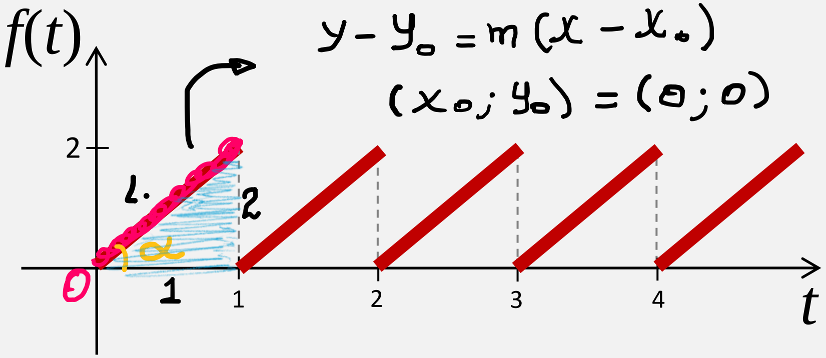
Transformada de una función periódica

Ejemplo

Encuentre la transformada de Laplace de la función periódica, diente de sierra, que se muestra en la figura.



$y - y_0 = m(x - x_0)$

$(x_0; y_0) = (0; 0)$

De la gráfica el periodo es: **T=1**

$m = \operatorname{Tan}\alpha = \frac{2}{1} = 2$

$L:\ y - 0 = 2(x - 0) \Rightarrow y = 2x$

$f_{(t)} = 2t.$

$$\mathcal{L}(f(t)) = \frac{1}{1 - e^{-s(1)}} \int_0^1 e^{-st} f(t)\,dt$$

$$\mathcal{L}(f(t)) = \frac{1}{1 - e^{-sT}} \int_0^T e^{-st} f(t)\,dt$$

$$\mathcal{L}(f(t)) = \frac{1}{1 - e^{-s(1)}} \int_0^1 e^{-st} (2t)\,dt$$

Por Partes :

$$\begin{cases} u = 2t \rightarrow du = 2dt \\ dv = e^{-st}dt \rightarrow v = \frac{e^{-st}}{-s} \end{cases}$$

$$L(f_{(t)}) = \frac{1}{1 - e^{-s}} \cdot \left(2t \cdot \frac{e^{-st}}{-s} - \int \frac{e^{-st}}{-s} \cdot 2dt\right)\Big/_0^1$$

$$L(f_{(t)}) = \frac{1}{1 - e^{-s}} \left(\frac{2te^{-st}}{-s} - \frac{2}{s^2} \cdot e^{-st}\right)\Big/_0^1 = \frac{1}{1 - e^{-s}} \left(\frac{2e^{-s}}{-s} - \frac{2}{s^2} \cdot e^{-s} - \left(0 - \frac{2}{s^2} \cdot e^0\right)\right)$$

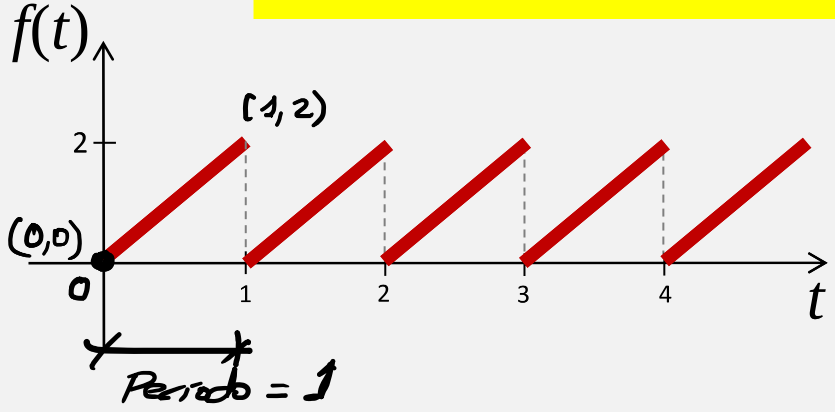
$$L(f_{(t)}) = \frac{1}{1 - e^{-s}} \left(\frac{2e^{-s}}{-s} - \frac{2e^{-s}}{s^2} + \frac{2}{s^2}\right)$$

Transformada de una función periódica

$$\mathcal{L}(f(t)) = \frac{1}{1-e^{-sT}}\int_0^T e^{-st} f(t)\,dt$$

Ejemplo

Encuentre la transformada de Laplace de la función periódica, diente de sierra, que se muestra en la figura.



