EL249 - Ingeniería de control 2

Unidad N°4: Diseño de controladores y observadores mediante técnicas optimales.

Semana 14

- Filtro de Kalman

MEng. Carlos H. Inga Espinoza

Filtro de Kalman-Bucy

- Hasta ahora para el diseño de observadores se asumió que el sistema se conoce con exactitud y que no hay ruido presente.
- Sin embargo, raramente esto es así, de modo que se desarrollará el llamado filtro de Kalman, el cual es un observador que reconstruye los estados a partir de mediciones ruidosas y perturbaciones basado en probabilidades.
- Para ello consideramos el proceso aleatorio como un ruido blanco Gaussiano.
- Para resolver este problema, primero revisaremos algo de teoría de probabilidad.

Repaso de teoría de probabilidad

- Considere una variable aleatoria Z donde f_Z es su densidad de probabilidad, luego:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_Z(z)dz = 1$$

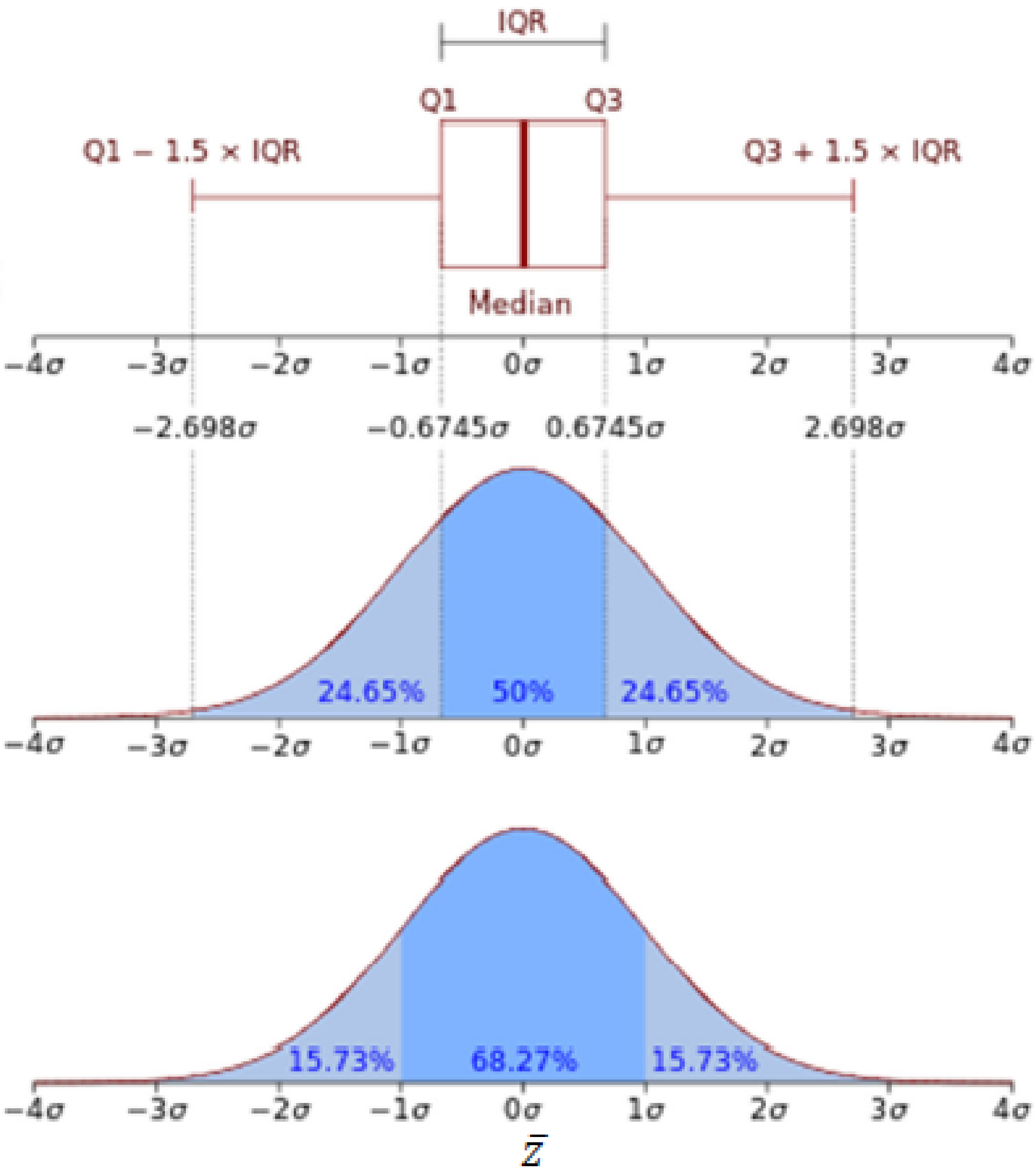
- Intuitivamente puede considerarse f(z)dz como la probabilidad de Z de caer en el intervalo [z, z + dz]

Repaso de teoría de probabilidad

- Considerando una distribución normal la integral anterior resulta:

$$f_Z(z) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{\left(-\frac{z-\bar{z}}{2\sigma^2}\right)}$$

- Donde $\sigma > 0$ es la desviación estándar y $\bar{z}$ es la media.



