Transformada de Laplace

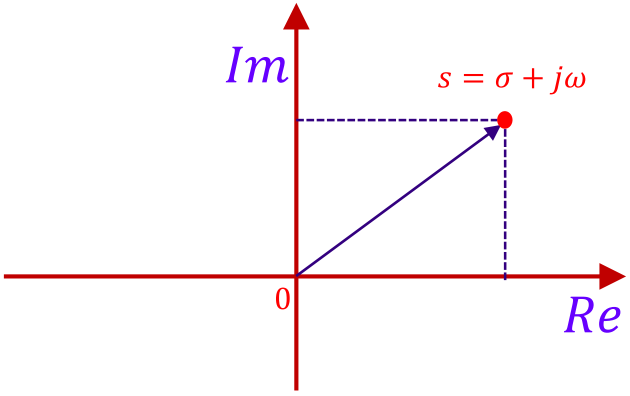
Ing. Eddie Sobrado

Introducción

- Un Número Complejo tiene una parte real y una parte imaginaria. Ejemplo: $1 + 2j$
- Variable Compleja: Si estas partes son variables, entonces se trata de una "variable compleja".

$$s = \sigma + j\omega$$

- Los números y variables complejas se pueden graficar en el Plano Complejo también llamado Plano-s.
- Todo número o variable compleja tiene Módulo y Fase.



Plano S
Plano Complejo

Introducción

Función Compleja:

- Una función F(s) es una función compleja de la variable compleja s, si para cada valor de s existen uno o más valores correspondientes de F(s).
- La función F(s) también tiene una parte real y una parte imaginaria. Tiene módulo y fase.

Ejemplo: Determine la parte real e imaginaria de la siguiente función compleja G(s):

Función

Variable

$$G(s) = \frac{1}{s+1} \quad \text{donde} \quad s = \sigma + j\omega$$

Introducción

Solución:

Reemplazamos: $s = \sigma + j\omega$ en: $\boxed{G(s) = \frac{1}{s+1}}$

$$G(s) = \frac{1}{(\sigma + j\omega) + 1} = \frac{1}{(\sigma + 1) + j\omega}$$

$$G(s) = \frac{1}{(\sigma + 1) + j\omega} * \frac{(\sigma + 1) - j\omega}{(\sigma + 1) - j\omega} = \frac{(\sigma + 1) - j\omega}{(\sigma + 1)^2 + \omega^2}$$

Entonces la función tiene dos partes:

$$Re\big(G(s)\big) = \frac{\sigma + 1}{(\sigma + 1)^2 + \omega^2}$$

$$Im\big(G(s)\big) = \frac{-\omega}{(\sigma + 1)^2 + \omega^2}$$

Transformada de Laplace: Utilidad

- En el estudio de los procesos es necesario considerar modelos dinámicos, es decir, modelos de comportamiento variable respecto al tiempo.
- Esto trae como consecuencia el uso de ecuaciones diferenciales respecto al tiempo para representar matemáticamente el comportamiento de un proceso.

Transformada de Laplace: Utilidad

- El comportamiento dinámico de los procesos en la naturaleza puede representarse de manera aproximada por el siguiente modelo general de comportamiento dinámico lineal:

$$a_n \frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + a_{n-2} \frac{d^{n-2} y(t)}{dt^{n-2}} + \cdots + a_0 y(t) = x(t)$$

- La transformada de Laplace es una herramienta matemática muy útil para el análisis de sistemas dinámicos lineales.

Transformada de Laplace: Utilidad

- De hecho, la transformada de Laplace permite resolver ecuaciones diferenciales lineales mediante la transformación en ecuaciones algebraicas con lo cual se facilita su estudio.

- Una vez que se ha estudiado el comportamiento de los sistemas dinámicos, se puede proceder a diseñar y analizar los sistemas de control de manera simple.

Transformada de Laplace: Utilidad

- Es una herramienta para solución de ecuaciones diferenciales lineales (se convierte en una ecuación algebraica en el dominio de la variable compleja s).
- La técnica es aplicar la transformada de Laplace a la ecuación diferencial. Luego algebraicamente resolver para $Y(s)$. Finalmente, aplicar la transformada inversa de Laplace para determinar directamente $y(t)$.
- Se disponen de tablas de transformadas de Laplace.

Transformada de Laplace

t: *tiempo*

$f(t)$: *función en el tiempo*

s: *variable de Laplace (compleja!)*

$F(s)$: *función en el dominio de Laplace*

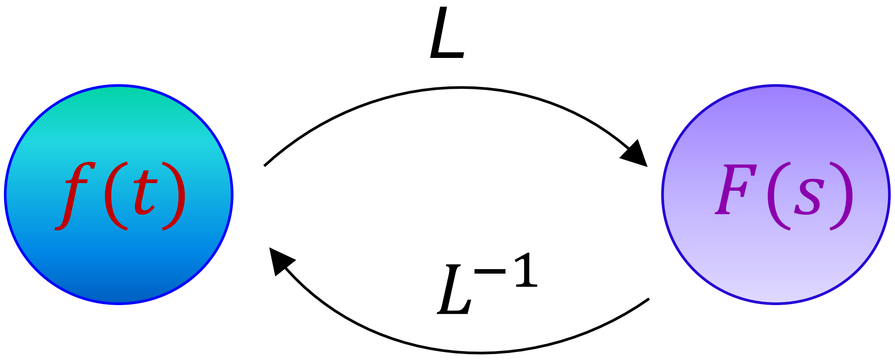
$$f(t) \xrightarrow{\textit{Laplace (L)}} F(s)$$

Ejemplo:

$$\frac{df(t)}{dt} \rightarrow sF(s) \qquad \int f(t) \rightarrow \frac{F(s)}{s}$$

Transformada Inversa de Laplace

- La Transformada Inversa de Laplace es la operación contraria, es decir, a través de la transformada inversa se pasa del dominio de Laplace se pasa al dominio del tiempo: $F(s) \rightarrow \mathrm{f(t)}$



Propiedades

Propiedad 1: Linealidad

$$\boxed{L[kf(t)] = kL[f(t)] = kF(s)}$$

$$\boxed{L[f(t) + g(t)] = L[f(t)] + L[g(t)] = F(s) + G(s)}$$

Propiedades

Propiedad 2: Teorema de la Diferenciación Real

$$L\left[\frac{df(t)}{dt}\right] = sF(s) - f(0)$$

Transforma derivadas en expresiones algebraicas

En general :

$$L\left[\frac{d^n f(t)}{dt^n}\right] = s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - s^{n-2}\frac{df}{dt}(0) \ldots . - \frac{d^{n-2}f}{dt^{n-2}}(0) - \frac{d^{n-1}f}{dt^{n-1}}(0)$$

Propiedades

Propiedad 3: Teorema de la Integración Real

$$L\left[\int_0^t f(t)dt\right] = \frac{1}{s}F(s)$$

Propiedad 4: Teorema de la Traslación Real

$$L[f(t-t_0)] = e^{-st_0}F(s)$$

Útil para representar atraso de transporte

Propiedad 5: Teorema de la Traslación Compleja

$$L[e^{at}f(t)] = F(s-a)$$

Propiedades

<u>Propiedad 6</u>: Teorema del Valor Final

¡No olvidar!

