MC71 - Ingeniería de control 2

Unidad N°1: Modelamiento de sistemas mediante espacio de estados y análisis de su respuesta temporal

Semana 4

- Repaso de la Unidad 1

MEng. Carlos H. Inga Espinoza

FORMAS CANÓNICAS

Son formas derivadas de una representación de estados, con el objetivo de reducir la complejidad de la forma original y facilitar el diseño de controladores y observadores.

Se estudiarán tres tipos de formas canónicas:

a. Forma canónica controlable
b. Forma canónica observable
c. Forma canónica diagonal (o de Jordan)

A. FORMA CANÓNICA CONTROLABLE

Utilizada para el método de asignación de polos.

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_0 s^n + b_1 s^{n-1} + \cdots + b_{n-1}s + b_n}{s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_{n-1}s + a_n}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1} \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \cdots & -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = [b_n - a_n b_0 \,\vdots\, b_{n-1} - a_{n-1} b_0 \,\vdots\, \cdots \,\vdots\, b_1 - a_1 b_0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + b_0 u$$

B. FORMA CANONICA OBSERVABLE

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_0 s^n + b_1 s^{n-1} + \cdots + b_{n-1} s + b_n}{s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_{n-1} s + a_n}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_n \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -a_{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_n - a_n b_0 \\ b_{n-1} - a_{n-1} b_0 \\ \vdots \\ b_1 - a_1 b_0 \end{bmatrix} u$$

$$y = [0 \quad 0 \quad \cdots \quad 0 \quad 1] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} + b_0 u$$

C. FORMA CANÓNICA DIAGONAL

Si todas las raíces del polinomio denominador son diferentes:

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_0 s^n + b_1 s^{n-1} + \cdots + b_{n-1}s + b_n}{(s+p_1)(s+p_2)\cdots(s+p_n)}$$

$$= b_0 + \frac{c_1}{s+p_1} + \frac{c_2}{s+p_2} + \cdots + \frac{c_n}{s+p_n}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -p_1 & & & 0 \\ & -p_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & -p_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = [c_1 \quad c_2 \quad \cdots \quad c_n] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + b_0 u$$

C. FORMA CANÓNICA DE JORDAN (I)

Caso especial de la forma canónica anterior considerando que el polinomio denominador tiene raíces múltiples.

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_0 s^n + b_1 s^{n-1} + \cdots + b_{n-1} s + b_n}{(s + p_1)^3 (s + p_4)(s + p_5) \cdots (s + p_n)}$$

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = b_0 + \frac{c_1}{(s + p_1)^3} + \frac{c_2}{(s + p_1)^2} + \frac{c_3}{s + p_1} + \frac{c_4}{s + p_4} + \cdots + \frac{c_n}{s + p_n}$$

C. FORMA CANÓNICA DE JORDAN (II)

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = b_0 + \frac{c_1}{(s + p_1)^3} + \frac{c_2}{(s + p_1)^2} + \frac{c_3}{s + p_1} + \frac{c_4}{s + p_4} + \cdots + \frac{c_n}{s + p_n}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{ccc:ccc} -p_1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -p_1 & 1 & 0 & & 0 \\ 0 & 0 & -p_1 & 0 & \cdots & 0 \\ \hdashline 0 & \cdots & 0 & -p_4 & & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \ddots & \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & & -p_n \end{array}\right] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = [c_1 \quad c_2 \quad \cdots \quad c_n] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + b_0 u$$

Considere el sistema definido por

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{s+3}{s^2+3s+2}$$

Obtenga las representaciones en el espacio de estados en la forma canónica controlable, en la forma canónica observable y en la forma canónica diagonal.

Forma canónica controlable:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$$

Forma canónica observable:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$$

Forma canónica diagonal:

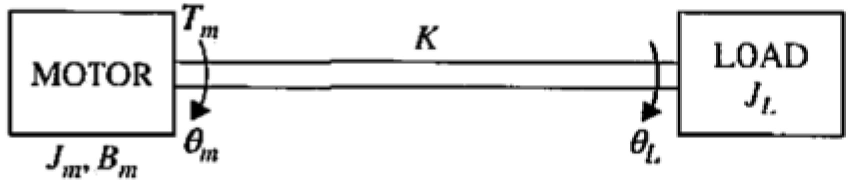
$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$$

EJERCICIO N°1

La figura muestra un motor acoplado a carga inercial a través de un eje con una constante de elasticidad K. Un acople no rígido entre ambos componentes mecánicos en un sistema de control causa con frecuencia una resonancia torsional que puede transmitirse a todas las partes del sistema. Determine la representación en espacio estado del modelo considerando que la salida es la deformación angular en el eje. Las variables del sistema y los parámetros son:

$T_m(t)$ = torque del motor
B_m =coeficiente de fricción viscosa del motor
K = constante elástica del eje
$\theta_m(t)$ = desplazamiento angular del motor
$\omega_m(t)$ = velocidad angular del motor
J_m = Inercia del motor
$\theta_L(t)$ = desplazamiento angular de la carga
$\omega_L(t)$ = velocidad angular de la carga
J_L = Inercia de la carga