Repaso de teoría de probabilidad

- Luego el valor esperado de una función g(z):

$$E\{g(z)\} = \int_{-\infty}^{\infty} g(z) f_Z(z) dz$$

- Ej. El *valor medio* de g(z)=z es:

$$\bar{z} = E\{z\} = \int_{-\infty}^{\infty} z f_Z(z) dz$$

- La *varianza* será:

$$E\{(z - \bar{z})^2\}$$

Indica la probabilidad de que el número aleatorio está cerca de la media

- Para distribución normal la media es $\bar{z}$ y la varianza es σ^2

Repaso de teoría de probabilidad

- Extendiendo el concepto de variable escalar aleatoria a más dimensiones. Considere el vector $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^n$, donde existe la función densidad $f_z(\zeta)$ de n variables $\zeta = [\zeta_1 \; \zeta_2 \; \ldots \zeta_n]^T$, entonces:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} f_z(\zeta) d\zeta_1 \ldots d\zeta_n = 1.$$

$$f_z(\zeta) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n |\mathbf{P}_\zeta|}} \exp\left(-\frac{1}{2}(\zeta - \bar{\zeta})^T \mathbf{P}_\zeta^{-1} (\zeta - \bar{\zeta})\right)$$

Repaso de teoría de probabilidad

- El valor esperado será de la función g(**z**).

$$\mathbf{E}\{g(z)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} g(\zeta) f_z(\zeta) d\zeta_1 \dots d\zeta_n.$$

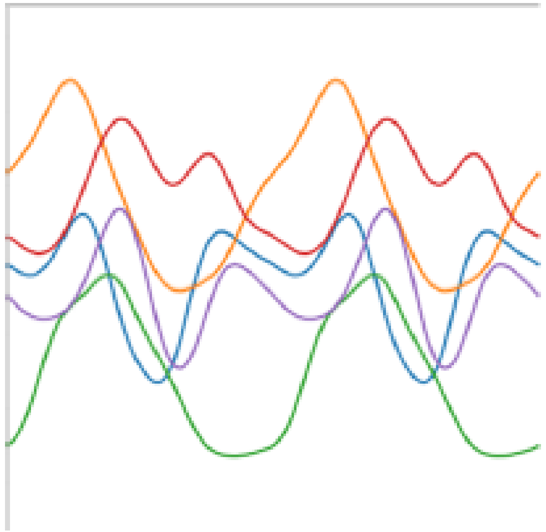
- Ej. La media de **z** es:

$$\bar{z} = \mathbf{E}\{z\} = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \zeta f_z(\zeta) d\zeta_1 \dots d\zeta_n.$$

- La *covarianza* de z es la matriz nxn:

$$\mathbf{E}\{(z-\bar{z})(z-\bar{z})^T\}.$$

- Para distribución normal, la media es $\bar{\mathbf{z}} = \bar{\zeta}$ y la covarianza es $\boldsymbol{P}_\zeta$



Repaso de teoría de probabilidad

- Si la variable aleatoria depende del tiempo, esto es z(t), entonces se llama proceso aleatorio*.
- Es conveniente saber si la z(t) es periódica, para lo cual la matriz autocorrelación resulta útil:

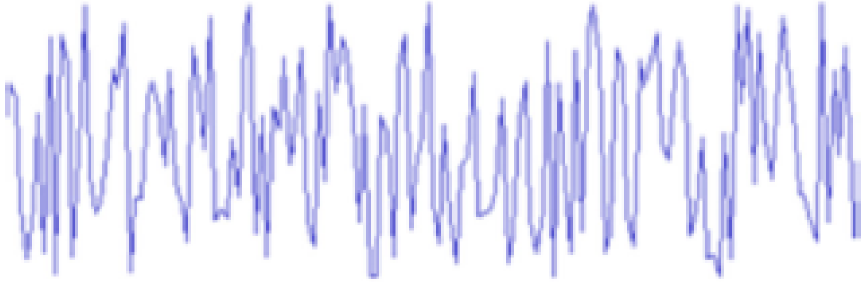
$$\mathbf{R}_z(\tau) = \mathbf{E}\{z(t+\tau)z^T(t)\}.$$

- Por ej. Esta podría determinar la periodicidad de una señal enmascarada por el ruido.

*La densidad de probabilidad también podría depender del tiempo, sin embargo se generalmente la densidad se puede considerar invariante en el tiempo o estacionaria.

Repaso de teoría de probabilidad

- Si $\boldsymbol{R}_z(\tau) = \boldsymbol{P}\delta(\tau)$ donde **P** es una matriz constante y $\delta(\cdot)$ es la función delta de Dirac, entonces z(t) no está correlacionado con z(t+τ) para τ≠0. Tal proceso aleatorio es llamado ruido blanco.
- Si z(t) es un proceso de media cero, entonces $\boldsymbol{P}\delta(0)$ es la covarianza del proceso y la matriz **P** es llamada matriz de densidad espectral o matriz de covarianza.