(Periodo = 1)

$$L(f(t)) = \frac{1}{1-e^{-1s}} \cdot \underbrace{\int_0^1 e^{-st} \cdot 2t\,dt}_{\frac{2(-se^{-s}-e^{-s}+1)}{s^2}}$$

integrar por partes.

$$L(f(t)) = \frac{2(1-se^{-s}-e^{-s})}{s^2(1-e^{-s})}.$$

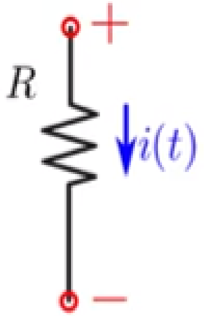
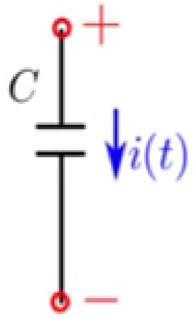
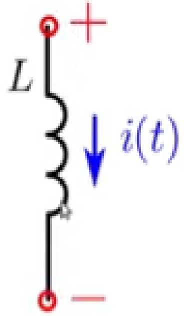
$$m = \frac{2-0}{1-0} = 2$$

$$y-0 = 2(t-0) \Rightarrow \boxed{y=2t}$$

$$y-y_0 = m(x-x_0)$$

Sistema integro diferencial

- Caídas de voltaje en una resistencia, capacitor e inductor

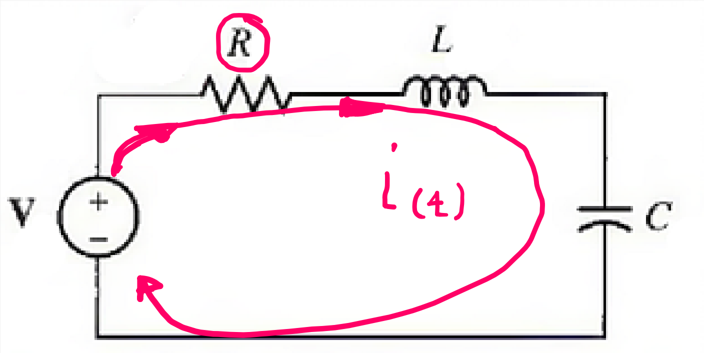
	resistencia	capacitor	bobina
esquema			
voltaje	$v(t) = Ri(t)$	$v(t) = \frac{1}{C}\int_0^t i(\tau)d\tau + v(0)$ generalmente es CERO.	$v(t) = L\frac{di(t)}{dt}$

Aplicación. Sistema integro diferencial

$e^{-as}.\mathcal{L}(f(t)) = \mathcal{L}(f(t-a).u(t-a))$

CIRCUITO EN SERIE RLC

Determine la corriente i(t) en el circuito RLC de una sola malla cuando L=1H, R=2Ω, C=0,5F, $i(0) = 0$ y el voltaje aplicado, en voltios, es $\mathbf{v}(t) = 1 + 2u(t-1)$.



Solución:

En el circuito RLC-serie:

$$Ri(t) + L\frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{C}\int_0^t i(\tau)d\tau = v(t) = 1 + 2\mathcal{U}(t-1)$$

$$2i + 1.i' + 2\int_0^t i_{(t)}dt = 1 + 2\mathcal{U}(t-1)$$

Tomo L:

$$2L(i) + L(i') + 2L\left(\int_0^t i\,dt\right) = L(1) + 2L(\mathcal{U}_{(t-1)}) \quad \ldots(*)$$

FÓRMULAS:

$L(i) = I_s$

$L(i') = s.I_s - i_{(0)}$

$L(i'') = s^2 I_s - s\,i_{(0)} - i'_{(0)}$

$* \; L\left(\int_0^t i\,dt\right) = \frac{I_s}{s}$

$\bullet \; L(\mathcal{U}_{(t-a)}) = \frac{e^{-as}}{s}$

Todo en (*):

$$2I_s + (sI_s - \underbrace{i_{(0)}}_{0}) + 2\left(\frac{I_s}{s}\right) = \frac{1}{s} + 2.\frac{e^{-1s}}{s}$$

