De dos funciones a una sola

Tenemos un problema: necesitamos comprar equipos especializado en hacer vibrar el concreto para que no deje vacíos al vaciarlo en un encofrado, pero esos equipos sólo lo venden en dólares, ¿cómo resolveríamos ese problema?, pues al parecer es un problema de solución sencilla:

1. Compramos dólares
2. Con esos dólares, compramos los equipos

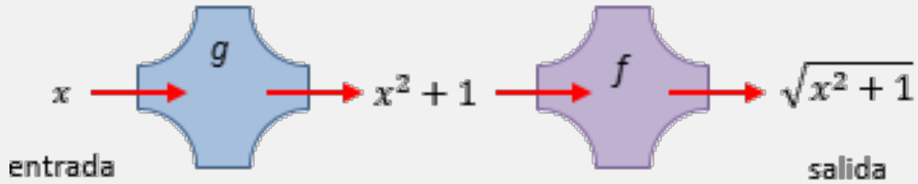
Cada uno de estos pasos se puede modelar con una función, la función f podría ser la compra de los dólares tomando en cuenta el valor de la compra del dólar y la segunda función podríamos modelarla con la función g que sería el costo con los impuestos que tendríamos que pagar. ¿Se podrá hacer esta operación con una sola función equivalente, pero con su equivalente en soles?

En esta clase se estudia una forma muy importante de combinar dos funciones para obtener una nueva función.

Ahora consideremos una forma muy importante de combinar dos funciones para obtener una nueva función. Suponga que $f(x) = \sqrt{x}$ y $g(x) = x^2 + 1$. Podemos definir una nueva función h como.

$$h(x) = f\big(g(x)\big) = f(x^2 + 1) = \sqrt{x^2 + 1}$$

La función h está formada por las funciones f y g en una forma interesante: dado un número x, primero le aplicamos la función g y luego aplicamos f al resultado. En otras palabras, obtenemos la regla h al aplicar la regla g y luego la regla f. La figura 1 muestra un diagrama de máquina para h.



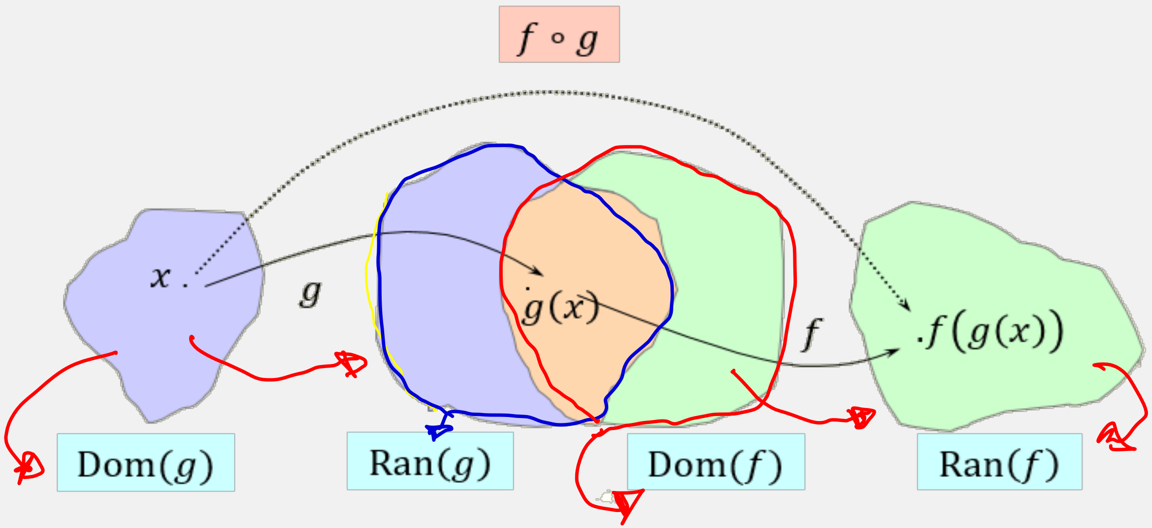
En esta figura la máquina h está compuesta de la máquina g y luego por la máquina f.

Definición: Dadas las funciones f y g, tal que $\mathrm{Dom}(f) \cap \mathrm{Ran}(g) \neq \emptyset$. La composición f de g, denotada $f \circ g$ se define mediante la siguiente regla de correspondencia:

$$(f \circ g)(x) = f\big(g(x)\big)$$

$$\mathrm{Dom}(f \circ g) = \{x \in R / x \in \mathrm{Dom}(g) \wedge g(x) \in \mathrm{Dom}(f)\}$$

La definición anterior se puede representar gráficamente de la siguiente forma:



Observación 1:

- ✓ La composición g de f, denotada $g \circ f$, se define de manera similar.
- ✓ En la mayoría de los casos $f \circ g$ y $g \circ f$ son funciones distintas.