Repaso de teoría de probabilidad

- Ahora supongamos dos procesos de vectores aleatorios $z_1(t)$ y $z_2(t)$. Adicionalmente a sus funciones de densidad de probabilidad, estos procesos tienen una función de densidad de probabilidad conjunta denotada $f_{12}(\zeta_1, \zeta_2, t_1, t_2)$
- Si f_{12} depende de t_1 y t_2 solo a través de su diferencia t_1-t_2, entonces los procesos son llamados estacionarios conjuntos y escribimos $f_{12}(\zeta_1, \zeta_2, t_1 - t_2)$

Repaso de teoría de probabilidad

- Luego, el valor esperado de una función g(z1,z2) será:

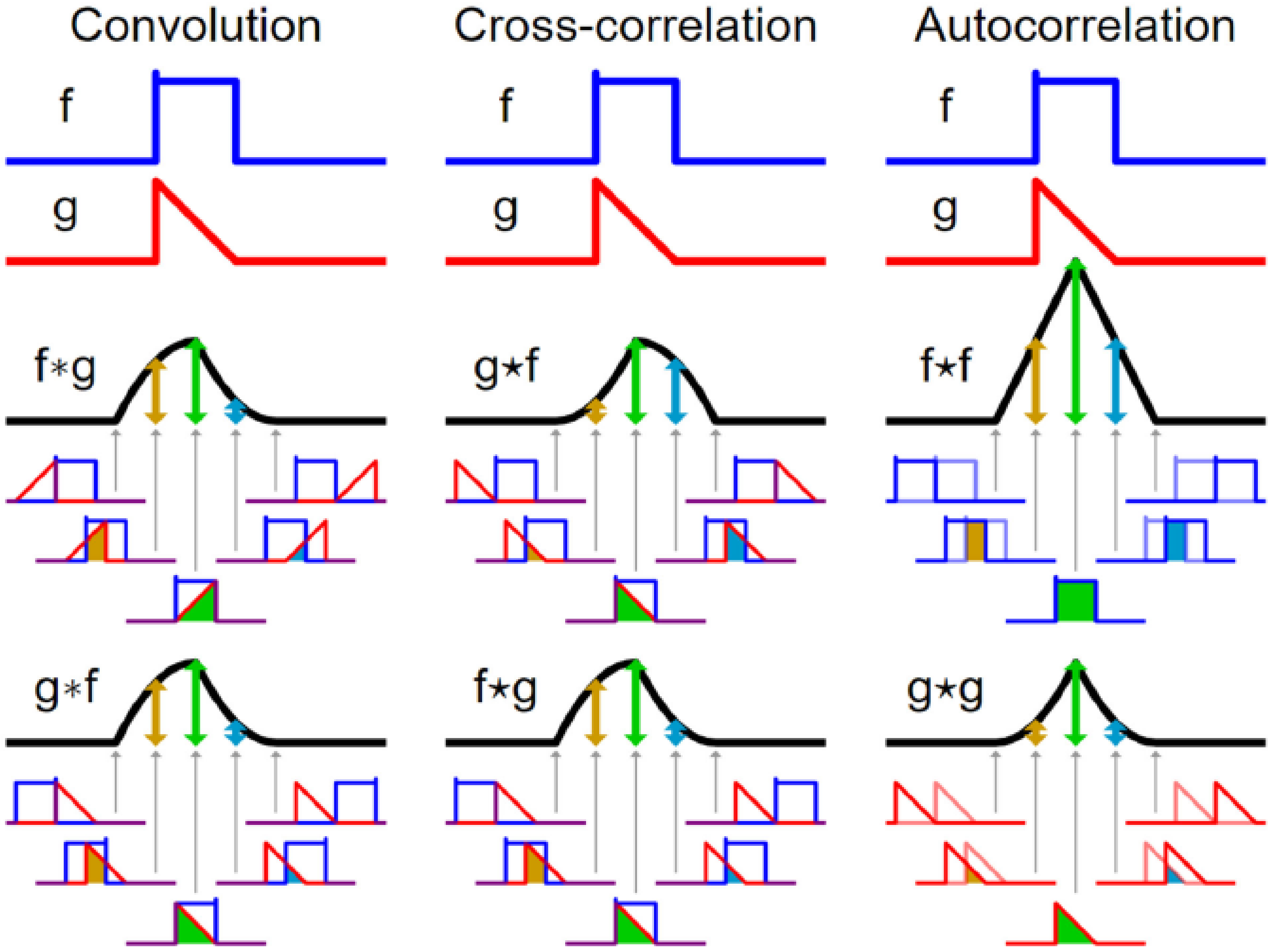
$$\mathbf{E}\{g(z_1(t_1),z_2(t_2))\} = \int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty} g(\zeta_1,\zeta_2)f_{12}(\zeta_1,\zeta_2,t_1-t_2)d\zeta_{1_1}\ldots d\zeta_{1_n}\right)d\zeta_{2_1}\ldots d\zeta_{2_n}.$$

- Un ejemplo de matriz de correlación cruzada es:

$$\mathbf{R}_{z_1 z_2}(\tau) = \mathbf{E}\{z_1(t+\tau)z_2^T(t)\}.$$

- Si la correlación es cero, se dice que los procesos son ortogonales o no correlacionados.

