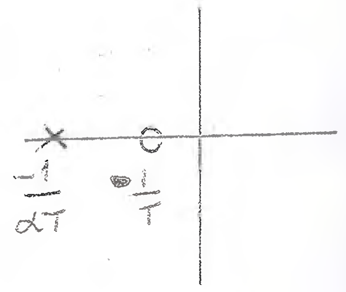
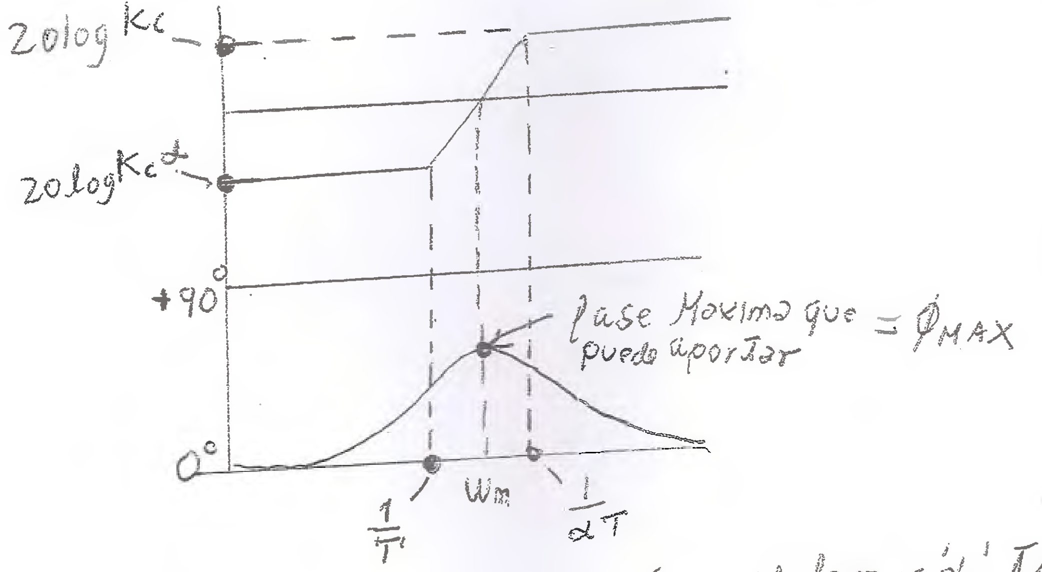
Adelanto de Fase en Bode

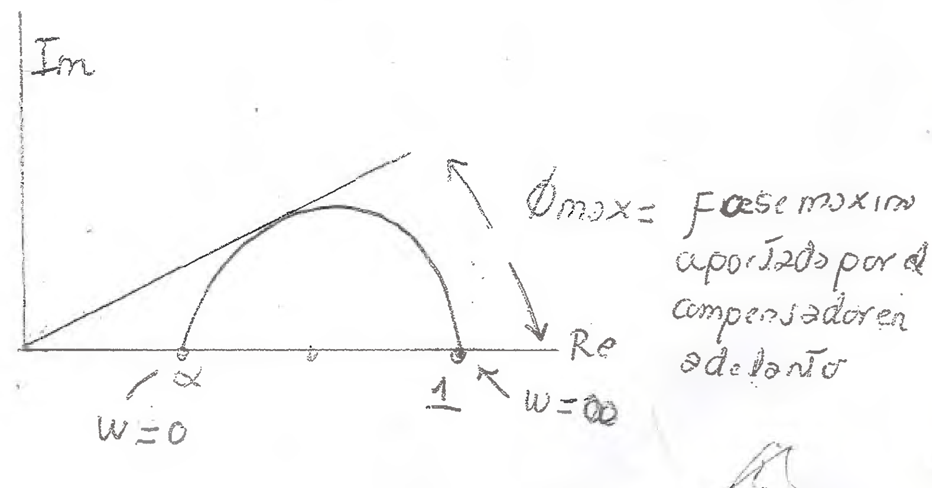
El diseño del controlador $G_c(s) = \dfrac{K_c\left(s+\frac{1}{T}\right)}{\left(s+\frac{1}{\alpha T}\right)}$ $\quad 0<\alpha<1$

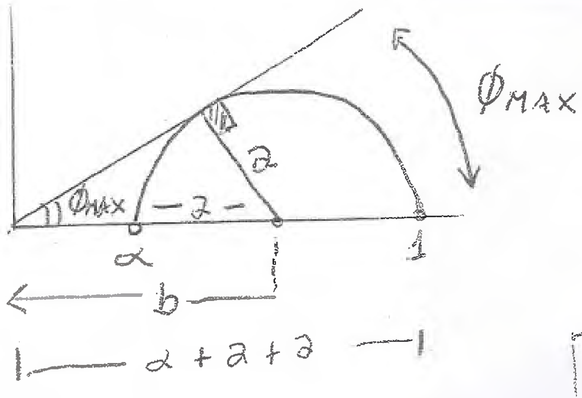


La Funcion de adelanto de Fase produce 'Db' de ganancia y Fase aproximadamente así:



Para calular la fase maxima en relación con el factor 'α' Trazamos el diagrama polar





$$a = \frac{1-\alpha}{2}$$

$$b = \alpha + \frac{1-\alpha}{2}$$

$$b = \frac{1+\alpha}{2}$$

$$\boxed{\operatorname{Sen}\phi_{Max} = \frac{1-\alpha}{1+\alpha}} \quad \cdots \text{(I)}$$

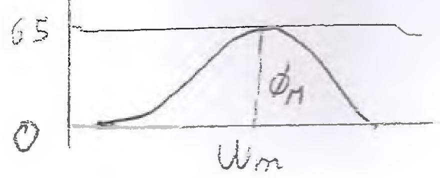
Ahora, el diagrama de fase se puede expresar como la diferencia de 2 angulos.

$$G_{c(s)} = K_c \frac{(s + 1/T)}{s + \frac{1}{\alpha T}}$$

$$\phi(w) = Tg^{-1}\left(\frac{w}{1/T}\right) - Tg^{-1}\left(\frac{w}{1/\alpha T}\right)$$

Si derivamos $\phi(w)$ respecto a w, estariamos hallando el punto maximo de fase, por tanto obtenemos la frecuencia W_m, a la que ocurre esta fase máxima.

$$\boxed{W_m = \frac{1}{T\sqrt{\alpha}}} \quad \cdots \text{(II)}$$



Hallando la ganancia que aporta el compensador a esta frecuencia W_m:

$$20\log\left(\frac{\sqrt{w^2 + \left(\frac{1}{T}\right)^2}}{\sqrt{w^2 + \left(\frac{1}{\alpha T}\right)^2}}\right) \rightarrow \text{para } W = W_m = \frac{1}{T\sqrt{\alpha}}$$

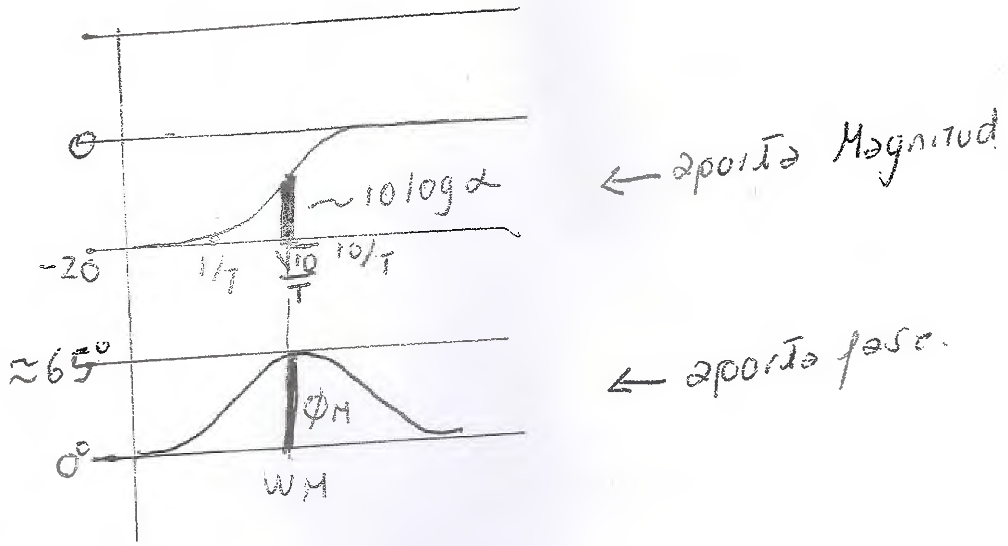
∴ El compensador aporta $\boxed{\text{Ganancia} = -10\log\alpha}$ (III)

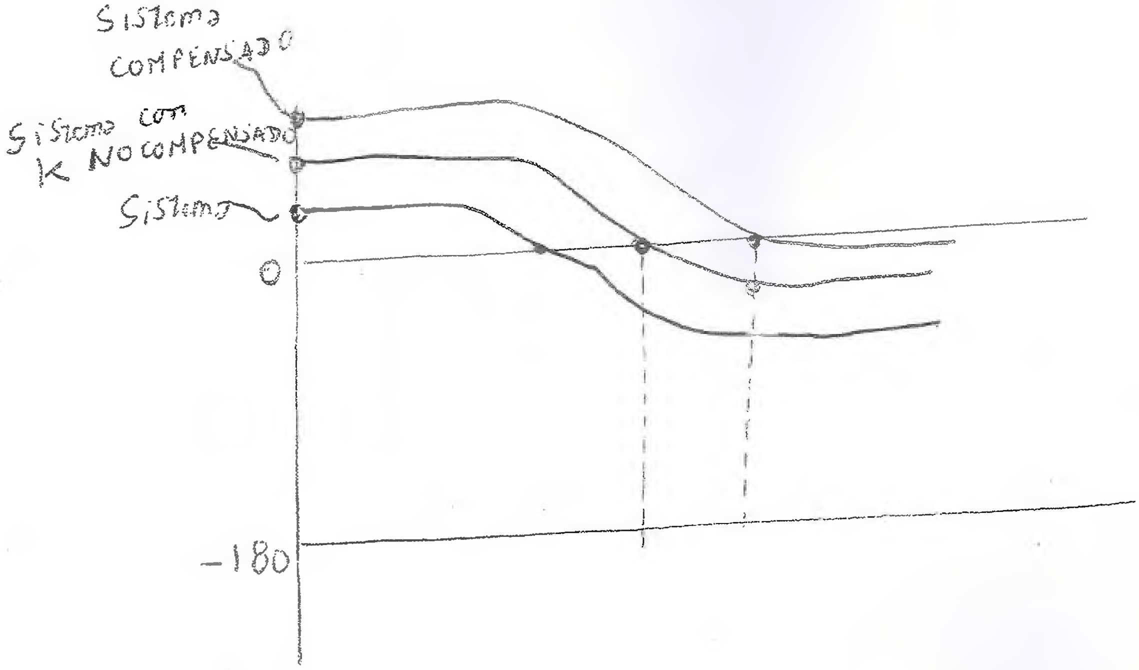
La curva del sistema a compensar se modifica en magnitud en $W_m = \frac{1}{T\sqrt{\alpha}}$ en Ganancia $= -10\log\alpha$

