Contenido de clase

Función de variable compleja:

- Repaso de los números complejos
- Funciones complejas
- Limite
- Continuidad
- Derivada

Repaso de los números complejos

$$\mathbb{C} = \{\boxed{z = x + yj} \,/\, x, y \in \mathbb{R},\ j^2 = -1\}$$

$\boxed{j = \sqrt{-1}}$

Parte Real: $Re(z) = x$

Parte Imaginaria: $Im(z) = y$

Conjugado: $\bar{z} = x - jy$

$* \ z = -2 + 3j$

$\bar{z} = -2 - 3j$

$\bullet \ z + \bar{z} = -4$

$(-2+3j)(-2-3j) = 4 + 6j - 6j + 9$

$= 13$

Operaciones: Si $z_1 = x_1 + jy_1$, $z_2 = x_2 + jy_2$

Suma: $z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + j(y_1 + y_2)$

Producto: $z_1 z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + j(x_1 y_2 + x_2 y_1)$

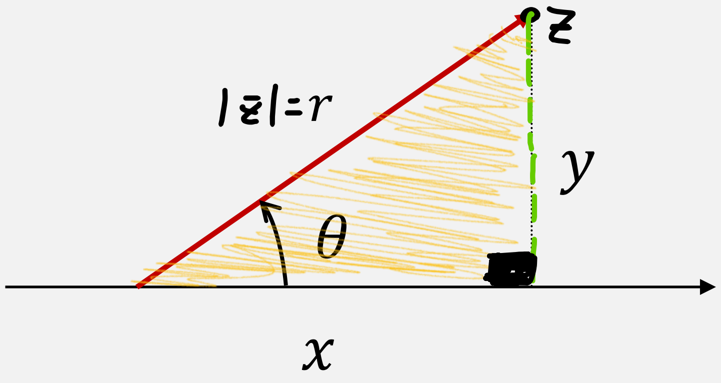
División: $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{z_1 \cdot \overline{z_2}}{z_2 \cdot \overline{z_2}}$

$\bullet \ \dfrac{2+j}{3+j} \times \dfrac{3-j}{3-j} = \dfrac{6 - 2j + 3j + 1}{3^2 - j^2} = \dfrac{7}{10} + \dfrac{1}{10}j$

Repaso de los números complejos

Plano z

$$z = x + jy$$



$$\begin{cases} x = r\cos(\theta) \\ y = r\,sen(\theta) \end{cases}$$

Módulo: $|z| = r = \sqrt{x^2 + y^2}$

Argumento principal:

$$\theta = \mathrm{Arg}\,(z) \quad , \quad -\pi < \theta \leq \pi$$

$$Tan\theta = \frac{y}{x}$$

Para hallar el argumento es recomendable graficar al punto Z y ver su cuadrante

Forma Polar : $z = r(\cos(\theta) + j\,sen(\theta))$

Forma Exponencial: $z = re^{j\theta}$ o $z = |z|e^{j\theta}$

$$\cos\theta + j\,sen\theta = e^{j\theta}$$

Repaso de los números complejos

- Propiedades:

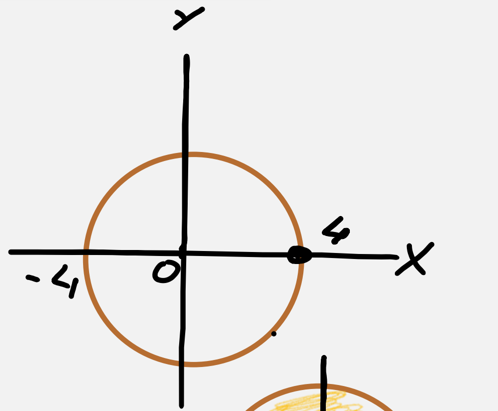
1. $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$
2. $\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1}\ \overline{z_2}$
3. $z\ \overline{z} = |z|^2$
4. $\boldsymbol{|e^{j\theta}| = 1}$
5. $|z_1\ z_2| = |z_1|\ |z_2|$
6. $\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right| = \dfrac{|z_1|}{|z_2|}$
7. $Arg(z_1 z_2) = Arg(z_1) + Arg(z_2)$
8. $Arg\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right) = Arg(z_1) - Arg(z_2)$