Repaso de teoría de probabilidad



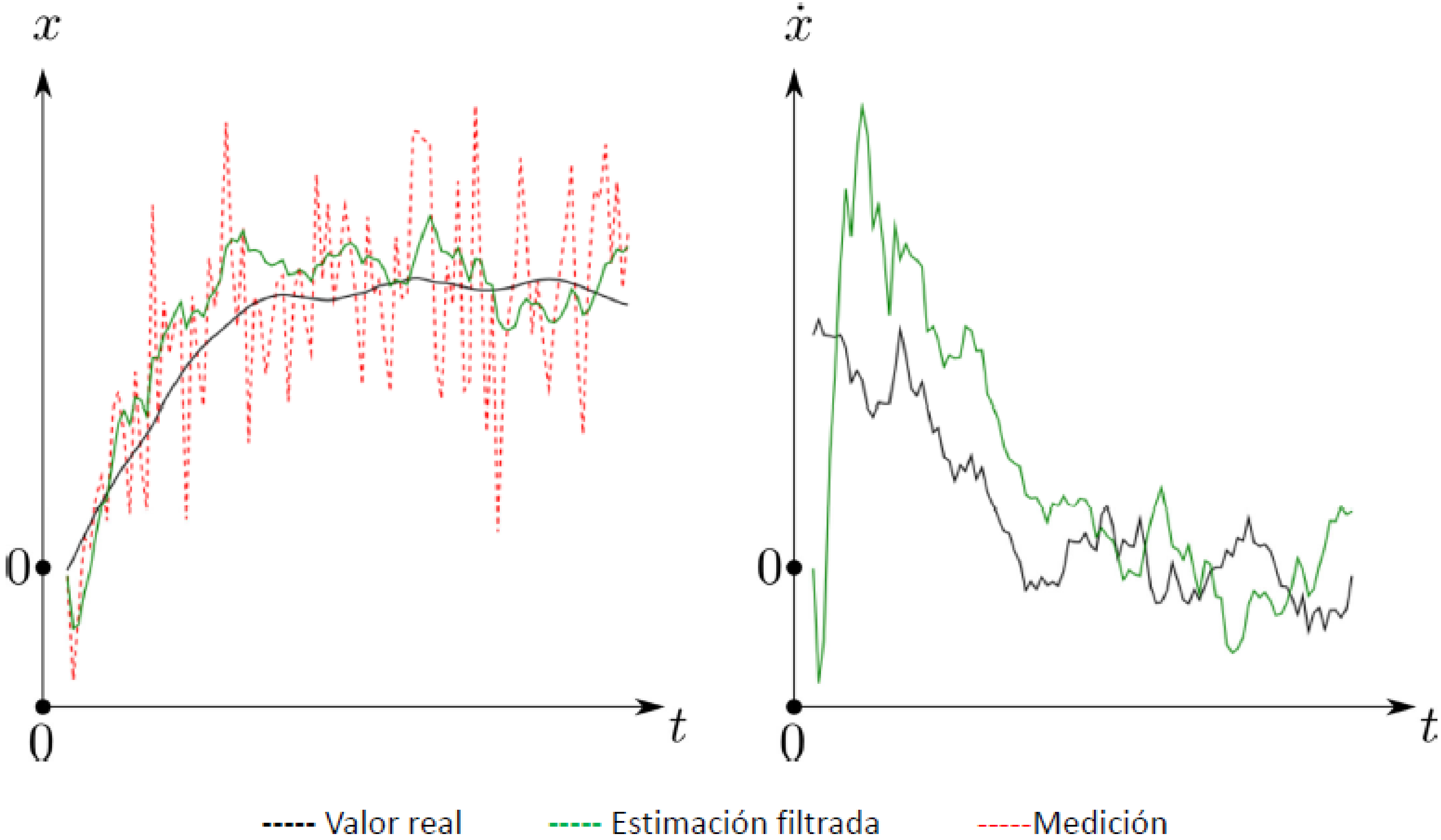
Filtro de Kalman

- Considere el sistema lineal observable:

$$\dot{x} = Ax + Bu + Gw$$
$$y = Cx + v$$

- Donde la dinámica está sujeta a disturbios aleatorios w y medidas aleatorias v (ruido).
- Kalman desarrolló un observador que minimiza el efecto combinado de disturbios y el ruido, de tal forma que provea el estado estimado “más probable” del sistema.
- Su aplicación más común es para la navegación de vehículos, en especial aviones y naves espaciales.

Filtro de Kalman



Filtro de Kalman

- La covarianza aplicada al error es un indicador de la incertidumbre del estimado de una variable. Valores pequeños de la covarianza indicarán que un estimado es mejor, ya que el error está distribuido más cerca al valor medio de cero.

Filtro de Kalman

- Deseamos construir un término $\Phi(y - \hat{y}, t)$, tal que el estimado:

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + \Phi(y - \hat{y}, t)$$

- Converja al valor más probable del estado verdadero "x" en el sentido que la covarianza del error estimado sea minimizada, expresado como índice es:

$$J = \mathrm{tr}(\mathbf{E}\{(\tilde{x}\tilde{x}^T)\}) = \mathrm{tr}(\mathbf{P}(t))$$

- Donde P(t) es la matriz de covarianza de $\tilde{x}$. Aquí, $\tilde{x} = x - \hat{x}$ es el estimado del error y el operador $tr(\cdot)$ es la traza de la matriz (la suma de los elementos de su diagonal).

Filtro de Kalman

- Si $\Phi(y-\hat{y},t)$ es LIT entonces podemos escoger $\Phi = L(y-\hat{y})$.
- La dinámica del error resultará:

$$\begin{aligned}\dot{\tilde{x}} &= \dot{x} - \dot{\hat{x}} = (Ax + Bu + Gw) - (A\hat{x} + Bu + L(y-\hat{y})) \\ &= (A - LC)\tilde{x} + Gw - Lv.\end{aligned}$$

- Si consideramos $\hat{x}(0) = E\{x(0)\}$, entonces el error de estimación es producto sólo del disturbio aleatorio w(t) y el ruido aleatorio v(t).

