Análisis de Respuesta en el Tiempo de Sistemas de Segundo Orden

Ing. Eddie Sobrado

Sistemas de 2do. Orden

- Los sistemas de segundo orden son sistemas cuyo modelo matemático está representado por E.D.O.s de 2do. Orden ó F.T. de 2do. Orden:

EDO de 2do Orden

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + a_1\frac{dy(t)}{dt} + a_o y(t) = b_o u(t)$$

FT de 2do Orden

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_o}{s^2 + a_1 s + a_o}$$

$Y: respuesta\ del\ sistema$

$U: entrada\ del\ sistema$

- Condición de estabilidad

Para garantizar la estabilidad, todos los polos deben ubicarse en el semiplano izquierdo.

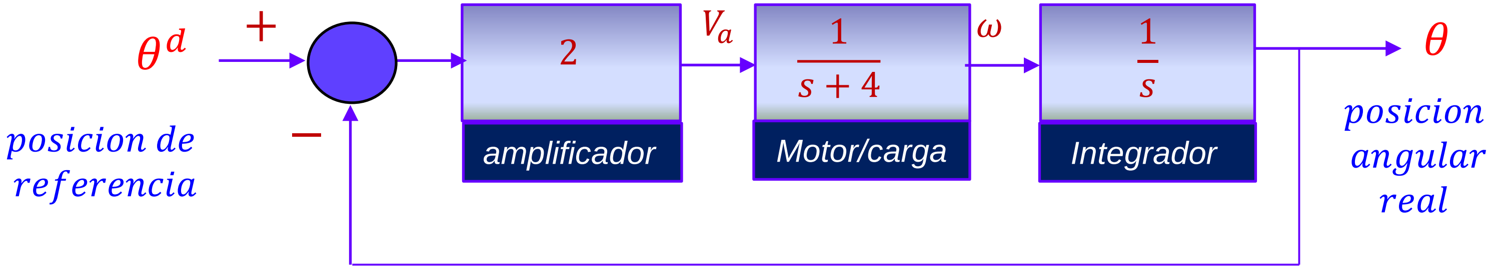
Ecuación característica

$$s^2 + a_1 s + a_o = 0$$

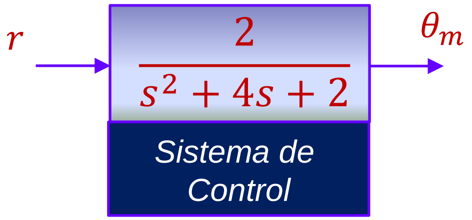
$a_1 > 0$ $\quad$ $a_0 > 0$

Ejemplo: control de posición

- Sistemas Físicos de 2do. Orden: Circuitos RLC, Sistemas Mecánicos de Posicionamiento, Tanques en Serie, Sensores Acelerómetros, etc... Además, muchos Sistemas de Control por Realimentación pertenecen a esta categoría.



Simplificando..



Resulta un sistema de 2do orden

El Prototipo de 2do. Orden

- Es la forma estándar de representación de los sistemas de 2do orden. Esta determinado por 3 parámetros:

$$G(s) = \frac{K{\omega_n}^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + {\omega_n}^2}$$

Donde:

$K: ganancia\ estatica, G(0)$

$\zeta: \ factor\ de\ amortiguamineto\ relativo$

$positivo\ para\ sistemas\ estables$

$\omega_n: frecuencia\ natural\ (rad/s)$

El Prototipo de 2do. Orden

- Determine los parámetros ω_n ζ y K para los siguientes sistemas de 2do orden:

$$G_1(s) = \frac{1}{s^2 + 4} \qquad \omega_n = 2 \qquad \zeta = 0 \qquad K = 0.25$$

$$G_2(s) = \frac{1}{s^2 + 2s + 4} \qquad \omega_n = 2 \qquad \zeta = 0.5 \qquad K = 0.25$$

$$G_3(s) = \frac{1}{s^2 + 4s + 4} \qquad \omega_n = 2 \qquad \zeta = 1 \qquad K = 0.25$$

$$G_4(s) = \frac{1}{s^2 + 6s + 4} \qquad \omega_n = 2 \qquad \zeta = 1.5 \qquad K = 0.25$$

$$G_5(s) = \frac{4}{4s^2 + 8s + 16} \qquad \omega_n = 2 \qquad \zeta = 0.5 \qquad K = 0.25$$

$$G_5(s) = \frac{16}{2s^2 + 2s + 8} \qquad \omega_n = 2 \qquad \zeta = 0.25 \qquad K = 2$$

Polos de sistemas de 2do. Orden

- Si la ecuación característica: $\boxed{s^2 + 2\zeta\omega_n s + {\omega_n}^2 = 0}$

- Los dos polos del sistema que se obtienen resolviendo la ecuación característica, resulta:

$$p_{1,2} = -\underbrace{\zeta\omega_n}_{\alpha} \pm \underbrace{j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}}_{\omega_d}$$

- Se define:

$\boxed{\alpha = \zeta\omega_n}$ Atenuación (rad/s)

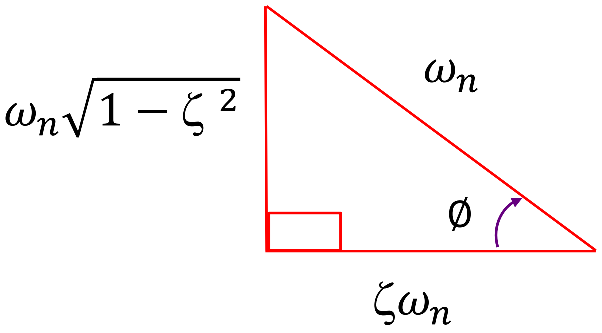
$\boxed{\omega_d = \omega_n\sqrt{1-\zeta^2}}$ Frecuencia amortiguada (rad/s)

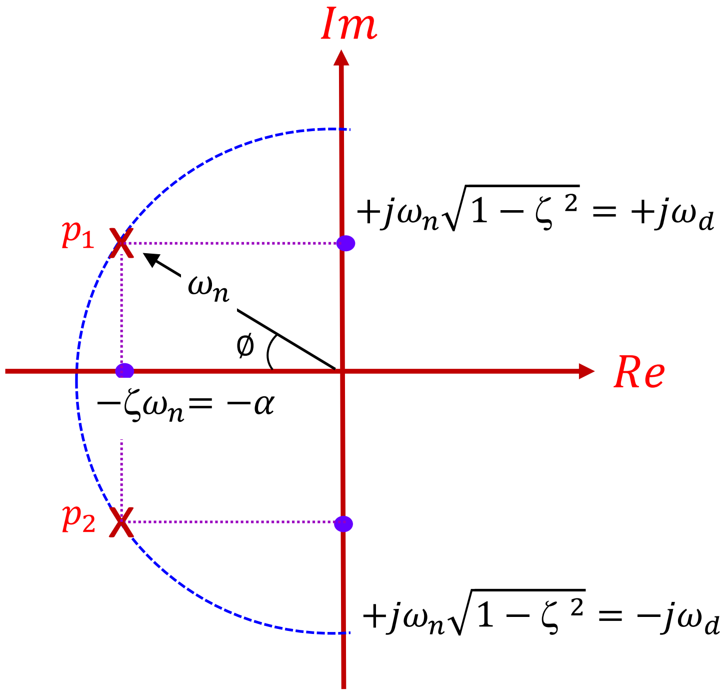
- Podemos escribir de manera alternativa la expresión de los polos, en función de estos nuevos parámetros

$$\boldsymbol{p_{1,2} = -\alpha \pm j\omega_d}$$

Polos de sistemas de 2do. Orden

- Ubicación de los polos en el plano complejo





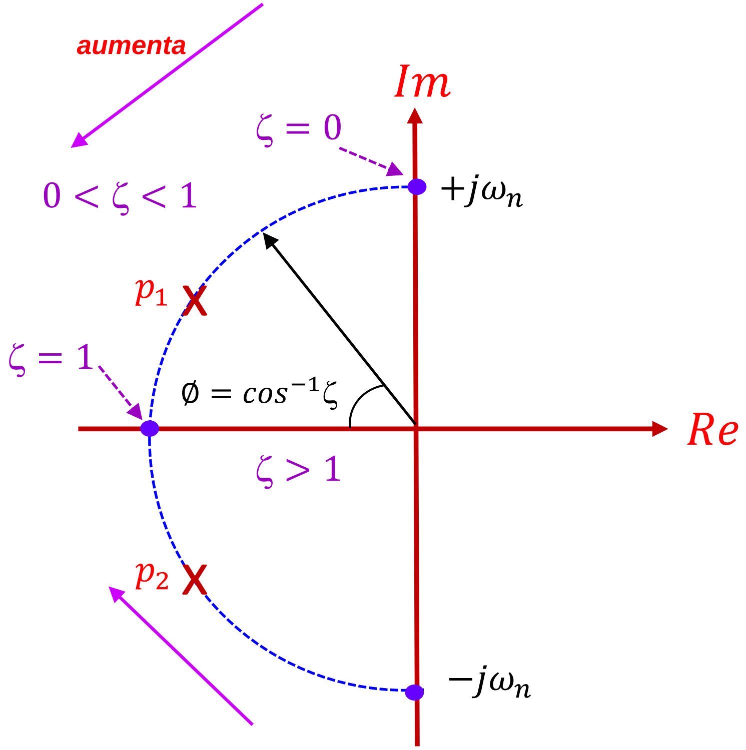
$$\emptyset = cos^{-1}\zeta$$

Polos de sistemas de 2do. Orden

- Análisis variando el factor de amortiguamiento relativo ζ

Conclusión:

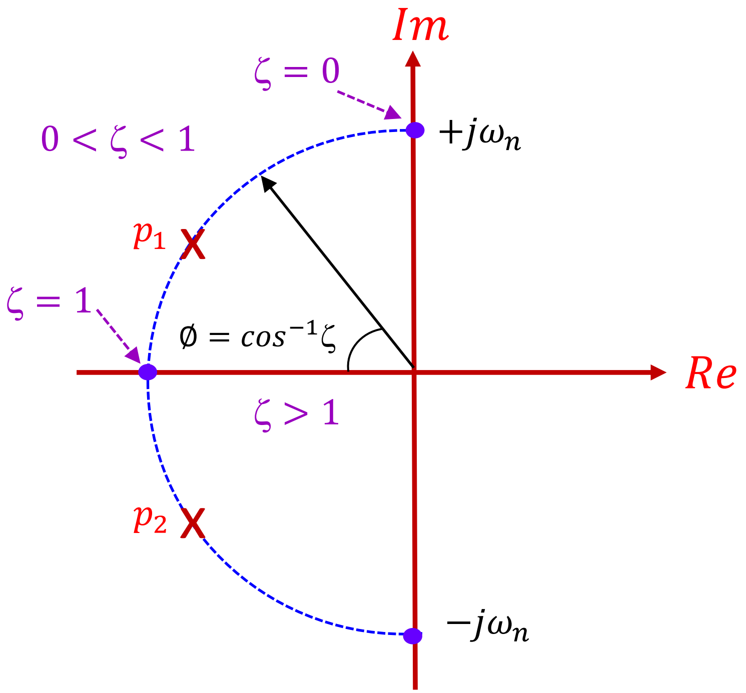
- El valor del factor de amortiguamiento relativo (ζ) determina el tipo de polos que el sistema de 2do orden tiene: imaginarios puros, complejos conjugados, reales iguales, reales diferentes



Clasificación de acuerdo a ζ

$$G(s) = \frac{K{\omega_n}^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + {\omega_n}^2}$$

$$p_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$$



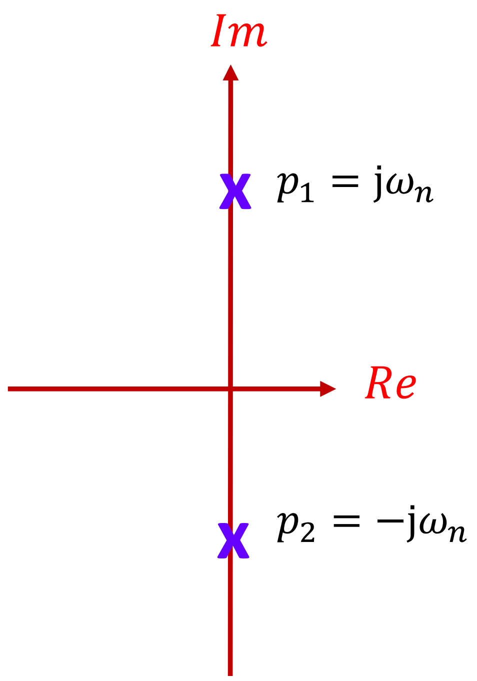
La ecuación tendrá raíces reales o complejas dependiendo de ζ

ζ	Polos	Comportamiento
ζ=0	$p_{1,2} = \pm j\omega_n$	No amortiguado
$0 < \zeta < 1$	$p_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$	Sub amortiguado
$\zeta = 1$	$p_{1,2} = -\omega_n$	Críticamente amortiguado
$\zeta > 1$	$p_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\zeta^2-1}$	sobre amortiguado

Caso 1: NO AMORTIGUADO $\zeta = 0$

$$G(s) = \frac{K{\omega_n}^2}{s^2 + {\omega_n}^2}$$

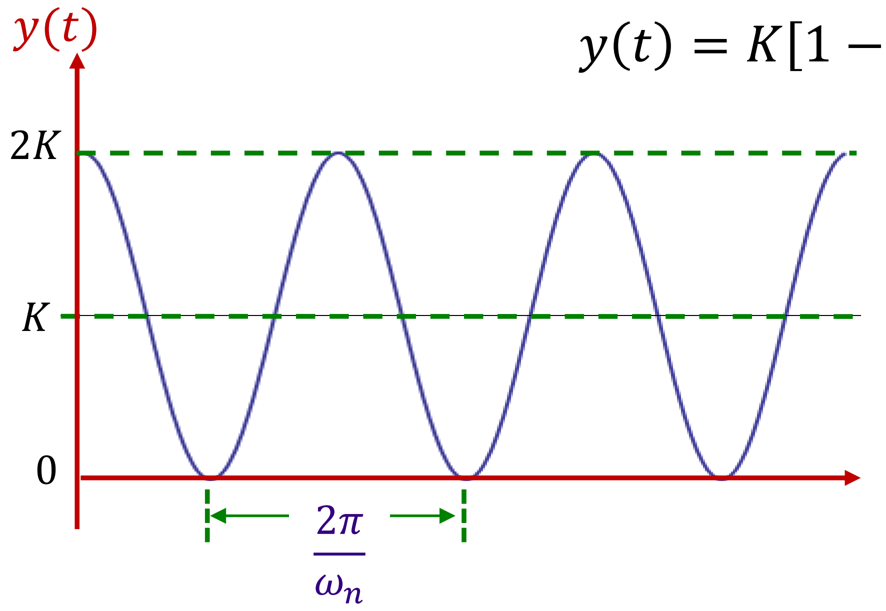
Los polos: $p_{1,2} = \pm j\omega_n$ Imaginarios puros



Caso 1: NO AMORTIGUADO $\zeta = 0$

- Respuesta a un Escalón Unitario:

$$y(t) = K[1 - cos(\omega_n t)]$$



Ejercicio.

- Grafique la respuesta a un escalón unitario del siguiente sistema de 2do orden. Verifique su resultado con ayuda del Matlab/ Simulink.

$$G(s) = \frac{50}{s^2 + 25}$$

Caso 1: NO AMORTIGUADO $\zeta = 0$

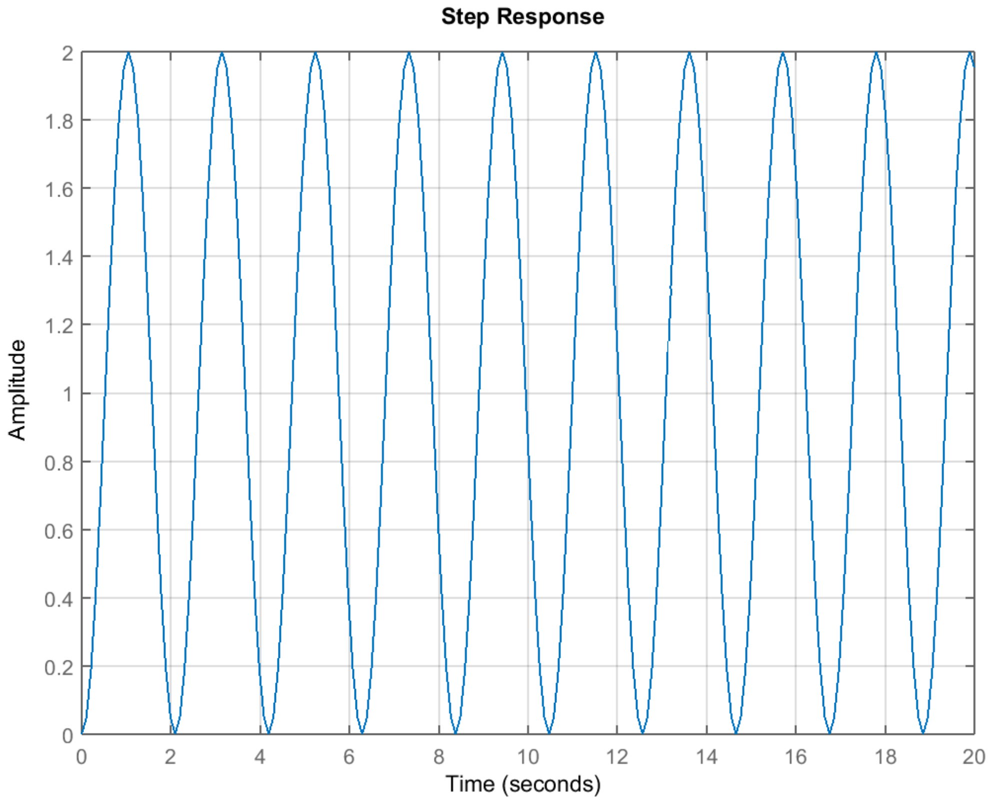
Ejemplo:

$$G(s) = \frac{9}{s^2 + 9}$$

Los Polos: $s_{1,2} = \pm 3j$

La Entrada: $R(s) = \frac{1}{s}$

La Salida: $Y(s) = \frac{9}{s(s^2 + 9)}$



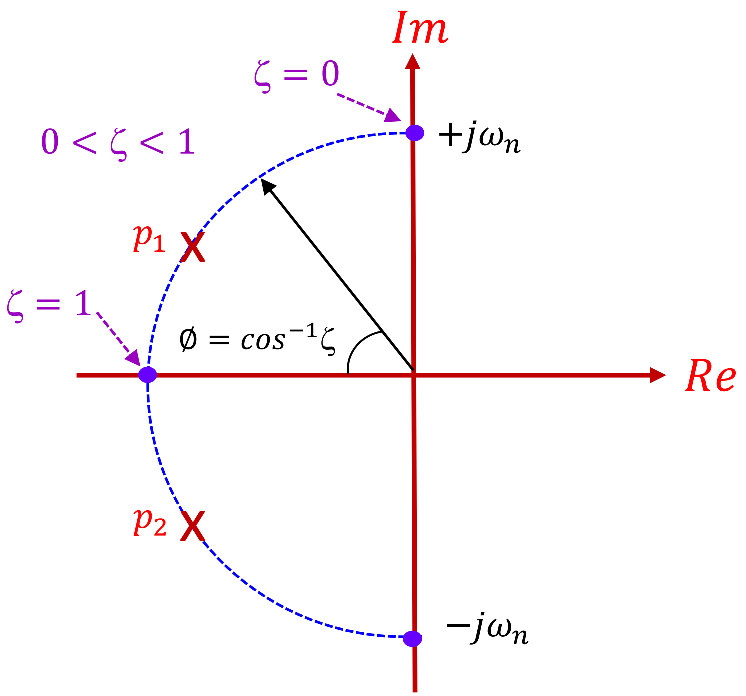
$$y(t) = K_1 + K_2 cos(3t)$$

Caso 2: SUB AMORTIGUADO $0 < \zeta < 1$

$$G(s) = \frac{K{\omega_n}^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + {\omega_n}^2}$$