Nota: El compensador en adelanto al desplazar la frecuencia de cruce de ganancia a la derecha, entonces esto disminuye el Margen Fase. Por ello adicionamos 5 a 12° al angulo de adelanto de fase ϕM

$$\phi_M = \phi_{deseado} - \phi_{actual} + 10$$

En resumen, por ejemplo si $\alpha = 0.1$





Compensadores en Adelanto en Bode

Las especificaciones de diseño se dan en terminos de MF, y MG, constante de error estático de velocidad, etc

* Pasos de diseño

① Sea $\boxed{G_c(s) = K_c \dfrac{\left(s + \frac{1}{T}\right)}{\left(s + \frac{1}{\alpha T}\right)}}$ $0 < \alpha < 1$ (controlador en Adelanto)

y la planta $G(s)$ dado

② El $\boxed{G_c(s) = \overbrace{K_c\alpha}^{K} \dfrac{(Ts+1)}{(\alpha Ts+1)}}$ (controlador en adelanto) (otra forma de expresar)

Multiplicando el Controlador y la Planta

$$G_c(s) \cdot G(s) = \frac{K(Ts+1)}{(\alpha Ts+1)} * G(s) = \overbrace{KG(s)}^{G_1(s)} \cdot \frac{(Ts+1)}{(\alpha Ts+1)}$$

deducimos $\boxed{KG(s) = G_1(s)}$ que permite determinar la ganancia K que satisfaga el requerimiento sobre la ganancia estática de error:

$$e_{ss\,posicion} = \frac{1}{1+K_p} \quad \text{ó} \quad e_{ss\,velocidad} = \frac{1}{K_v}$$

③ Usando el K hallado dibujamos el DB de $\boxed{G_1(s) = KG(s)}$ y observamos el MF en la grafica.

(4) De la grafica obtenido en (3) determinamos el ∡ fase (ϕ_M) que se agregara al sistema.

$$\boxed{\phi_M = MF_{deseado} - MF_{inicial} + \underbrace{\Delta\phi}_{(5-12^\circ)}}$$

(5) Hallamos 'α' :

$$\boxed{Sen\,\phi_M = \frac{1-\alpha}{1+\alpha}}$$

Establecemos la frecuencia a la cual la magnitud de $G_1(s)$ es igual a : $\boxed{20\log(\sqrt{\alpha}) = 10\log\alpha}$

ya que en esta frecuencia se producira ahora el nuevo cruce de ganancia.

Esta frecuencia corresponde a :

$\boxed{W_m = \frac{1}{T\sqrt{\alpha}}}$ En esta frecuencia ocurre el cambio de fase maximo

(6) Calculamos el polo y zero del compensador

$\boxed{Z_c = \frac{-1}{T}}$ $\boxed{P_c = \frac{-1}{\alpha T}}$

(7) Como $\boxed{K = K_c\,\alpha}$ entonces $\boxed{K_c = \frac{K}{\alpha}}$

Adelanto de fase (Bode).

Ejemplo 1

Sea $G(s) = \frac{4}{s(s+2)}$

Se desea un: $\boxed{\begin{array}{l} K_v = 20 \\ MF \geq 50 \\ MG \geq 10 \end{array}}$

Solución

1. Sabemos que $G_1(s) = K\,G(s) = \frac{K\,4}{s(s+2)}$

Recordando $K_v = \lim_{s \to 0} s\,G_1(s) = 20$

$$K_v = \lim_{s \to 0} \cancel{s}\left(\frac{4K}{\cancel{s}(s+2)}\right) = 20$$

$$K_v = \frac{4K}{2} = 20 \qquad \boxed{K = 10}$$

Con $K = 10$ se cumple el requerimiento en ess. frente a una entrada tipo rampa

2. Ahora dibujamos el DBode de:

$$G_1(s) = \frac{4K}{s(s+2)} = \frac{40}{s(s+2)}$$

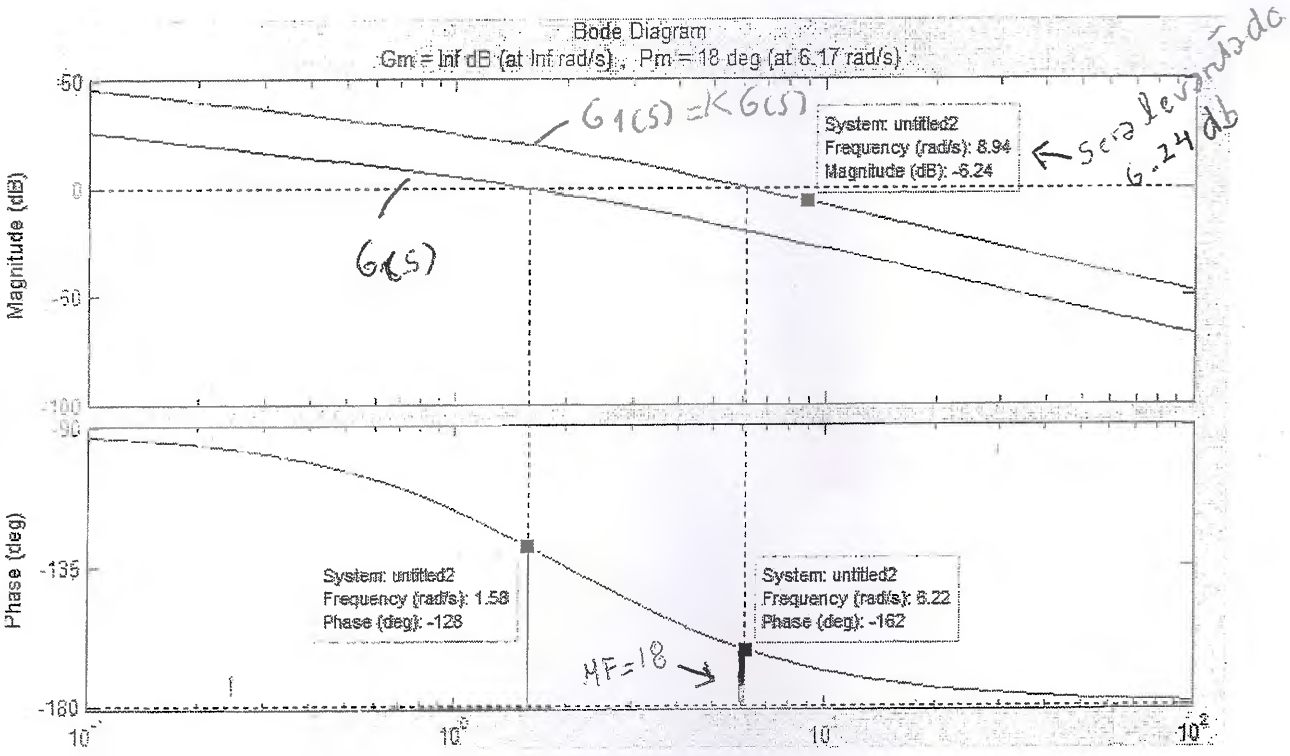


Diagrama de Bode de G(s) y KG(s)

El MF ≃ 17-18

(3) De la grafica de Bode observamos:

$MG = \infty$

$MF \simeq 17$

Por tanto, el compensador agregara una fase ϕ_M de manera que el MF final se incremente

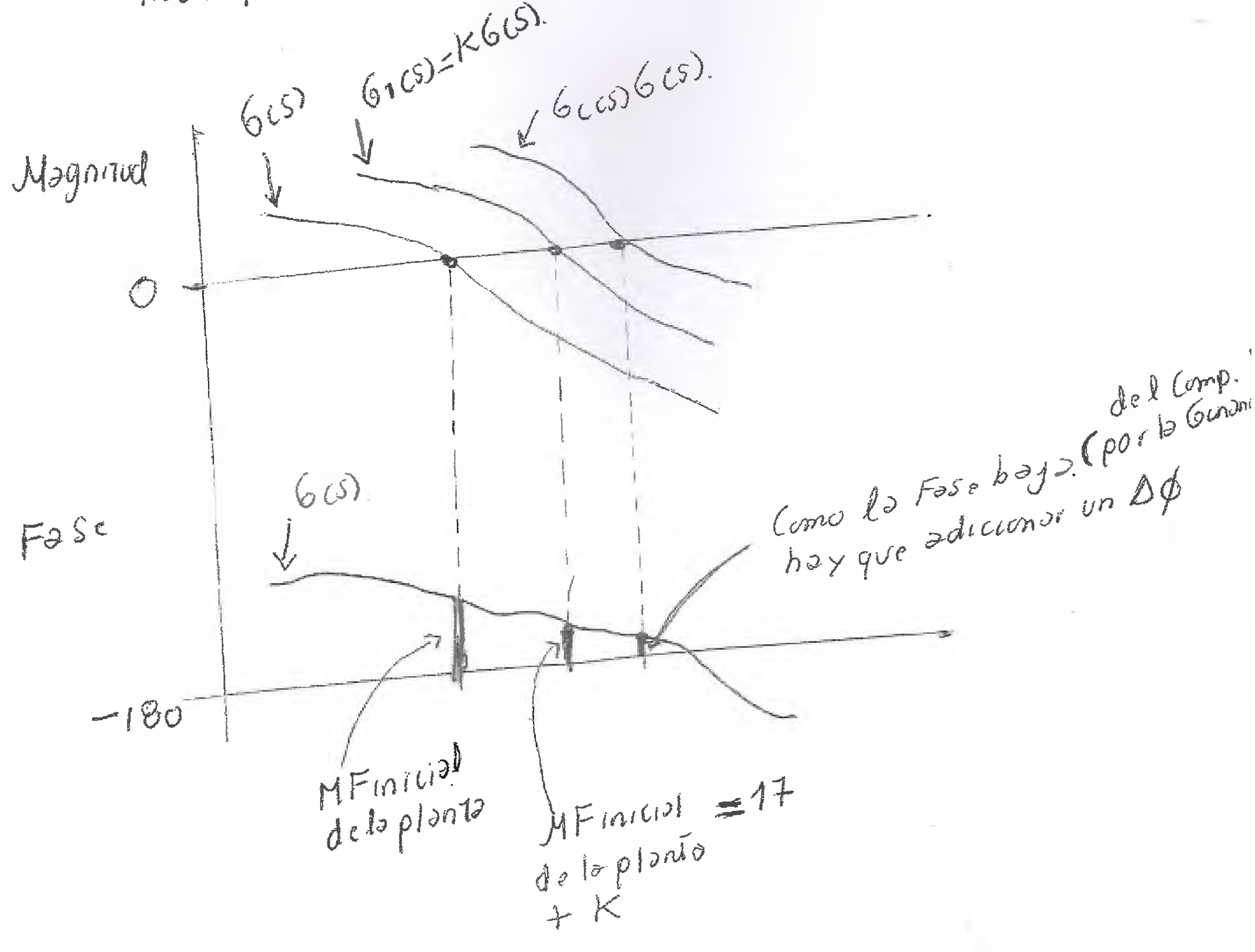
$$\phi_M = MF_{deseado} - MF_{inicial} + \Delta\phi$$

$$\phi_M = 50 - 17 + 5 = 38$$

$$\boxed{\phi_M = 38^\circ}$$

Resumen

La secuencia de los diagramas de Bode se van modificando algo así:



Nota

Cuando se agregue el compensador $\frac{\tau s+1}{\alpha \tau s+1}$, este

tambien aportara algo de ganancia, de tal manera que la curva de magnitud se desplace ligeramente a la derecha (es decir la frecuencia de cruce de ganancia se desplaza) por tanto para contrarrestar este efecto sobre el MF se suma (adiciona) un $\Delta\phi = 5-12°$

(4). El controlador $G_c(s)$ debe aportar $\phi_M = 38°$

$$\operatorname{sen} 38° = \frac{1-\alpha}{1+\alpha} \qquad \alpha = 0.24$$

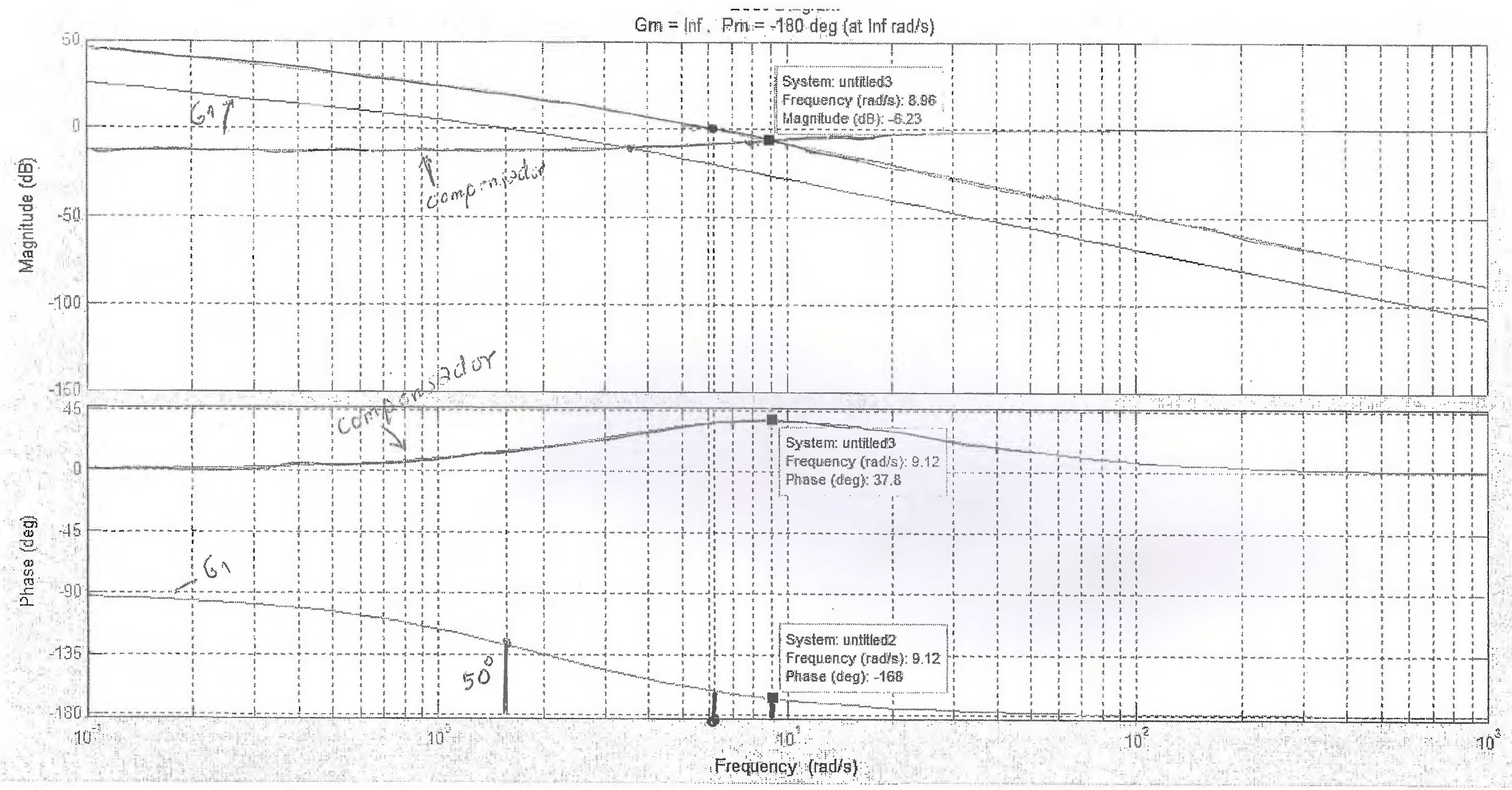
esta fase adicional se logra en $\boxed{W_M = \frac{1}{T\sqrt{\alpha}}}$

Como la curva de magnitud debe ser "levantada":

$$Xdb = 10 \log \alpha$$

$$Xdb = 10 \log (0.24)$$

$$\boxed{Xdb = 6.2\ db}$$



Gm = Inf , Pm = -180 deg (at Inf rad/s)
Magnitude (dB)
Phase (deg)
Frequency (rad/s)
System: untitled3
Frequency (rad/s): 8.96
Magnitude (dB): -6.23
System: untitled3
Frequency (rad/s): 9.12
Phase (deg): 37.8
System: untitled2
Frequency (rad/s): 9.12
Phase (deg): -168
G1
compensador
50°

De la grafica podemos obtener por observación a que frecuencia ocurre esta atenuación, y vemos que es aproximadamente a $\boxed{W = 9\,rad/s}$

Otra forma es Analiticamente :

$$-6.2\,db = 20\log G_1(s) = 20\log\frac{40}{s(s+2)}$$

$$6.2\,db = 20\log\left(\frac{40}{w(\sqrt{w^2+4})}\right)$$

$\boxed{W = 9\,rad/sg}$ aproximadamente

Obteniendo el polo y zero del compensador :

$$W_M = \frac{1}{T\sqrt{\alpha}} \qquad T = \frac{1}{\sqrt{0.24}} \times \frac{1}{9} = 0.226$$

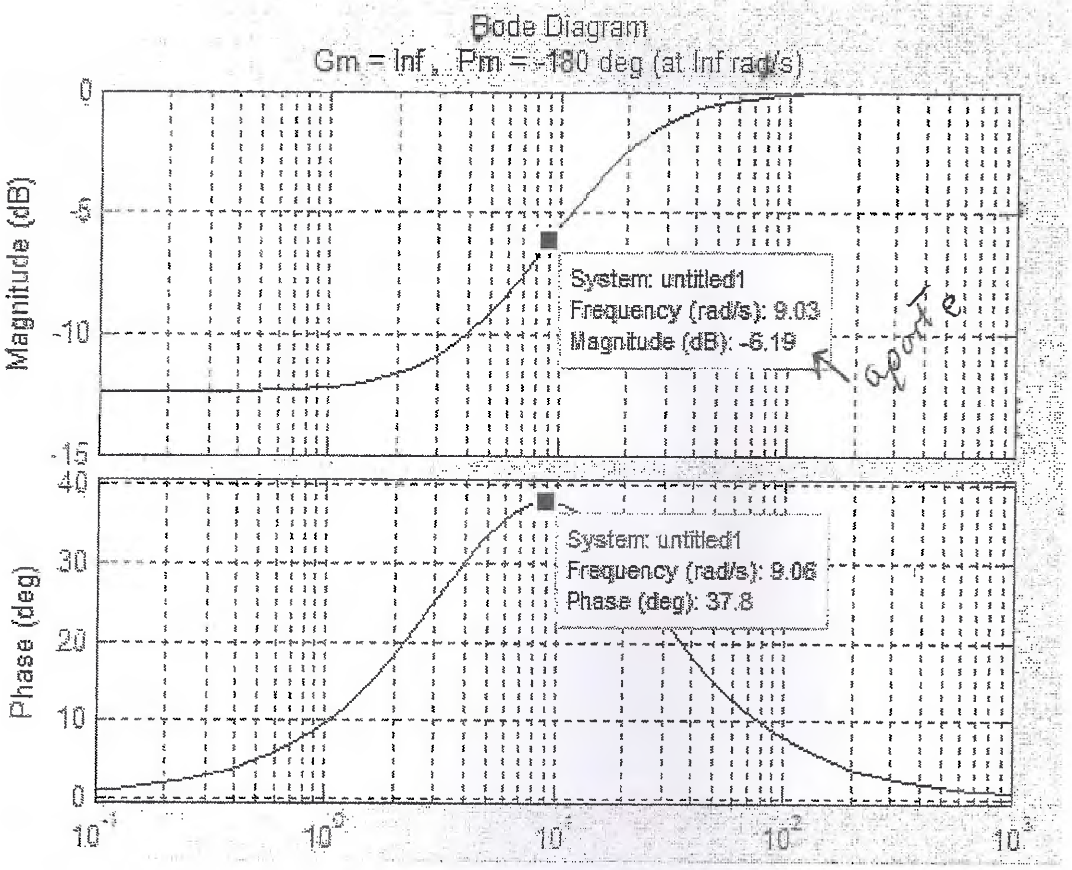
Entonces : $\frac{1}{T} = 4.41$ — zero

$\frac{1}{\alpha T} = 18.4$ — polo

Finalmente : $K = K_C\alpha \Rightarrow K_C = \frac{K}{\alpha} = \frac{10}{0.24} = 41.7$

