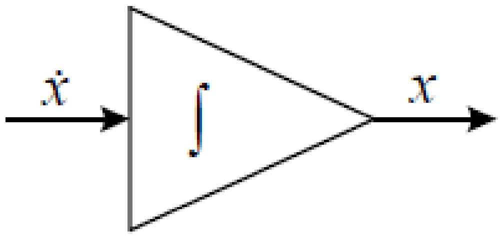
INGENIERÍA DE CONTROL 2

Sesión 2

2.2 DIAGRAMAS DE SIMULACIÓN DE BLOQUES

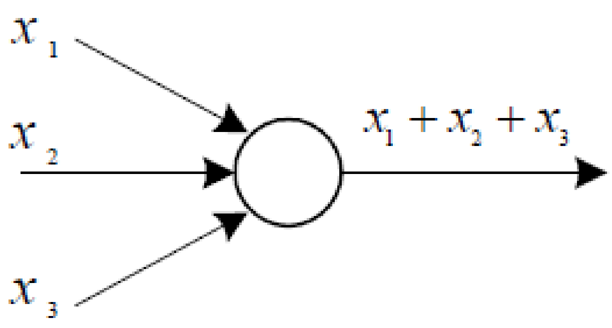
- Se emplean para representar en forma gráfica los modelos de espacio- estado de SL.
- Son más convenientes que las ec. matemáticas y su principal uso es en simulaciones.
- Consisten de tres tipos básicos de elementos:

  Bloques integradores, representados por:

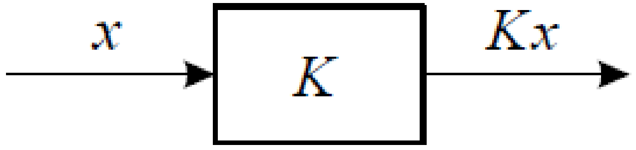


2.2 DIAGRAMAS DE SIMULACIÓN DE BLOQUES (cont.)

Bloques sumadores, representados por **círculos**, y



Ganancias, representadas por **rectángulos,**



Ejemplo 1

Dado el modelo de estado de una planta

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -4 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$$

Construir su diagrama de simulación

Ejemplo

Dado el modelo de estado de una planta,

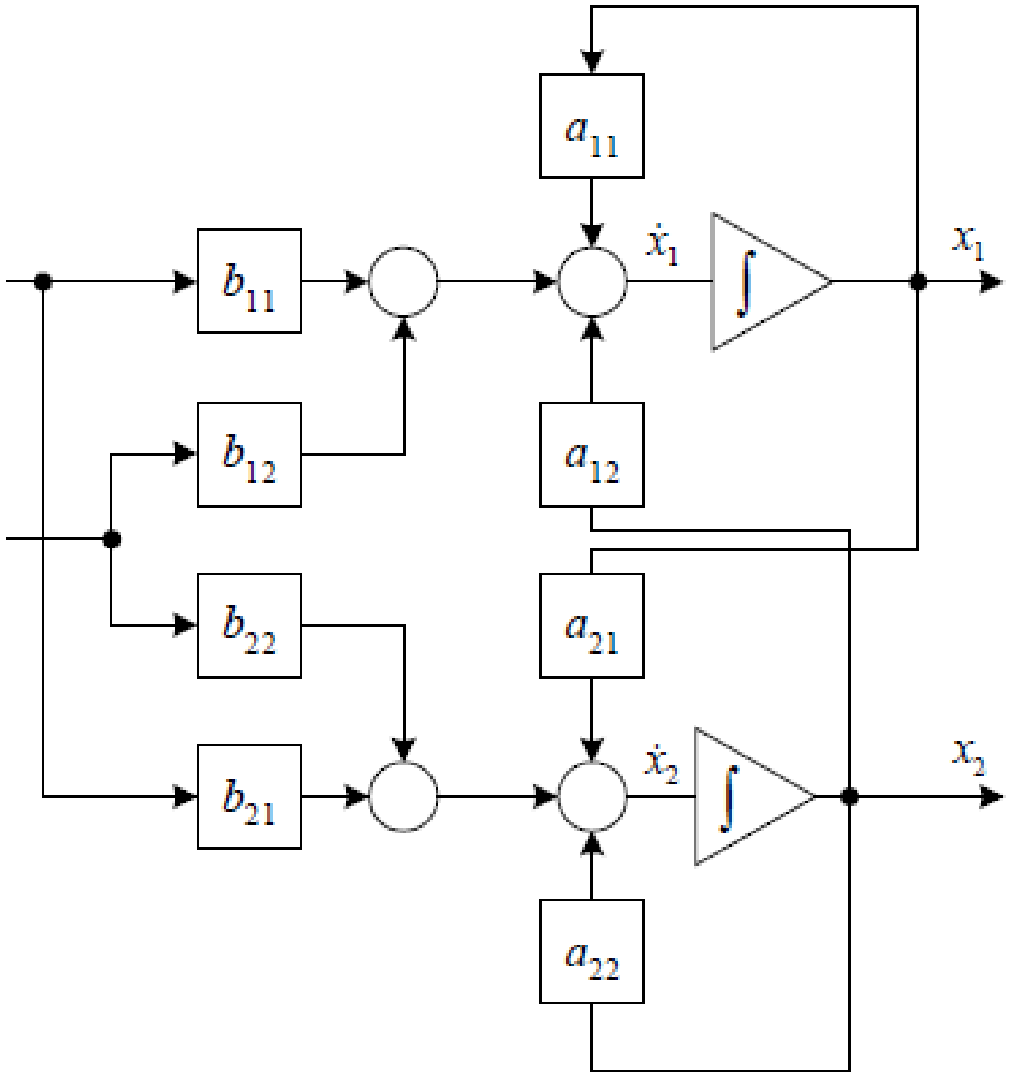
$$\dot{x}_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + b_{11}u_1 + b_{12}u_2$$