$0 < \zeta < 1$

Los polos: $p_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$ (Complejos conjugados)



Caso 2: SUB AMORTIGUADO $0 < \zeta < 1$

- <u>Respuesta a un Escalón Unitario</u>:

$$Y(s) = G(s)u_s(s) = \frac{K{\omega_n}^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + {\omega_n}^2}\frac{.1}{s}$$

a. Aplicando el teorema del valor final:

$$V.F = lim_{t\to\infty}y(t) = lim_{s\to 0}sy(s) = K$$

Valor final $K = G(0)$

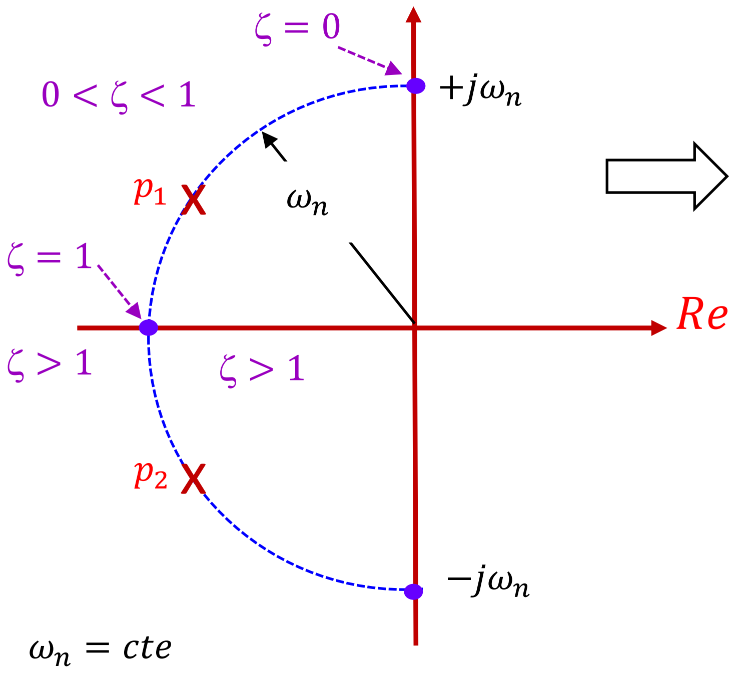
b. Aplicando la inversa de la transformada de Laplace (tablas):

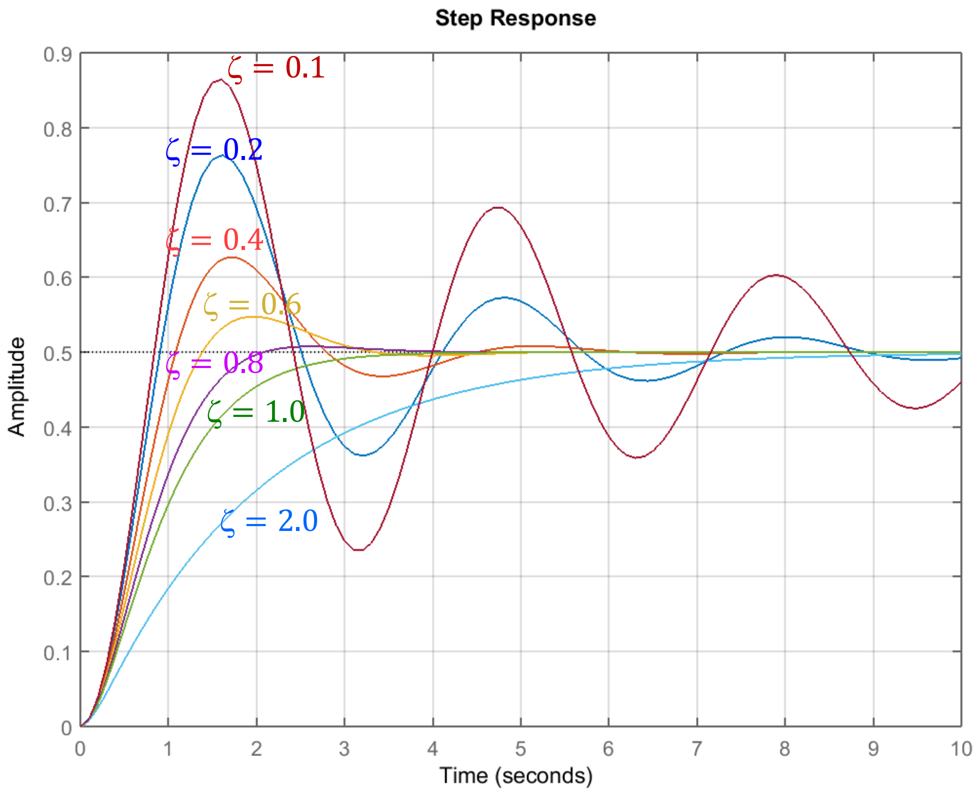
$$y(t) = K\left[1 - \frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}}e^{-\overbrace{\zeta\omega_n}^{\alpha}}sen(\overbrace{\sqrt{1-\zeta^2}\omega_n}^{\omega_d}t + \emptyset)\right]$$

Respuesta a un escalón (Subamortiguada)

Caso 2: SUB AMORTIGUADO $0 < \zeta < 1$

- <u>Respuesta a un Escalón Unitario</u>:



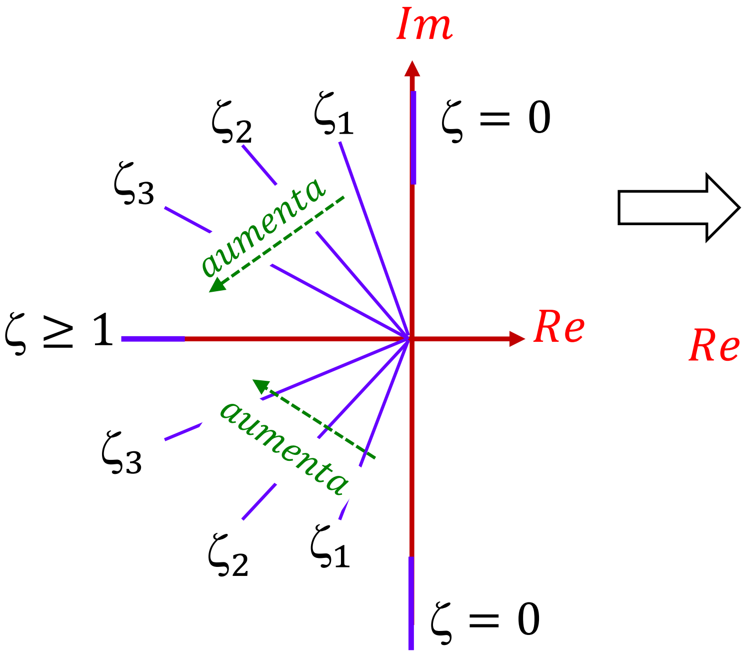


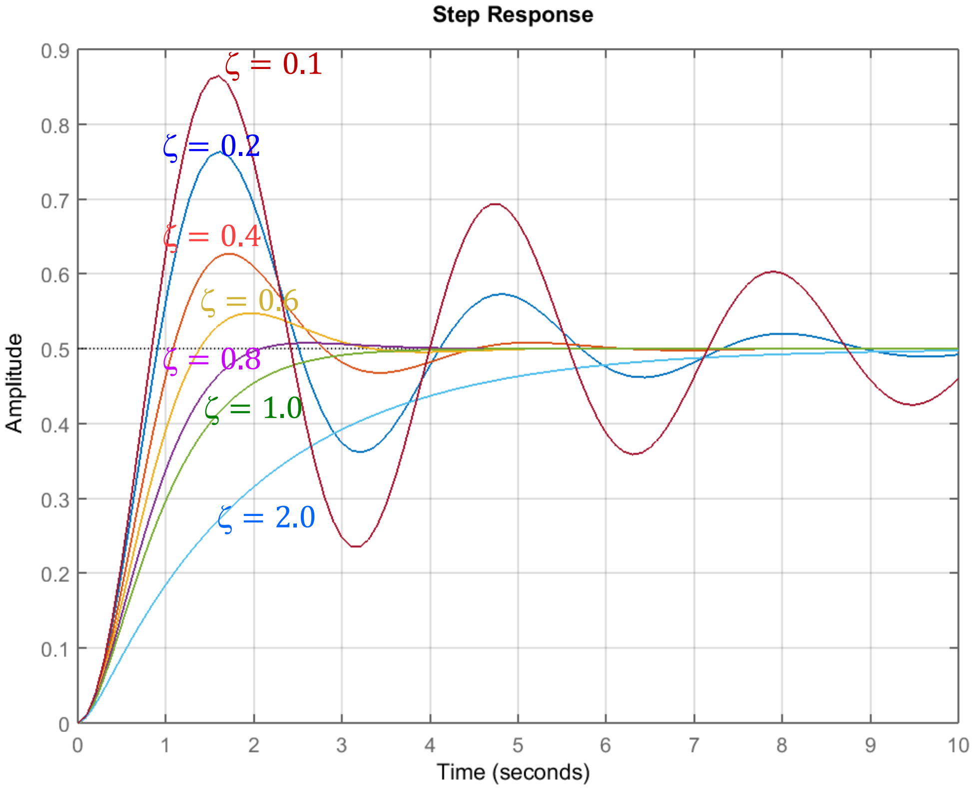
Curvas de respuesta al escalón unitario
en sistemas de segundo orden.