Todo por S:

$$2sI_s + s^2 I_s + 2I_s = 1 + 2e^{-1s}$$

$$I_s(s^2 + 2s + 2) = 1 + 2e^{-1s}.1$$

$$I_s = \frac{1}{s^2 + 2s + 1 + 1} + 2e^{-1s}.\frac{1}{s^2 + 2s + 1 + 1}$$

$$I_s = \frac{1}{(s+1)^2 + 1} + 2e^{-1s}.\frac{1}{(s+1)^2 + 1}$$

$$\mathcal{L}(i_{(t)}) = \mathcal{L}(e^{-1t}.\text{Sen}\,1t) + 2e^{-1s}.\underbrace{L(e^{-1t}.\text{sen}t)}_{L(e^{-(t-1)}.\text{sen}(t-1).U(t-1))}$$

$$\left\{\begin{matrix} 0, & t<1 \\ 1, & t\geq 1 \end{matrix}\right.$$

$$i_{(t)} = e^{-t}.\text{sen}t + 2e^{-t+1}.\text{sen}(t-1).\mathcal{U}(t-1)$$

$L(f(t))$

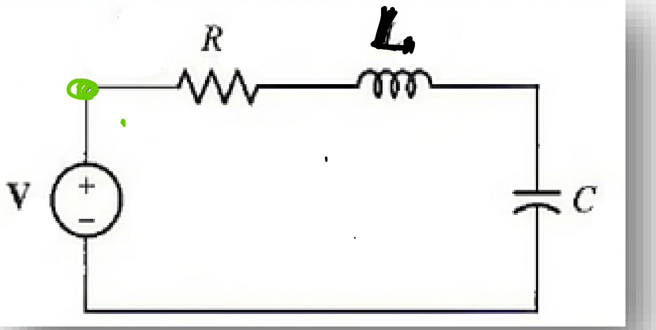
$$i(t) = \begin{cases} e^{-t}\text{sent} & ,0 \leq t < 1 \\ e^{-t}\text{sent} + 2e^{-t+1}sen(t-1) & ,t \geq 1 \end{cases}$$

15	$L\left(f(t-a)u(t-a)\right)$	=	$e^{-as}F(s)$

$$e^{-as}.\mathcal{L}(f(t)) = \mathcal{L}\big(f(t-a).u(t-a)\big)$$

CIRCUITO EN SERIE RLC

Determine la corriente i(t) en el circuito RLC de una sola malla cuando **L**=1H, R=2Ω, C=0,5F, $i(0) = 0$ y el voltaje aplicado, en voltios, es $\mathbf{v}(t) = 1 + 2u(t-1)$.



SOLUCIÓN:

En el circuito RLC-serie: $Ri(t) + \boldsymbol{L}\dfrac{di(t)}{dt} + \dfrac{1}{C}\displaystyle\int_0^t i(x)dx = v(t)$

$$Ri + \boldsymbol{L}i' + \frac{1}{C}\int_0^t i(x)dx = 1 + 2u(t-1)$$

Sea $\boxed{L(i) = I_s} \Rightarrow \boxed{L(i') = sI_s - i(0)}$, $\boxed{L\left(\int_0^t i(x)dx\right) = \frac{I_s}{s}}$

Ahora tomamos transformada a toda la ecuación:

$$RL(i) + \boldsymbol{L}L(i') + \frac{1}{C}L\left(\int_0^t i(x)dx\right) = L(1) + 2L(u(t-1))$$