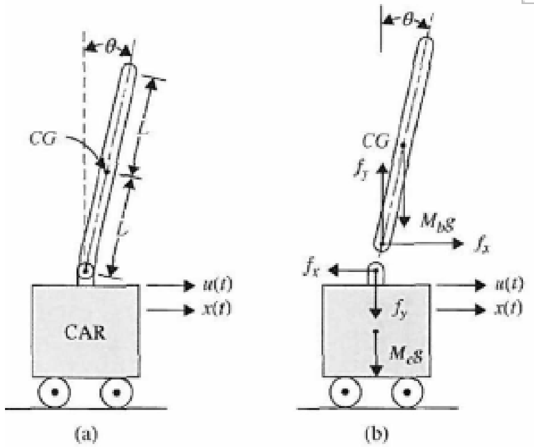
EJERCICIO N°2

El sistema de control de la figura con los siguientes parámetros: Mb= 1Kg, Mc = 10Kg, L = 1m, g= 32.2 ft/s2, tiene la siguiente ecuación linealizada:

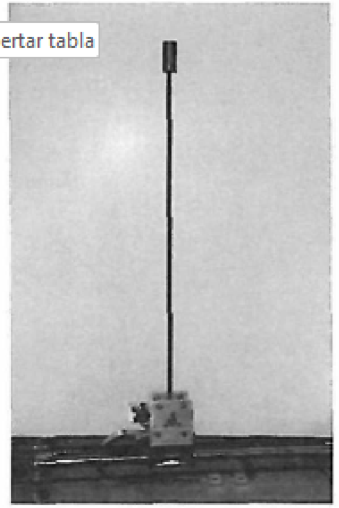
$$\Delta\dot{x}(t) = A^*\Delta x(t) + B^*\Delta r(t) \qquad \Delta y(t) = C^*\Delta x(t)$$

$$\mathbf{A}^* = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 25.92 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -2.36 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{B}^* = \begin{bmatrix} 0 \\ -0.0732 \\ 0 \\ 0.0976 \end{bmatrix}$$

a) Halle la ecuación característica de A* y sus raíces. ¿El sistema es inestable, asintóticamente estable o marginalmente estable?
b) Determine la controlabilidad del sistema.
c) Por razones económicas solo una de las variables de estado se puede medir para la realimentación. Determine el C* que corresponde a un sistema observable.



Insertar tabla



1) $C^* = [1\ 0\ 0\ 0]$
2) $C^* = [0\ 1\ 0\ 0]$
3) $C^* = [0\ 0\ 1\ 0]$
4) $C^* = [0\ 0\ 0\ 1]$

EJERCICIO N°3

- Sea el caso donde

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 1 \\ -1 & -5 & 1 \\ 2 & 2 & -4 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

y D=0, determinar la forma canónica controlable

EJERCICIO N°4

- Sea el caso anterior determine su F.C.O.

Respuesta

$$O = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & -3 \\ -6 & -22 & 14 \end{bmatrix} \text{ Por lo que } T = \begin{bmatrix} 26 & 14 & 22 \\ 11 & 3 & 9 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ con lo que se obtiene}$$

$$A_T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -48 \\ 1 & 0 & -44 \\ 0 & 1 & -12 \end{bmatrix} \quad B_T = \begin{bmatrix} 26 \\ 11 \\ 1 \end{bmatrix} \quad C_T = [0 \quad 0 \quad 1] \quad D_T = 0 .$$

Donde se puede apreciar que sólo A_T y C_T tiene forma definida.

EJERCICIO N°5

- Considere los siguientes sistemas:

$$
\begin{aligned}
\dot{x}_i &= \mathbf{A}_i\mathbf{x}_i = \mathbf{B}_i r \\
y &= \mathbf{C}_i\mathbf{x}_i;
\end{aligned}
$$

$$
\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{B}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{C}_1 = \begin{bmatrix} 2 & 0 \end{bmatrix}
$$