Si F(s) es la transformada de una señal $f(t)$ y si el denominador de $sF(s)$ solamente tiene raíces en el lado izquierdo del plano complejo, entonces se cumple que:

$$lim_{t\to\infty} f(t) = lim_{s\to 0} sF(s)$$

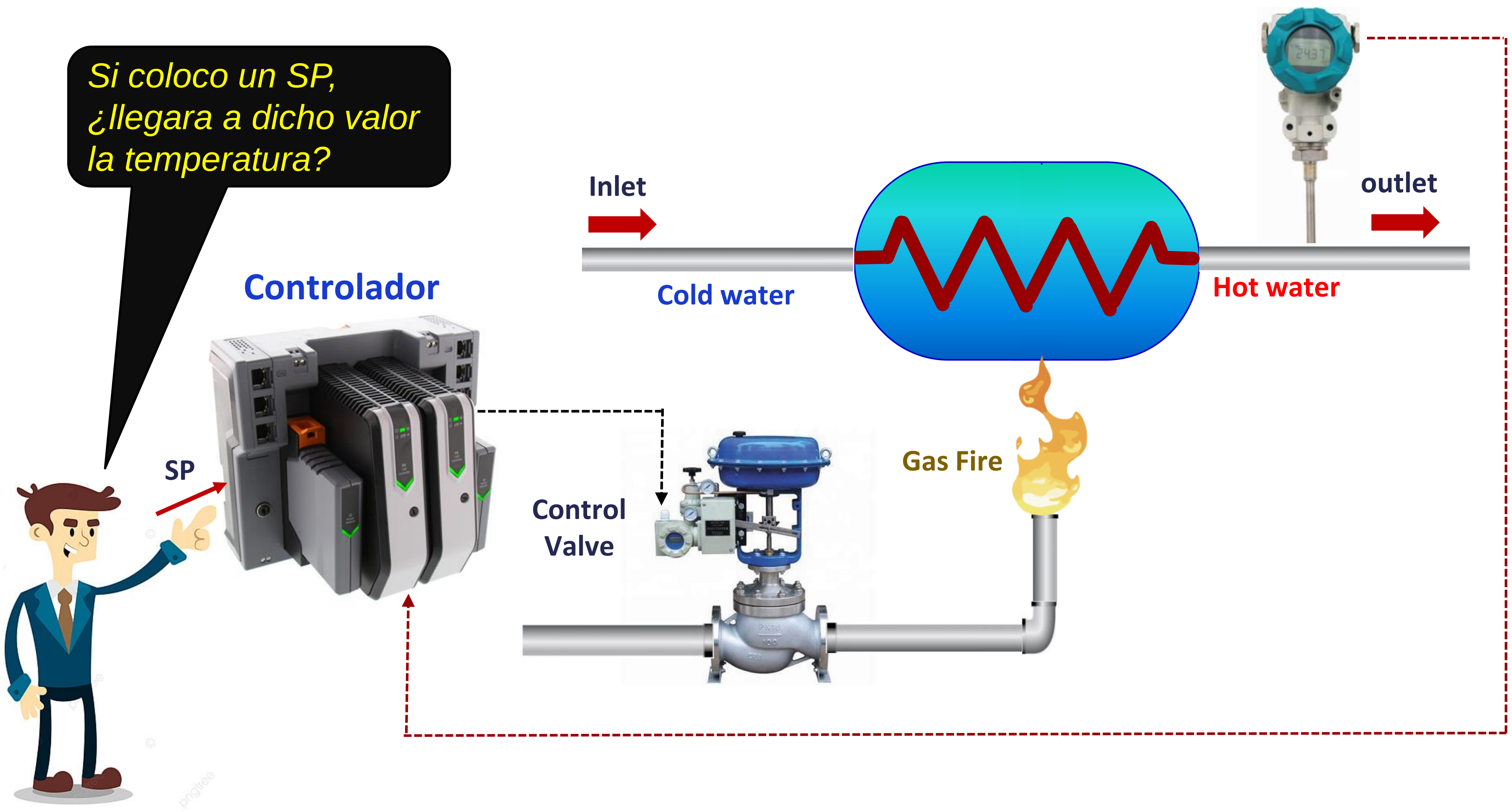
Valor final de la señal

¡Útil para determinar el <u>valor final</u> de una señal y <u>el error</u> estado estable!

Propiedades: Teorema del Valor Final

¡ Si conociera el modelo matemático (del sistema en Lazo abierto) expresado en Laplace, podría aplicar el teorema del valor final !

Propiedades: Teorema del Valor Final

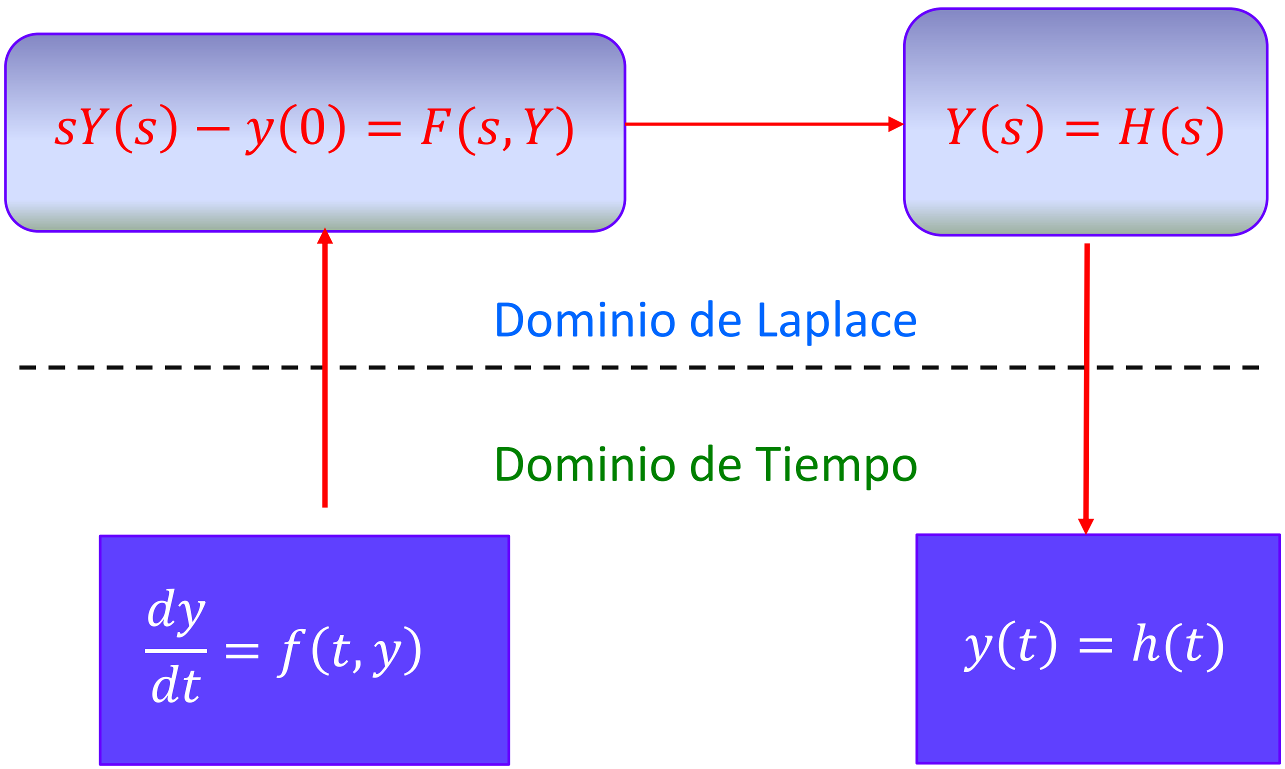


¡ Si conociera el modelo matemático (del sistema en Lazo cerrado) expresado en Laplace, podría aplicar el teorema del valor final !

