Columnas

Se va a analizar la estabilidad de estructuras determinando su capacidad para soportar una carga dada sin experimentar un cambio súbito en su configuración.

Columna.

Puede suceder que bajo una carga P, se pandee

Columna pandeada.

Estabilidad de estructuras

Analizaremos un modelo simplificado que consta de 2 barras rígidas AC y BC, conectadas en C por un pasador y un resorte torsional.

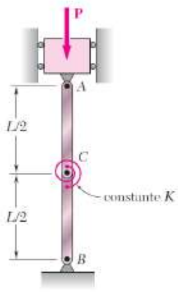
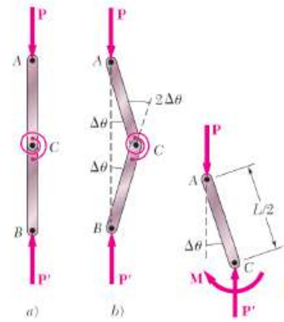


Figura 10.3 Modelo de columna.

Supongamos que C se mueve ligeramente a la derecha



Resorte

$\frac{L}{2} \cdot \text{Sen}\, \Delta\theta$

$\Delta\theta \rightarrow$ muy pequeño

$\text{Sen}\, \Delta\theta \approx \Delta\theta$

Momento en el resorte: $M_2 = K \times 2\Delta\theta$

Momento generado por las cargas: $M_1 = P \cdot \frac{L}{2} \cdot \text{Sen}\, \Delta\theta$

Sistema es estable $M_1 < M_2$

Sistema inestable $M_1 > M_2$

El valor para la carga cuando los dos pares son iguales es la carga crítica.

$$M_1 = M_2$$

$$K \cdot 2\Delta\theta = P \cdot \frac{L}{2} \cdot \text{Sen}\, \Delta\theta$$

$$K \cdot 2 \cancel{\Delta\theta} = P \cdot \frac{L}{2} \cdot \cancel{\Delta\theta}$$

$$\boxed{P_{cr} = \frac{4K}{L}}$$

Fórmula de Euler para columnas articuladas

En base a una columna articulada en los extremos se busca calcular el valor crítico de la carga P .

Columna pandeada

Puede considerarse una columna como una viga en posición vertical y bajo una carga axial $\rightarrow$

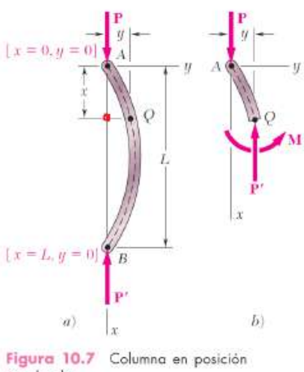


Figura 10.7 Columna en posición pandeada.

A partir de la ec. diferencial:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{M}{EI} = -\frac{P}{EI}y \quad \Rightarrow \quad \frac{d^2y}{dx^2} + \frac{P}{EI}y = 0$$

Cambio de variable

$$p^2 = \frac{P}{EI}$$

$$y = A \operatorname{sen} px + B \cos px$$

Para x = L ; y = 0

x=0 ; y = 0

$$A \operatorname{sen} pL = 0 \qquad p.L = n.\pi$$

P = es la carga

p = es un cambio de variable

n = número entero positivo ($n \neq 0$)

$$p^2 . L^2 = n^2 . \pi^2$$

$$\frac{P}{EI} . L^2 = n^2 . \pi^2$$

$$\boxed{P = \frac{n^2\pi^2 EI}{L^2}}$$

El menor valor de n natural es 1

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{L^2}$$

La fórmula de Euler

P_{cr} = carga crítica

$$\boxed{\sigma_{cr} = \frac{P_{cr}}{A} = \frac{\pi^2 E A r^2}{A L^2}}$$

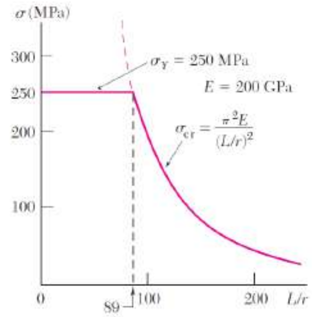


Figura 10.8 Gráfica de esfuerzo crítico.