$$\dot{x}_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + b_{21}u_1 + b_{22}u_2$$

$$y = c_1x_1 + c_2x_2$$

Construir su diagrama de simulación

Ejemplo (cont.)



Ejemplo

Dada la ecuación dinámica del circuito RLC.

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t)$$

$$\dot{x}_2(t) = -\frac{1}{LC}x_1(t) - \frac{R}{L}x_2(t) + \frac{1}{L}u(t)$$

El Diagrama de simulación puede también servir para realizar operaciones con vectores.

2.4 ECUACIÓN CARACTERÍSTICA Y VALORES PROPIOS

La ec. característica de un sistema puede obtenerse a partir de la ec. (2.8), que relaciona la entrada $\mathbf{u}(t)$ con la salida $\mathbf{y}(t)$, teniendo en esa ec.

$$(\mathbf{sI} - \mathbf{A})^{-1} = \frac{1}{|\mathbf{sI} - \mathbf{A}|} adj(\mathbf{sI} - \mathbf{A}) \qquad (4.1)$$

esta toma la forma

$$\mathbf{G}_{\mathbf{u}}(\mathrm{s}) = \frac{\mathbf{C}[adj(\mathbf{sI} - \mathbf{A})]\mathbf{B} + |\mathbf{sI} - \mathbf{A}|\mathbf{D}}{|\mathbf{sI} - \mathbf{A}|} \qquad (4.2)$$

ECUACIÓN CARACTERÍSTICA (cont.)

Del denominador de la matriz FT $\mathbf{G_u}(s)$, se concluye que la **ec. característica** del sistema es

$$\Delta(s) = \left|s\mathbf{I} - \mathbf{A}\right| = 0 \qquad (4.3)$$

Las raíces de la ec. característica son referidas como los **valores propios (autovalores)** de la matriz **A**.

Ejemplo

Dadas las matrices del modelo de estado de un s. de control

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & -5 \end{bmatrix}; \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

a) Determinar su ec. característica.
b) Determinar los valores propios de la matriz A

Solución

$$|s\mathbf{I} - \mathbf{A}| = \begin{bmatrix} s & -1 & 0 \\ 0 & s & 1 \\ 2 & 1 & s+5 \end{bmatrix} = s^3 + 5s^2 + s + 2 = 0$$

de donde: λ_1=-4.88; λ_2=-0.06+j0.64; λ_3=-0.06-j0.64.

VECTORES PROPIOS

Si **A**, tiene valores propios distintos, sus vectores propios se pueden deducir empleando la ec. matricial

$$(\lambda_i \mathbf{I}\text{-}\mathbf{A})\mathbf{p_i} = \mathbf{0} \qquad (4.4)$$

donde $\mathbf{p}_i$ es distinto de cero, asimismo λ_i con $i = 1, 2, \ldots, n$, denota el i-ésimo valor propio de **A**.

Ejemplo

Dadas las matrices del modelo de estado de un s. de control

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{E} = 0$$

a) Determinar los valores propios de la matriz $\mathbf{A}$.

b) Determinar los vectores propios de la matriz $\mathbf{A}$.