Filtro de Kalman

- Resolviendo el sistema:

$$\tilde{x}(t) = \underbrace{e^{(A-LC)t}\tilde{x}(0)}_{\text{Término no aleatorio y será cero cuando } t\to\infty} + \int_0^t e^{(A-LC)(t-\tau)}(Gw - Lv)d\tau.$$

- Se debe entonces minimizar la integral:

$$\begin{aligned}\tilde{x}(t) &= \int_0^t e^{(A-LC)(t-\tau)}(Gw - Lv)d\tau \\ &= \int_0^t e^{(A-LC)(t-\tau)}Gwd\tau - \int_0^t e^{(A-LC)(t-\tau)}Lvd\tau = \tilde{x}_w + \tilde{x}_v.\end{aligned}$$

Filtro de Kalman

- Luego, la función de costo usando $\tilde{x} = \tilde{x}_v + \tilde{x}_w$:

$$\boxed{J = \mathrm{tr}(\mathbf{E}\{(\tilde{x}_w + \tilde{x}_v)(\tilde{x}_w + \tilde{x}_v)^T\}).}$$

- Bajo las condiciones de procesos de disturbio y ruido de media cero y Gaussianos.

$$\mathbf{E}\{v(t)\} = 0,$$
$$\mathbf{E}\{w(t)\} = 0,$$
$$\mathbf{E}\{v(t+\tau)v^T(t)\} = V\delta(\tau),$$
$$\mathbf{E}\{w(t+\tau)w^T(t)\} = W\delta(\tau),$$

$$\Rightarrow \quad f_z(\zeta) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n|\mathbf{P}_\zeta|}} \exp\left(-\frac{1}{2}(\zeta - \bar{\zeta})^T \mathbf{P}_\zeta^{-1}(\zeta - \bar{\zeta})\right)$$

Recuerde:
$\bar{\mathbf{z}} = \bar{\zeta}$ y la covarianza es $\boldsymbol{P}_\zeta$

Filtro de Kalman

- Aplicado a las funciones de densidad de probabilidad queda:

$$f(v) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n |V|}} \exp\left(-\frac{1}{2} v^T V^{-1} v\right) \qquad f(w) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n |W|}} \exp\left(-\frac{1}{2} v^T W^{-1} v\right)$$

- Donde V y W son las matrices de covarianza de v(t) y w(t). Si asumimos que v(t) y w(t) no son correlacionados, esto es:

$$\mathbf{E}\{v(t+\tau)w^T(t)\} = \mathbf{E}\{w(t+\tau)v^T(t)\} = 0.$$

Filtro de Kalman

- Luego la función de costo de los componentes resultantes $\tilde{x}_v$ y $\tilde{x}_w$ de $\tilde{x}$:

$$J = \operatorname{tr}\left(\mathbf{E}\{\tilde{x}_w\tilde{x}_w^T + \tilde{x}_v\tilde{x}_v^T\}\right) = \operatorname{tr}\left(\mathbf{E}\{\tilde{x}_w\tilde{x}_w^T)\} + \mathbf{E}\{\tilde{x}_v\tilde{x}_v^T\}\right) =$$

$$\operatorname{tr}\left(\mathbf{E}\{\int_0^t\int_0^t e^{(A-LC)\alpha}Gw(t-\alpha)w^TG^T(t-\beta)e^{(A-LC)^T\beta}d\alpha d\beta\} + \mathbf{E}\{\int_0^t\int_0^t e^{(A-LC)\alpha}Lv(t-\alpha)v^TL^T(t-\beta)e^{(A-LC)^T\beta}d\alpha d\beta\}\right)$$

$$J = \operatorname{tr}\left(\int_0^t\int_0^t e^{(A-LC)\alpha}(GWG^T + LVL^T)e^{(A-LC)^T\beta}\delta(\beta-\alpha)d\alpha d\beta\right)$$
$$= \operatorname{tr}\left(\int_0^t e^{(A-LC)\beta}\boxed{(GWG^T + LVL^T)}e^{(A-LC)^T\beta}d\beta\right)$$

Recuerde:

$$\dot{x} = Ax + Bu + Gw$$
$$y = Cx + v$$

Filtro de Kalman

- Del LQR sabemos que: $J = \int_0^t (x^T Qx + u^T Ru)d\tau,$
- Sujeto a:

$$\dot{x} = Ax + Bu = (A - BK)x.$$

$$x(t) = e^{(A-BK)t}x(0).$$

- Cuya solución es:

$$\begin{aligned}
J &= \int_0^t (x^T Qx + (-Kx)^T R(Kx))d\tau \\
&= \int_0^t x^T (Q + K^T RK)xd\tau \\
&= \int_0^t (e^{(A-BK)\tau}x(0))^T (Q + K^T RK)e^{(A-BK)\tau}x(0)d\tau \\
&= x(0)^T \left(\int_0^t e^{(A-BK)^T \tau} \boxed{(Q + K^T RK)} e^{(A-BK)\tau} d\tau \right) x(0).
\end{aligned}$$

Filtro de Kalman

- De forma análoga al observador óptimo:

$$J=\int_{t_0}^{\infty} e^{(A-K_eC)t}\boxed{(Q+K_eR(t)K_e^T)}e^{(A-K_eC)t}dt$$

- Por comparación:

$$Q = GWG^T \text{ y } R = V$$

- Donde W y V son las matrices de covarianza de w(t) y v(t). Además, por definición estas son definidas positivas.