Repaso de los números complejos

❑ CURVAS Y REGIONES EN EL PLANO COMPLEJO

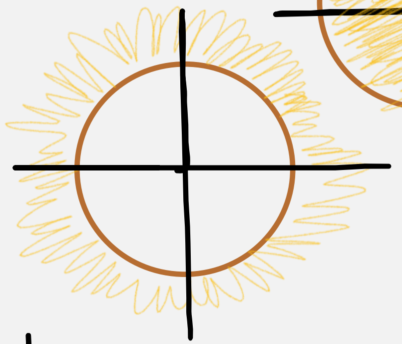
$\underbrace{|z|}_{\sqrt{x^2+y^2}} = 4$ Representa la ecuación de los complejos que están en la **circunferencia de radio 4 y centro el origen.**

$\sqrt{x^2+y^2} = 4 \longrightarrow x^2+y^2=16$



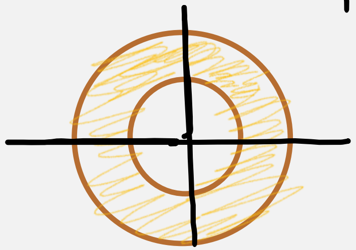
$|z| \leq 4$ Representa la región llamada disco cerrado de radio 4 y centro el origen. $\Rightarrow x^2+y^2 \leq 16$

$\underbrace{|z|}_{\sqrt{x^2+y^2}} \geq 2$ Representa la parte exterior del disco abierto de radio 2 y centro el origen. $\Rightarrow x^2+y^2 \geq 4$



$2 \leq |z| \leq 4$ Representa la corona (anillo) circular cerrada de centro el origen y radios comprendidos entre 2 y 4.

$4 \leq x^2+y^2 \leq 16$



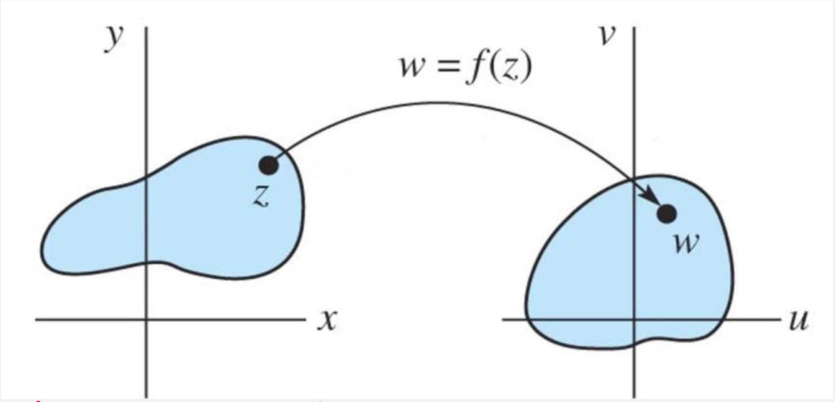
FUNCIÓN DE VARIABLE COMPLEJA

$$f: D \subseteq C \to C$$

$$z \to \boldsymbol{w} = f(\boldsymbol{z})$$

$$\left.\begin{aligned} z &= x + jy \\ w &= u + jv \end{aligned}\right\}$$

$u + jv = f(x + jv)$



Dominio (z)

Imagen (w)

Es una relación uno a uno que asocia a cada complejo z el complejo w.
D es el dominio de la función f y corresponde al conjunto de los números complejos donde es posible calcular el complejo w aplicando la regla dada por f.

Así como $z = x + jy$, también podemos escribir $w = u + jv$

De manera general se tiene $\boldsymbol{f(z) = u(x; y) + jv(x; y)}$

Función compleja

Ejemplo

Si $w = f(z) = z^2$, halle la parte real e imaginaria de w.