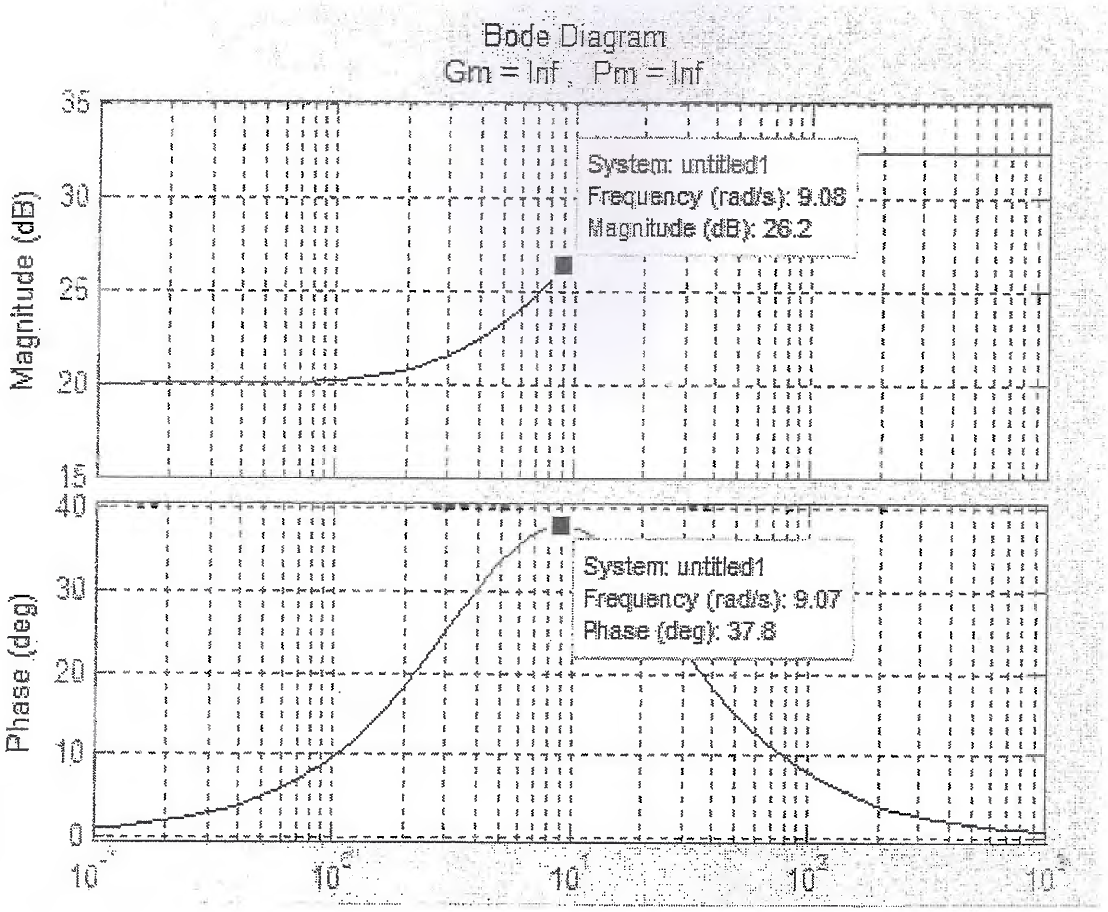
$\boxed{K_C = 41.7}$

Portanto : $\boxed{G_C(s) = 41.7\frac{(s+4.41)}{(s+18.4)}}$ Controlador en Adelanto



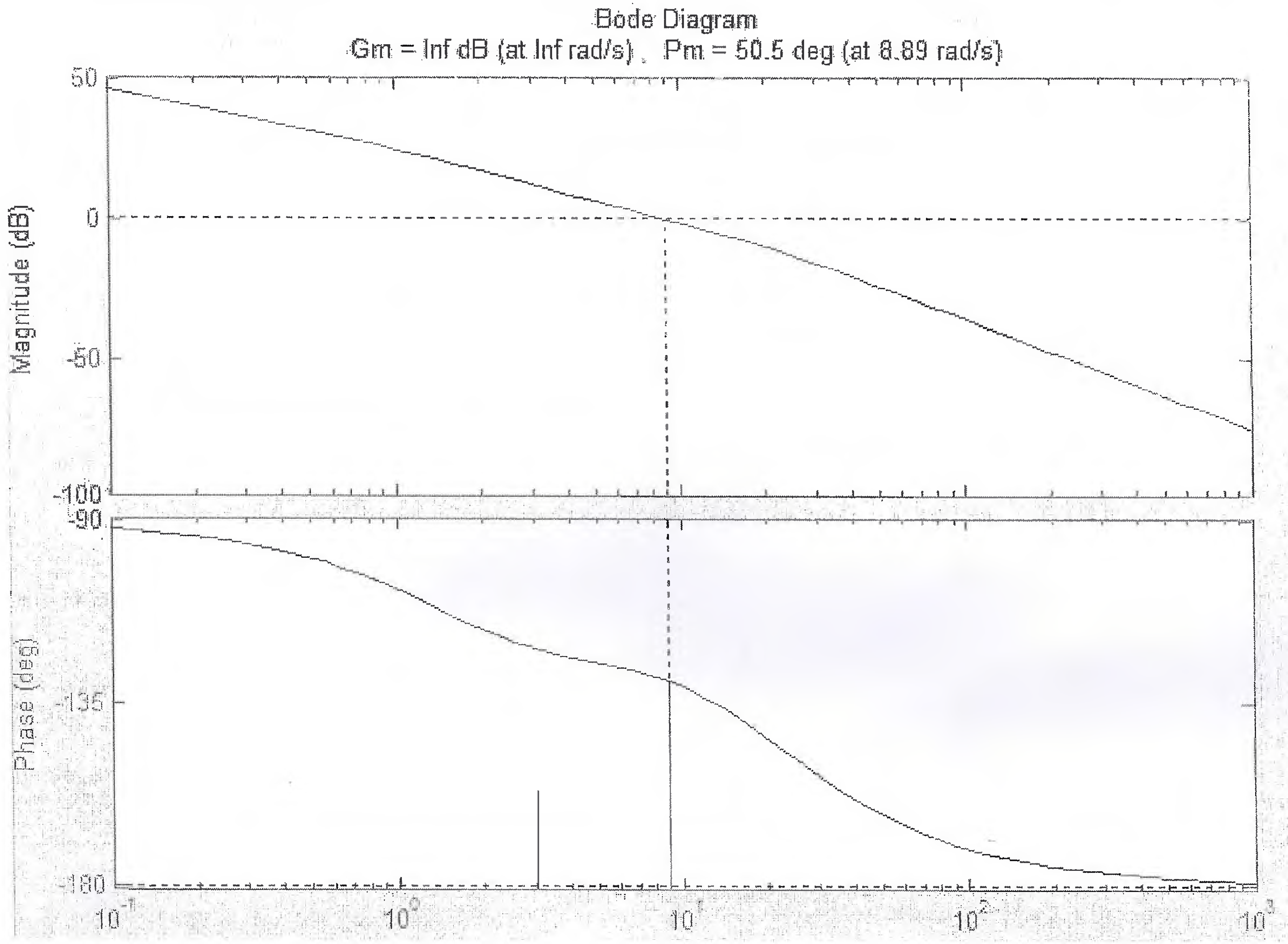
Compensada

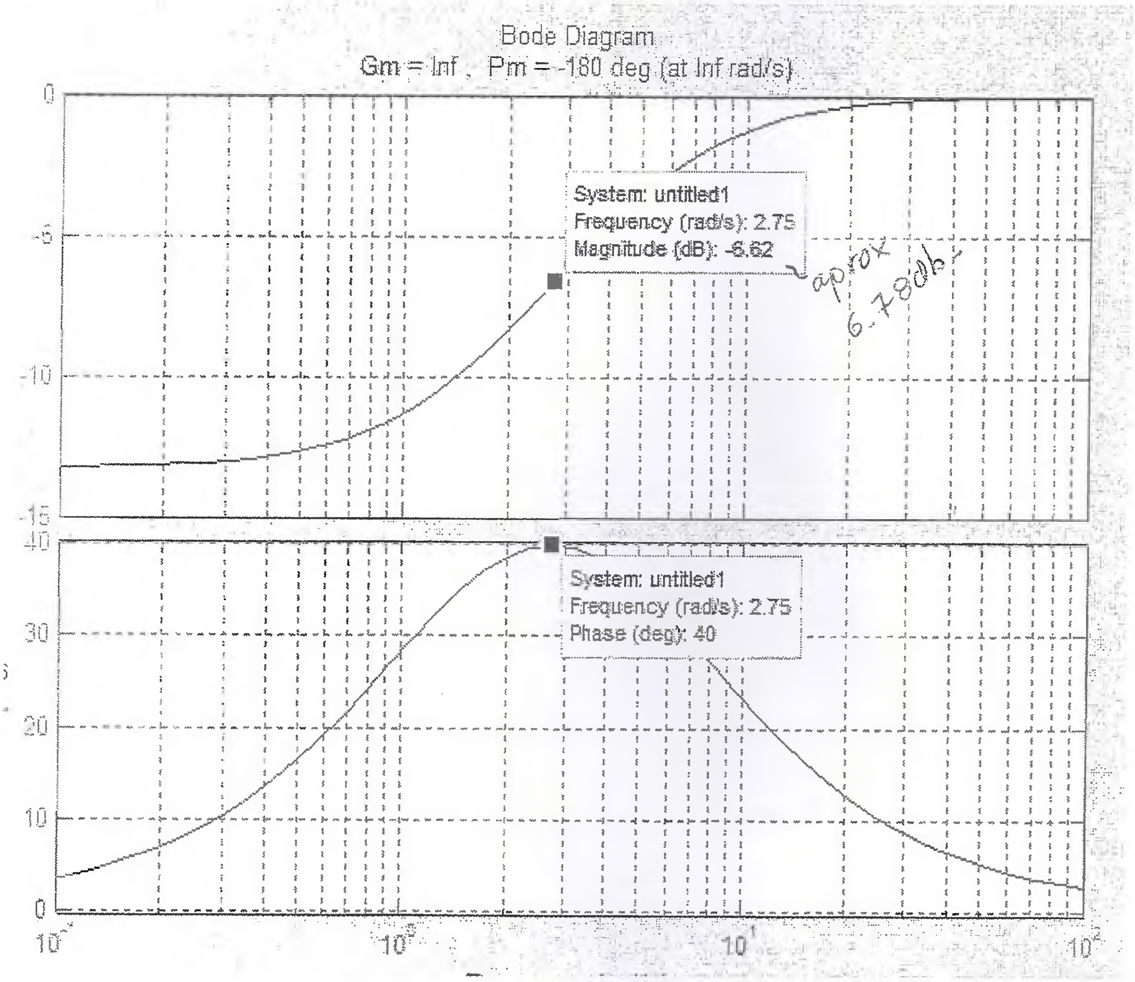
$$\frac{K\left(s+\frac{1}{T}\right)}{\left(s+\frac{1}{\alpha T}\right)}$$