Aplicación tradicional de la Transforma de Laplace

Solución de E.D.O.s

- Los pasos para Resolver Ecuaciones ordinarias diferenciales (ODE's) Lineales usando Transformada de Laplace se muestra:



Solución de E.D.O.s

- Considere como ejemplo la siguiente E.D.O. de 2do Orden:

$$a_2 \frac{d^2y(t)}{dt^2} + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t) = bu(t)$$

a_0, a_1, a_2, b

Son constantes

- Condición inicial:

$$y(0) = \left.\frac{dy(t)}{dt}\right|_{t=0} = 0$$

$$u(t) \rightarrow excitacion(entrada)$$

$$y(t) \rightarrow respuesta\ (salida)$$

Solución de E.D.O.s

Paso 1: Transformar en ecuación algebraica

$$L\left[a_2\frac{d^2y(t)}{dt^2}+a_1\frac{dy(t)}{dt}+a_0y(t)\right]=L[bu(t)]$$

Aplicando teorema de la diferenciación

$$a_2s^2Y(s)+a_1sY(s)+a_0Y(s)=bU(s)$$

Solución de E.D.O.s

Paso 2: Resolver para Y(s)

$$(a_2s^2 + a_1s + a_0)Y(s) = bU(s)$$

$$Y(s) = \frac{b}{(a_2s^2 + a_1s + a_0)}U(s)$$

Solución de E.D.O.s

Paso 3: Inversión de Y(s) para obtener y(t)

$$y(t) = L^{-1}\{Y(s)\} = L^{-1}\left\{\frac{b}{(a_2 s^2 + a_1 s + a_0)} U(s)\right\}$$

Descomponer en fracciones parciales

Usar tablas para determinar la transformada inversa

$$y(t)$$

Descomposición en fracciones parciales

- Considere la siguiente función:

$$M(s) = \frac{s+3}{s^2+3s+2}$$

- Expresando esta ecuación como una suma de fracciones parciales, tenemos:

$$M(s) = \frac{k_1}{s+1} + \frac{k_2}{s+2}$$

- k_1y k_2Son llamados residuos y son constantes a determinar. En este ejemplo resultan:

$$k_1 = -1$$

$$k_2 = 2$$

Ejemplo de Solución de una ODE

1. ODEs / condiciones iniciales ➡ $$\frac{d^2y}{dt^2} + 6\frac{dy}{dt} + 8y = 2 \quad y(0) = y'(0) = 0$$

2. Aplicar la Transformada de Laplace a cada término ➡ $$s^2 Y(s) + 6sY(s) + 8Y(s) = 2/s$$

3. Resolver para Y(s) ➡ $$Y(s) = \frac{2}{s(s+2)(s+4)}$$

4. Aplicar expansión en fracciones parciales ➡ $$Y(s) = \frac{1}{4s} + \frac{-1}{2(s+2)} + \frac{1}{4(s+4)}$$

5. Aplicar transformada inversa de Laplace a cada término ➡ $$y(t) = \frac{1}{4} - \frac{e^{-2t}}{2} + \frac{e^{-4t}}{4}$$

Función de Transferencia

Ing. Eddie Sobrado

Función de Transferencia

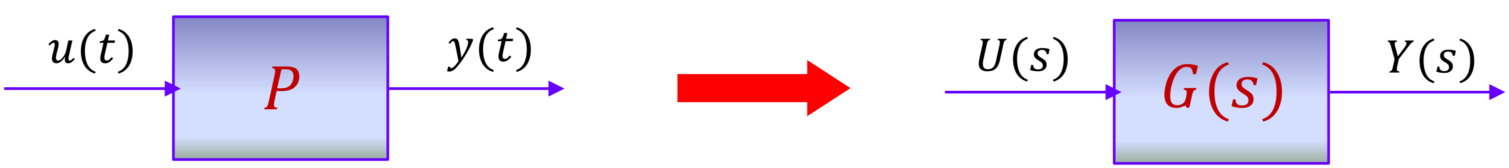
- El modelo de Función de Transferencia (FT) de un sistema es definido como la relación de la transformada de Laplace de la salida al de la entrada con *condiciones iniciales cero*.
- Para un sistema físico, con una variable de salida Y y una variable de entrada U , la F.T. se define como:

$$G(s) = \frac{L\{Salida\}}{L\{Entrada\}} = \frac{Y(s)}{U(s)}$$

¡considerando condiciones iniciales cero!

Introducción

- Función de Transferencia:
  - ✓ Forma clásica de modelar sistemas lineales
  - ✓ Representación entrada-salida
  - ✓ Se puede determinar mediante ensayos (respuesta al impulso/escalón)



$$\frac{dy(t)}{dt} = b \cdot u(t) - a \cdot y(t) \quad \Rightarrow \quad \frac{Y(s)}{U(s)} = G(s) = \frac{b}{s+a}$$

Función de Transferencia

- En general, el modelo de función de transferencia de un sistema <u>Lineal Invariante en el Tiempo</u> (LTI) físicamente realizable es la relación de dos polinomios en '*s*' con el orden del numerador menor o igual que el denominador.
- Sí el orden del numerador es menor que del denominador se dice que la función de transferencia es *estrictamente propia*.
- Sí son del mismo orden se dice que es *propia*.

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{\sum_{i=0}^{m} b_i s^i}{\sum_{k=0}^{n} a_k s^k}$$

Modelo de Función de Transferencia de un Sistema LTI

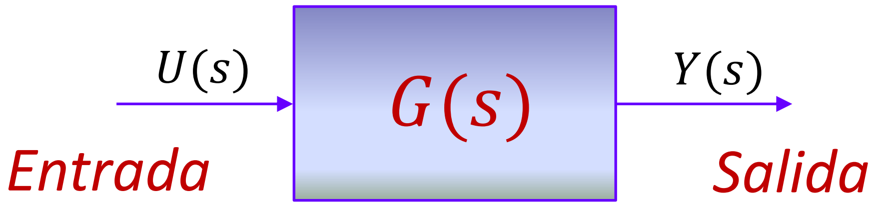
$$con\ m \leq n$$

Función de Transferencia

- De la definición podemos ver que, multiplicando la señal de ENTRADA U(s) por la F.T. G(s) obtenemos la señal de SALIDA Y(s), o sea:

$$Y(s) = G(s)U(s)$$

- El Diagrama de Bloque para una F.T. simple es:



Determinación de la Función de Transferencia

- Para determinar la FT de un sistema debemos aplicar la transformada de Laplace a la ecuación diferencial del modelo, considerando condiciones iniciales nulas:

$$a_n \frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \cdots a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t) = \cdots$$

$$\ldots b_m \frac{d^m u(t)}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} u(t)}{dt^{m-1}} + \cdots b_1 \frac{du(t)}{dt} + b_0 u(t)$$

$$\boxed{G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \cdots b_1 s^1 + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots a_1 s^1 + a_0}} \qquad m \leq n$$

- Polinomio característico: polinomio denominador $\Delta(s)$
- Polos: raíces del polinomio característico $p_1, \ldots p_n$
- Ceros: raíces del polinomio numerador $z_1, \ldots z_n$
- Ganancia estática: $G(0)$

Ecuación característica, Polos y Ceros

$$G(s) = \frac{Ms + b}{Ms^2 + bs + k} = \frac{Num(s)}{Den(s)}$$

- Se denomina Ecuación Característica cuando el polinomio del denominador se iguala a cero, es decir:

$$\boxed{Den(s) = 0}$$

- Las raíces la ecuación característica determinan el comportamiento de la respuesta en el tiempo. Estas raíces son llamadas **polos** del sistema
- Las raíces del polinomio del numerador, se denominan los **ceros** del sistema.

$$\boxed{Num(s) = 0}$$

El grado del denominador debe ser mayor que el del numerador para tener causalidad

Ecuación característica, Polos y Ceros

- Para un caso específico: $$G(s) = \frac{s+3}{(s+1)(s+2)} = \frac{N(s)}{D(s)}$$

para esta función se puede determinar el correspondiente diagrama de polos y ceros.