Solución

$u + jv$

Si $\boldsymbol{z} = \boldsymbol{x} + \boldsymbol{jy}$, entonces $w = f(z) = (x + jy)^2$

$w = f(z) = \boldsymbol{x^2} + (\boldsymbol{jy})^2 + \boldsymbol{j2xy} = \boldsymbol{x^2 - y^2} + j\boldsymbol{2xy} = u + jV$

$\Rightarrow \quad f(z) = x^2 - y^2 + j2xy$

Parte real de w es: $\mathbf{Re}(\boldsymbol{w}) = \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}; \boldsymbol{y}) = \boldsymbol{x^2} - \boldsymbol{y^2}$

Parte imaginaria de w es: $\boldsymbol{Im}(\boldsymbol{w}) = \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}; \boldsymbol{y}) = \boldsymbol{2xy}$

Funciones complejas elementales

1. $f(z) = z^n$ *(función potencia)*
2. $p(z) = c_0 + c_1 z + \ldots + c_n z^n$ *(función polinomial)*
3. $f(z) = \dfrac{p(z)}{q(z)}$ función racional
4. $\boldsymbol{f(z) = e^z = e^x(\cos(y) + j\,sen(y))}$ exponencial
5. $\boldsymbol{ln(z) = ln|z| + j(\theta + 2k\pi)}$, $k \epsilon \mathbb{Z}$, θ es el argumento principal $de\ z, \theta \epsilon]-\pi, \pi]$

   $\boldsymbol{Ln(z) = ln|z| + j\theta}$ **valor principal del logaritmo complejo *(k=0)***

$z = x + jy \Rightarrow e^z = e^{x+jy} = e^x . e^{jy} = e^x(\cos y + j\,sen\,y)$

6. $\boldsymbol{f(z) = z^{z_0} = e^{z_0\, ln(z)}}$, $z_0 \epsilon \mathbb{C}$ potencia compleja

   $\boldsymbol{f(z) = z^{z_0} = e^{z_0 [Ln(z)]}}$ **se llama valor principal de una potencia compleja**

7. $\boldsymbol{\cos(z) = \dfrac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz})}$, $\boldsymbol{sen(z) = \dfrac{1}{2j}(e^{iz} - e^{-iz})}$, $\tan(z) = \dfrac{sen(z)}{\cos(z)}$

   $\cot(z) = 1/\tan(z)$, $\sec(z) = 1/\cos(z)$, $cosec\,(z) = 1/sen(z)$

8. $\cosh(z) = \dfrac{1}{2}(e^z + e^{-z})$, $\mathrm{Senh}(z) = \dfrac{1}{2}(e^z - e^{-z})$, $\tanh(z) = \dfrac{senh(z)}{\cosh(z)}$

   $\coth(z) = 1/\tanh(z)$, $\sec h\,(z) = 1/\cosh(z)$, $\mathrm{Cosech}(z) = 1/senh(z)$

Función compleja

Ejemplo

- Determinar el valor principal complejo de w, en la forma $w = x + jy$, de:

$$\boldsymbol{w = ln(1 - j)}$$

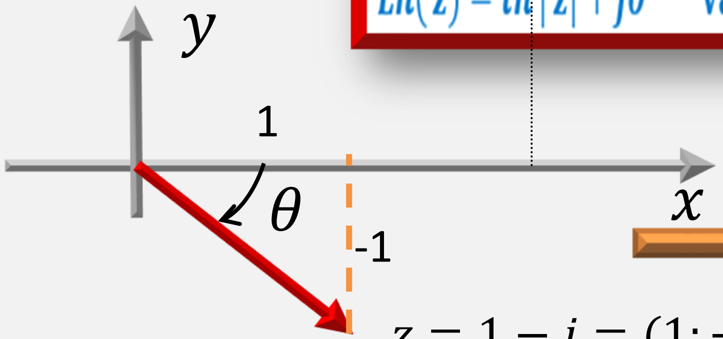
Solución:

$$w = \text{Ln}(1 - j)$$

Dado que piden el valor principal de un logaritmo, usamos la fórmula siguiente.