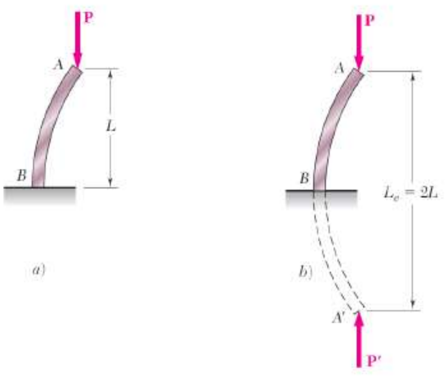
$\lambda = \frac{L}{r}$ = Relación de esbeltez ($\lambda < 200$)

$r = \sqrt{\frac{I}{r}}$ = radio de giro

$$\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 E}{(L/r)^2}$$

esfuerzo crítico

Extensión de la fórmula de Euler para columnas con otras condiciones en los extremos

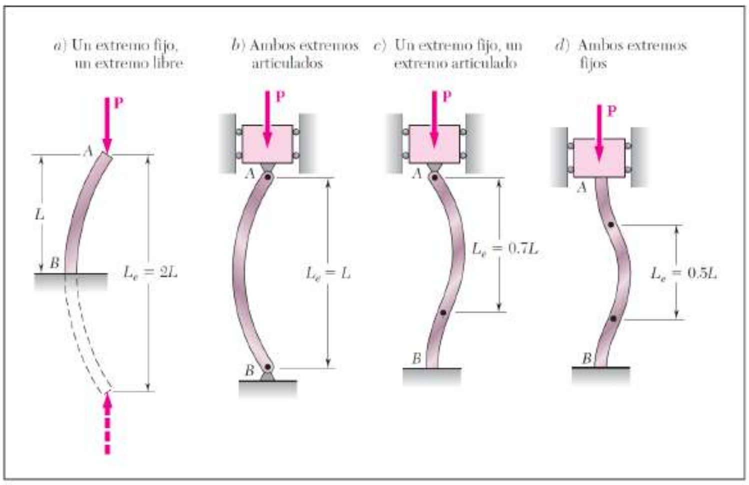


L_e = **longitud efectiva**

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{L_e^2}$$

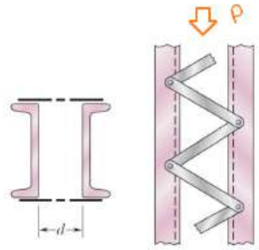
En forma similar se encuentra el esfuerzo crítico mediante la ecuación

$$\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 E}{(L_e/r)^2}$$



Problema 04

Un elemento simple a compresión de 27 pies de longitud efectiva se obtiene al conectar dos canales de acero C8 × 11.5 con barras de enlace, como se muestra en la figura. Si se sabe que el factor de seguridad es de 1.85, determine la carga céntrica permisible para el elemento. Utilice E = 29 × 10^6 psi y d = 4.0 pulg.



$L_e = 27\ ft$

Las barras de enalce son las de color plomo

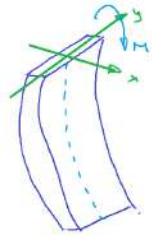
$F.S = 1{,}85$

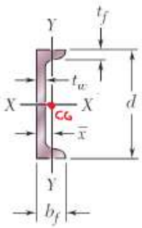
$E = 29 \times 10^6\ psi$

$d = 4\ pulg$

C8 × 11.5 **Beer pag. Anexo C pag A-22**

			Aleta		Espesor del alma	Eje X-X			Eje Y-Y			
Designación†	Área A, pulg^2	Altura d, pulg	Ancho b_f, pulg	Espesor t_f, pulg	t_w, pulg	I_x, pulg^4	S_x, pulg^3	r_x, pulg	I_y, pulg^4	S_y, pulg^3	r_y, pulg	x, pulg
C8 × 18.7	5.51	8.00	2.53	0.390	0.487	43.9	11.0	2.82	1.97	1.01	0.598	0.565
13.7	4.04	8.00	2.34	0.390	0.303	36.1	9.02	2.99	1.52	0.848	0.613	0.554
11.5	3.37	8.00	2.26	0.390	0.220	32.5	8.14	3.11	1.31	0.775	0.623	0.572



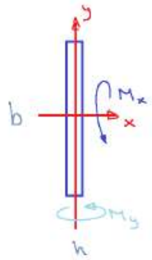


b_f = longitud del ala

d = peralte

t_f = espesor del ala

t_w = espesor del alma



$I_{xx} = \frac{b^3 \cdot h}{12}$

$I_{yy} = \frac{h^3 \cdot b}{12}$

¿ Inercia mayor? → I_{xx}

Por pandeo va a "girar" en el eje con menor inercia; para nuestro ejemplo en I_{yy}