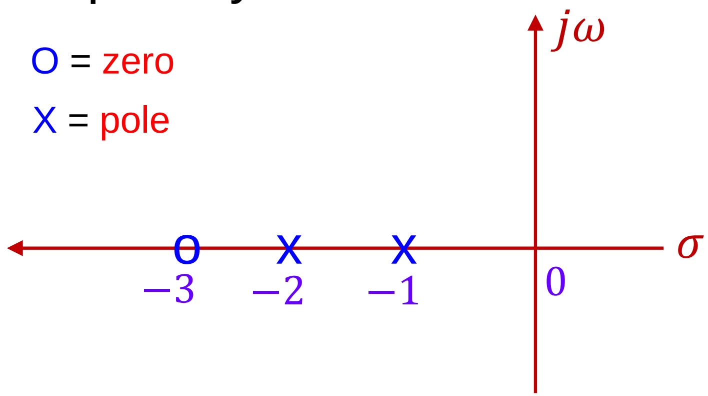


Diagrama de polos y ceros en el plano s.

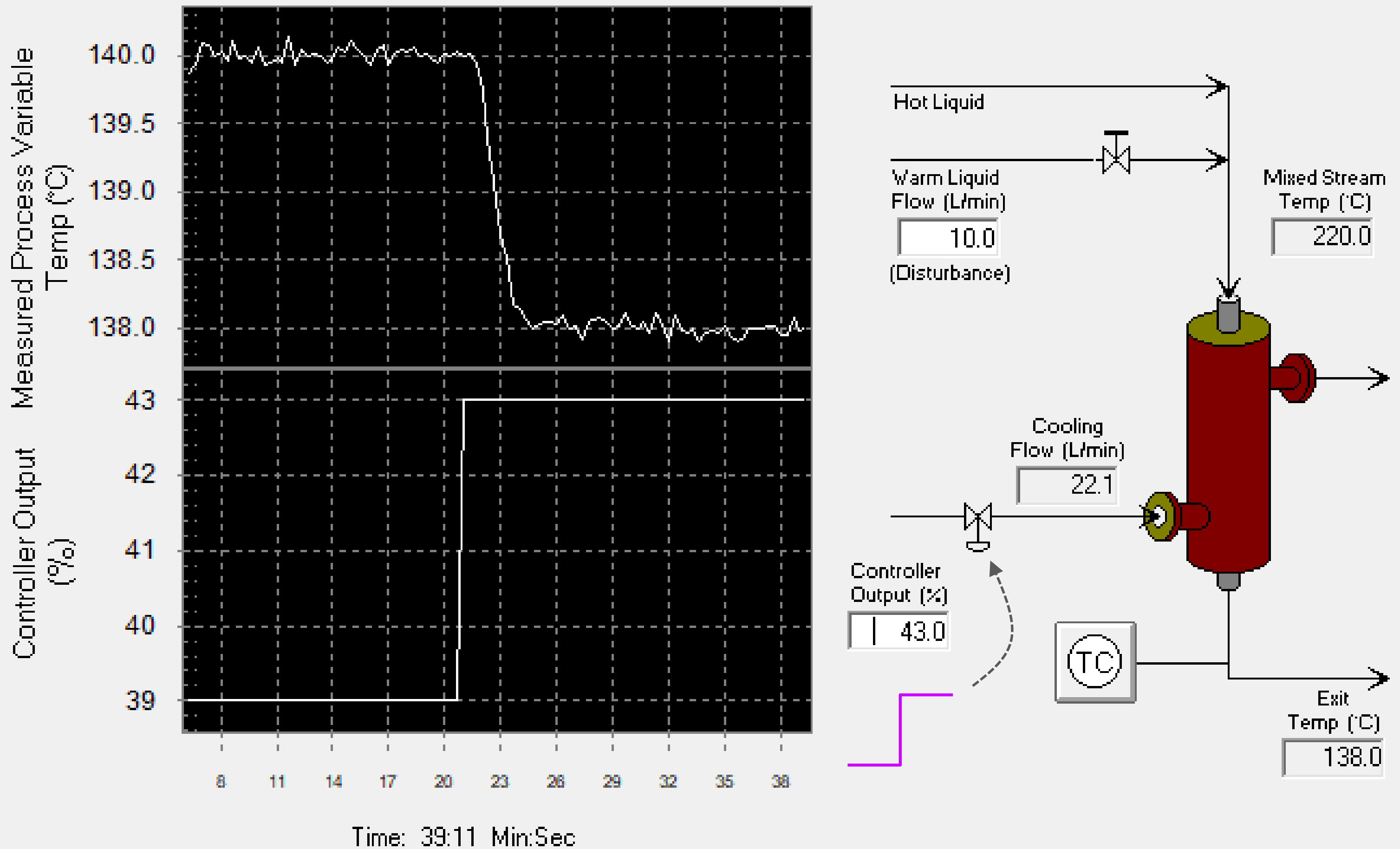
Ceros de G(s) = raíces de N(s) = 0 ⇨ $s + 3 = 0 \; \begin{cases} s = -3 \end{cases}$

Polos de G(s) = raíces de D(s) = 0 ⇨ $(s+1)(s+2) = 0 \; \begin{cases} s = -1 \\ s = -2 \end{cases}$

Ecuación característica, Polos y Ceros

Influencia de los polos en la respuesta en el tiempo

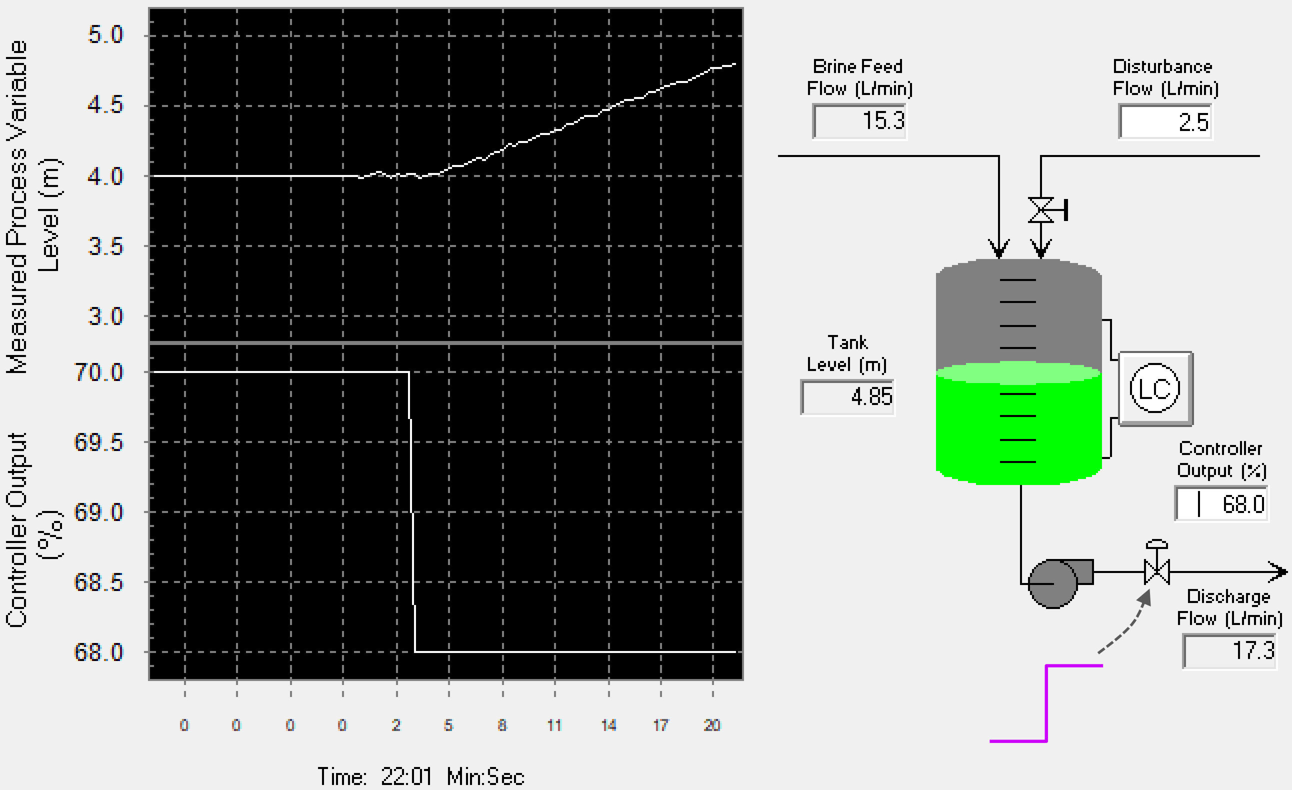
- Según la ubicación de los polos en el plano s, la respuesta en el tiempo tendrá alguna característica.