$$Ln(z) = ln|z| + j\theta \qquad \text{valor principal del logaritmo complejo}$$

$$w = \text{Ln}(1 - j) = \ln|1 - j| + j\theta$$



$$z = 1 - j = (1; -1)$$

$$\begin{cases} \theta = -\dfrac{\pi}{4} \\ |z| = \sqrt{2} \end{cases}$$

$$\text{Siendo} \begin{cases} \theta = \text{Arg}(z) \quad \Rightarrow \quad \theta = -\dfrac{\pi}{4} \\ \ln|1 - j| = \ln\sqrt{2} = \dfrac{1}{2}\ln 2 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \quad \boxed{z = \frac{1}{2}\ln 2 - j\frac{\pi}{4}}$$

Función compleja

Ejemplo

- Determinar el valor principal complejo de w, en la forma $w = x + jy$, de:

$$w = (1+j)^{(-3+4j)}$$

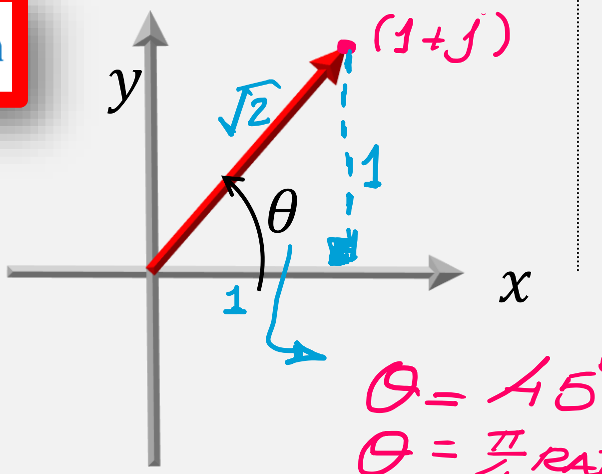
$f(z) = z^{z_0} = e^{z_0[Ln(z)]}$ se llama valor principal de una potencia compleja

Solución:

$$w = \underbrace{(1+j)}_{z}{}^{\overbrace{(-3+4j)}^{z_0}} = z^{z_0} = e^{z_0 . Ln(z)} = e^{(-3+4j) . Ln(1+j)} \cdots (*)$$

$Ln(z) = ln|z| + j\theta$ valor principal del logaritmo

$$Ln(1+j) = \boxed{Ln|1+j|} + j\theta$$



$\theta = 45°$

$\theta = \frac{\pi}{4}$ RAD

Donde $\mathrm{Ln}(1+j) = \ln(\sqrt{2}) + \frac{\pi}{4}j = \frac{1}{2}\ln 2 + \frac{\pi}{4}j$

$* \; |1+j| = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}.$

En (*):

$$\Rightarrow \quad z = e^{(-3+4j)\,\mathrm{Ln}\,(1+j)} = e^{(-3+4j)\left(\frac{1}{2}\ln 2+\frac{\pi}{4}j\right)} = e^{(-3+4j)\left(\frac{1}{2}\ln 2+\frac{\pi}{4}j\right)}$$

$$\Rightarrow \quad z = e^{-\frac{3}{2}ln2-\pi+\left(-\frac{3}{4}\pi+2ln2\right)j} \quad \Rightarrow \quad \boxed{z \approx \frac{\sqrt{2}}{4e^{\pi}}\, e^{-0,9699j}}$$

$* \; Ln(A^B) = B\,LnA$

Limite

Noción que nos permite estudiar el comportamiento de la función f en una vecindad de cierto punto de z_0, y escribimos:

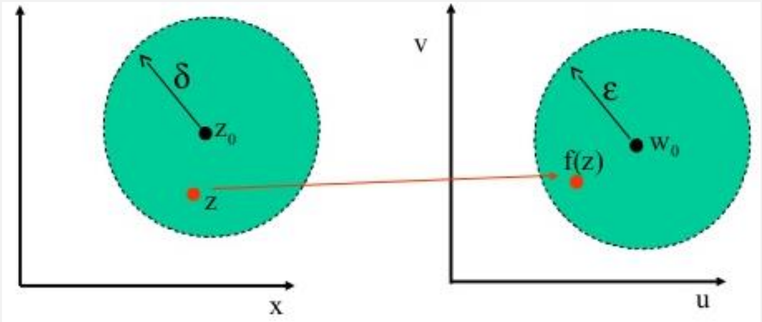
$$\lim_{z \to z_o} f(z) = L$$

Cuando existe límite el valor de f(z) está muy cerca del valor L, para aquellos z que estén suficientemente cerca de z_0.