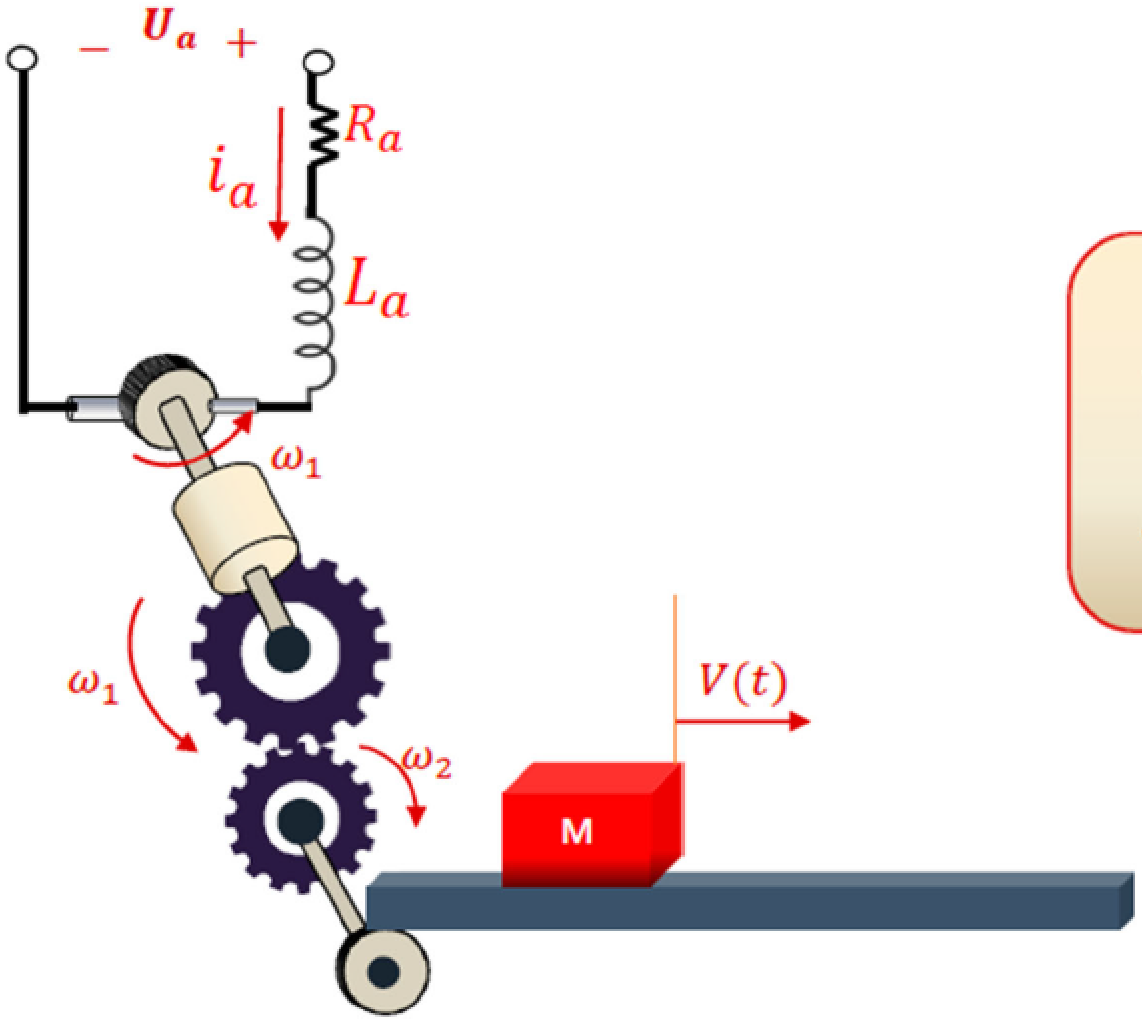
$$
\mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -11 & -6 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{B}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{C}_2 = \begin{bmatrix} 6 & 2 & 0 \end{bmatrix}
$$

a) Muestre que ambos sistemas tienen la misma FT.

b) Evalúe la observabilidad de ambos sistemas

EJERCICIO N°6

Hallar la representación en espacio estado del siguiente sistema:



$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{N_2}{N_1} \rightarrow \omega_2 = \frac{N_1}{N_2}\omega_1$$

$$s = \theta r \rightarrow \quad v = \omega r \rightarrow \quad v = \omega_2 r$$

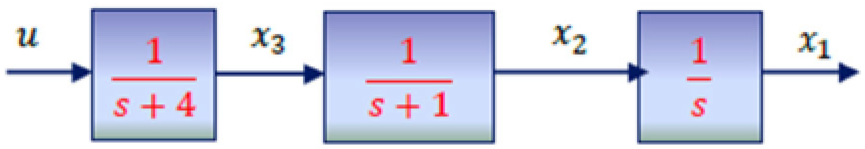
EJERCICIO N°7

- Determine el modelo de estado:

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{2s + 3}{s^3 + 6s^2 + 11s + 6}$$

EJERCICIO N°8

- Determinar el modelo de estado del siguiente sistema



EJERCICIO N°9

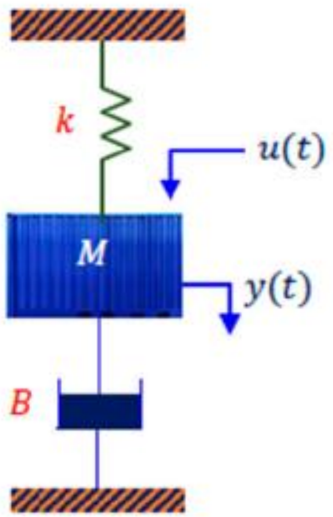
- Hallar la matriz de transformación y la respuesta a un escalón unitario del siguiente sistema:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

Considere las condiciones iniciales: $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

EJERCICIO N°10

- Determine las ecuaciones de estado, el diagrama simulación y la FT.



$u(t)$: *Fuerza (entrada del sistema)*

$y(t)$: *desplazamiento lineal (salida del sistema)*

EJERCICIO N°11

- Determine el modelo de estado y luego el diagrama de simulación

$$\frac{d^3y(t)}{dt^3} + 6\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 11\frac{dy(t)}{dt} + 6y(t) = 6u(t)$$

Gracias por vuestra atención...