Ecuación característica, Polos y Ceros

Influencia de los polos en la respuesta en el tiempo

- Según la ubicación de los polos en el plano s, la respuesta en el tiempo tendrá alguna característica.



Ecuación característica, Polos y Ceros

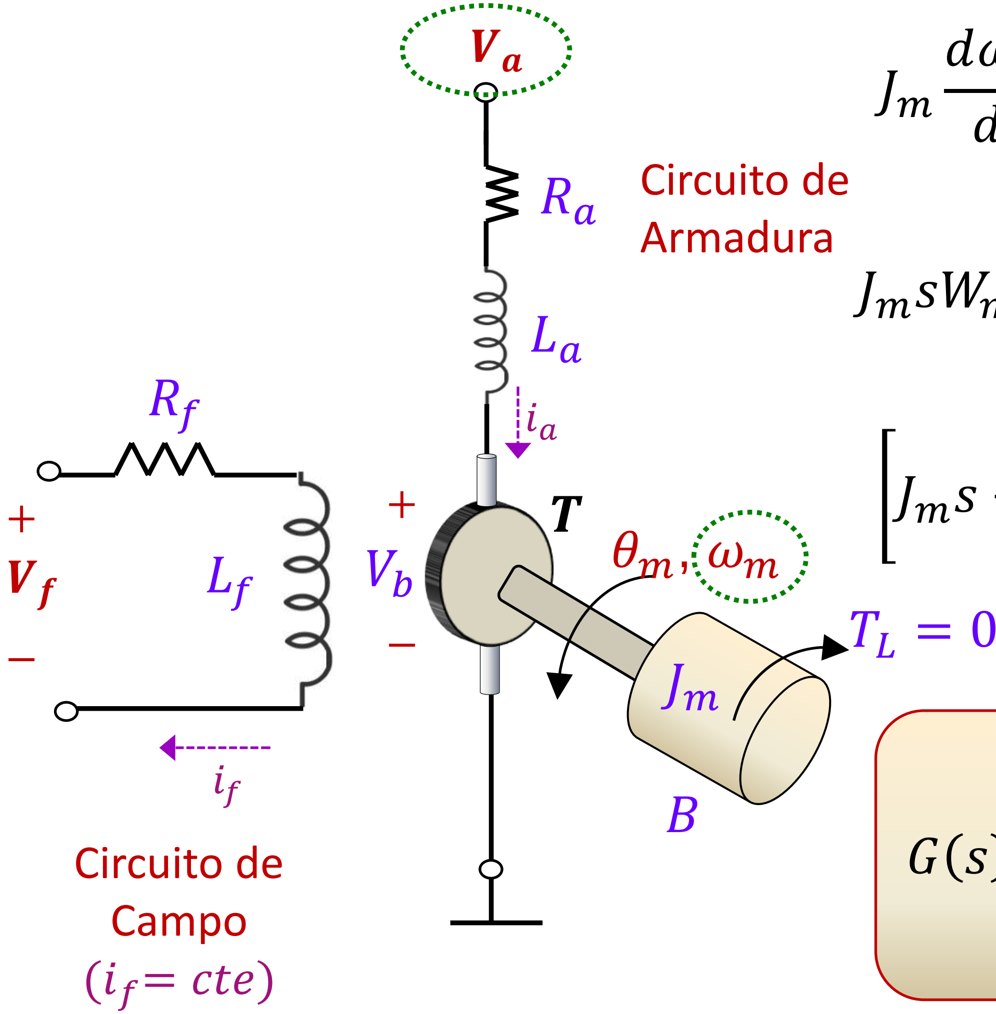
EN MATLAB

Comando raíces: roots()

```
clear all;
close all;
clc;
num = [1 3];
den = [1 3 2];
ceros = roots(num)
polos = roots(den)
```

Determinación de la Función de Transferencia

- Ejemplo. Determine la F.T. de un motor CD. controlado por armadura (La despreciable).



$$J_m \frac{d\omega_m}{dt} + \left[B + \frac{K_i K_b}{R_a}\right]\omega_m = \frac{K_i}{R_a} V_a$$

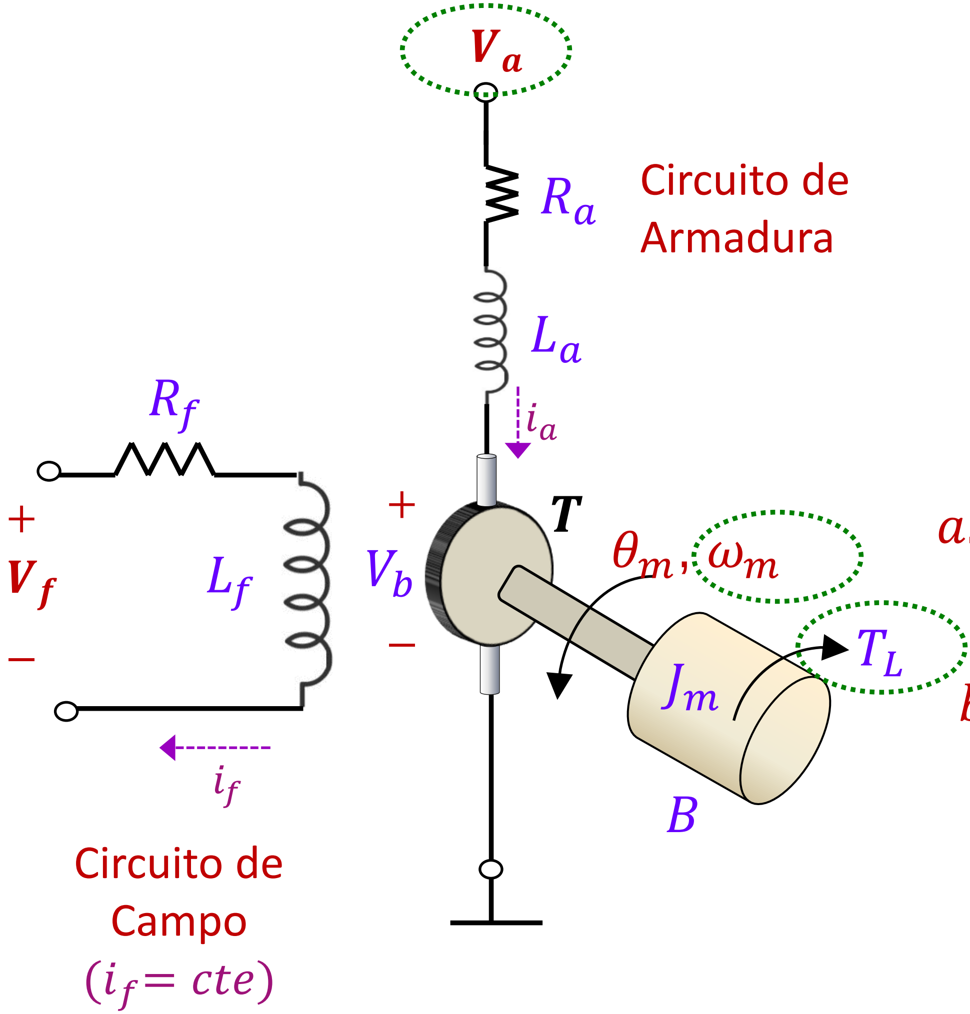
$$J_m s W_m(s) + \left[B + \frac{K_i K_b}{R_a}\right] W_m(s) = \frac{K_i}{R_a} V_a(s)$$

$$\left[J_m s + B + \frac{K_i K_b}{R_a}\right] W_m(s) = \frac{K_i}{R_a} V_a(s)$$

$$\boxed{G(s) = \frac{W_m(s)}{V_a(s)} = \frac{\frac{K_i}{R_a}}{J_m s + B + \frac{K_i K_b}{R_a}}}$$