Compensada

$$\frac{K_c\left(s+\frac{1}{T}\right)}{\left(s+\frac{1}{\alpha T}\right)}$$


Bode Diagram
Gm = Inf dB (at Inf rad/s) , Pm = 50.5 deg (at 8.89 rad/s)
Magnitude (dB)
Phase (deg)
50
0
-50
-100
-90
-135
-180
10⁻¹
10⁰
10¹
10²
10³



Bode Diagram
Gm = Inf , Pm = -180 deg (at Inf rad/s)
System: untitled1
Frequency (rad/s): 2.75
Magnitude (dB): -6.62
~ aprox 6.78db -
System: untitled1
Frequency (rad/s): 2.75
Phase (deg): 40
0
-5
-10
-15
40
30
20
10
0
10^{-1}
10^{0}
10^{1}
10^{2}

Adelanto Fase (Bode)

Ejemplo 2

$$G(s) = \frac{1}{s(0.1s+1)(s+1)}$$

Requerimientos: $MF = 45$

$MG \geq 8\,db$

$K_v = 4$

Solución

1. $G_1(s) = K\,G(s)$

$$K_v = \lim_{s \to 0} \frac{\cancel{s}\,K}{\cancel{s}(0.1s+1)(s+1)} = \frac{K}{1} = 4$$

$$\boxed{K = 4}$$

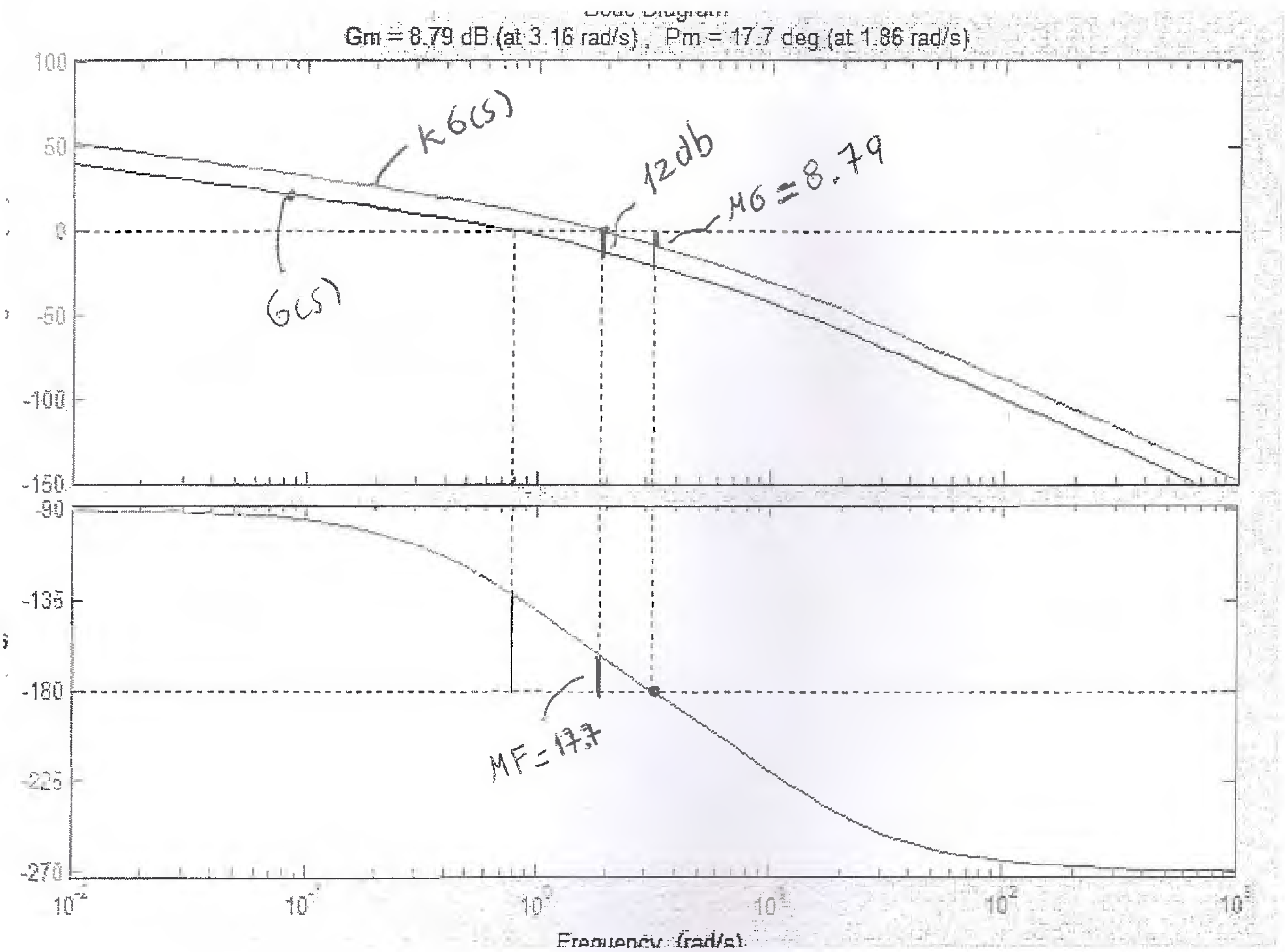
Entonces $K = 4$ desplaza (aporta) $20\log 4 = 12\,db$

2. Dibujamos Bode:

$$G_1(s) = K\,G(s) = \frac{4}{s(0.1s+1)(s+1)}$$

y observamos $MG = 8.79$

$MF = 17.7$


Gm = 8.79 dB (at 3.16 rad/s) , Pm = 17.7 deg (at 1.86 rad/s)
100
50
0
-50
-100
-150
-90
-135
-180
-225
-270
k G(s)
G(s)
12db
MG = 8.79
MF = 17.7

(3) $\phi_A = 45 - 17.7 + \overset{\Delta\phi}{12} \approx 40^\circ$

(4) $\sin\phi_m = \dfrac{1-\alpha}{1+\alpha} =$

$$\sin 40 = \frac{1-\alpha}{1+\alpha} = 0.642$$

$$1-\alpha = 0.642 + 0.642\alpha$$

$$\boxed{\alpha = 0.218}$$

Atenuación en W_m: $\boxed{10\log\alpha = -6.78\,db}$

Por observacion $\boxed{W_n = \dfrac{1}{T\sqrt{\alpha}} = 2.82\ rad/sg}$

(5) Calculo de Polo y Zero del compensador:

$$W_m = 2.82\ rad/sg$$

$$W_m = \frac{1}{T\sqrt{\alpha}} \Rightarrow \boxed{T = 0.779}$$

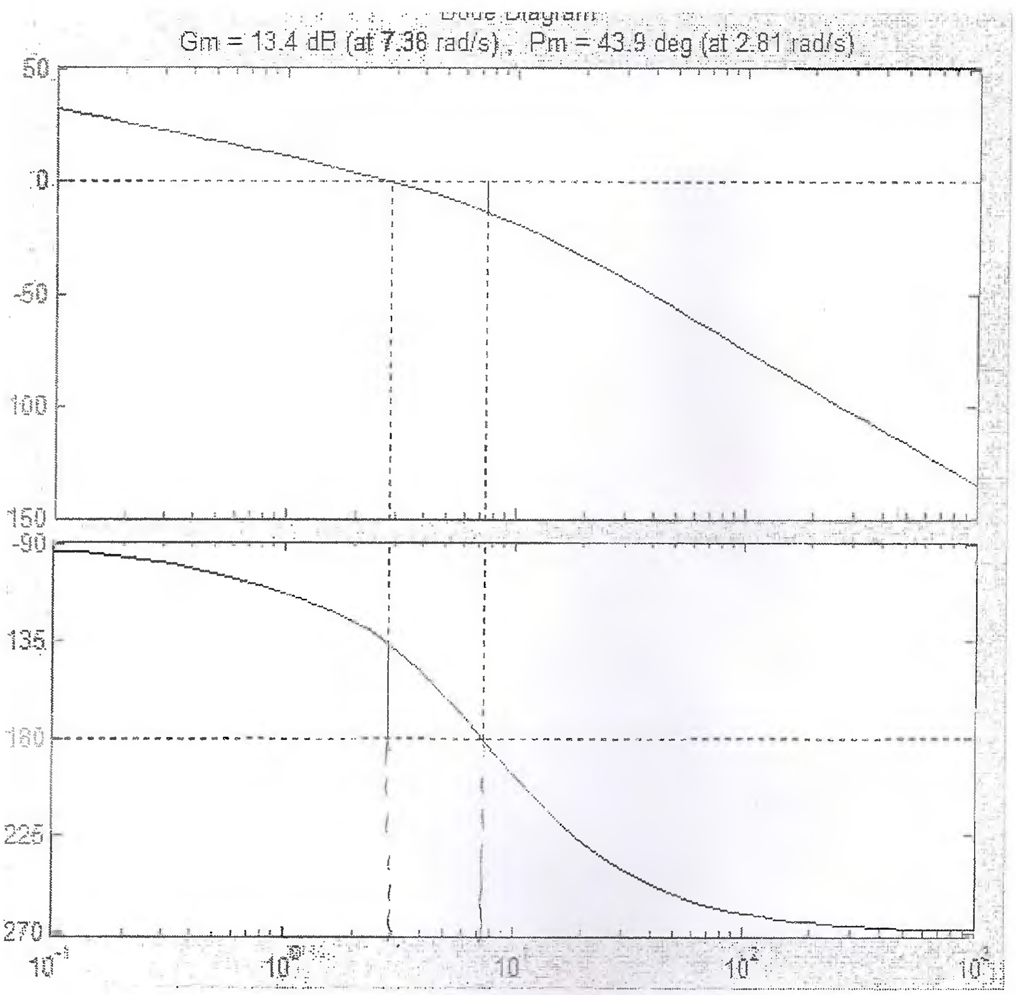
$$P_c = \frac{-1}{\alpha T} = \frac{-1}{(0.218)(0.779)} = \boxed{5.89}$$

$$Z_c = \frac{-1}{T} = \frac{-1}{(0.779)} = \boxed{1.283}$$

Finalmente $K = k_c\alpha \rightarrow k_c = \dfrac{K}{\alpha} = \dfrac{4}{0.218} = 18.3486$

$$\boxed{k_c = 18.35}$$

$$G_{c(s)} = 18.35\,\frac{(s + 1.283)}{(s + 5.89}$$


Bode Diagram
Gm = 13.4 dB (at 7.38 rad/s) , Pm = 43.9 deg (at 2.81 rad/s)
50
0
-50
100
150
-90
135
180
225
270
10^{-1}
10^{0}
10^{1}
10^{2}
10^{3}

Controlador PD : Bode

$$\boxed{G_c = k_p(T_d s + 1)}$$

Pasos

1. Calcular K_p para cumplir el e_{ss}
2. Dibujar DB de $K_p G(s)$ y determinar la fase extra que será necesaria $\boxed{\phi_M = MF_{COMP} - MF}$

3. La ϕ_M es menor que 45°:

   Se considera que W_{cm} no se altera : $W_{cm} = W_{cm}^{COMP}$

   Entonces T_d se calcula:

$$\boxed{\tan \phi_M = T_D W_{CM}}$$

4. La ϕ_M es mayor que 45

   En este caso W_{cm} si se altera (aumenta)

   - La nueva frecuencia $W_{CM\,COMP}$ deberá estar en el punto donde el modulo vale

$$-20\log_{10}\left(\sqrt{1+(Tg\,\phi_M)^2}\right)$$

Calculamos T_d : $\boxed{\tan \phi_M = T_D W_{CM}^{COMP}}$

Ejm

Para el sistema. $\frac{1}{s(s+2)}$ diseñe un PD que cumpla:

e_{ss} tipo escalon $= 0$

e_{ss} tipo rampa $= 5\%$.