$$2I_s + 1(sI_s - 0) + 2\frac{I_s}{s} = \frac{1}{s} + 2.\frac{e^{-1s}}{s}$$

Por s: $2sI_s + s^2 I_s + 2I_s = 1 + 2e^{-s}$

$$I_s(s^2 + 2s + 2) = 1 + 2e^{-s}$$

$$I_s = \frac{1}{(s+1)^2 + 1} + 2e^{-s}.\frac{1}{(s+1)^2 + 1}$$

$$I_s = \frac{`1}{(s+1)^2 + 1} + 2e^{-s}.\frac{1}{(s+1)^2 + 1}$$

$$I_s = L(e^{-t}sent) + 2\boxed{e^{-s}.L(e^{-t}sent)}$$

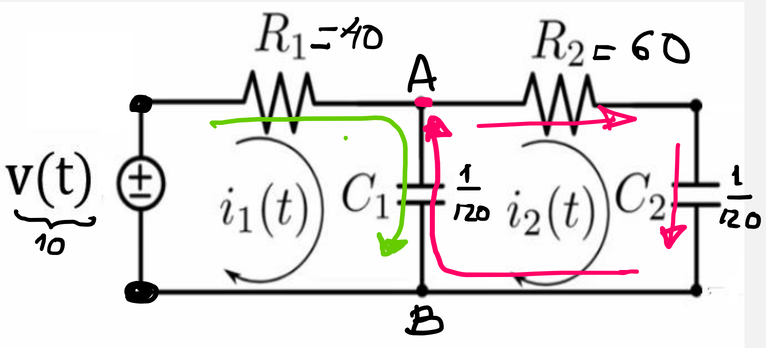
$$L(i) = L(e^{-t}sent) + 2\boldsymbol{L}\big(\boldsymbol{e}^{-(t-1)}\boldsymbol{sen}(\boldsymbol{t}-\mathbf{1}).\boldsymbol{u}(\boldsymbol{t}-\mathbf{1})\big)$$

$$i = e^{-t}sent + 2(e^{-t+1}sen(t-1).u(t-1))$$

Recordar que $u(t-1) = \begin{cases} 0, & 0 \le t < 1 \\ 1, & 1 \le t < \infty \end{cases}$

$$i(t) = \begin{cases} e^{-t}\text{sent} & , 0 \le t < 1 \\ e^{-t}\text{sent} + 2e^{-t+1}sen(t-1) & , t \ge 1 \end{cases}$$

CIRCUITO RC EN CASCADA



Determine la corriente $i_1(t)$ e $i_2(t)$ en el circuito mostrado. Suponga que las corrientes y cargas en los condensadores son cero. Se sabe que R1=40**Ω**, R2=60**Ω,** C1=C2=1/120F, y el voltaje aplicado, en voltios, es $\mathbf{v}(t) = 10$.

SOLUCIÓN:

1ª malla: $\boldsymbol{R_1 i_1} + \boldsymbol{\frac{1}{C1}\int_0^t i_1(x)dx} - \frac{1}{C1}\int_0^t i_2(x)dx = 10$

2ª malla: $\boldsymbol{R_2 i_2} + \boldsymbol{\frac{1}{C2}\int_0^t i_2(x)dx} + \boldsymbol{\frac{1}{C1}\int_0^t i_2(x)dx} - \frac{1}{C1}\int_0^t i_1(x)dx = 0$

$$\begin{cases} 40i_1 + 120\int_0^t i_1(x)dx - 120\int_0^t i_2(x)dx = 10 \\ 60i_2 + 120\int_0^t i_2(x)dx + 120\int_0^t i_2(x)dx - 120\int_0^t i_1(x)dx = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4L(i_1) + 12L\left(\int_0^t i_1(x)dx\right) - 12L\left(\int_0^t i_2(x)dx\right) = L(1) \\ 6L(i_2) + 24L\left(\int_0^t i_2(x)dx\right) - 12L\left(\int_0^t i_1(x)dx\right) = 0 \end{cases}$$

$$4I_1 + 12\frac{I_1}{s} - 12\frac{I_2}{s} = \frac{1}{s} \rightarrow 4[I_1(s+3) - 3I_2] = 1$$

$$6I_2 + 24\frac{I_2}{s} - 12\frac{I_1}{s} = 0 \rightarrow I_2(s+4) = \boldsymbol{2I_1} \quad \ldots(*)$$