FT desde las ecuaciones diferenciales

- Ejercicio. Determine la(s) F.T.(s) de un motor CD. controlado por armadura (La NO despreciable).



$$V_a = R_a i_a + L_a \frac{di_a}{dt} + K_b \omega_m$$

$$J_m \frac{d\omega_m}{dt} + B\omega_m = K_i i_a - T_L$$

$a.\ Para\ T_L = 0$

$$\frac{W_m(s)}{V_a(s)} = ?$$

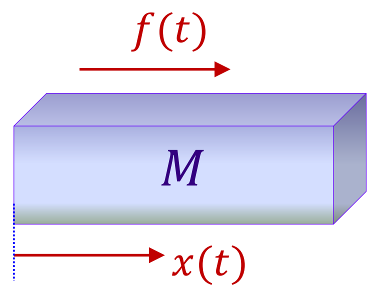
$b.\ Para\ T_L \neq 0$

$$\frac{W_m(s)}{V_a(s)} = ?$$

$$\frac{W_m(s)}{T_L(s)} = ?$$

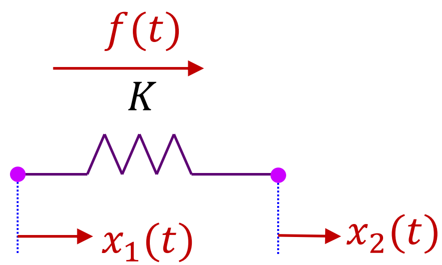
FT desde las ecuaciones diferenciales

Consideremos:



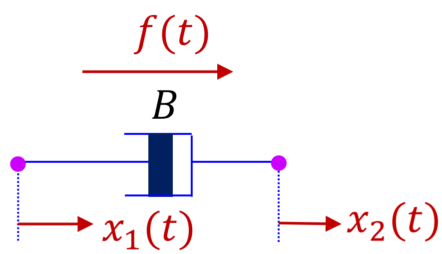
Masa

$$f(t) = M\frac{d^2x(t)}{dt^2}$$



Muelle

$$f(t) = K[x_1(t) - x_2(t)]$$

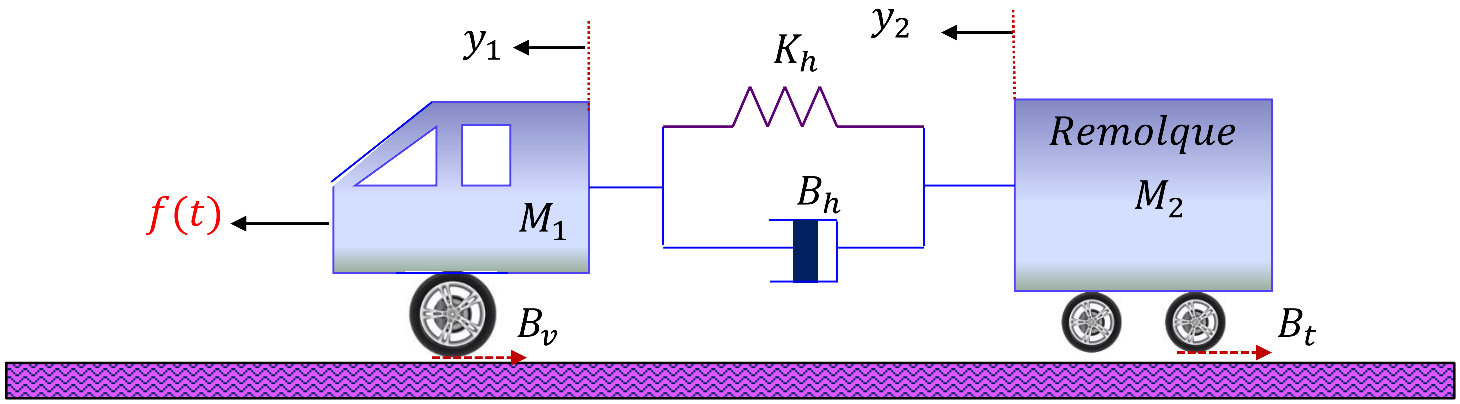


Amortiguador

$$f(t) = B\left[\frac{dx_1(t)}{dt} - \frac{dx_2(t)}{dt}\right]$$

FT desde las ecuaciones diferenciales

- Ejercicio. Determine la función de transferencia del sistema vehículo-remolque: $\frac{y_2(s)}{f(s)}$.

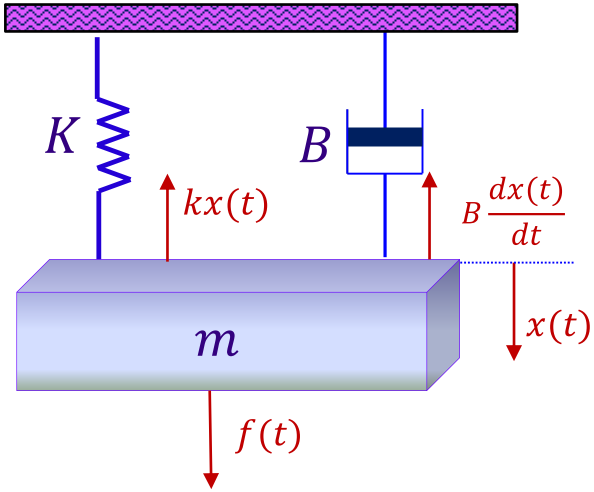


$$M_1 \frac{d^2 y_1}{dt^2} = f - B_v \frac{dy_1}{dt} - K_h(y_1 - y_2) - B_h \left[\frac{dy_1}{dt} - \frac{dy_2}{dt}\right]$$

$$M_2 \frac{d^2 y_2}{dt^2} = K_h(y_2 - y_1) + B_h \left[\frac{dy_2}{dt} - \frac{dy_1}{dt}\right] - B_t \frac{dy_2}{dt}$$