Recuerde:

$$\dot{x} = Ax + Bu + Gw \qquad J=\int_{t_0}^{\infty}(Z^T(t)QZ(t)+\Gamma^T(t)R(t)\Gamma(t))dt$$

$$y = Cx + v$$

Filtro de Kalman

- Luego, resolviendo P de la ecuación de Riccati actualizada:

$$\boxed{AP + PA^T - PC^T V^{-1} CP + GWG^T = 0}$$

- Finalmente se obtiene la ganancia del filtro de Kalman:

$$\boxed{K_e = PC^T V^{-1}}$$

W: Matriz covarianza del disturbio
V: Matriz covarianza del ruido

Interpretación

- La ganancia del observador filtro de Kalman, minimiza la covarianza del error de estimación y por lo tanto se recupera filtrada.
- Realiza un balance entre el error de estimación debido a la incertidumbre en la planta (disturbios w(t)) y la incertidumbre de medida (ruido v(t)).
- Si la covarianza del disturbio es grande respecto a la del ruido, entonces Ke será grande. Es decir, el estado estimado dependerá más del error de medida $y - \hat{y}$.
- Si la covarianza del ruido es más grande respecto a la del disturbio, entonces la ganancia del observador será pequeña.

Control LQG

- Un sistema de control que integra un LQR y un filtro de Kalman (también llamdo LQE), se llama LQG (linear quadratic gaussian) o controlador lineal cuadrático gaussiano.
- Considere la planta:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu + w \\ y &= Cx + v, \end{aligned}$$

- Donde w y v son procesos aleatorios Gaussianos con media cero y covarianzas W y V.

Control LQG

- El problema de control estocástico LQG consiste en encontrado el compensador que minimiza:

$$J = \mathbf{E}\{\int_0^{\infty} [(y-r)^T Q_y (y-r) + u^T R u] dt\}.$$

- Asumiremos por simplicidad que la referencia es cero.
- Luego, el compensador óptimo (observador controlador) tiene la forma:

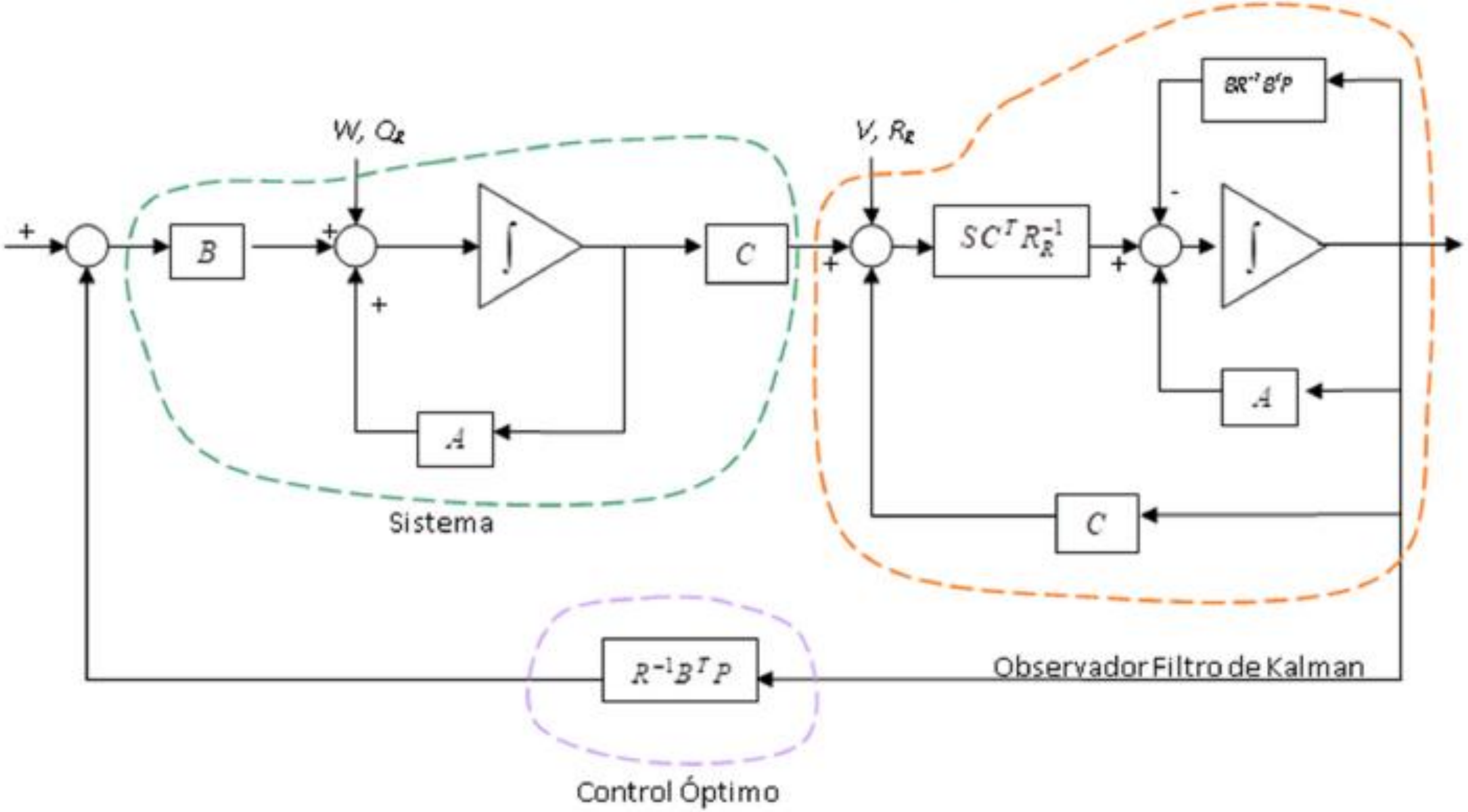
$$\begin{aligned}\dot{\hat{x}} &= A\hat{x} + Bu + L(y - C\hat{x}) \\ u &= K(\hat{x} - x_d),\end{aligned}$$