De la primera: $2[\boldsymbol{2I_1}(s+3) - 6I_2] = 1$

$$2[\boldsymbol{I_2(s+4)}(s+3) - 6I_2] = 1 \rightarrow 2I_2[s^2+7s+6] = 1$$

$$\boxed{I_2 = \frac{1}{2(s+1)(s+6)} = \frac{1}{10}\left(\frac{1}{s+1} - \frac{1}{s+6}\right)}$$

$$\rightarrow L(i_2) = \frac{1}{10}\left(L(e^{-t}) - L(e^{-6t})\right)$$

$$\boldsymbol{i_2(t) = \frac{1}{10}e^{-t} - \frac{1}{10}e^{-6t}}$$

$\boldsymbol{I_2}$ en (*): $\boldsymbol{2I_1} = \frac{s+4}{2(s+1)(s+6)} = \frac{1}{2}\left[\frac{3}{5}\cdot\frac{1}{s+1} + \frac{2}{5}\cdot\frac{1}{s+6}\right]$

$$I_1 = \frac{3}{20}\cdot\frac{1}{s+1} + \frac{1}{10}\cdot\frac{1}{s+6} \rightarrow L(i_1) = \frac{3}{20}L(e^{-t}) + \frac{1}{10}L(e^{-6t})$$

$$\boldsymbol{i_1(t) = \frac{3}{20}e^{-t} + \frac{1}{10}e^{-6t}}$$

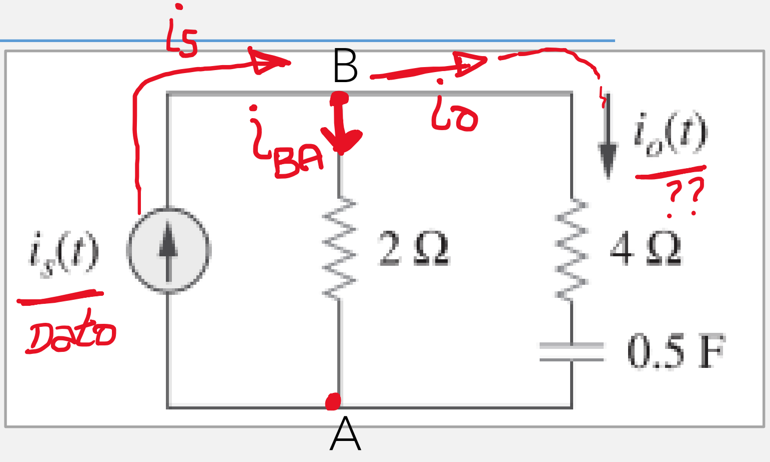
APLICACIÓN. CIRCUITO ELÉCTRICO

CIRCUITO CON FUENTE DE CORRIENTE

En el circuito mostrado se tiene una fuente de corriente que suministra una corriente, en amperios, $i_S(t)$. Determine la corriente $i_o(t)$ que pasa por el condensador si

a) $i_s(t) = e^{-t/3}$ ✓

b) $i_s(t) = \text{sen}(t)$



$e^{-\frac{t}{3}}$??

$L(e^{-at}) = \frac{1}{s+a}$

a) ***En B:*** $\boldsymbol{i_s = i_o + i_{BA}} \rightarrow \boldsymbol{i_{BA} = i_s - i_o}$

$\boldsymbol{V_{BA} = R.io + \frac{1}{C}\int_0^t i(x)dx = R_{BA}.i_{BA}} \rightarrow \boxed{\boldsymbol{4io + 2\int_0^t i(x)dx = 2(e^{-\frac{t}{3}} - i_o)}}$

$4L(io) + 2L\left(\int_0^t i(x)dx\right) = 2\text{L}(e^{-\frac{t}{3}} - i_o)$

$2I_s + \frac{I_s}{s} = \frac{1}{s+\frac{1}{3}} - I_s \rightarrow I_s\left(\frac{3s+1}{s}\right) = \frac{3}{3s+1} \rightarrow \boxed{I_s = \frac{3s}{(3s+1)^2}}$

$I_s = \frac{3s+1-1}{(3s+1)^2} \rightarrow I_s = \frac{1}{3s+1} - \frac{1}{(3s+1)^2} \rightarrow \boldsymbol{L(io) = \frac{1}{3}.\frac{1}{s+\frac{1}{3}} - \frac{1}{9}.\frac{1}{(s+\frac{1}{3})^2}}$