FT desde las ecuaciones diferenciales

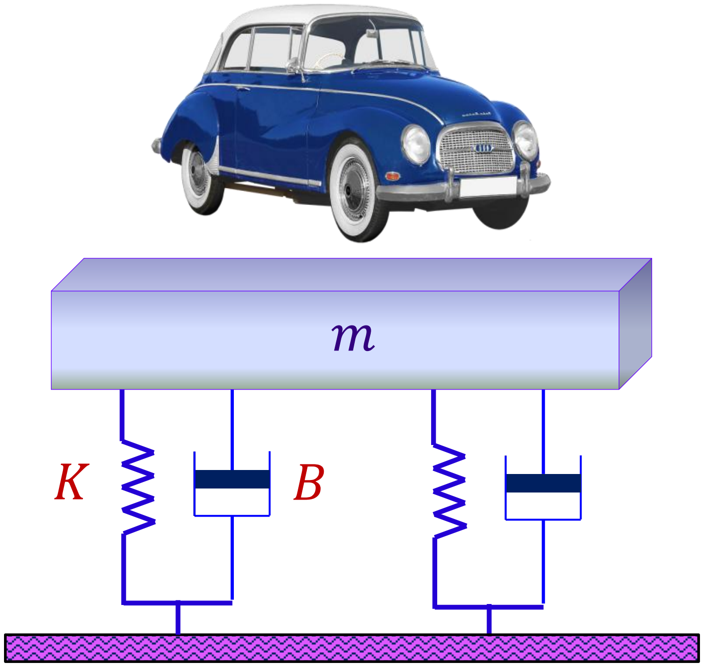
Sistema Masa Muelle Amortiguador

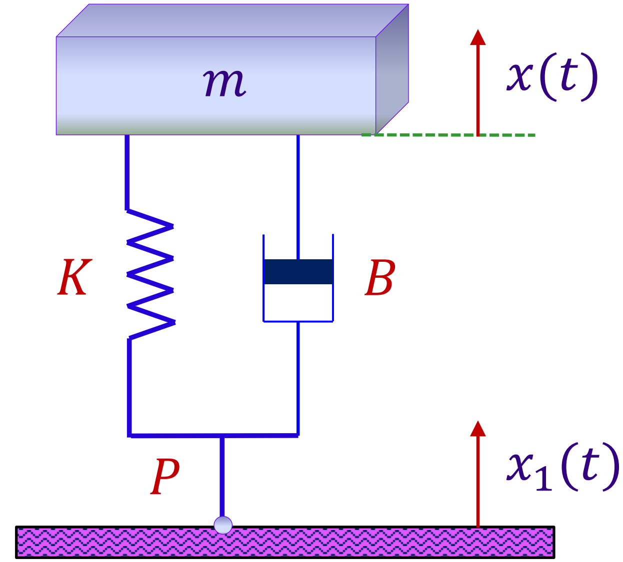


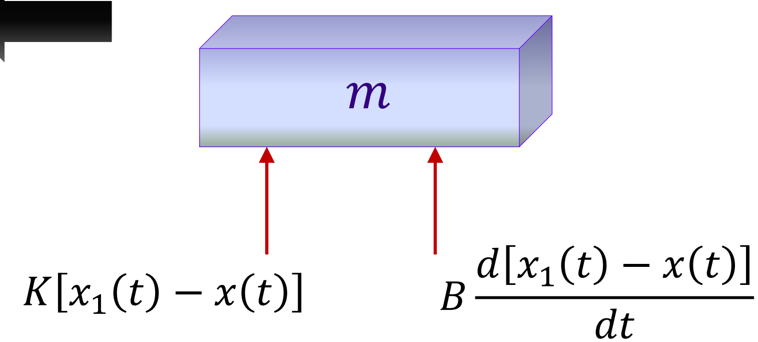
$$m\frac{d^2x(t)}{dt^2} = f(t) - Kx(t) - B\frac{dx(t)}{dt}$$

$$G(s) = \frac{X(s)}{F(s)} \Rightarrow G(s) = \frac{1}{ms^2 + Bs + K}$$

Sistema de suspensión de coche: 1era aproximación





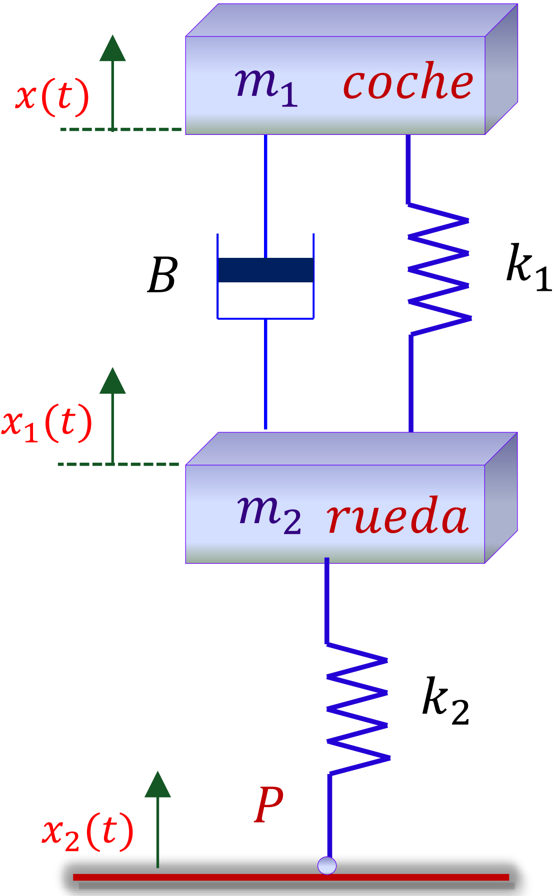


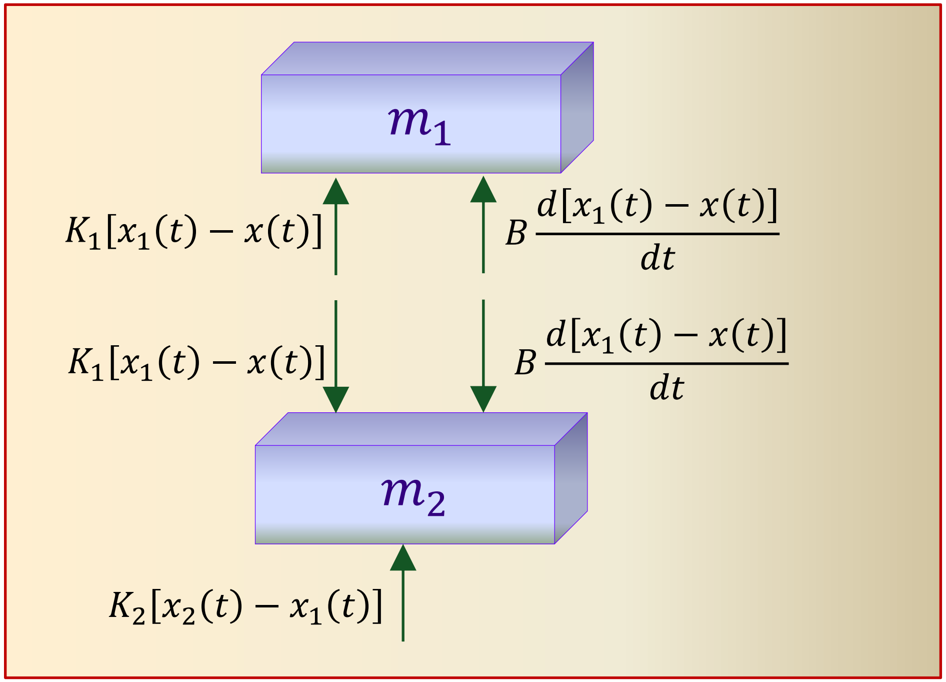
$$m\frac{d^2x(t)}{dt^2} = B\frac{d[x_1(t) - x(t)]}{dt} + K[x_1(t) - x(t)]$$

$$G(s) = \frac{X(s)}{X_1(s)}$$

$$\boxed{G(s) = \frac{Bs + K}{ms^2 + Bs + K}}$$

Sistema de suspensión de coche: 2da aproximación





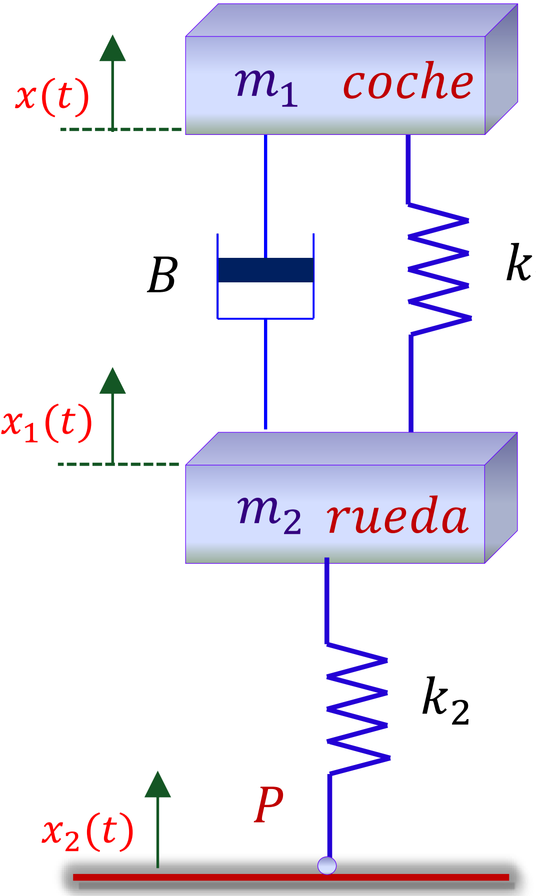
$$m_1\frac{d^2x(t)}{dt^2} = B\frac{d[x_1(t) - x(t)]}{dt} + K_1[x_1(t) - x(t)]$$

