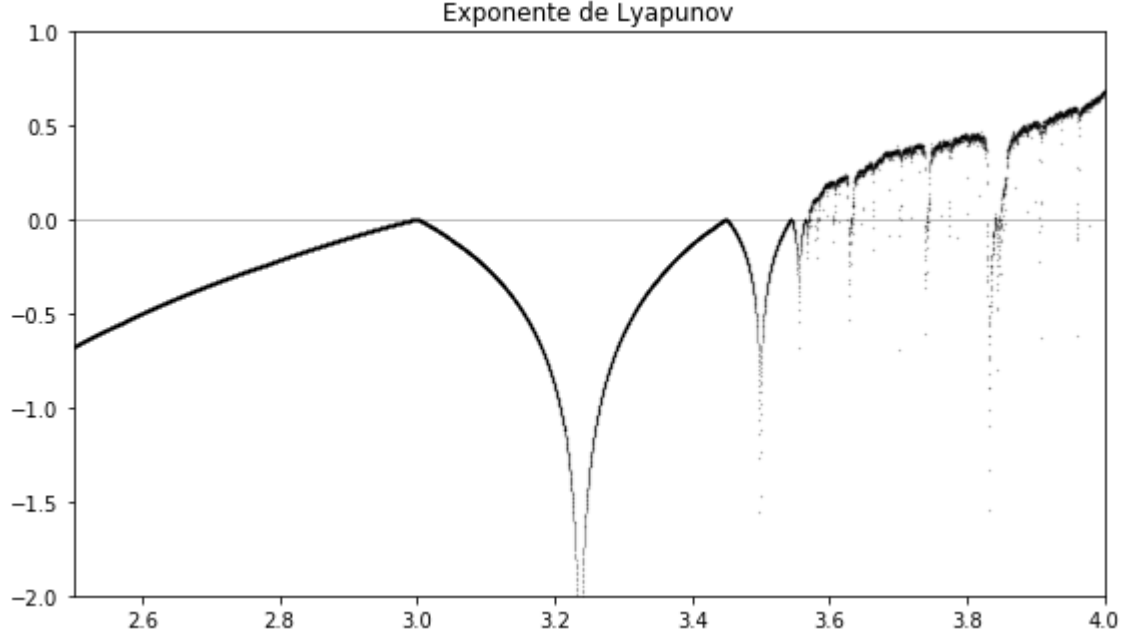


Figura 15: Exponente de Lyapunov contra parámetro α

Según la construcción del exponente de Lyapunov, un valor mayor que 1 ($\lambda > 1$) representa comportamiento caótico, mientras que un valor $\lambda < 1$ indica no caos. Puede apreciarse, mediante comparación con las gráficas de Cobweb (figuras 9 a 13) y el diagrama de bifurcación (Figura 14) y notarse fácilmente la congruencia entre las mismas, detallando así una información completa del sistema dinámico.

3.2. Mapeo Iterativo de Gauss

Otro ejemplo de mapeo caótico es el mapeo iterativo de Gauss, obtenido a partir de la curva de campana de Gauss. Esta relación está dada por:

$$x_{n+1} = e^{-\alpha x_n^2} + \beta \quad (4)$$

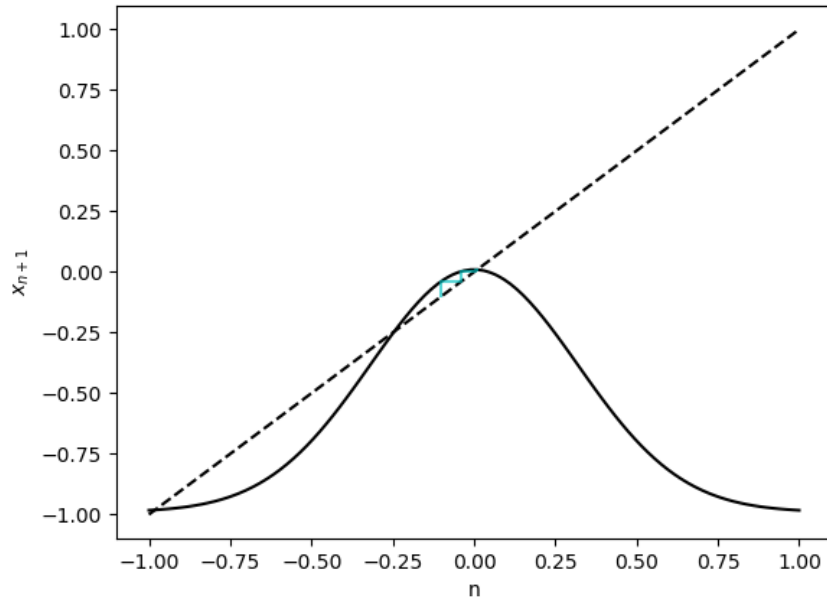


Figura 16: Mapeo iterativo de Gauss para $\beta = -0,99$

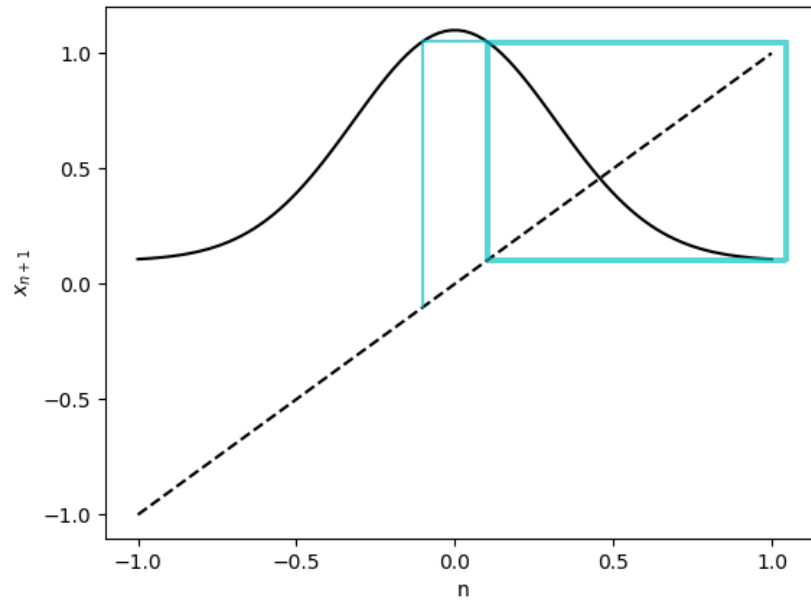


Figura 17: Mapeo iterativo de Gauss para $\beta = 0,1$

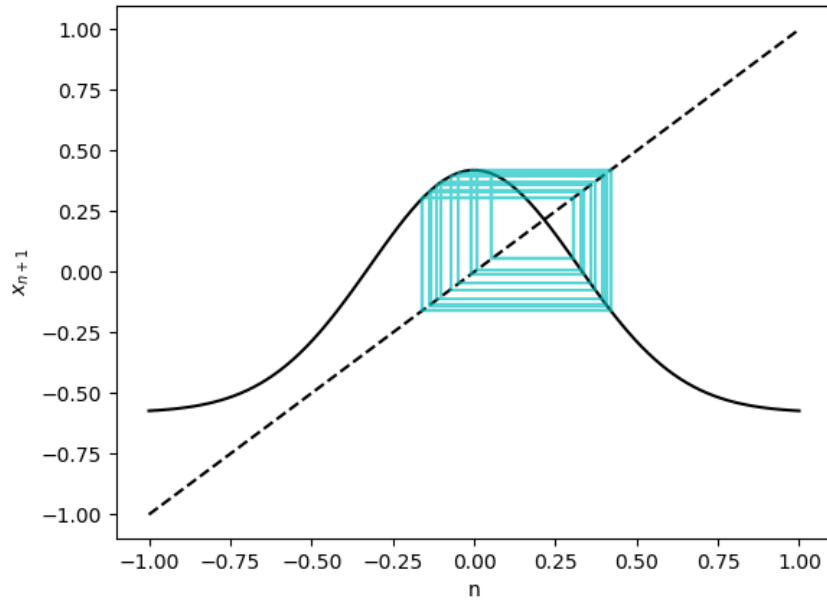


Figura 18: Mapeo iterativo de Gauss para $\beta = -0,58$

Comparamos estas figuras con el diagrama de bifurcación para el mismo parámetro α contra β :