Caso 2: SUB AMORTIGUADO $0 < \zeta < 1$

- Observe como influye el factor de amortiguamiento en la forma de la respuesta del sistema (magnitud de las oscilaciones). La respuesta se vuelve mas oscilatoria con sobrepasos mayores, mientras ζ disminuye

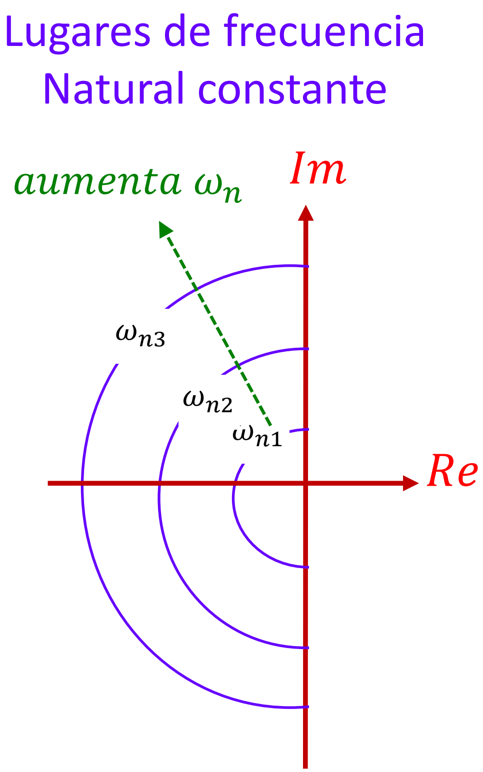
Lugares de Amortiguamiento Constante

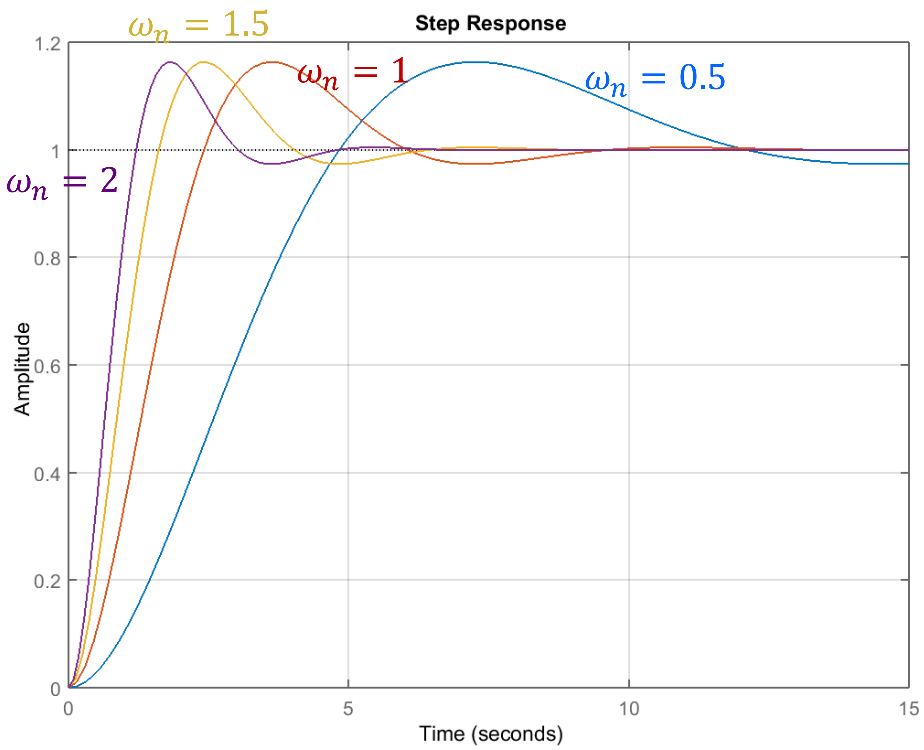




Caso 2: SUB AMORTIGUADO $0 < \zeta < 1$

- Las respuesta muestran que ω_n tiene un efecto directo sobre el tiempo de levantamiento, el tiempo de retardo, y el tiempo de asentamiento, pero no afecta el sobrepaso





Caso 2: SUB AMORTIGUADO $0 < \zeta < 1$

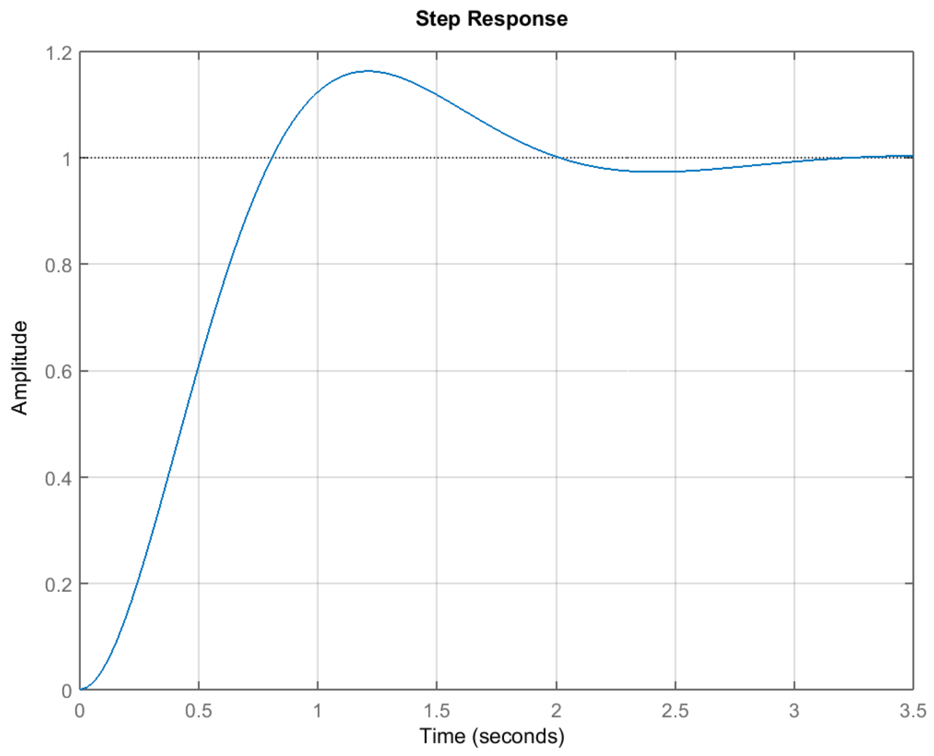
Ejemplo:

$$G(s) = \frac{9}{s^2 + 3s + 9}$$

Los Polos: $s_{1,2} = -1.5 \pm 2.598j$

La Entrada: $R(s) = \frac{1}{s}$

La Salida: $Y(s) = \frac{9}{s(s^2 + 3s + 9)}$



$$y(t) = K_1 + e^{-1.5t}(K_2 cos 2.598t + K_3 sin 2.598t)$$

Caso 2: SUB AMORTIGUADO $0 < \zeta < 1$

Observaciones:

$\boxed{\zeta < 1}$

Respuesta oscila alrededor del valor que desearía seguir. Hay un sobre impulso inicial de máxima amplitud, seguido de un pulso bajo (de menor amplitud) seguido por otro sobre impulso (menor amplitud que los anteriores). De esta manera la respuesta oscila pero disminuyendo la amplitud.

$\boxed{\zeta = 1}$

valor de amortiguamiento mínimo para que la salida no supere el valor deseado.

Caso 2: SUB AMORTIGUADO $0 < \zeta < 1$

Ejercicio

- Grafique la respuesta a un escalón unitario de los siguiente sistemas de 2do orden:

$$G_1(s) = \frac{1}{s^2 + s + 1} \qquad G_3(s) = \frac{1}{s^2 + 4s + 1}$$

$$G_2(s) = \frac{1}{s^2 + 2s + 1} \qquad G_4(s) = \frac{16}{4s^2 + 4s + 16}$$

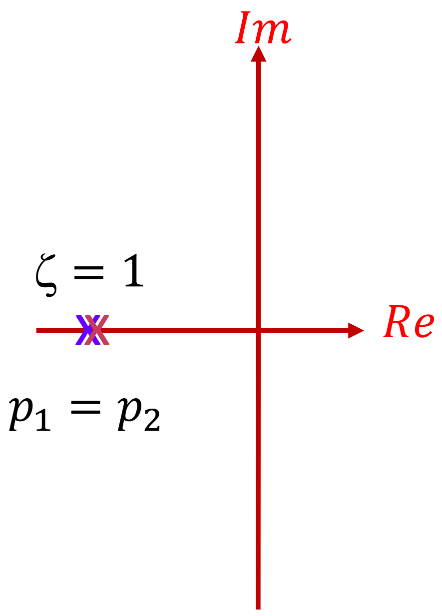
$$G_5(s) = \frac{1}{s^2 + s}$$, considerando realimentación unitaria

- Verifique sus resultados con ayuda del matlab/simulink. Interprete los resultados.