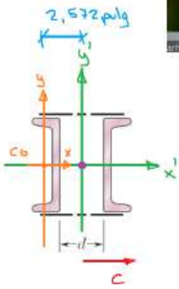
$A = 3{,}37\ pulg^2$

$I_{xx} = 32{,}5\ pulg^4$

$I_{yy} = 1{,}31\ pulg^4$

$\bar{x} = 0{,}572\ pulg$

$\bar{y} = 0$



x'y' → Sistema que se encuentra en el C.G. del conjunto

xy → Sistema que se encuentra en el C.G. de un Canal.

Teorema de steiner:

$I_{x'x'} = I_{xx} + m^2 \cdot A$

m = distancia entre los ejes paralelos (x - x')

$I_{x'x'} = 2 \times \left[32{,}5 + 0^2 \cdot A \right] = 65\ pulg^4$

$I_{y'y'} = 2 \times \left[1{,}31 + 2{,}572^2 \times 3{,}37 \right] = 47{,}21\ pulg^4$

Fallaria en el eje con menor inercia $I_{y'y'}$

Cálculo de la carga permisible

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{L_e^2}$$

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I}{L_e^2}$$

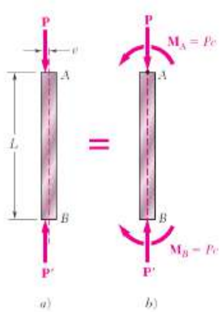
$$P_{cr} = \frac{\pi^2 \cdot 29 \times 10^6 \frac{lbf}{pulg^2} \times 47{,}21\ pulg^4}{(27 \times 12\ pulg)^2} = 128\,718\ lbf$$

$\simeq 128{,}7\ Kips$

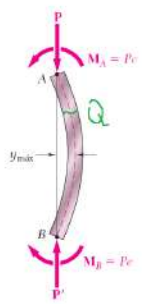
$F.S = \frac{P_{cr}}{P_{diseño}} \rightarrow 1{,}85 = \frac{128{,}7\ Kips}{P_{diseño}}$

$P_{diseño} = 69{,}58\ Kips$

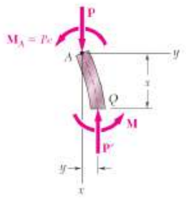
Carga excéntrica fórmula de la secante



$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{M}{EI} = -\frac{P}{EI}y - \frac{Pe}{EI}$$



Se toma un elemento de corte de la columna



$$y = e\left(\tan\frac{pL}{2}\operatorname{sen} px + \cos px - 1\right) \qquad p^2 = \frac{P}{EI}$$

El valor de la deflexión máxima x=L/2

$$y_{máx} = e\left[\sec\left(\sqrt{\frac{P}{EI}}\frac{L}{2}\right) - 1\right]$$

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{L^2}$$

$$y_{máx} = e\left(\sec\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{P}{P_{cr}}} - 1\right)$$

El esfuerzo máximo ocurre en el punto donde el momento es máximo:

$$\sigma_{máx} = \frac{P}{A} + \frac{M_{máx}c}{I}$$

$\frac{P}{A}$ ⇨ **Carga axial** **(Compresión)**

$\frac{M_{máx}c}{I}$ ⇨ **Flexión**

Entonces, remplazando

$$\sigma_{máx} = \frac{P}{A}\left[1 + \frac{ec}{r^2}\sec\left(\sqrt{\frac{P}{EI}}\frac{L}{2}\right)\right]$$

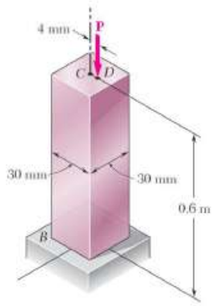
$$\sigma_{máx} = \frac{P}{A}\left(1 + \frac{ec}{r^2}\sec\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{P}{P_{cr}}}\right)$$

$r = \sqrt{\frac{I}{A}}$ = **radio de giro**

$$\frac{P}{A} = \frac{\sigma_{máx}}{1 + \frac{ec}{r^2}\sec\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{P}{EA}}\frac{L_e}{r}\right)}$$

Problema 10

Se aplica una carga axial P = 15 kN sobre el punto D que está a 4 mm del eje geométrico de la barra cuadrada de aluminio BC. Si E = 70 GPa, determine a) la deflexión horizontal del extremo C, b) el esfuerzo máximo en la columna.