Control LQG

- Donde L o K_e es la ganancia del observador óptimo y K es la ganancia del controlador por realimentación de estados ignorando el disturbio w y el ruido v.
- Por el principio de separación, ambas ganancias se hallan de forma independiente.
- Luego el compensador óptimo tendrá la forma:

$$\boxed{\begin{aligned}\dot{\hat{x}} &= (A - LC)\hat{x} + Bu + Ly \\ u &= -K(\hat{x} - x_d),\end{aligned}}$$

Control LQG



$$\begin{bmatrix} \dot{X} \\ \dot{\tilde{X}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A - BK & BK \\ 0 & A - L_k C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ \tilde{X} \end{bmatrix}$$

Caso regulador

$$u = -K\hat{X}$$

Con seguimiento:

$$u = -K\hat{X} + rg$$

$$g = \frac{1}{C(-A+BK)^{-1}B}$$

Ejemplo 3

- Considere la dinámica linealizada de una aeronave de impulsión:

$$\frac{dz}{dt} = Az + Bs.$$

- $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -g & -c/m & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \frac{1}{m} & 0 \\ \frac{r}{j} & 0 \end{bmatrix}$

Linealizada en el punto de equilibrio:
$u_e = 0$
$z_e = (x_e, 0{,}0{,}0)$

- $C = [1 \quad 0 \quad 0 \quad 0]$

- X1 es la posición.
- Diseñe un controlador LQG donde m=4Kg, J=0.0475Kgm2, r=0.25m, g=9.8m/s2, c=0.05Ns/m
- Considerar matriz de covarianza del disturbio=0.1*eye(4) y matriz de covarianza del ruido = 10^{-4}

Ejemplo 3

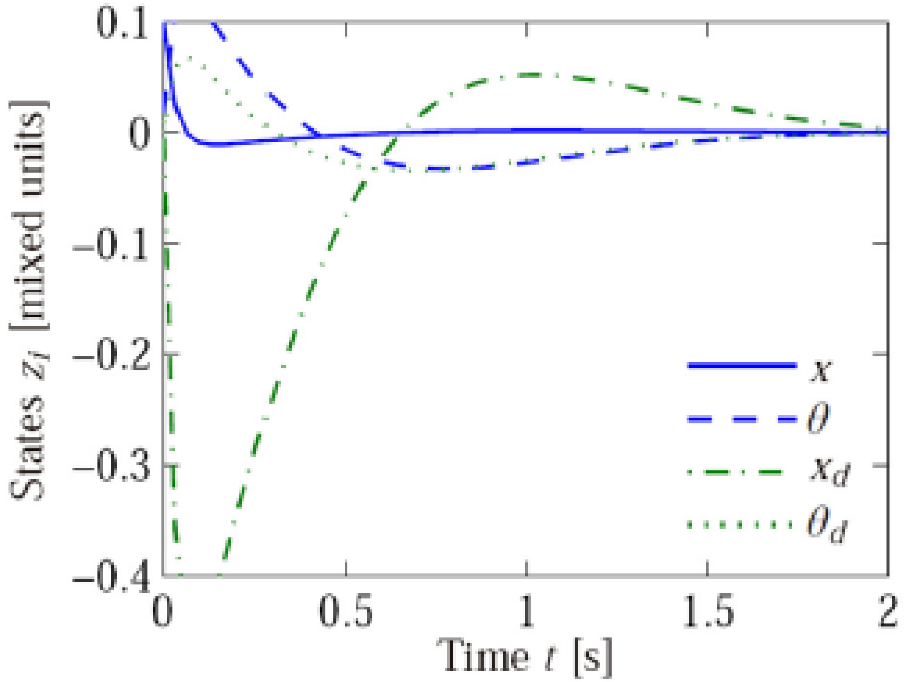
- Considerando ruido y disturbio: $$\dot{z} = Az + Bs + w,$$ $$y = Cz + v,$$
- Diseño del observador óptimo (filtro de Kalman-Bucy):

```
clear
close all
m=4;
J=0.0475;
r=0.25;
g=9.8;
c=0.05;
W = 0.1*eye(4,4);
V = 10^-4;
G = eye(4,4);

A = [0 0 1 0; 0 0 0 1; 0 -g -c/m 0; 0 0 0 0];
B = [0 0; 0 0; 1/m 0; r/J 0];
C = [1 0 0 0];
D = 0;
[Ke,P,E] = lqe(A,G,C,W,V);
```

```
Ke =

     37.013
    -46.871
        185
    -31.623


P =

    0.0037013   -0.0046871       0.0185   -0.0031623
   -0.0046871     0.076753     -0.17032     0.059844
       0.0185     -0.17032      0.63903     -0.11705
   -0.0031623     0.059844     -0.11705      0.14822
```

Ejemplo 3

- La respuesta del observador será:



Condiciones iniciales:
[0.1, 0.0175, 0.01,0]