Caso 3: CRITICA. AMORTIGUADO $\zeta = 1$

$$G(s) = \frac{K{\omega_n}^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + {\omega_n}^2}$$

Los Polos: $p_{1,2} = -\zeta\omega_n$ Reales iguales



Es el caso subamortiguado en el limite cuando $\zeta \to 1$

Caso 3: CRITICA. AMORTIGUADO $\zeta = 1$

- <u>Respuesta a un Escalón Unitario</u>:

$$Y(s) = G(s)u_s(s) = \frac{K\omega_n{}^2}{s^2 + 2\omega_n s + \omega_n{}^2}\frac{.1}{s}$$

a. Aplicando el teorema del valor final:

$$V.F = lim_{t\to\infty} y(t) = lim_{s\to 0} sy(s) = K$$

Valor final $K = G(0)$

b. Respuesta subamortiguada en el limite cuando $\zeta \to 1$:

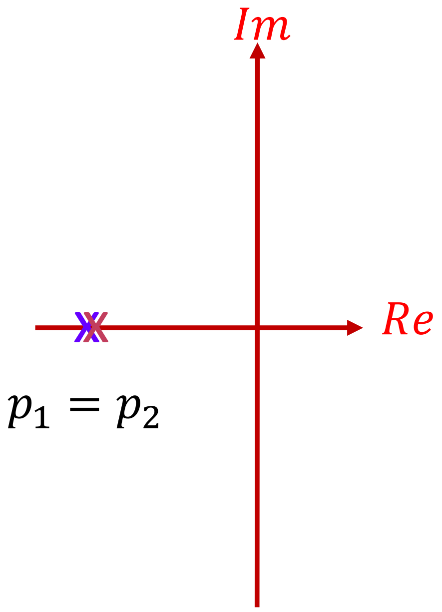
$$y(t) = K[1 - e^{-\omega_n t}(1 + \omega_n t)]$$

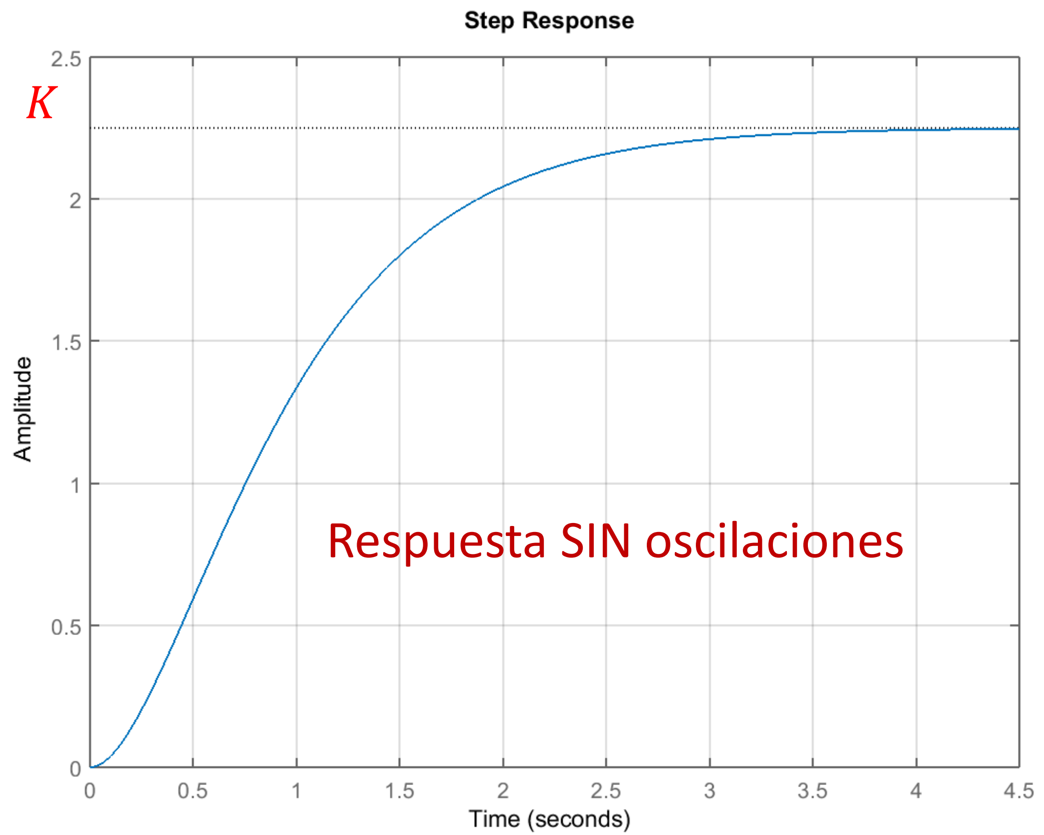
Respuesta SIN oscilaciones

Respuesta a un escalón (amortiguamiento critico)

Caso 3: CRITICA. AMORTIGUADO $\zeta = 1$

- <u>Respuesta a un Escalón Unitario</u>:





Caso 3: CRITICA. AMORTIGUADO $\zeta = 1$

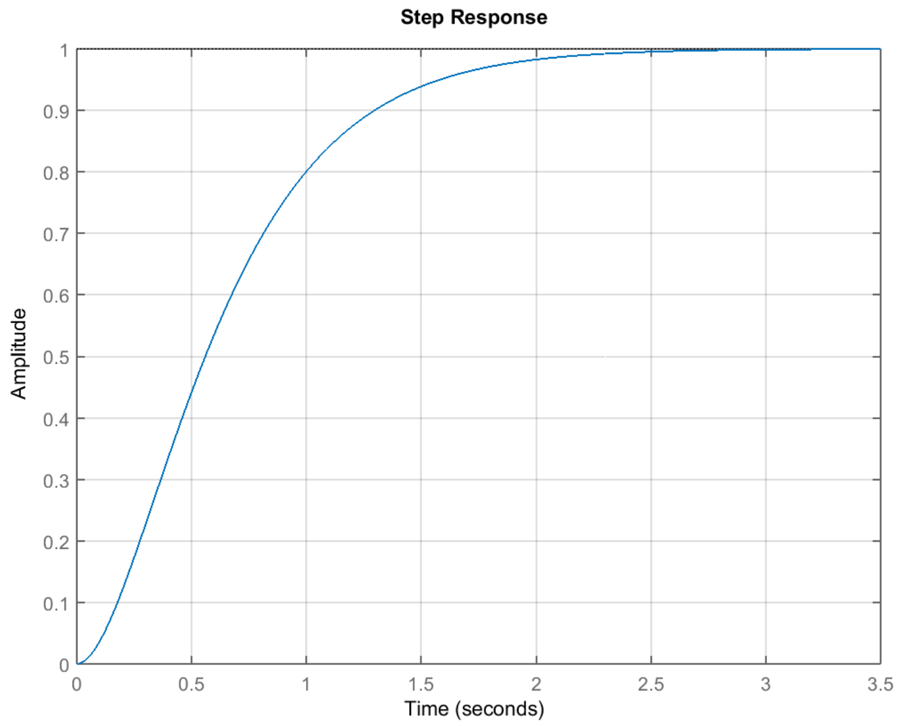
Ejemplo:

$$G(s) = \frac{9}{s^2 + 6s + 9}$$

Los Polos: $s_{1,2} = -3$

La Entrada: $R(s) = \frac{1}{s}$

La Salida: $Y(s) = \frac{9}{s(s^2 + 6s + 9)}$



$$y(t) = K_1 + K_2 e^{-3t} + K_3 t e^{-3t}$$

Caso 4: SOBREAMORTIGUADO $\zeta > 1$

$$G(s) = \frac{K{\omega_n}^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + {\omega_n}^2} \qquad \zeta > 1$$

- Los polos son: $p_1 = -\zeta\omega_n + \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1}$ (real mas cerca al origen)

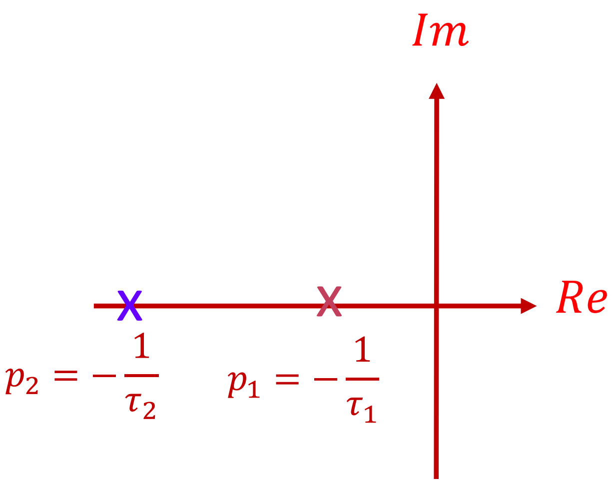
  $p_2 = -\zeta\omega_n - \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1}$ (real mas lejos del origen)