Solución

a) La ecuación característica es:

$$\left| \lambda \mathbf{I} - \mathbf{A} \right| = \lambda^2 - 1$$

Los valores propios: $\lambda_1 = 1$ y $\lambda_2 = -1$

Ejemplo (cont.)

b) Los vectores propios serían:

$$\mathbf{p}_1 = \begin{bmatrix} p_{11} \\ p_{21} \end{bmatrix}; \qquad \mathbf{p}_2 = \begin{bmatrix} p_{12} \\ p_{22} \end{bmatrix}$$

Sustituyendo $\lambda_1 = 1$ y $\mathbf{p}_1$ en (4.4) se obtiene:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{11} \\ p_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

De donde $p_{21} = 0$ y p_{11} es desconocido (arbitrario). En este caso p_{11} se puede elegir por ejemplo = 1.

Ejemplo (cont.)

En forma similar, para λ_2 = -1, la ec. (4) se convierte en

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} p_{12} \\ p_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

De donde

$$-2p_{12} + p_{22} = 0$$

Así,

$$\mathbf{p}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}; \qquad \mathbf{p}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

VECTORES PROPIOS GENERALIZADOS

Si **A** tiene valores propios de orden múltiple y no es simétrica

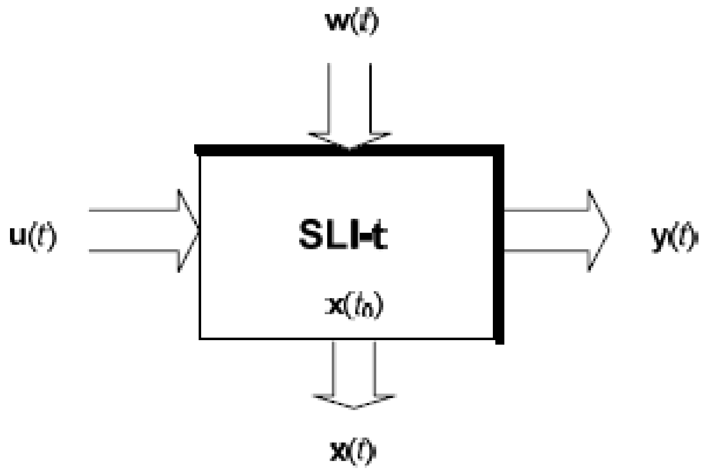
- Los vectores propios que corresponden a los $q(<n)$ valores propios distintos se determinan de (4.4).
- Los otros vectores propios, se determinan en el caso de "λ" de m–esimo orden de:

$$
\begin{aligned}
(\lambda_j \mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{p}_{n-q+1} &= 0 \\
(\lambda_j \mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{p}_{n-q+2} &= -\mathbf{p}_{n-q+1} \\
(\lambda_j \mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{p}_{n-q+3} &= -\mathbf{p}_{n-q+2} \\
&\vdots \\
(\lambda_j \mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{p}_{n-q+m} &= -\mathbf{p}_{n-q+m-1}
\end{aligned}
\qquad (4.5)
$$

2.3 RELACIÓN ENTRE EC. DE ESTADO Y FT

Se obtendrá la FT de un SLI-t partiendo de sus ec. de estado.

Dado un SLI-t, descrito por su modelo de estado,

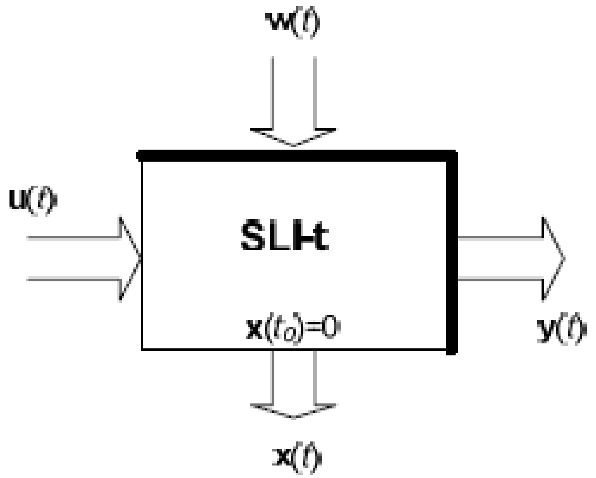


$$\frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) + \mathbf{E}\mathbf{w}(t) \qquad (1)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t) + \mathbf{H}\mathbf{w}(t) \qquad (2)$$