$MF \approx 45°$ ($PO \simeq 25\%$)

(1) $e_{ss\,rampa} = \frac{1}{K_v} = 0.05 \Rightarrow K_v = 20$

$$K_v = \lim_{s \to 0} s\, G_{c(s)} G(s) = \lim s K_p (T_d s + 1) \left(\frac{1}{s(s+2)} \right) =$$

$$K_v = 20 = \frac{K_p}{2} \quad \boxed{K_p = 40}$$

(2) Dibujamos Bode de $K_p G(s)$ (no compensado).

Del grafico: $MF \approx 18$

(3) El aporte necesario sera:

$$\phi_M = 45 - 18 = 27$$

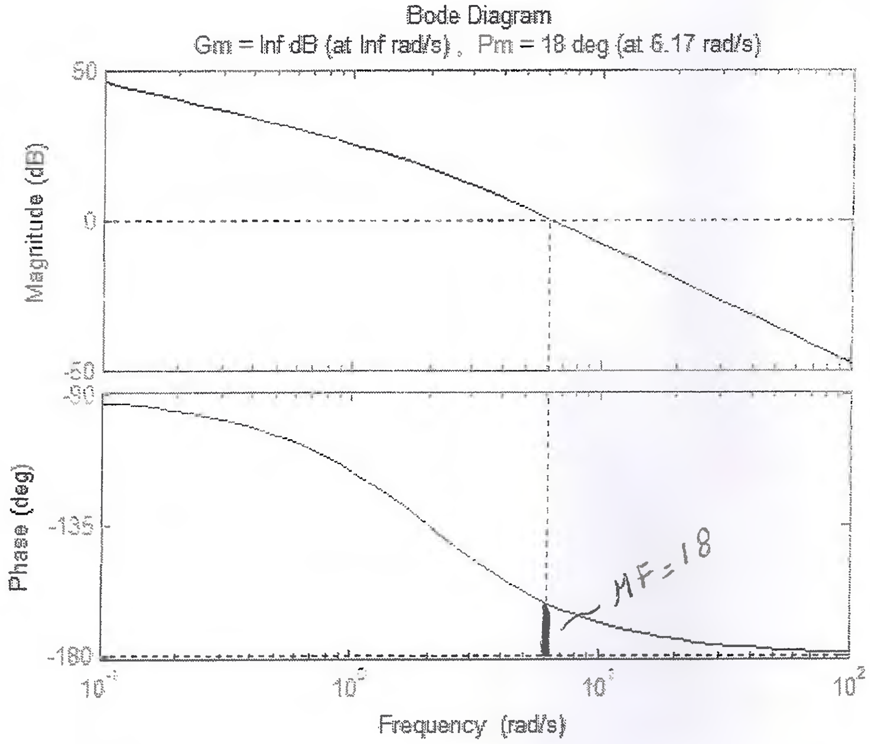
$$\boxed{\phi_M = 27°}$$

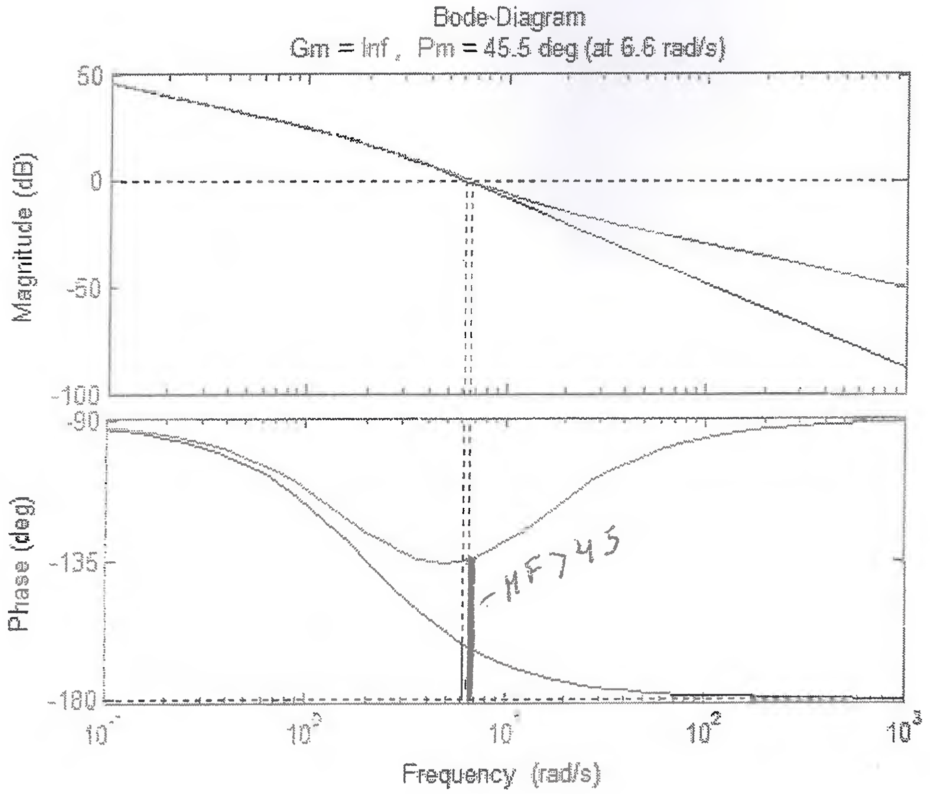
En este caso como $\phi_M < 45$

$$W_{CM}^{COMP} = W_{CM} = 6.17\, rad/s$$

$\Rightarrow$ $\tan \phi_m = T_D W_{cm}$

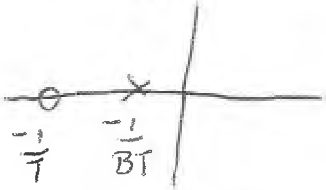
$$\frac{\tan\left(\frac{27\pi}{180}\right)}{6.17} = T_d \quad \boxed{T_d = 0.0826}$$


Bode Diagram
Gm = Inf dB (at Inf rad/s) , Pm = 18 deg (at 6.17 rad/s)
Magnitude (dB)
Phase (deg)
Frequency (rad/s)
MF=18


Bode Diagram
Gm = Inf , Pm = 45.5 deg (at 6.6 rad/s)
Magnitude (dB)
Phase (deg)
Frequency (rad/s)
MF>45

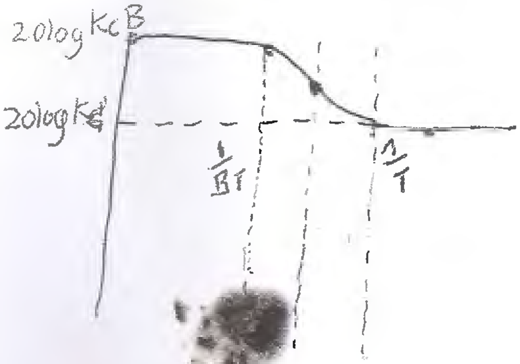
(1) Atrazo de Fase en Bode

El diseño del controlador $G_c(s) = K_c \dfrac{(s+1/T)}{(s+\frac{1}{BT})}$ $B>1$



Si $s \to 0$ $|G_c(s)| \Rightarrow K_c B$

Si $s \to \infty$ $|G_c(s)| \Rightarrow K_c$

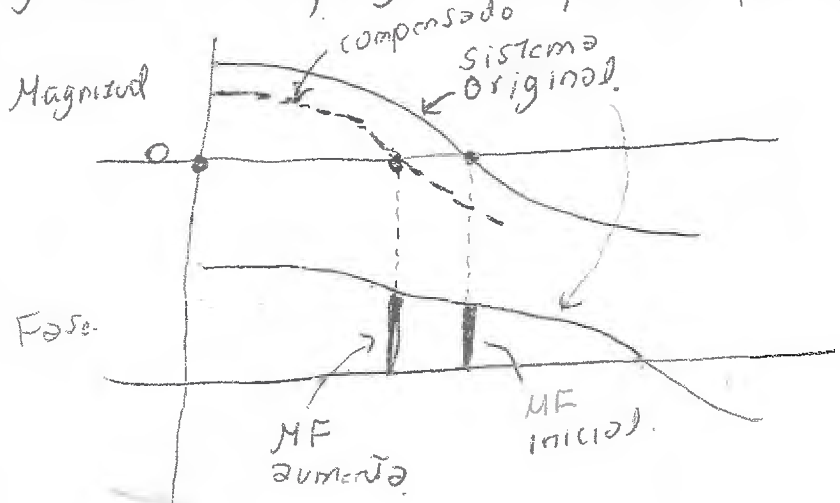


Note que la atenuacion maxima en db que proporciona el compensador es $20\log K_c$. Esta caracteristica (de ganancia) es la que es util y no el retardo de fase.

La variación de ganancia que introduce el compensador se usa para atenuar la ganancia en lazo abierto en un rango de frecuencias menor (la curva de ganancia se desplaza/atenua a la izquierda)

El polo y cero se posicionan de forma que el retardo de fase introducido por el controlador no es significativo en la frecuencia de cruce de ganancia.

Tambien concluimos que la función del compensador de atrazo es proporcionar una atenuacion en el rango de frecuencias altas a fin de aportar un MF suficiente. Pero no es que el $G_c(s)$ aporte fase, sino que al atenuarse la curva de ganancia, entonces la frecuencia de cruce de ganancia se desplaza a la izquierda por tanto el MF aumenta



Pasos de diseño

(1) $G_c(s) = k_c B \dfrac{(Ts+1)}{BTs+1} = k_c \dfrac{\left(s + 1/T\right)}{\left(s + \frac{1}{BT}\right)}$ $B > 1$

Sea $G(s)$ = FT de la planta.