- Considerando: $p_1 = -\dfrac{1}{\tau_1}$ $\quad p_2 = -\dfrac{1}{\tau_2}$

  podemos reescribir la FT del sistema:

$$G(s) = \frac{K\left(\frac{1}{\tau_1\tau_2}\right)}{\left(s + \frac{1}{\tau_1}\right)\left(s + \frac{1}{\tau_2}\right)}$$

$$G(s) = \frac{K}{(\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1)}$$

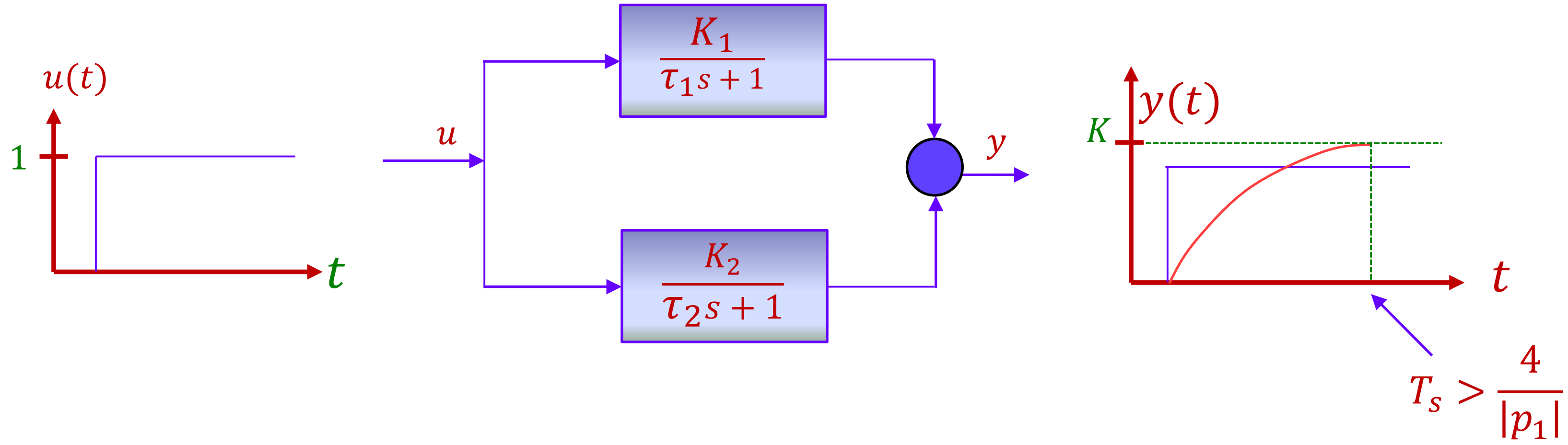


Caso 4: SOBREAMORTIGUADO $\zeta > 1$

- Entonces la FT puede componerse en dos fracciones parciales de 1er orden cada una

$$G(s) = \frac{K_1}{\tau_1 s + 1} + \frac{K_2}{\tau_2 s + 1}$$

- Gráficamente:



La respuesta de un sistema de 2do. Orden con dos polos reales es la superposición de las respuestas de dos sistemas de 1er. Orden.

Caso 4: SOBREAMORTIGUADO $\zeta > 1$

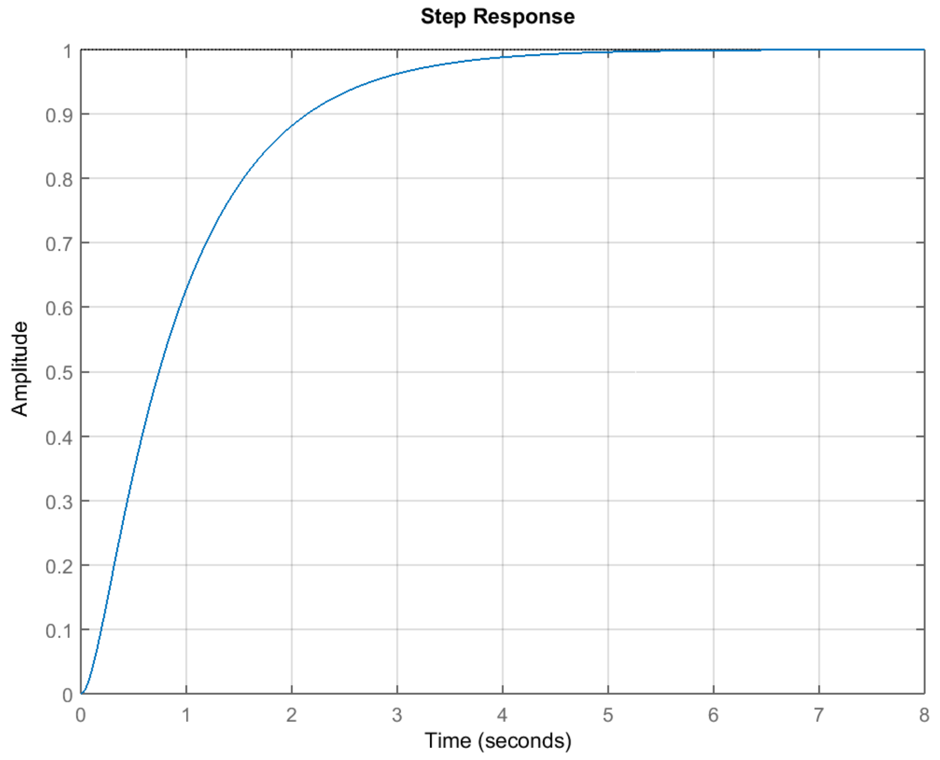
Ejemplo:

$$G(s) = \frac{9}{s^2 + 9s + 9}$$

Los Polos:
$$s_1 = -7.854$$
$$s_2 = -1.146$$

La Entrada: $R(s) = \frac{1}{s}$

La Salida: $Y(s) = \frac{9}{s(s^2 + 6s + 9)}$



$$y(t) = K_1 + K_2 e^{-7.854t} + K_3 e^{-1.146t}$$

Ejercicios

- Grafique la respuesta a un escalón unitario de los siguiente sistemas de 2do orden:

$$G_1(s) = \frac{4}{s^2 + 3s + 2}$$

$$G_3(s) = \frac{10}{s^2 + 6s + 5}$$

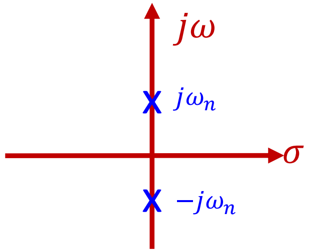
$$G_2(s) = \frac{1}{s^2 + 2s + 1}$$

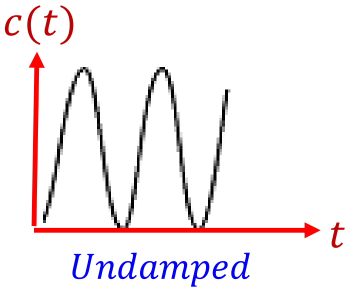
$$G_4(s) = \frac{20}{s^2 + 11s + 10}$$

- Verifique sus resultados con ayuda del matlab/simulink. Interprete los resultados.