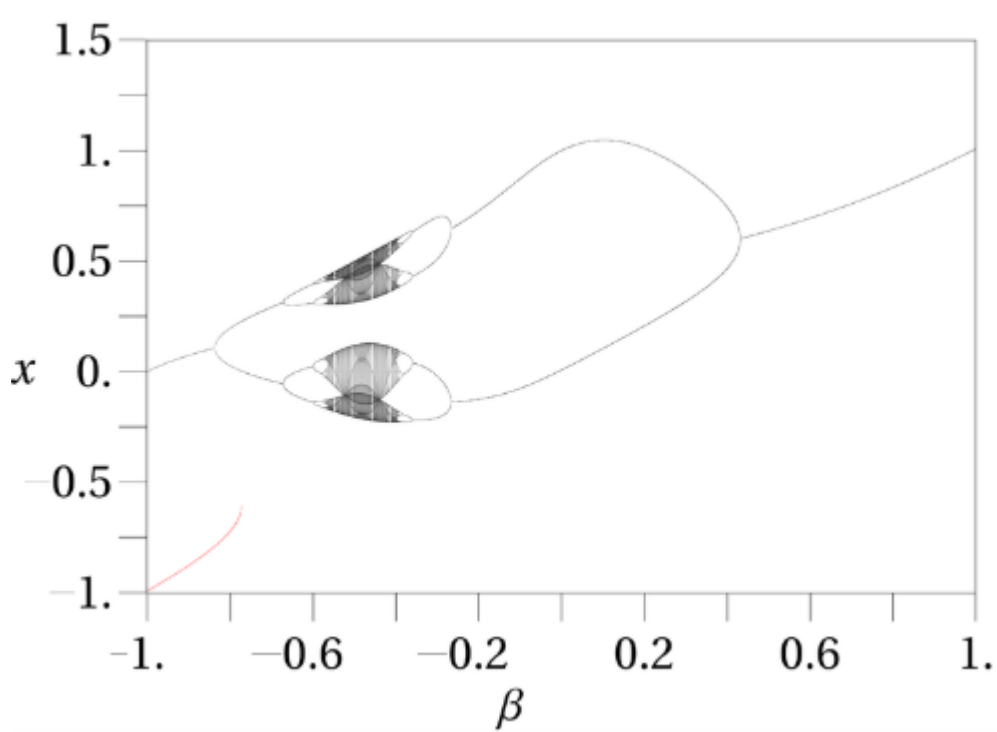


Figura 19: Diagrama de bifurcación del mapeo iterado de Gauss para $\alpha = 4,90$

Nuevamente podemos ver como los ciclos dobles en los gráficos de Cobweb devienen en bifurcaciones en el diagrama de bifurcación.

4. Atractores Extraños

En un intento por determinar un modelo lo bastante simplificado que describiera la dinámica de la atmósfera terrestre, Edward Lorenz en 1963, detallo un sistema de tres ecuaciones diferenciales de primer orden, que para ciertos parámetros, exhibe comportamientos caóticos. Las ecuaciones son las siguientes:

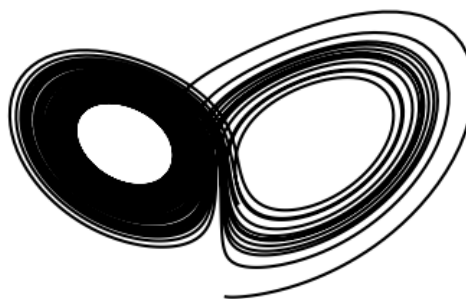
$$\dot{x} = a(y - x) \quad (5)$$

$$\dot{y} = x(b - z) - y \quad (6)$$

$$\dot{z} = xy - cz \quad (7)$$

Donde, al tomarse los los parámetros como: $a = 10$, $b = 28$ y $c = 8/3$ el sistema toma comportamientos caóticos. A continuación se muestra una gráfica de las soluciones del sistema acoplado de ecuaciones diferenciales con los parámetros descritos anteriormente, mediante el implemento del código[].

Atractor de Lorenz



de lorenz.png

Figura 20: Atractor de Lorenz para $a = 10$, $b = 28$ y $c = 8/3$

Otro atractor extraño es el atractor de Rossler, el cual es un sistema de tres ecuaciones diferenciales de primer orden no lineales propuestas por E. Otto Rossler y están dadas por:

$$\dot{x} = -y - z \quad (8)$$

$$\dot{y} = x + ay \tag{9}$$

$$\dot{z} = b + z(x - c) \tag{10}$$

A continuación se muestran las gráficas de las soluciones mediante el uso del código[] para dos distintos conjuntos de parámetros.

Atractor de Rössler

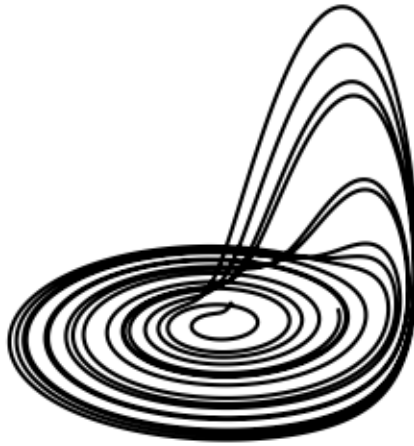


Figura 21: Atractor de Rossler para $a = 0,2$, $b = 0,2$, $c = 5,7$

Atractor de Rössler

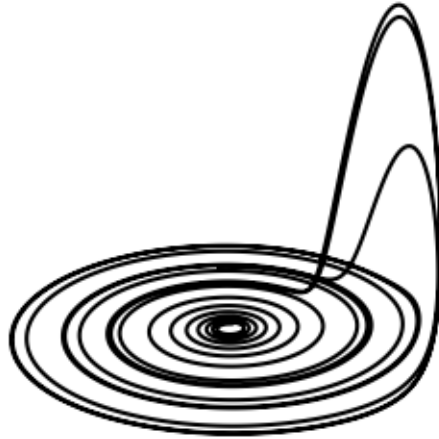


Figura 22: Atractor de Rossler para $a = 0,1$, $b = 0,1$, $c = 14$

5. Referencias

Plaschko P., Mier L, Casanueva T. . (2001). Sistemas Dinámicos No Lineales Mecánica Clásica y Transición Al Caos. México: McGraw Hill.

Thornton, Marion. (2008). Classical Dynamics of Particles and Systems. USA: Brooks/Cole/Cengage.

Classical Dynamics: Introduction. Chennai Mathematical Introduction Institute, 2005. Recuperado de: <https://www.cmi.ac.in/debangshu/dynamics.pdf>, noviembre del 2018.

Peitgen, Jurgens, Saupe. (2004). Chaos and Fractals: New Frontiers of Science. USA. Springer. Recuperado de <http://carlosreynoso.com.ar/archivos/peitgen.pdf>, noviembre del 2018.

A Brief History of Chaos. Recuperado de: <http://chaosbook.org/chapters/appendHist-2p.pdf> noviembre del 2018.

Lyapunov Exponents, Chaos Curse, Caltech. Recuperado de:
<http://www.cmp.caltech.edu/mcc/ChaosCourse/Lesson7/Lyapunov.pdf> en noviembre del 2018.