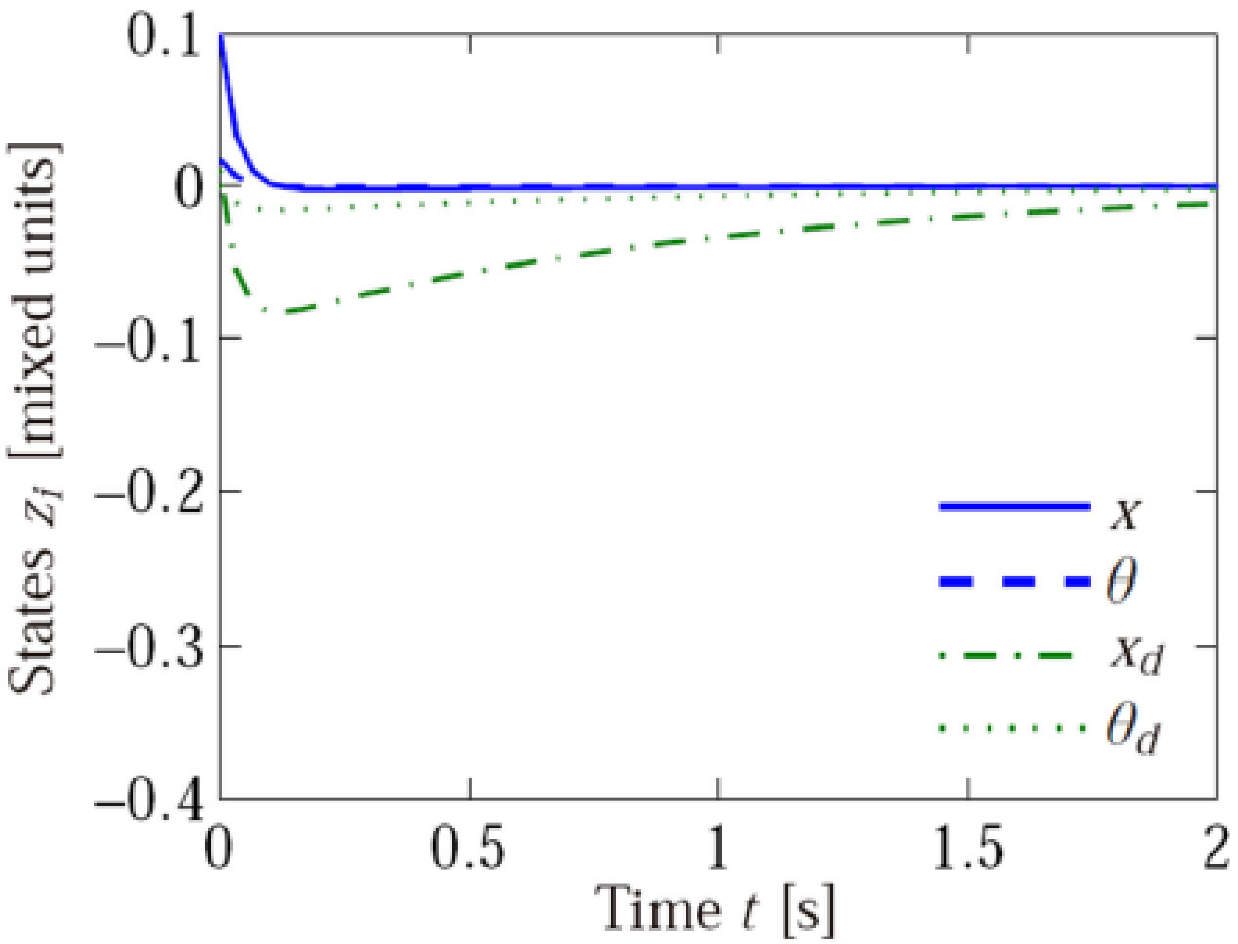
Subíndice *d* indica derivada

- Considere que ahora se mide x1 y x2 (orientación (°)), entonces:

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} z + \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$$

Ejemplo 3

- Con medición de posición y orientación se tiene:



Condiciones iniciales:
[0.1, 0.0175, 0.01,0]

```
Ke2 =

      32.64     -0.15017
   -0.15017       32.607
     32.701      -9.7946
 -0.0033411       31.623
```

Ejemplo 3

- Diseño del LQR: Consideramos las matrices Q y R=1000:

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

```
[K,S,E] = lqr(A,B,Q,R)
```

```
K =

   -0.031623      0.91988   -0.082401      0.59553


S =

      2.6428      -18.832      2.9683      -6.1493
     -18.832       391.65     -43.122       176.83
      2.9683      -43.122       5.868      -15.935
     -6.1493       176.83     -15.935       113.91
```

Ejemplo 3

- Finalmente el sistema queda:

$$\dot{\hat{x}} = (A - K_e C)\hat{x} + Bu + Ly$$
$$u = -K(\hat{x} - x_d)$$

$$\dot{\hat{z}} = \begin{bmatrix} 32{,}6 & 0{,}15 & 1 & 0 \\ 0{,}15 & -32{,}6 & 0 & 1 \\ -32{,}7 & -0{,}01 & -0{,}0125 & 0 \\ -0{,}0033 & -31{,}6 & 0 & 0 \end{bmatrix} \hat{z} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0{,}25 \\ 5{,}263 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 32{,}6 & -0{,}150 \\ -0{,}150 & 32{,}6 \\ 32{,}7 & -9{,}79 \\ 0{,}0033 & 31{,}6 \end{bmatrix} y$$
$$u = -\begin{bmatrix} -0{,}316 & 9{,}198 & -0{,}824 & 5{,}955 \end{bmatrix} \hat{z} + K z_e,$$

Problema 2

- Considere el sistema mostrado:

$$\dot{X} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

- Con C=[1 0]
- Construya el control LQG si W=eye(2) y V=1

Gracias por vuestra atención...