Definición de límite de una función compleja:

$\forall\ \varepsilon > 0$ (pequeño) puede hallarse un número $\delta>0$ de modo que para los complejos $z \neq z_0$ del disco $|z - z_0| < \delta$ (vencidad abierta de z_0) se tiene

$$|f(z) - L| < \varepsilon$$



Observación:

En el curso no se trabaja el limite por definición

Limite

Ejemplo Determinar del límite $\lim_{z\to -j}\left(\frac{z^2+1}{z+j}\right)$

$$\lim_{z\to -j}\left(\frac{z^2+1}{z+j}\right)=\frac{(-j)^2+1}{-j+j}=\frac{0}{0}=\text{INDET.}$$

$$\lim_{z\to -j}\frac{z^2+1}{(z+j)}\cdot\frac{(z-j)}{(z-j)}=\lim_{z\to -j}\left(\frac{\cancel{z^2+1}}{\cancel{z^2+1}}\right)\cdot(z-j)=-j-j=-2j$$

Teorema

si $f(z)=u+jv$

Si tenemos $f(z)=u(x,y)+jv(x,y)$

Luego $\boldsymbol{\lim_{z\to z_0}}\ \boldsymbol{f(z)=L}$ existe si y sólo si

$$\begin{cases}\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} u(x,y)=\Re e(L)\\ \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} v(x,y)=\mathrm{Im}(L)\end{cases},\quad \text{existen}$$

$$\Rightarrow \lim_{z\to z_0} f(z)=\lim_{z\to z_0}(u+jv)=\lim_{z\to z_0} u+j\lim_{z\to z_0} v$$

Limite

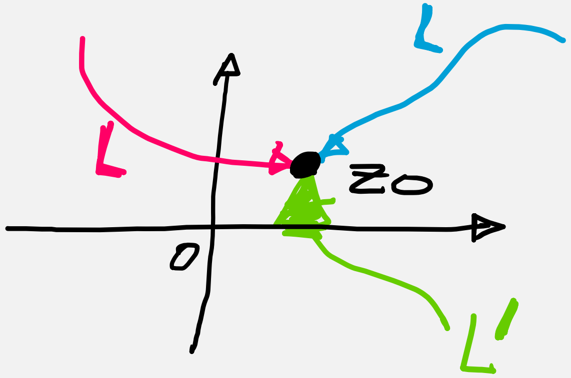
❑ Criterio para la no existencia del limite

Si $f(z)$ tiende a dos valores complejos $L_1 \neq L_2$ a lo largo de dos trayectorias distintas que pasan por z_0, entonces no existe límite de $f(z)$ en z_0.

Ejemplo. $\boxed{\lim_{z\to 0}\left(\frac{\bar{z}}{z}\right)} = \begin{cases} -1 & \text{en la T.V.} \\ 1 & \text{en la T.H.} \end{cases}$

El limite NO existe

Recuerden ese límite.
Ese limite no existe



$$\lim_{\underbrace{z\to 0}_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}} \frac{\bar{z}}{z} = \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x-jy}{x+jy} = \frac{0-0}{0+0} = \frac{0}{0} = \text{IND}$$

*por el eje X: tomo $x+0j \Rightarrow x=x, \boxed{y=0} \Rightarrow \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x-j.0}{x+j0} = 1$

*por el eje Y: tomo $0+yj \Rightarrow x=0,\ y=y \Rightarrow \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{0-jy}{0+jy} = -1$

El límite no existe.