1. Dadas las funciones f y g con regla de correspondencia $f(x) = x + 7$ con $x \in]-4; 9]$ y $g(x) = -x + 1$ con $x \in]-7; 7]$. Determine el dominio y la regla de correspondencia de $f \circ g$.

Sol:

$\text{Dom} f =]-4, 9]$

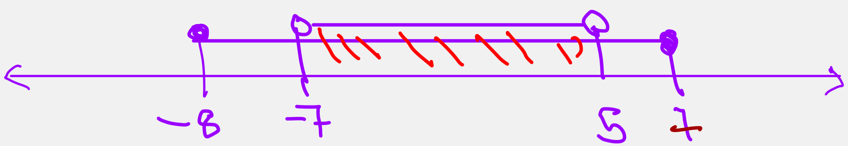
$\text{Dom} g =]-7, 7]$

1) Dom "$f o g$" $= \{x \in \mathbb{R} / x \in \text{Dom} g \wedge g(x) \in \text{Dom} f\}$

$\boxed{-7 < x \leq 7 \wedge} -4 < g(x) \leq 9$

$-4 < -x + 1 \leq 9$

$-5 < -x \leq 8$ [mult (-1)]



$\boxed{5 > x \geq -8}$

Paso 2 : R.C

$f o g(x) = f(g(x))$

$f o g_{(x)} = f(-x + 1)$

$f o g_{(x)} = (-x + 1) + 7$

$f o g_{(x)} = -x + 8$

2. Dadas las funciones g y h con regla de correspondencia $g(x) = x^2 - 7$ con $x \in]1;5]$ y $h(x) = \sqrt{x-2}$. Determine el dominio y la regla de correspondencia de $g \circ h$ y $h \circ g$.

Sol: goh

$Dom\,g =]1;5]$ y $Dom\,h = [2;+\infty[$

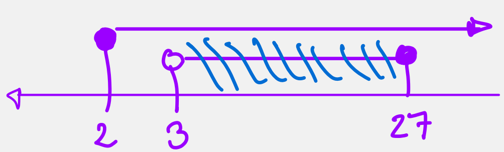
1) $Dom(goh) = \{x \in \mathbb{R} / x \in Dom\,h \wedge h(x) \in Dom\,g\}$

$2 \leq x \quad \wedge \quad 1 < h(x) \leq 5$

$1^2 \leq \sqrt{x-2}^{\,2} \leq 5^2$

$1 < x-2 \leq 25$

$3 < x \leq 27$



$Dom\,goh =]3;27]$

Paso 2: RC $\Rightarrow goh(x) = g(h(x)) = g(\sqrt{x-2})$

$goh_{(x)} = (\sqrt{x-2}^{\,2} - 7) =$

$goh_{(x)} = x - 9$

Sol: hog

$Dom\,g =]1;5]$

$Dom\,h = [2;+\infty[$

Paso 1: $Dom\,hog = \{x \in \mathbb{R} / x \in Dom\,g \wedge g(x)\,Dom\,h\}$

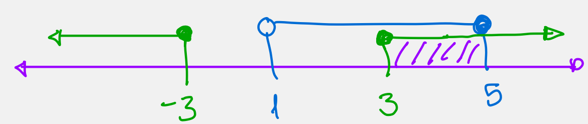
$1 < x \leq 5 \quad \wedge \quad 2 \leq g(x)$

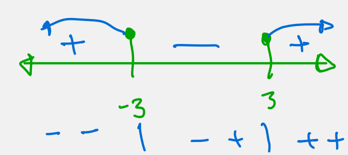
$2 \leq x^2 - 7$

$0 \leq x^2 - 9$

$0 \leq (x-3)(x+3)$

$PR \rightarrow x = 3; -3$





$Dom\,hog = [3;5]$

Paso 2: RC $hog(x) = h$

$hog(x) = h(g(x))$

$hog(x) = h(x^2 - 7)$

$hog(x) = \sqrt{(x^2-7)-2}$

$hog(x) = \sqrt{x^2 - 9}$

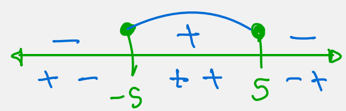
3. Dadas las funciones f y g con regla de correspondencia $f(x)=\sqrt{25-x^2}$ y $g(x)=4+x$ con $x\in[-2:+\infty[$. Determine si existe el valor de $(f\circ g)(2)$. $\Rightarrow \notin \text{Dom } f\circ g$