$$m_2\frac{d^2x_1(t)}{dt^2} = K_2[x_2(t) - x_1(t)] - K_1[x_1(t) - x(t)] - B\frac{d[x_1(t) - x(t)]}{dt}$$

$$G(s) = \frac{X(s)}{X_2(s)} \Rightarrow G(s) = \frac{K_2[Bs + K_1]}{m_1m_2s^4 + B(m_1 + m_2)s^3 + [K_2m_1 + K_1(m_1 + m_1)]s^2 + K_2Bs + K_1K_2}$$

$$\boxed{\lim_{k_2\to\infty} G(s) = \frac{Bs + K_1}{m_1s^2 + Bs + K_1}}$$

Sistema de suspensión de coche: 2da aproximación



Actividad para realizar en casa

Se sabe que b=1300 Ns/cm, k1=2000 KN/cm, k2=50KN/cm, m2=1850 kg y m1 = 20 kg.

a. Si se le aplica una cambio escalón unitario en la entrada de fuerza, obtener la expresión en el tiempo, es decir, la transformada inversa de dicha función.

b. Utilizando Matlab o simulink, grafica la respuesta del desplazamiento en el tiempo para t = [0,20]

Forma General de la Función de Transferencia (FT)

Forma General de la Función de Transferencia

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = G(s) = \frac{N(s)}{D(s)} e^{-T_d s} = \frac{K\overbrace{(s-z_1)(s-z_2)\ldots(s-z_m)}^{\text{Polinomios de s}}}{\underbrace{(s-p_1)(s-p_2)\ldots(s-p_n)}_{\text{Polinomios de s}}} e^{-T_d s}$$

- Raíces del polinomio del denominador $D(s)$ (las cuales son $p_1, \ldots p_n$) se llaman polos de la función de transferencia.
- Raíces del polinomio del numerador $N(s)$ (las cuales son $z_1, \ldots z_n$) se llaman ceros de la función de transferencia

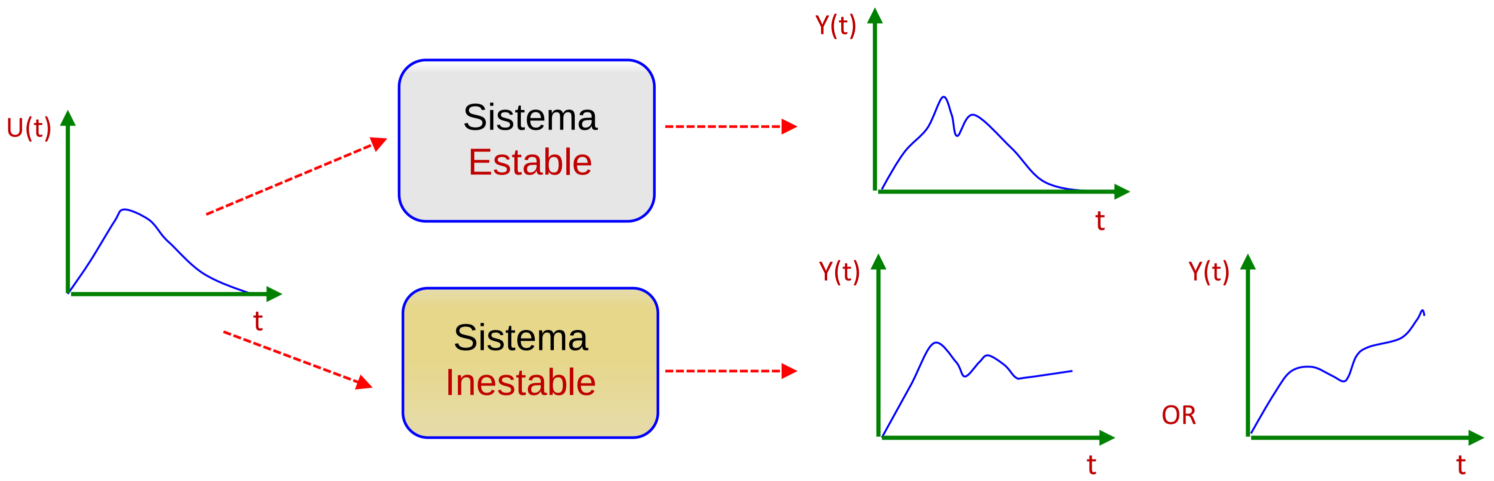
$$G(s) = \frac{(2s+1)}{s^2+4s+3} \qquad p_1 = -3,\ p_2 = -1, z_1 = -\frac{1}{2} \qquad \textit{2 polos, 1 cero}$$

$$G(s) = \frac{5}{s^2-s+3} \qquad p_1, p_2 = \frac{1 \pm \sqrt{1-4}}{2} = \frac{1 \pm j\sqrt{3}}{2} \qquad \textit{2 polos}$$

Análisis de un Sistema

- Dada una función de transferencia $G(s)$, ¿qué puede decir “rápidamente” (sin hacer ningún cálculo) acerca de la dinámica que representa la función de transferencia?
  - Estabilidad: La entrada retorna a su valor de equilibrio original (después de alguna excursión) $\rightarrow$ ¿La salida regresará eventualmente a su valor original de equilibrio?
  - Ganancia: Cambio de Salida/Cambio de Entrada
  - ¿Sobreamortiguado o subamortiguado? Sí es subamortiguado, ¿frecuencia de oscilación?
  - ¿presenta respuesta inversa o sobreimpulso?
  - Velocidad de respuesta general (ejm. tiempo de establecimiento).

Estabilidad



Para sistemas lineales, si la entrada es acotada $\rightarrow$ la salida es acotada

- Sí todos los polos tienen parte real negativa, la dinámica es ESTABLE.
- Sí cualquier polo tiene parte real positiva o cero, la dinámica es INESTABLE.

Ejemplos

Función de Transferencia	Estabilidad	Respuesta Impulsiva
$\dfrac{1}{(s-1)(s+5)}$	Inestable	$Ae^{t} + Be^{-5t}$
$\dfrac{1}{s(s+5)}$	Inestable	$A + Be^{-5t}$
$\dfrac{1}{(s+2)(s+5)}$	Estable	$Ae^{-2t} + Be^{-5t}$

Notas importantes

- La F.T. Es definida solamente para sistemas lineales invariantes en el tiempo.
- La F.T. es una propiedad del sistema, independiente de la magnitud y naturaleza de la entrada o función de excitación.
- La F.T. no proporciona información acerca de la estructura física del sistema.
- Analizando la F.T. de un sistema se predice como será la salida o respuesta del sistema para varios tipos de entrada, es decir, podemos comprender el comportamiento de dicho sistema antes de simular.
- La F.T. se puede determinar experimentalmente introduciendo entradas conocidas y analizando la salida del sistema. Este proceso se llama: Identificación.

Notas importantes

Relación entre la F.T. y la Respuesta Impulsiva :

- Considere un sistema con condiciones iniciales igual a cero, y una entrada $u(t)$ que es una función impulso unitario. Como la transformada de Laplace de la función impulso unitario es la unidad, entonces la transformada de Laplace de la salida del sistema es:

$$Y(s) = G(s)U(s) = G(s)$$

- Entonces tenemos que

$$G(s) = L[y(t)]$$

- Por lo tanto

La función de transferencia de un sistema es igual a la transformada de Laplace de su respuesta impulsiva