$L(i_o) = \frac{1}{3}L(e^{-t/3}) - \frac{1}{9}L(te^{-\frac{t}{3}})$

$i_o(t) = \frac{1}{3}e^{-t/3} - \frac{1}{9}te^{-t/3}.$

$$\boxed{\begin{gathered} L(t^n) = \frac{n!}{s^{n+1}} \\ L(\boldsymbol{e^{-at}}.t^n) = \frac{n!}{(\boldsymbol{s+a})^{n+1}} \end{gathered}}$$

b) $i_o(t) = -\frac{1}{10}e^{-t/3} + \frac{1}{10}\cos(t) + \frac{3}{10}\text{sen}(t)$

*Notación

- $i(t)$
- $L(i(t)) = I_s$
- $L\left(\int_0^t i(x)dx\right) = \frac{I_s}{s}$
- $L(i') = sI_s - i(0)$

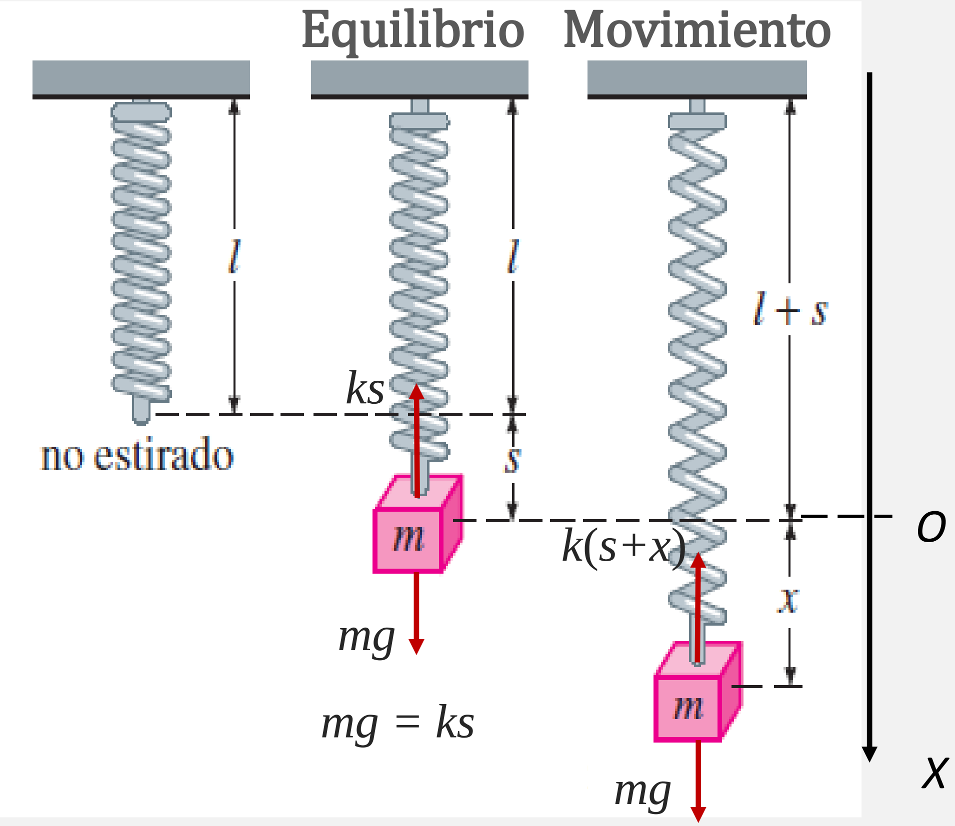
Sistema masa/resorte

Movimiento armónico simple MAS.

El PVI de este movimiento armónico simple es:

$$\begin{cases} mx'' + kx = 0 \\ x(0) = x_0 \\ x'(0) = x'_0 \end{cases}$$

Donde $k > 0$ es la constante del resorte

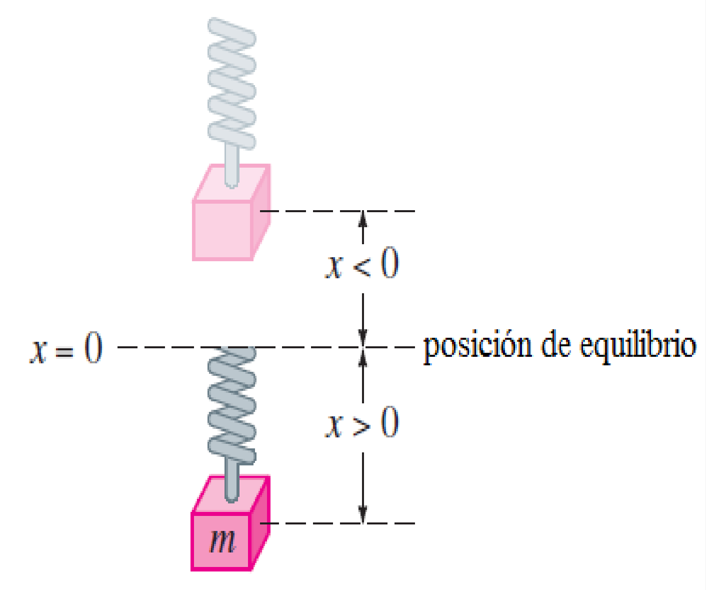


Sistema masa resorte

❑ Desplazamiento vertical

$x = x(t)$: desplazamiento del cuerpo respecto a la posición de equilibrio.

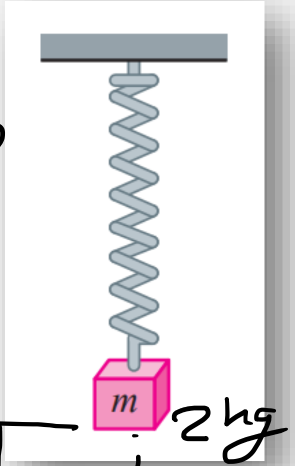
- $x > 0$ si el cuerpo se encuentra debajo de la posición de equilibrio.
- $x < 0$ si el cuerpo se encuentra encima de la posición de equilibrio.
- La velocidad $x'(t)$ es positiva cuando está dirigida hacia abajo.
- La velocidad $x'(t)$ es negativa cuando está dirigida hacia arriba.



APLICACIÓN. SISTEMA MASA/RESORTE

A un resorte amarrado al techo en posición vertical cuya constante de elasticidad es de 200 N/m, se le coloca un cuerpo cuya masa es 2 kg. Una vez en equilibrio, el resorte se contrae 0,03 m y se le imprime una velocidad de 0,4 m/s dirigida hacia abajo.

$K = 200$

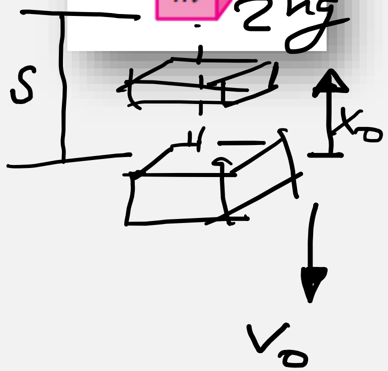


a. Compruebe que el PVI del problema está dado por: $\begin{cases} 2x'' + 200x = 0 \\ x(0) = -0.03 \\ x'(0) = 0{,}4 \end{cases}$

b. Determine la posición del cuerpo $x(t)$, en metros, respecto del equilibrio para todo tiempo t en segundos.

a) $x_0 = -0.03\,m$, $x'_0 = +0.4\,\frac{m}{s} \Rightarrow \begin{cases} 2x'' + 200x = 0 \\ x(0) = -0.03 \\ x'(0) = 0.4 \end{cases}$

$2\,kg$



b) $x'' + 100x = 0 \rightarrow \mathcal{L}\{x''\} + 100\mathcal{L}\{x\} = 0$

$s^2 X_s - s.\underbrace{x(0)}_{-0.03} - \underbrace{x'(0)}_{0.4} + 100 X_s = 0 \Rightarrow X_s(s^2 + 100) = -0.03s + 0.4$

$X_s = \frac{-0.03s}{s^2+100} + \frac{0.4}{s^2+100} \Rightarrow \mathcal{L}\{x\} = -0.03\mathcal{L}(\cos 10t) + \frac{0.4}{10}\,\frac{1 \times 10}{s^2+100}$

$\mathcal{L}\{x\} = -0.03\mathcal{L}(\cos 10t) + 0.04\mathcal{L}(\operatorname{sen} 10t)$

$x = -0.03\cos 10t + 0.04\operatorname{sen} 10t.$

$x(t) = 0{,}04\operatorname{sen}(10t) - 0{,}03\cos(10t)$