2.3 RELACIÓN ENTRE EC. DE ESTADO Y FT

La FT de un SLI-t se define asumiendo c.i. = 0



Para establecer una relación entre **u**(t) y **y**(t) (entrada- salida) se asume **w**(*t*)=0 y se toma la T. de L.,

$$\mathbf{sX}(s)\text{-}\mathbf{x}(0) = \mathbf{AX}(s) + \mathbf{BU}(s) \qquad (2.3)$$

2.3 RELACIÓN ENTRE EC. DE ESTADO Y FT (cont.)

de donde

$$\mathbf{X}(s) = (s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\mathbf{x}(0) + (s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}\mathbf{U}(s) \qquad (2.2)$$

y

$$\mathbf{Y}(s) = \mathbf{C}\mathbf{X}(s) + \mathbf{D}\mathbf{U}(s) \qquad (2.5)$$

Sustituyendo (4) en (5) se tiene,

$$\mathbf{Y}(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\,\mathbf{x}(0) + [\mathbf{C}(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}+\mathbf{D}]\mathbf{U}(s) \qquad (2.6)$$

por definición la FT se obtiene para c.i.=0, así $\mathbf{x}(0)=0$

$$\mathbf{Y}(s) = [\mathbf{C}(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\,\mathbf{B}+\mathbf{D}]\,\mathbf{U}(s) \qquad (2.7)$$

2.3 RELACIÓN ENTRE EC. DE ESTADO Y FT (cont.)

Donde

$$\mathbf{G}_u(s) = \frac{\mathbf{Y}(s)}{\mathbf{U}(s)} = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D} \qquad (2.8)$$

matriz de FT de dimensión qxp entre $\mathbf{u}(t)$ y $\mathbf{y}(t)$ con $\mathbf{w}(t) = 0$.

De la misma manera puede obtenerse

$$\mathbf{G}_w(s) = \frac{\mathbf{Y}(s)}{\mathbf{W}(s)} = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{E} + \mathbf{H} \qquad (2.9)$$

matriz de FT de dimensión qxv entre $\mathbf{w}(t)$ y $\mathbf{y}(t)$ con $\mathbf{u}(t) = 0$.

Ejemplo

Dado el modelo de estado de un sistema de control

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}\mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}u(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}\mathbf{x}(t)$$

Determinar la FT:

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = ?$$

Solución

Se emplea: $\mathbf{G_u}(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I}\text{-}\mathbf{A})^{-1}\,\mathbf{B}+\mathbf{D}$

Ejemplo (cont.)

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s+3 & -1 \\ 2 & s \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dfrac{s}{(s+1)(s+2)} & \dfrac{1}{(s+1)(s+2)} \\ \dfrac{-2}{(s+1)(s+2)} & \dfrac{s+3}{(s+1)(s+2)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dfrac{1}{(s+1)(s+2)} \\ \dfrac{s+3}{(s+1)(s+2)} \end{bmatrix} = \frac{1}{(s+1)(s+2)}$$

Ejemplo

Dado el modelo de estado de un sistema de control

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} -7 & \mathbf{-12} \\ 1 & \mathbf{0} \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t)$$

Determinar la FT

Solución

$$\mathbf{G}(s) = \frac{(s+2)}{(s+3)(s+4)}$$

Ejemplo 1

Dada la FT de una planta, obtener su modelo de estado.

Así, si se tiene

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_2 s^2 + b_1 s + b_0}{s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0}$$

Para obtener el modelo de estado expresado en FCC (o en FCO):

- Emplear el diagrama de simulación del ejemplo 1 (o del ejemplo 2), donde los a_i y b_i coinciden con los que aparecen en la FT.
- Del diagrama de simulación pasar a las ecuaciones de estado.

(cont.)

b) Otra opción de solución, se obtiene empleando la siguiente metodología:

- Se introduce una variable auxiliar E(s) en (1)

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_2 s^2 + b_1 s + b_0}{s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0} \frac{E(s)}{E(s)} \qquad (2)$$

Dado que

$$Y(s) = (b_2 s^2 + b_1 s + b_0)E(s) \qquad (3)$$

$$U(s) = (s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0)E(s) \qquad (4)$$

de donde

$$E(s) \rightarrow e(t)$$

$$sE(s) \rightarrow \frac{de(t)}{dt}$$

$$s^2 E(z) \rightarrow \frac{de^2(t)}{dt}$$

(cont.)