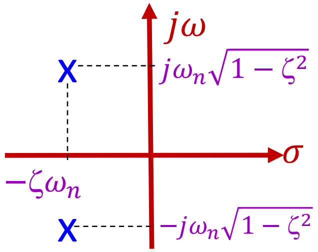
Resumen: respuesta a un escalón

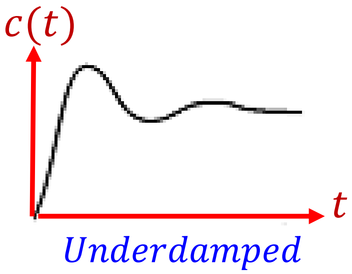
$\zeta = 0$



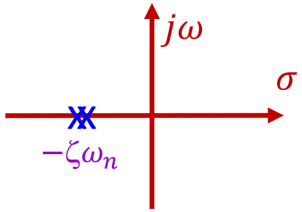


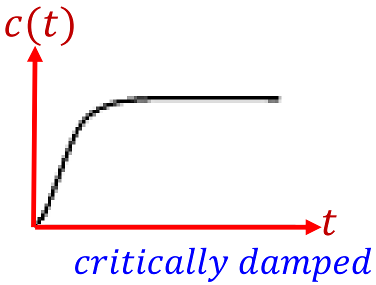
$0 < \zeta < 1$



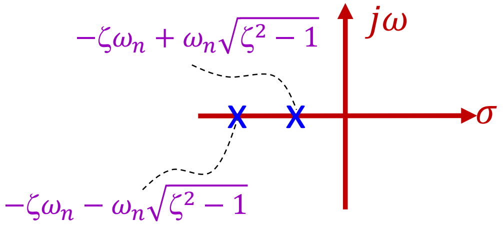


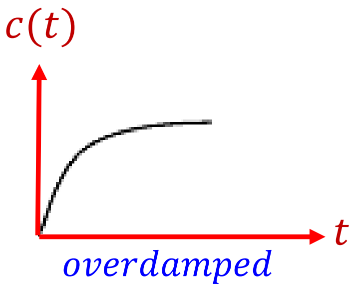
$\zeta = 1$



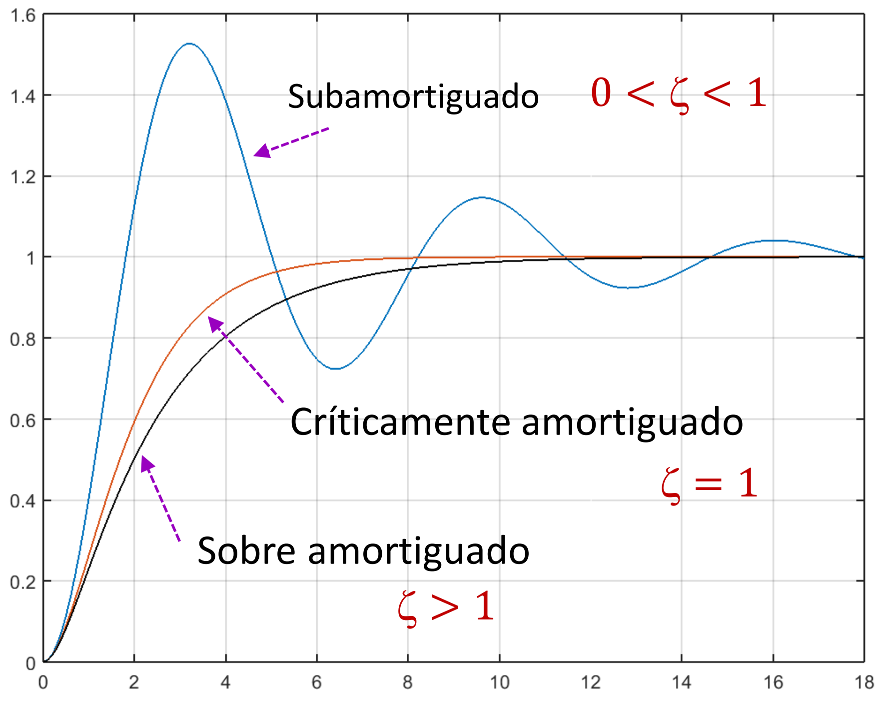


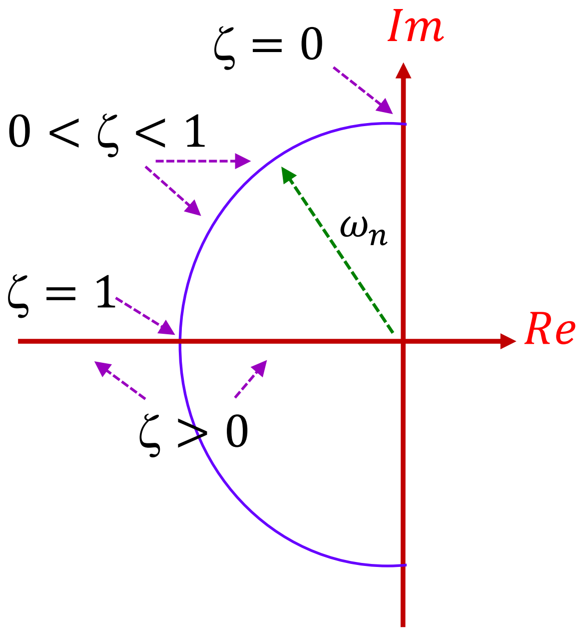
$\zeta > 1$





Resumen

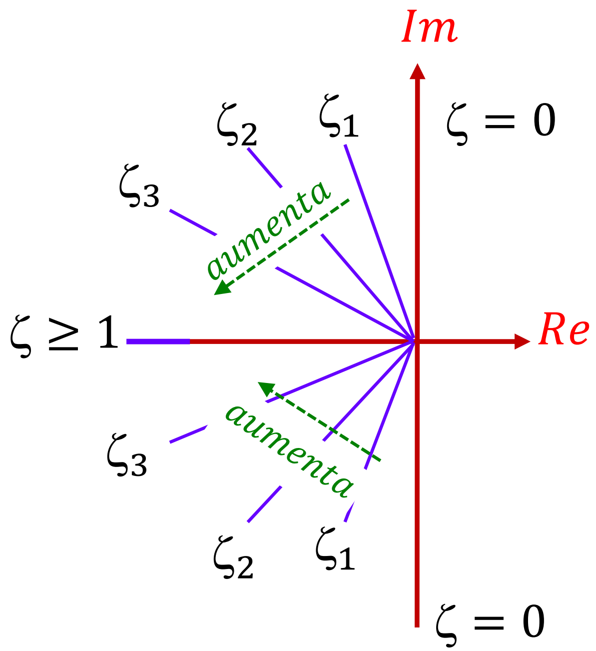


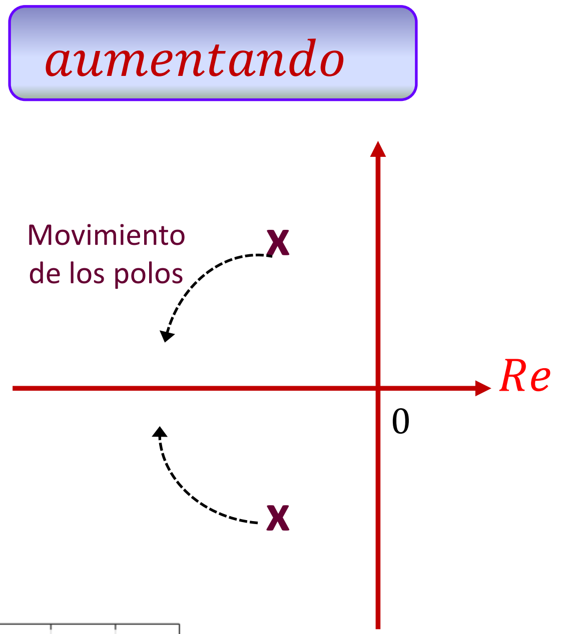


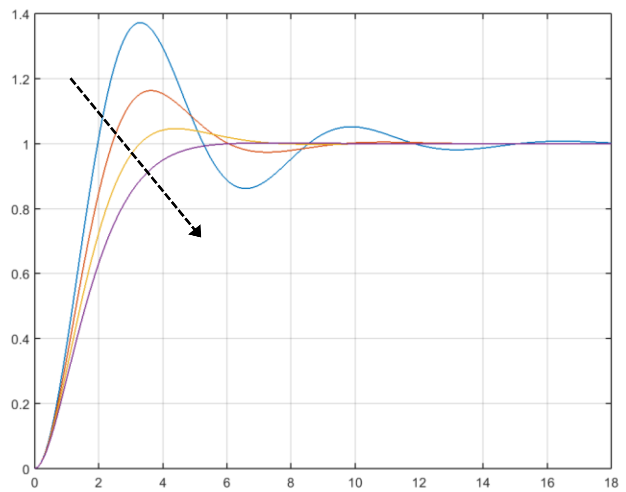
$$\omega_n = \text{constante}$$

Resumen

Lugares de frecuencia
Amortiguamiento constante



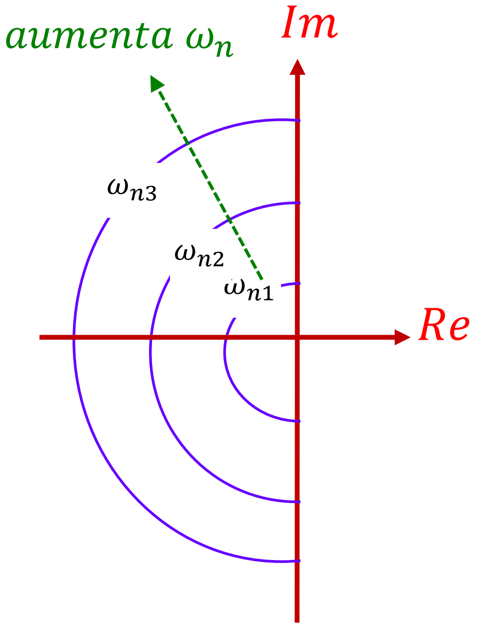




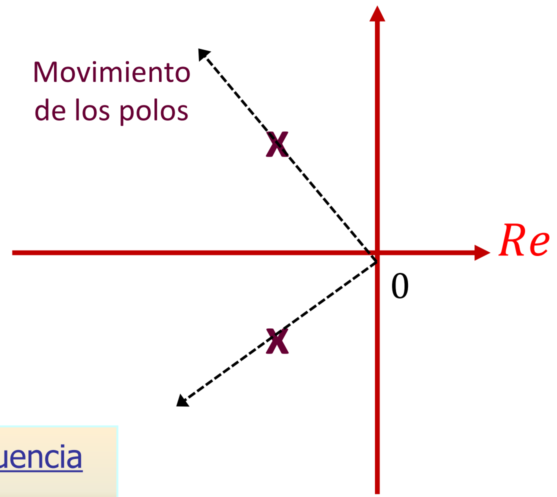
Tiempos de levantamiento diferentes
Menor sobreimpulo
Menor cantidad de oscilaciones