$e = 4\ mm$

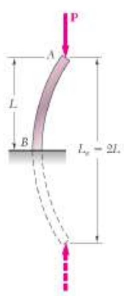
$E = 70\ GPa$

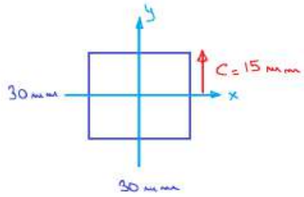
$L_e = 0,6 \times 2 = 1,2\ m$

$r = \sqrt{\frac{I}{A}}$

$r^2 = \frac{I}{A}$

a) Un extremo fijo, un extremo libre





$A = 900\ mm^2 = 9 \times 10^{-4}\ m^2$

al ser simétrico $I_{xx} = I_{yy}$

$I_{xx} = \frac{1}{12} \cdot 30^3 \cdot 30\ mm^4 = 67,5 \times 10^3\ mm^4 = 67,5 \times 10^{-9}\ m^4$

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I}{L_e^2} \qquad P_{cr} = \frac{\pi^2 \cdot 70 \times 10^9\ Pa \times 67,5 \times 10^{-9}\ m^4}{(1,2\ m)^2} = 32,38 \times 10^3\ N$$

$\simeq 32,38\ kN$

$$F.S = \frac{P_{cr}}{P_{diseño}} \qquad F.S = \frac{32,38\ kN}{15\ kN} = 2,16$$

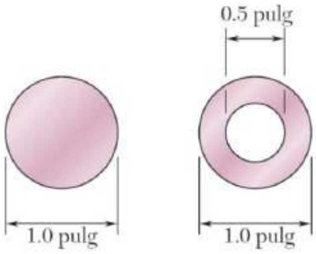
$$y_{máx} = e\left(\sec\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{P}{P_{cr}}} - 1\right) \Rightarrow y_{máx} = 4 \times 10^{-3}\ m\left(\sec \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{15\ kN}{32,38\ kN}} - 1\right) = 4,3166\ mm$$

$$\sigma_{máx} = \frac{P}{A}\left(1 + \frac{ec}{r^2}\sec\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{P}{P_{cr}}}\right) \Rightarrow \sigma_{máx} = \frac{15 \times 10^3\ N}{9 \times 10^{-4}\ m^2} \times \left(1 + \frac{4 \times 10^{-3}\ m \cdot 15 \times 10^{-3}\ m}{\frac{67,5 \times 10^{-9}\ m^4}{9 \times 10^{-4}\ m^2}} \times \sec\frac{\pi}{2} \times \sqrt{\frac{15\ kN}{32,38\ kN}}\right)$$

$\sigma_{máx} = 44 \times 10^6\ Pa \simeq 44\ MPa$

Problema 01

Un elemento a compresión de 20 pulg de longitud efectiva consta de una barra sólida de aluminio con 1 pulg de diámetro. Para reducir el peso del elemento en 25%, se reemplaza por una barra hueca con la sección transversal mostrada en la figura. Determine a) la reducción porcentual en la carga crítica, b) el valor de la carga crítica para la barra hueca. Considere E = 10.6 × 10[6] psi.



$L_e = 20$ pulg

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 . E . I}{L_e^2}$$

Para la barra solida $\quad c = d/2 = 0{,}5\text{pulg} \qquad I_s = \frac{\pi}{4} . c^4$

$$I_s = \frac{\pi}{4} . (0{,}5\text{ pulg})^4 = 0{,}04908 \text{ pulg}^4$$

Para la barra hueca:

$$I_h = \frac{\pi}{4} . (c^4 - c_i^4) \qquad C_i = 0{,}5\text{pulg}/2 = 0{,}25\text{ pulg}$$

$$I_h = \frac{\pi}{4} . (0{,}5^4 - 0{,}25^4) = 0{,}04601 \text{ pulg}^4$$

$$\frac{P_{cr,h}}{P_{cr,s}} = \frac{\dfrac{\cancel{\pi^2} . \cancel{E} . I_h}{\cancel{L_e^2}}}{\dfrac{\cancel{\pi^2} . \cancel{E} . I_s}{\cancel{L_e^2}}} = \frac{I_h}{I_s} = \frac{0{,}04601 \text{ pulg}^4}{0{,}04908 \text{ pulg}^4} = 0{,}9374$$