Teniendo en cuenta lo anterior, se definen las variables de estado

$$\begin{aligned} x_1(t) &= e(t) \\ x_2(t) &= \frac{dx_1}{dt} = \frac{de(t)}{dt} \\ x_3(t) &= \frac{dx_2}{dt} = \frac{d^2e(t)}{dt} \end{aligned} \tag{5}$$

De (4) y (5) se obienen las siguientes ecuaciones de estado

$$\begin{aligned} \frac{dx_1(t)}{dt} &= x_2(t) \\ \frac{dx_2(t)}{dt} &= x_3(t) \\ \frac{dx_3(t)}{dt} &= -a_0x_1(t) - a_1x_2(t) - a_2x_3(t) + u(t) \end{aligned}$$

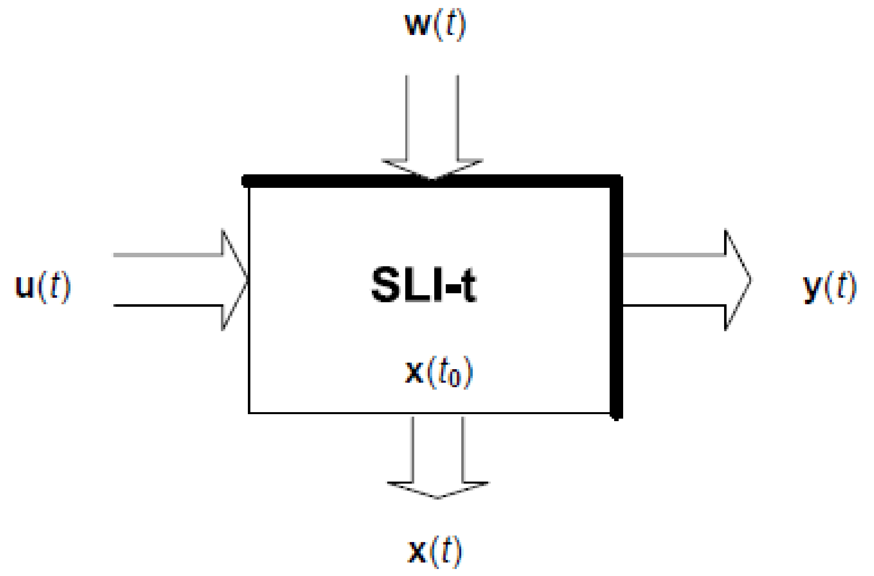
(cont.)

De (3) se obtiene la ec. de salida

$$y(t) = b_0 x_1(t) + b_1 x_2(t) + b_2 x_3(t)$$

2.5 SOLUCION DE LA ECUACIÓN DE ESTADO

Implica determinar el vector de estado $\mathbf{x}(t)$ y el vector de salida $\mathbf{y}(t)$ de un sistema, para $t \geq t_0$, dadas sus condiciones iniciales $\mathbf{x}(t_0)$ y sus entradas $\mathbf{u}(t)$ y $\mathbf{w}(t)$.