Resumen

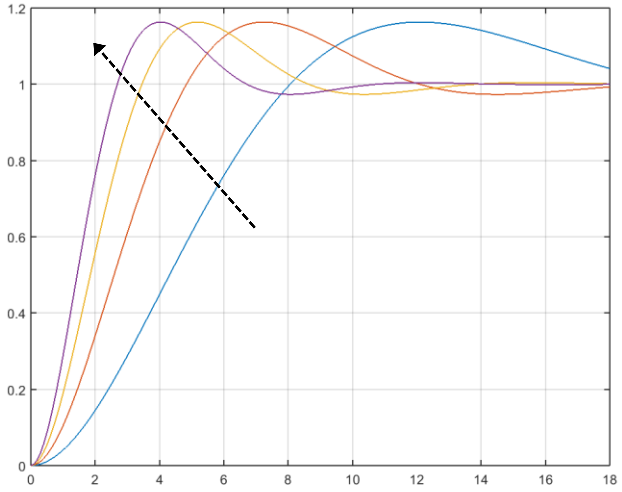
Lugares de frecuencia
Natural constante



$aumentando\ \omega_n$



Movimiento de polos con <u>frecuencia natural constante</u>

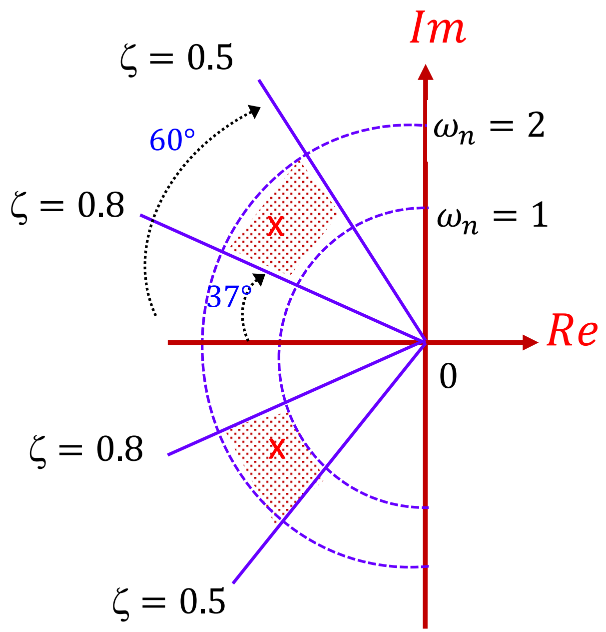


Movimiento de polos con factor de amortiguamiento constante

Mismo Sobreimpulso
Menor tiempo de
levantamiento

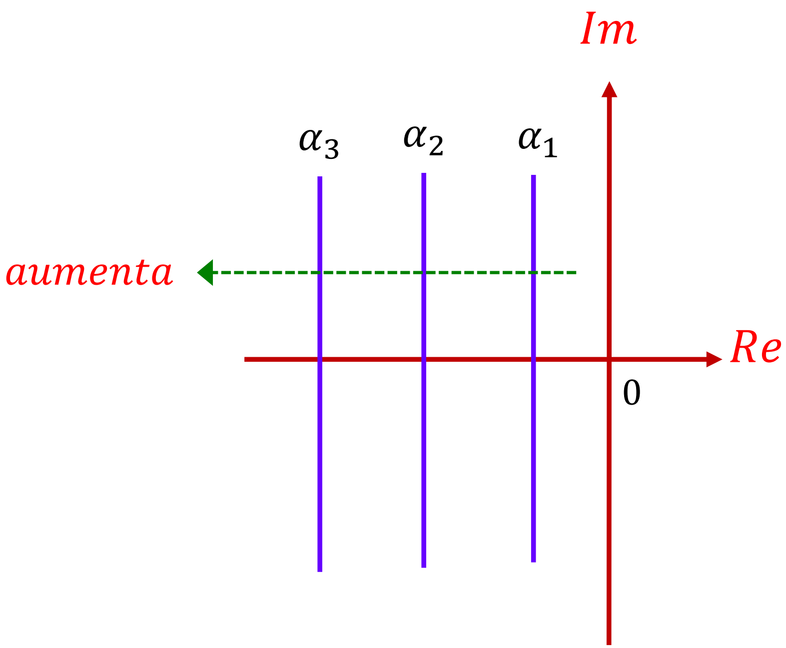
Resumen

- Identifique la región en el plano s de los polos que cumplen con las siguiente dos condiciones simultáneamente: $0.5 < \zeta < 0.8$ $1.0 < \omega_n < 2.0$

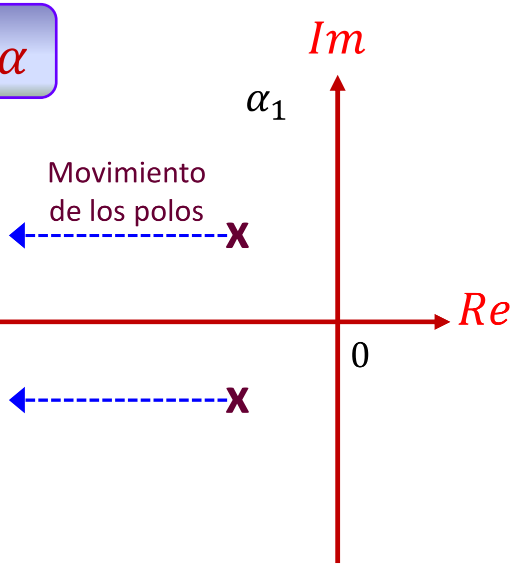


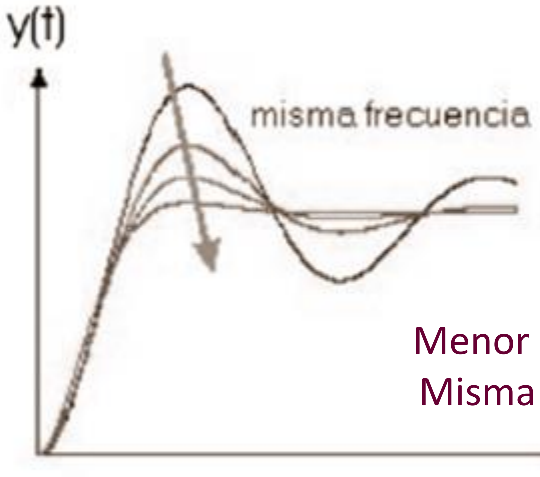
Resumen

Lugares de
Atenuación Constante



$aumentando\ \alpha$





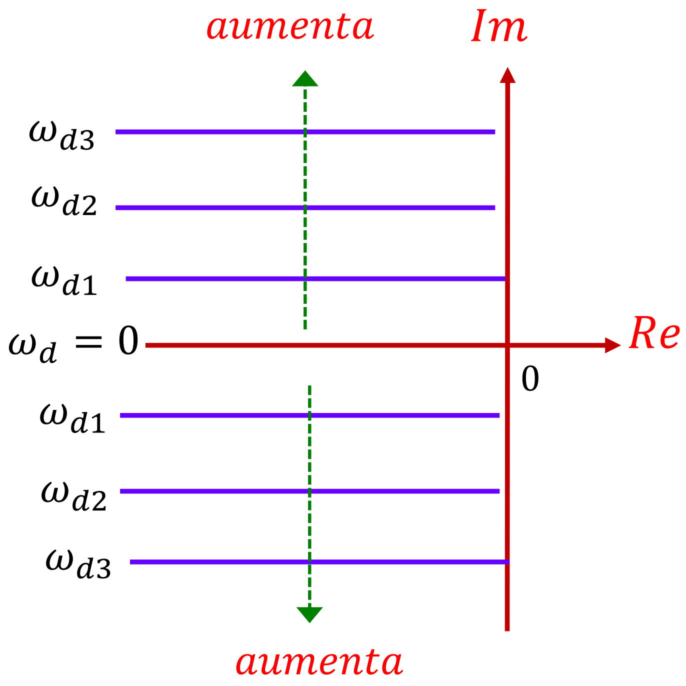
Menor tiempo de asentamiento
Misma frecuencia de oscilación

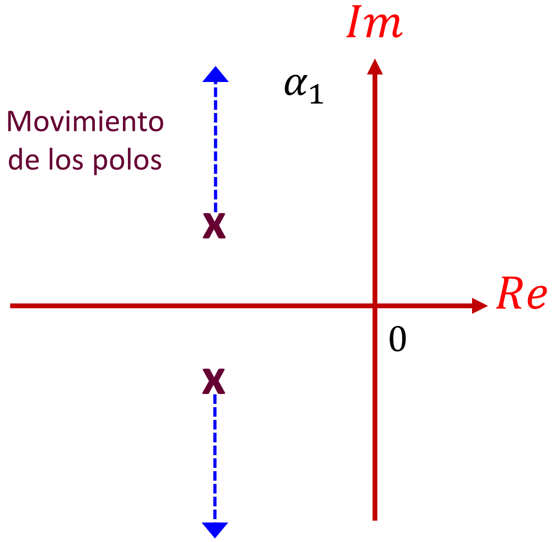
Movimiento de polos con parte imaginaria constante

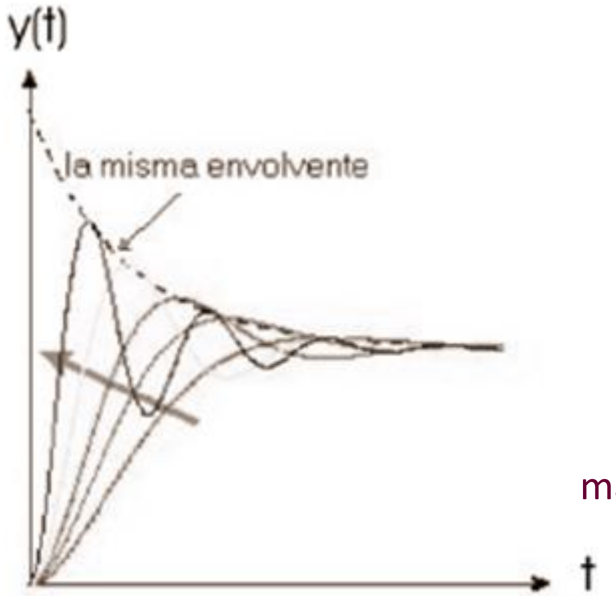
Resumen

$aumentando\ \omega_d$

Lugares de
Frecuencia Amortiguada Constante







Movimientos de polos con
parte real constante

Misma envolvente
mayor freuencia de oscilacion