Entonces $G_c(s)\,G(s) = K \dfrac{(Ts+1)}{(BTs+1)} G(s)$ donde $\boxed{K = k_c B}$

luego $G_1(s) = K G(s)$ nos sirve para determinar el K que satisfaga el requisito de la constante de error estatico

(2) Dibuj el DB de $\boxed{G_1(s) = K G(s)}$

Si el sistema $G_1(s)$ no satisface el MF y MG entonces hallamos el punto de frecuencia de $G_1(s)$ que cumpla el $\boxed{MF_{deseado} + \Delta\phi}$

Este sera la nueva frecuencia de cruce de ganancia.

$\boxed{W_c = }$

(3) Para evitar el efecto de atrazo de fase que produce el compensador de atrazo, el polo y zero del compensador se ubican mucho mas abajo que la nueva frecuencia de cruce de ganancia.

se divide entre 3 a 10

$\Rightarrow$ la frecuencia de esquina del zero $= \frac{1}{T}$

$$W = \frac{W_c}{(3 \text{ a } 10)} = \frac{1}{T} \leftarrow \text{cero}$$

(4) Hallamos la atenuación necesaria (del grafico de bode) para disminuir la curva de magnitud a 0 db en la nueva frecuencia de cruce de ganancia $\boxed{X_{db} = -20\log B}$

porque $\lim_{s\to\infty} \left(\dfrac{Ts+1}{BTs+1}\right) = \lim_{s\to\infty} \dfrac{\left(T + \frac{1}{s}\right)}{\left(BT + \frac{1}{s}\right)} = \boxed{\dfrac{1}{B}}$

En db $\boxed{20\log B^{-1} = -20\log B}$

Con esto valor de B' hallamos la ubicacion del polo

$$\boxed{polo = \frac{1}{BT}}$$

(5) Hallamos

$$K = K_c B$$

$$\boxed{K_c = \frac{K}{B}}$$

Recordar

$$\boxed{\begin{array}{c} \log_2 X = Y \\ 2^Y = X \end{array}}$$

Compensador en Atrazo

Ejemplo 1

Sea $G(s) = \dfrac{1}{s(s+1)(0.5s+1)}$

Se desea $K_v = 5$
$MF = 40°$
$MG = 10\,db$

Solución

① . $K_v = 5 = \lim_{s \to 0} sKG(s) = \lim_{s \to 0} G_1(s)$

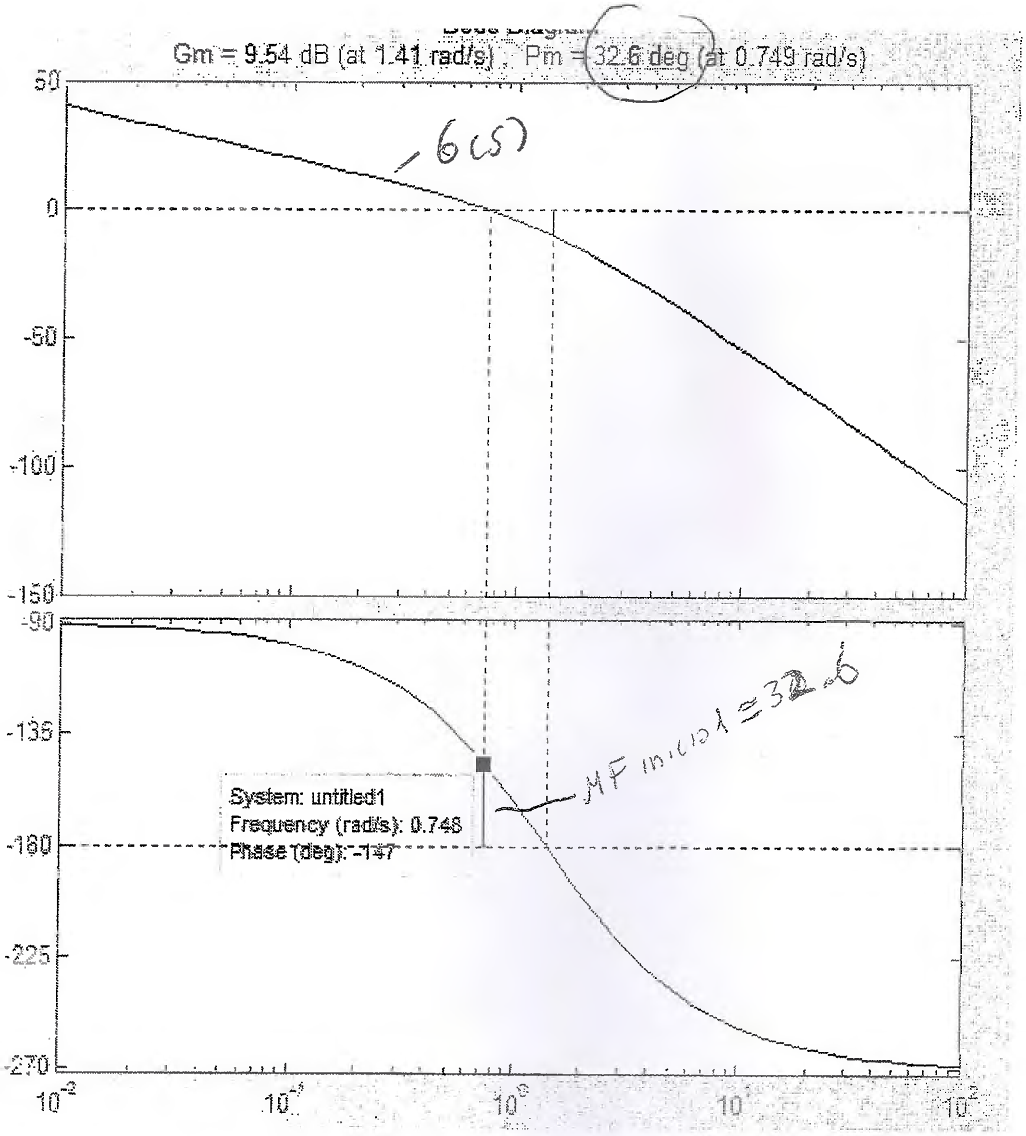
$$= \lim_{s \to 0} \cancel{s} K \cdot \frac{1}{\cancel{s}(\cancel{s}+1)(0.5\cancel{s}+1)} = K$$

$$\boxed{K = 5}$$

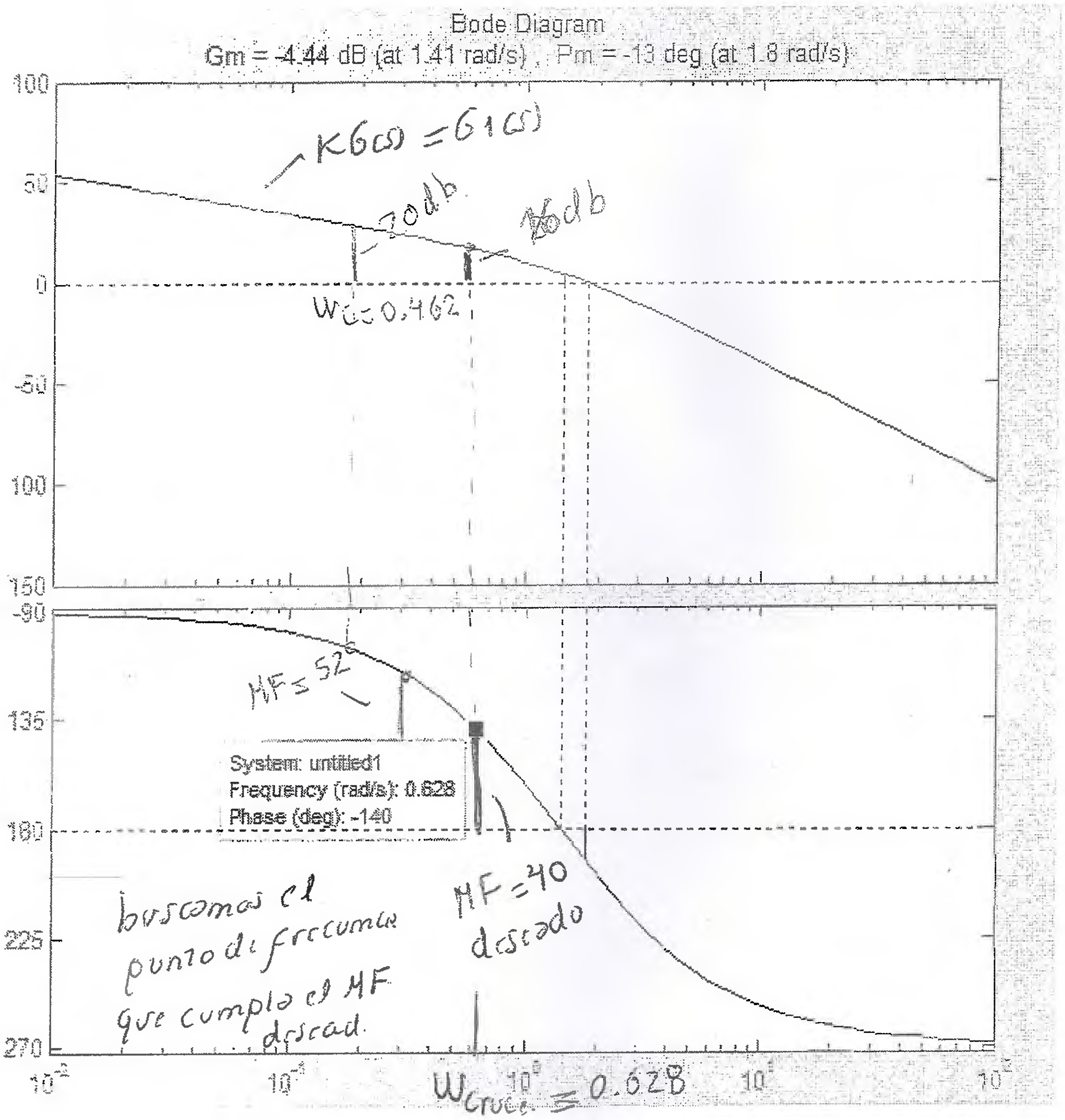
② Dibujamos el Diagrama de Bode de $G_1(s) = 5G(s)$

③ En la grafica hallamos la frecuencia 'w' donde el MF se logra el deseado. Es conveniente tomar un poco mas a la izquierda de manera que el MF deseado va ser afectado (se va restar fase tambien). Por ello

$$MF\,deseado = 40 + \Delta\phi$$
$$= 40 + 12 = 52°$$



DB de la Planta (Proceso)



DB de la Planta + K

$$G_{1(s)} = k\,G(s)$$

Los $12°$ o $\Delta\phi$ espara compensar el retraso de fase que agrega el compensador.