Continuidad

Se dice que $f(z)$ es continua en z_0 si tenemos:

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = f(z_0)$$

Una función compleja es continua en el conjunto B, si es continua en cada complejo del conjunto B.

Ejemplo. Pruebe que f es continua en $z_0 = -j$,

$$f(z) = \begin{cases} \dfrac{z^4 - 1}{z + j}, & z \neq -j \\ 4j, & z = -j \end{cases}$$

$$z = -j \Rightarrow f(z) = f(-j) = 4j$$

$$\lim_{z \to -j} f(z) = \lim_{z \to -j} \frac{z^4 - 1}{z + j} = \frac{0}{0}$$

$$\Rightarrow \lim_{z \to -j} \frac{(z^2-1)(z^2+1)}{(z+j)} \cdot \frac{z-j}{z-j} = \lim_{z \to -j} \frac{(z^2-1)(z^2+1)(z-j)}{z^2 - j^2} = \lim_{z \to -j} \frac{(z^2-1)\cancel{(z^2+1)}}{\cancel{z^2+1}} (z-j) = 4j$$

$$\Rightarrow f(z_0) = \lim_{z \to z_0} f(z) \Rightarrow f(z) \text{ es continua en } z = z_0 = -j$$

La derivada

- Definición

Una función f(z) se dice que es derivable o diferenciable en el punto z_0 si existe el siguiente límite

$$f'(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} \quad \text{o} \quad \boxed{f'(z_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(z_0+h)-f(z_0)}{h}}$$

Al valor de este límite se le llama derivada de la función en el punto z_0

Teorema:

- Si la función f(z) es derivable en z_0, entonces es continua en z_0.
- Si es continua en Z0, no se sabe si es derivable.
- Si la función f(z) no es continua en z_0, entonces no es derivable en z_0

La derivada

❑ Reglas de derivación en los complejos

Si f y g son derivables en un punto z y c es una constante compleja, entonces

Reglas de la constante: $\frac{d}{dz}c = 0, \quad \frac{d}{dz}cf(z) = cf'(z)$

Regla de la suma: $\frac{d}{dz}[f(z) + g(z)] = f'(z) + g'(z)$

Regla del producto: $\frac{d}{dz}[f(z)g(z)] = f(z)g'(z) + g(z)f'(z)$

Regla del cociente: $\frac{d}{dz}\left[\frac{f(z)}{g(z)}\right] = \frac{g(z)f'(z) - f(z)g'(z)}{[g(z)]^2}$

Regla de la cadena: $\frac{d}{dz}f(g(z)) = f'(g(z))g'(z).$

La regla común para la derivada de potencias de z también es válida:

$$\boxed{\frac{d}{dz}z^n = nz^{n-1}, \quad n \text{ es un entero.}}$$

La derivada

Ejemplo

1. Verificar que $f(z) = \bar{z}$ no tiene derivada en el plano complejo.
2. Verificar, mediante la definición, que f(z)=z^2 tiene por derivada $f'(z) = 2z$

$$\boxed{f'(z_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(z_0+h)-f(z_0)}{h}}$$

$$f(z) = \bar{z} \Rightarrow f'(z) = \lim_{h\to 0} \frac{\overline{(z+h)} - \bar{z}}{h}$$

$$f'(z) = \lim_{h\to 0} \frac{\cancel{\bar{z}} + \bar{h} - \cancel{\bar{z}}}{h}$$

$$f'(z) = \lim_{h\to 0} \frac{\bar{h}}{h} = \text{No existe.}$$

Nota: $\lim_{w\to 0} \frac{\bar{w}}{w}$ = No existe.

$\lim_{w\to 0} \frac{w}{\bar{w}}$ = No existe.

2. $f(z) = z^2$, $f(z+h) = (z+h)^2$

$$f'(z) = \lim_{h\to 0} \frac{f(z+h)-f(z)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(z+h)^2 - z^2}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{z^2+2zh+h^2-z^2}{h}$$

$$f'(z) = \lim_{h\to 0} \frac{2zh+h^2}{h} = \lim_{h\to 0}(2z+h) = 2z.$$