2.5 SOLUCION DE LA ECUACIÓN DE ESTADO

Dado el modelo de estado de un SLI-t,

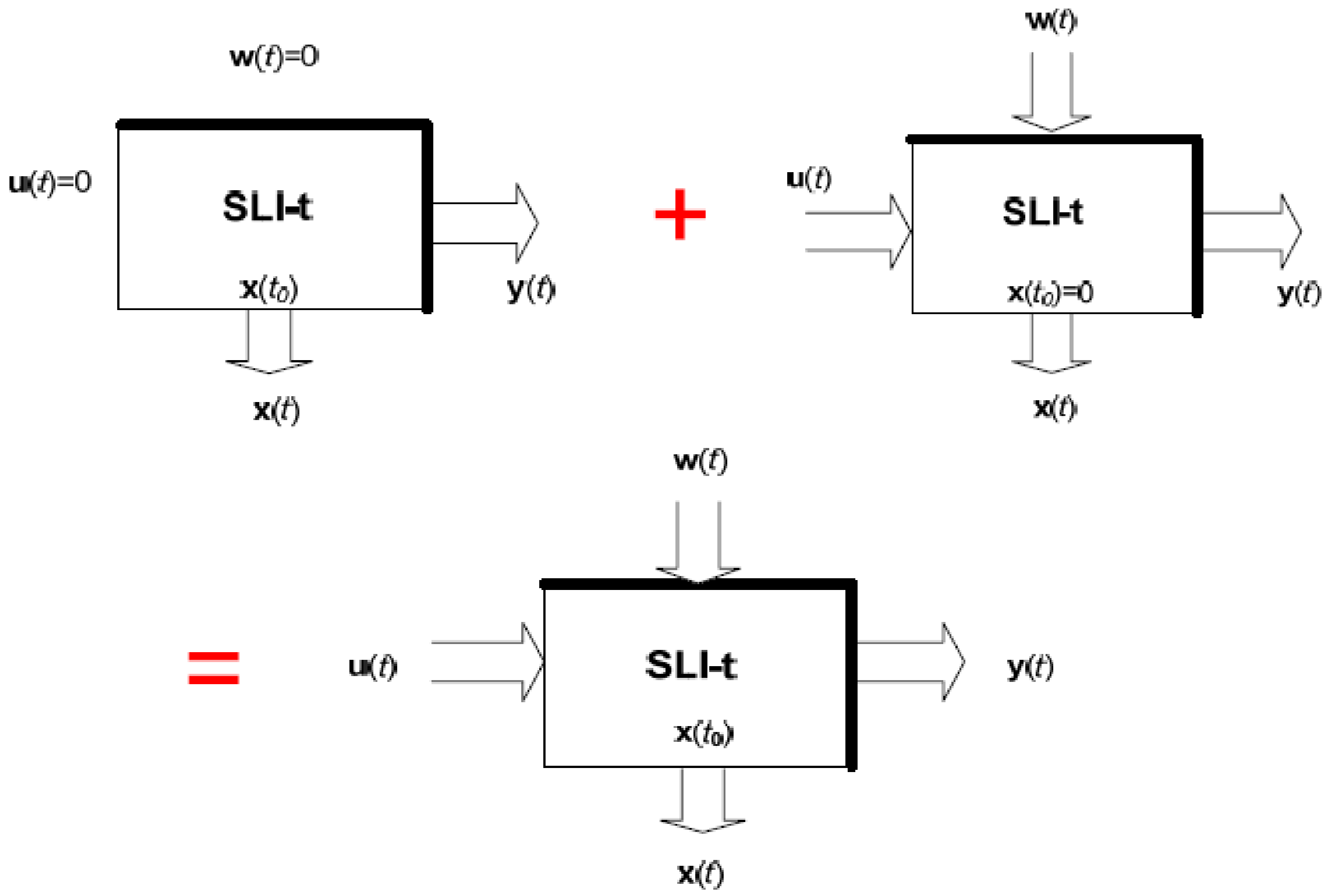
$$\frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} = \mathbf{Ax}(t) + \mathbf{Bu}(t) + \mathbf{Ew}(t) \qquad (1)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{Cx}(t) + \mathbf{Du}(t) + \mathbf{Hw}(t) \qquad (2)$$

$\mathbf{x}(t)$ puede ser hallado aplicando el principio de la superposición, sumando:

- la respuesta a las c.i. $\mathbf{x}(t_0)$ y
- las respuestas a las entradas $\mathbf{u}(t)$ y $\mathbf{w}(t)$,

obtención de las respuestas aplicando el principio de la superposición:



SOLUCION DE LA ECUACIÓN DE ESTADO (cont.)

Adicionalmente, la salida $\mathbf{y}(t)$ puede ser obtenida de $\mathbf{x}(t)$ y $\mathbf{u}(t)$ mediante manipulaciones matriciales.

2.5.1 RESPUESTA A LAS CONDICIONES INICIALES

Solución de la Ecuación de Estado Homogénea

En este caso, $\mathbf{u}(t) = 0$ y $\mathbf{w}(t) = 0$,

$$\frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) \qquad (3)$$

Para solucionar la ecuación (3), se define la matriz de transición $\phi(t)$ como una matriz nxn que satisface las siguientes dos condiciones:

a) $\phi(0) = \mathbf{I}$

b) $\dfrac{d\phi(t)}{dt} = \mathbf{A}\phi(t)$ (4)

RESPUESTA A LAS C.I. (cont.)

Además, dada $\mathbf{x}(0)$ que denota el estado inicial en t=0, la solución de la ec. (3) puede ser escrita como:

$$\mathbf{x}(t) = \phi(t) \,.\, \mathbf{x}(0) \qquad (5)$$

la cual es la solución de la ecuación de estado homogénea para $t \geq 0$.