$$P_{cr,h} = 0{,}9374 . P_{cr,s} \longrightarrow \frac{P_{cr\,s} - P_{cr,h}}{P_{cr,s}} = \frac{0{,}0625 \cancel{P_{cr,s}}}{\cancel{P_{cr,s}}} = 0{,}0625$$

$$\simeq 6{,}25\%$$

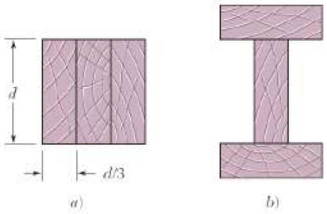
b)

$$P_{cr,h} = \frac{\pi^2 . E . I_h}{L_e^2} = \frac{\pi^2 \times 10{,}6\times10^6 \frac{\text{lbf}}{\text{pulg}^2} . 0{,}04601 \text{ pulg}^4}{(20\text{ pulg})^2} = 12\,033 \text{ lbf}$$

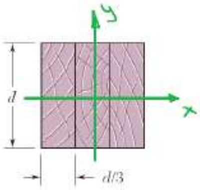
$$\simeq 12{,}03 \text{ Kip}$$

Problema 02

Una columna de longitud efectiva L puede construirse clavando tablas idénticas en cada uno de los arreglos que se muestran en la figura. Determine la relación entre la carga crítica que se obtiene con el arreglo a y la carga crítica que se logra con el arreglo b.



Para el arreglo A

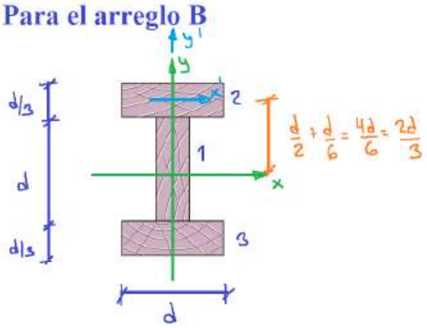


Por simetría $I_{xx} = I_{yy}$

$$I_{xx} = \frac{1}{12} \cdot d^3 \cdot d = \frac{d^4}{12}$$

$$P_{cr_a} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I}{L_e^2} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot d^4}{12 L_e^2}$$

Para el arreglo B



Que inercia es menor: Ixx o Iyy?

Para 1: $I_{xx,1} = \frac{d^3 \cdot (d/3)}{12} = \frac{d^4}{36}$

Para 2: $I_{xx,2} = \frac{(d/3)^3 \cdot d}{12} + \left(\frac{2d}{3}\right)^2 \cdot \frac{d^2}{3} = \frac{d^4}{324} + \frac{4d^4}{27} = \frac{49 d^4}{324}$

Para 3 $I_{xx,3} = I_{xx,2} = \frac{49 d^4}{324}$

$$I_{xx} = I_{xx,1} + I_{xx,2} + I_{xx,3} = \frac{d^4}{36} + \frac{49 d^4}{324} + \frac{49 d^4}{324} = \frac{107 d^4}{324}$$

La inercia en Iyy

$$I_{yy,1} = \frac{(d/3)^3 \cdot d}{12} = \frac{d^4}{324}$$

$$I_{yy,2} = I_{yy,3} = \frac{d^3 \cdot (d/3)}{12} = \frac{d^4}{36}$$

$$I_{yy} = I_{yy,1} + I_{yy,2} + I_{yy,3} = \frac{19 d^4}{324}$$ → el menor es $\frac{19 d^4}{324}$

El cálculo de la carga critica para columnas se realiza con la I mas baja

$$P_{cr,b} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I_{yy}}{L_e^2} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot 19 d^4}{L_e^2}$$

$$P_{cr,a} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot d^4}{12 L_e^2}$$

$$\frac{P_{cr,a}}{P_{cr,b}} = \frac{\dfrac{\cancel{\pi^2} \cdot \cancel{E} \cdot \cancel{d^4}}{12 \cancel{L_e^2}}}{\dfrac{\cancel{\pi^2} \cdot \cancel{E} \cdot 19 \cancel{d^4}}{\cancel{L_e^2}}} = \frac{19}{12} \simeq 1{,}58$$

$P_{cr,a} = 1{,}58\, P_{cr,b}$