Sol : $\text{Dom } g = [-2, +\infty[$ y $\text{Dom } f = \{x \in \mathbb{R} / 25 - x^2 \geq 0\}$

$$25 - x^2 \geq 0$$

$$(5-x)(5+x) \geq 0$$

$$PR \Rightarrow 5; -5$$

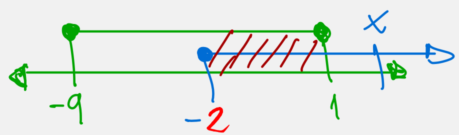


Paso 1 : $\text{Dom } f\circ g = \{x \in \mathbb{R} / x \in \text{Dom } g \wedge g(x) \in \text{Dom } f\}$

$$-2 \leq x \quad \wedge \quad -5 \leq g(x) \leq 5$$

$$-5 \leq 4 + x \leq 5$$

$$-9 \leq x \leq 1$$



$\text{Dom } f\circ g = [-2, 1]$

$\boxed{\text{fast}}$

$$f(g(2)) = f(x) = \sqrt{25 - 6^2} \neq 0$$

4. Dadas las funciones f y g con regla de correspondencia $f(x) = x^2 - 9$ con $x \in]-3;3]$ y $g(x) = \sqrt{x+5}$. Determine la regla de correspondencia y dominio de $g \circ f$. Además, calcule $(g \circ f)(2{,}5)$ sí existe.

$x + 5 \geq$

$x \geq -5$

$-5 \leq x$

Sol/: $Dom\, f =]-3, 3]$ y $Dom\, g = [-5; +\infty[$

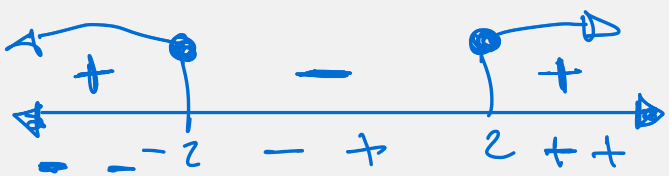
$Dom\, gof = \{x \in \mathbb{R} / x \in Dom\, f \wedge f(x) \in Dom\, g\}$

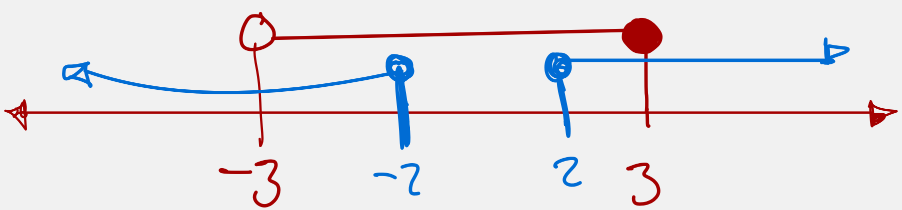
$-3 < x \leq 3 \quad \wedge -5 \leq f(x)$

$-5 \leq x^2 - 9$

$0 \leq x^2 - 4$

$0 \leq (x-2)(x+2)$





$Dom\, f =]-3; -2] \cup [2; 3]$

$(gof) = (2,5)$ Si existe

1. Dadas las funciones f y g con regla de correspondencia $f(x) = 2 - x^2$ con $\mathrm{Dom}(f) =]-3; 2[$ y $g(x) = \sqrt{1-x}$. Determine el dominio y la regla de correspondencia de la función $g \circ f$. Además, calcule $(g \circ f)(0)$ sí existe.

2. Dadas las funciones g y h con regla de correspondencia $g(x) = 2x^2 - 7$ y $h(x) = \sqrt{x-1}$. Determine la regla de correspondencia y dominio de: $h \circ g$ y $g \circ h$.

3. Dadas las funciones f y g con regla de correspondencia $f(x) = 2 - x$ y $g(x) = x^2 - 2$. Determine el valor de b si se cumple que: $(g \circ f)(b) + (f \circ g)(b) = -2$

Respuestas:

1. $(g \circ f)(x) = \sqrt{x^2 - 1}$; $\mathrm{Dom}(g \circ f) =]-3; -1] \cup [1; 2[$

   $(g \circ f)(0)$ no existe, pues $0 \notin \mathrm{Dom}(g \circ f)$

2. $\mathrm{Dom}(h \circ g) =]-\infty; -2] \cup [2; +\infty[$; $(h \circ g)(x) = \sqrt{2x^2 - 8}$

   $\mathrm{Dom}(g \circ h) = [1; +\infty[$; $(g \circ h)(x) = 2x - 9$

3. $b = 2$