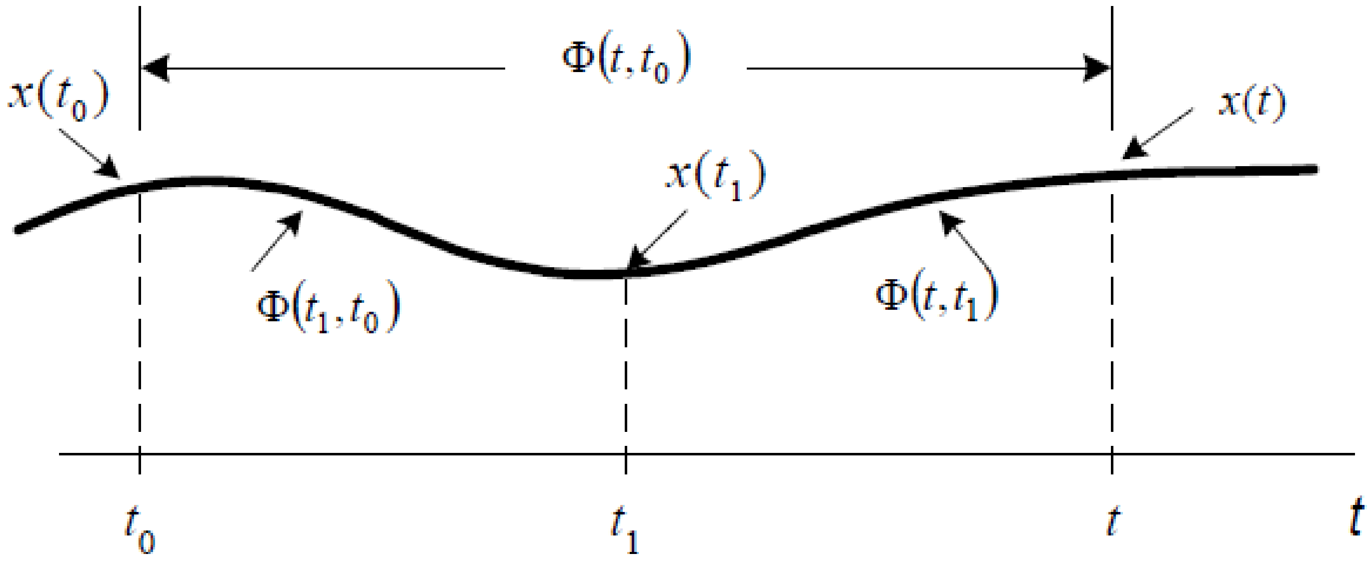
La matriz de transición $\phi(t)$ transfiere el estado inicial $\mathbf{x}(0)$ al estado $\mathbf{x}(t)$, como se ve en la ecuación (5).

RESPUESTA A LAS C.I. (cont.)

Las siguientes propiedades son deducidas de la definición de la matriz de transición:

(c) $\phi(t, t_0) = \phi(t, t_1)\,\phi(t_1, t_0)$ para todo $t_1 \geq t_0$, $t \geq t_1$

(d) $\phi(t, t_0) = \phi^{-1}(t_0, t)$



MÉTODO DE LA TRANSFORMADA DE LAPLACE

Tomando la T. de Laplace de la ec. (5) obtenemos:

$$s\mathbf{X}(s) - \mathbf{x}(0) = \mathbf{A}\mathbf{X}(s) \qquad (6)$$

de donde

$$\mathbf{X}(s) = (s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\,\mathbf{x}(0)$$

$(s\mathbf{I}-\mathbf{A})$ - es no singular

Tomando T. de $\mathcal{L}^{-1}$

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\right]\mathbf{x}(0) \qquad t \geq 0 \qquad (7)$$

de donde (comparando con (5)), la matriz de transición de estado se identifica como:

$$\phi(t) = L^{-1}[(\mathrm{s}\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}]$$

MÉTODO DE LA TRANSFORMADA DE LAPLACE

Así, la matriz de transición de estado depende solamente de la matriz **A**, por lo que en ocasiones se conoce como la "matriz de transición de estado de **A**".

2.5.2 RESPUESTA A LAS ENTRADAS

Tomando la T. de Laplace de la ec. (1) con c.i =cero, se tiene:

$$(s\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{X}(s) = \mathbf{BU}(s) + \mathbf{EW}(s)$$

ó

$$\mathbf{X}(s) = \phi(s)[\mathbf{BU}(s) + \mathbf{EW}(s)]$$

Dado que el producto de dos funciones en el dominio de Laplace es igual a su convolución en el dominio del tiempo, se tiene tomando la T^{-1} de Laplace.

$$\mathbf{x}(t) = \int_0^t \phi(t - \tau)[\mathbf{Bu}(\tau) + \mathbf{Ew}(\tau)]d\tau \qquad \tau \geq 0$$

donde es una variable "ficticia".

2.5.3 RESPUESTA TOTAL

Se obtiene sumando las respuestas anteriores

$$\mathbf{x}(t) = \phi(t)\mathbf{x}(0) + \int_0^t \phi(t-\tau)\left[\mathbf{Bu}(\tau) + \mathbf{Ew}(\tau)\right]d\tau \qquad t \geq 0 \qquad (8)$$

esta solución es útil solamente cuando el tiempo inicial se define en t=0.