Se toma el zero : $\boxed{Z_c = \frac{1}{T} = 0.1 \text{ rad.}}$ Menor a W_{cruce}

(4) La atenuacion necesaria para disminuir la curva de magnitud a 0db es de 20db segun la grafica

$$-20\log B = -20db.$$

(Esto se obtiene por la observación de la curva magnitud

$$\boxed{B = 10}$$

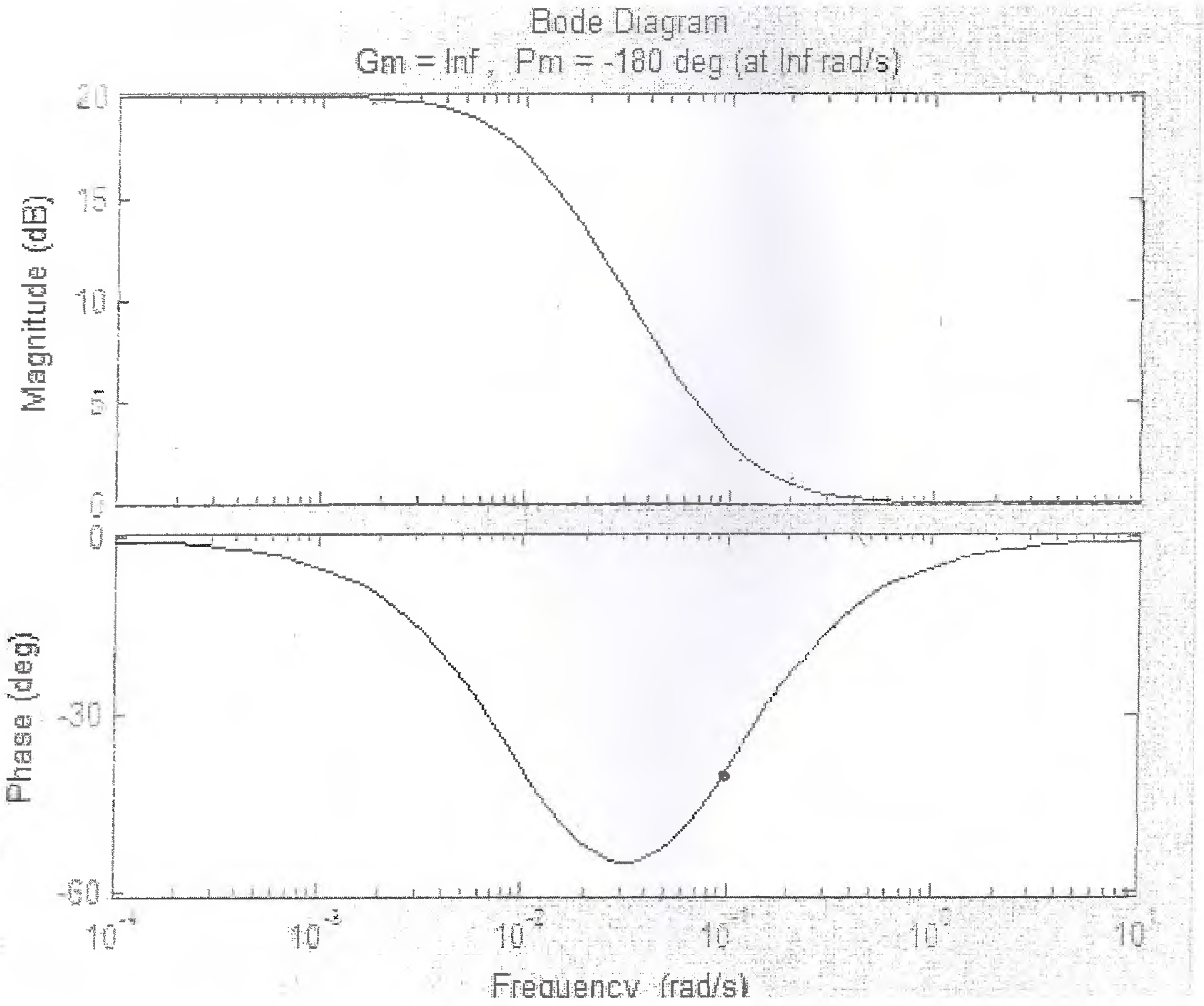
Calculamos el polo $pc = \frac{1}{BT} = \frac{0.1}{10} = 0.01$ rad

$$\boxed{pc = 0.01}$$

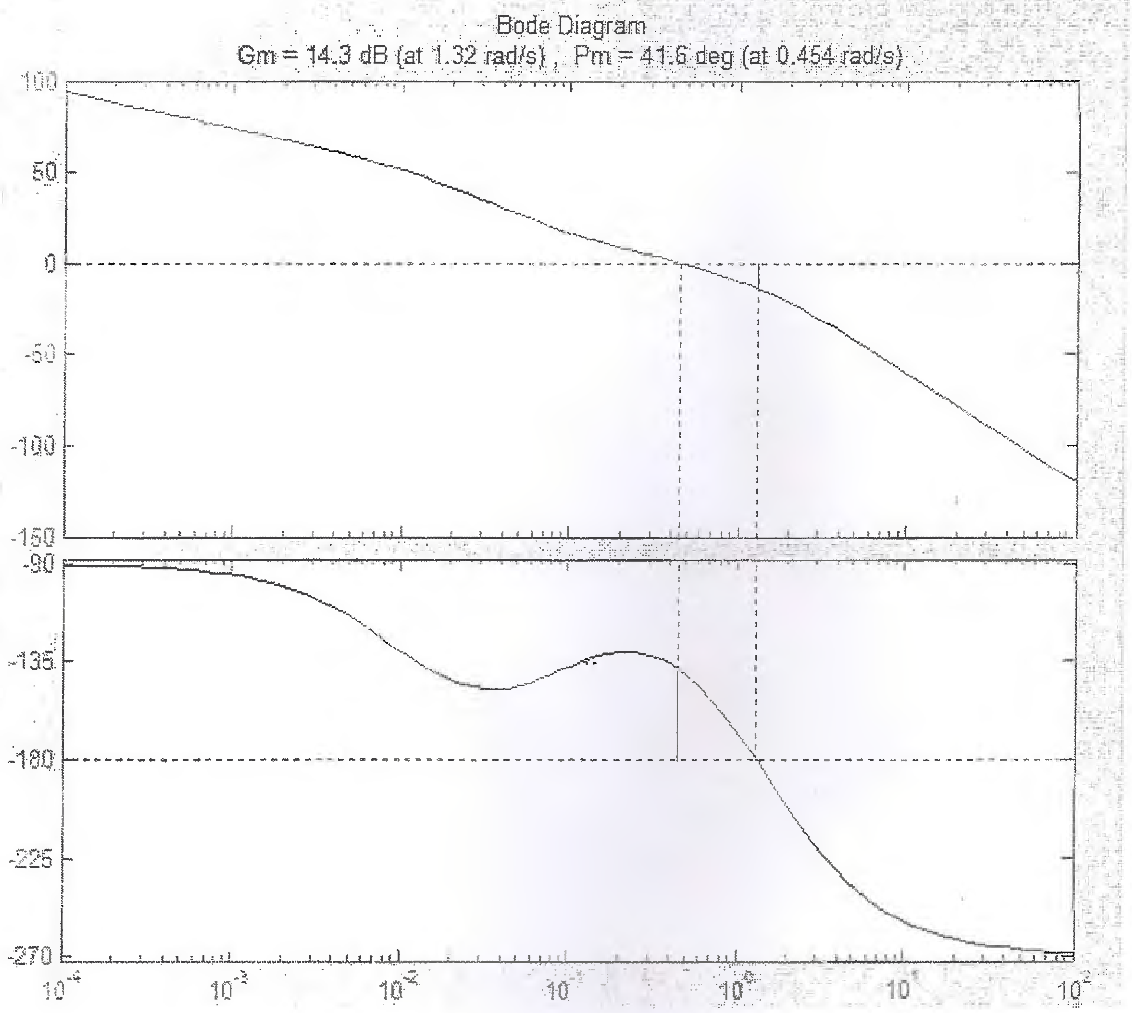
(5) $K = k_c B.$

$$\boxed{k_c = \frac{K}{B} = \frac{5}{10} = 0.5}$$

Finalmente $G_c(s) = 0.5 \times \frac{(s + 0.1)}{(s + 0.01)}$ //



Bode del Compensador


Bode Diagram
Gm = 14.3 dB (at 1.32 rad/s) , Pm = 41.6 deg (at 0.454 rad/s)
100
50
0
-50
-100
-150
-90
-135
-180
-225
-270

Controlador PI : Bode

$$\boxed{G_c(s) = \frac{K_p}{\tau_i}\frac{(\tau_i s + 1)}{s}}$$

Ejemplo

Sea la Planta $G(s) = \frac{1}{s+2}$

Diseñar un PI que cumpla :

e_{ss} a un escalon $= 0$

e_{ss} a una rampa $= 5\%$

$MF: 45^\circ$ ($PO = 25\%$)

Solución

① Determinamos $\frac{K_p}{\tau_i}$ para cumplir la especificacion e_{ss}

$$e_{ss} = \frac{1}{K_v} = 0.05 \qquad K_v = 20$$

$$K_v = \lim_{s \to 0} s\, C(s) G(s) = \lim_{s \to 0} \cancel{s} \frac{K_p}{T_i} \frac{(T_i s + 1)}{\cancel{s}} \left(\frac{1}{s+2}\right) = 20$$

$$\frac{K_p}{2\tau_i} = 20 \qquad \boxed{\frac{K_p}{T_i} = 40}$$

② Dibujamos el bode de $\left(\frac{K_p}{T_i}\right)\frac{G(s)}{s}$

③ Continuamos con el diseño como si fuese un PD

(4) Determinamos la fase extra necesaria:

$$\phi_M = MF^{comp} - MF = 45 - 18 = 27^\circ$$

La frecuencia de cruce no se altera

$$W_{cm}^{COMP} = W_{cm} = 6.17\ rad/s$$

(5) determinamos τ_i:

$$\tan \phi_M = T_i W_{cm}$$

$$T_i = \frac{\tan\left(\frac{27 \times \pi}{180}\right)}{6.17} = 0.0826$$

$$\boxed{T_i = 0.0826}$$

$$\boxed{G_{pi(s)} = \frac{40(0.0826\, s + 1)}{s}}$$

$$\frac{K_p}{\tau_i} = 40 \qquad K_p = 40 \times 0.0826$$

$$\boxed{K_p = 3.3}$$