Si se trabaja con un tiempo inicial diferente de cero: $t=t_0$, el estado inicial correspondiente será $\mathbf{x}(t_0)$. La entrada $\mathbf{u}(t)$ y la perturbación $\mathbf{w}(t)$ se aplican en $t=t_0$:

$$\mathbf{x}(t) = \phi(t-t_0)\mathbf{x}(t_0) + \int_{t_0}^t \phi(t-\tau_0)\left[\mathbf{Bu}(\tau) + \mathbf{Ew}(\tau)\right]d\tau \quad t \geq t_0 \qquad (9)$$

VECTOR DE SALIDA

El vector de salida se halla reemplazando la solución (9) en la ecuación de salida.

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\boldsymbol{\phi}(t - t_0)\mathbf{x}(t_0) + \int_{t_0}^{t} \mathbf{C}\boldsymbol{\phi}(t - \tau)\left[\mathbf{Bu}(\tau) + \mathbf{Ew}(\tau)\right]d\tau + \mathbf{Du}(t) + \mathbf{Hw}(t)$$

$$t \geq t_0$$

Ejemplo 1

Se tiene el modelo de estado de un sistema,

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \mathbf{u}(t)$$

a) Determinar la respuesta en el tiempo de las variables de estado de este sistema debido a las c.i.

$$\mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} x_{10} \\ x_{20} \end{bmatrix}$$

b) Determinar la respuesta en el tiempo de las variables de estado de este sistema debido a una entrada tipo escalón unitario.

Solución a)

Hallamos la matriz de transición

$$[s\mathbf{I}-\mathbf{A}] = \begin{bmatrix} s+3 & -1 \\ 2 & s \end{bmatrix}$$

$$\phi(s) = [s\mathbf{I}-\mathbf{A}]^{-1} = \frac{\begin{bmatrix} s & 1 \\ -2 & s+3 \end{bmatrix}}{(s+1)(s+2)} = \begin{bmatrix} \dfrac{s}{(s+1)(s+2)} & \dfrac{1}{(s+1)(s+2)} \\ \dfrac{-2}{(s+1)(s+2)} & \dfrac{s+3}{(s+1)(s+2)} \end{bmatrix}$$

tomando T^{-1} de Laplace se obtiene

$$\phi(t) = \begin{bmatrix} -e^{-t}+2e^{-2t} & e^{-t}-e^{-2t} \\ -2e^{-t}+2e^{-2t} & 2e^{-t}-e^{-2t} \end{bmatrix}$$

Solución a)

Así

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} -e^{-t} + 2e^{-2t} & e^{-t} - e^{-2t} \\ -2e^{-t} + 2e^{-2t} & 2e^{-t} - e^{-2t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{10} \\ x_{20} \end{bmatrix}$$

de donde

$$x_1(t) = (-e^{-t} + 2e^{-2t})x_{10} + (e^{-t} - e^{-2t})x_{20}$$

$$x_2(t) = (-2e^{-t} + 2e^{-2t})x_{10} + (2e^{-t} - e^{-2t})x_{20}$$

Solución b)

Aquí

$$u(t) = 1;$$

$$\mathrm{U(s)} = \frac{1}{\mathrm{s}}$$

Hallamos

$$\mathbf{X}(\mathrm{s}) = \phi(\mathrm{s})\mathbf{B}\mathrm{U}(\mathrm{s}) =$$

$$= \begin{bmatrix} \dfrac{5}{(s+1)(s+2)} & \dfrac{1}{(s+1)(s+2)} \\ \dfrac{-2}{(s+1)(s+2)} & \dfrac{s+3}{(s+1)(s+2)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \frac{1}{s}$$

Solución b)

De donde tomando T-1 de Laplace se obtiene

$$\mathbf{x}(t) = L^{-1}[\phi(s)\mathbf{BU}(s)] = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} - e^{-t} + \frac{1}{2}e^{-2t} \\ \frac{3}{2} - 2e^{-t} + \frac{1}{2}e^{-2t} \end{bmatrix}$$

Ejemplo 2

Se tiene el modelo de estado de un sistema,

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t); \qquad y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$$

a) Determinar la respuesta en el tiempo de las variables de estado de este sistema debido a las c.i.

$$\mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

b) Determinar la respuesta en el tiempo de las variables de estado de este sistema debido a una entrada tipo escalón unitario.

$$u(t) = 2u_s(t)$$