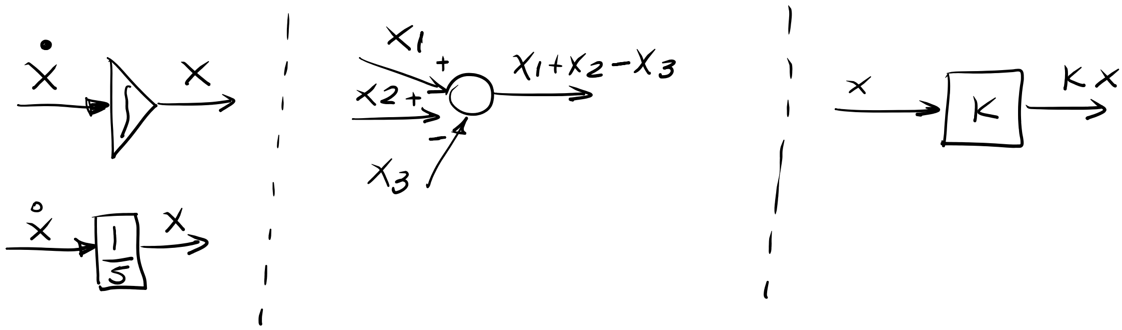
Clase sesión 2

miércoles, 27 de marzo de 2024 09:17

Diagrama de Simulación de bloques



Dado el modelo de estado de una planta

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1(t)\\ \dot{x}_2(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 2\\ -4 & -3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1\\ 2\end{bmatrix}u(t)$$

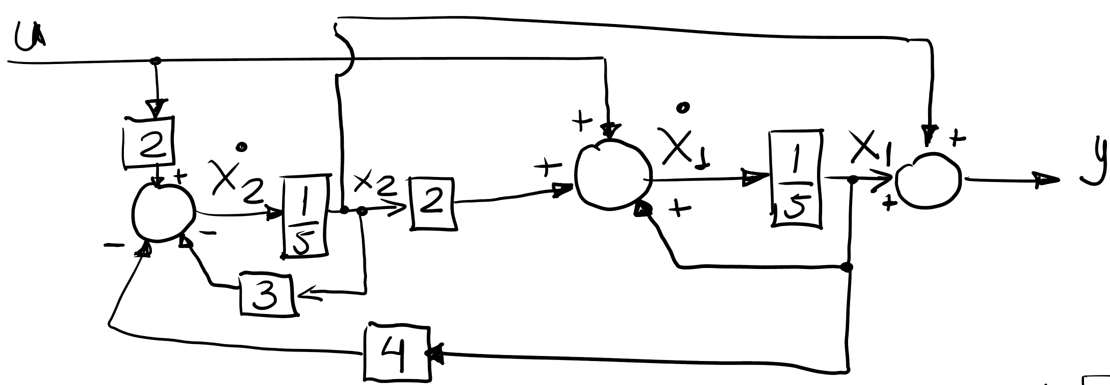
$$y(t)=\begin{bmatrix}1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\end{bmatrix}$$

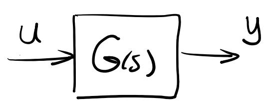
Construir su diagrama de simulación

$$\dot{x}_1 = x_1 + 2x_2 + u$$

$$\dot{x}_2 = -4x_1 - 3x_2 + 2u$$

$$y = x_1 + x_2$$





$$\mathbf{G}_{\mathbf{u}}(s)=\frac{\mathbf{C}[adj(\mathbf{sI}-\mathbf{A})]\mathbf{B}+|\mathbf{sI}-\mathbf{A}|\mathbf{D}}{|\mathbf{sI}-\mathbf{A}|}$$

$$G(s) = \frac{y}{u}$$

Nota

$$M^{-1} = \frac{adj(M)}{|M|}$$

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

$$y = Cx + \cancel{D}u \quad ..(1)$$

en (1)

$\dot{x} = Ax + Bu$

$y = Cx + \cancel{D}u \;\ldots(1)$, $D = 0$

$sX = AX + BU$

$X(sI - A) = BU$

$X = (sI-A)^{-1} \cdot B\,U$

en (1)

$y = C(sI-A)^{-1} \cdot B \cdot u + Du$

$y = (C(sI-A)^{-1} \cdot B + D)\,u$

$\dfrac{y}{u} = C(sI-A)^{-1} \cdot B + \cancel{D}$, $D = 0$

$G(s) = \dfrac{num(G(s))}{den(G(s))}$ $\quad den(G(s))$ = ecuación característica (Δc)

$F.T. = \dfrac{y}{u} = G(s) = C\,\dfrac{(adj(sI-A)) \cdot B}{|sI-A|}$ $\quad \therefore\ \Delta c = |sI - A|$

Ejemplo:

Dadas las matrices del modelo de estado de un s. de control

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & -5 \end{bmatrix}; \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

a) Determinar su ec. característica.
b) Determinar los valores propios de la matriz A

$\Delta c = |sI - A|$

$$\Delta c = \left| \begin{bmatrix} s & 0 & 0 \\ 0 & s & 0 \\ 0 & 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & -5 \end{bmatrix} \right|$$

$$\begin{array}{ccc} + & - & + \end{array}$$

$$\Delta c = \begin{vmatrix} s & -1 & 0 \\ 0 & s & -1 \\ 2 & 1 & s+5 \end{vmatrix} = s(s(s+5)+1) + 2$$

$$= s^3 + 5s^2 + s + 2$$

Ejemplo:

Dado el modelo de estado de un sistema de control

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \underbrace{\begin{bmatrix} -3 & 1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}}_{A} \mathbf{x}(t) + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{B} u(t)$$

$$y(t) = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}}_{C} \mathbf{x}(t)$$

Determinar la FT:

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = ?$$

$F.T. = G(s) = C(sI-A)^{-1} \cdot B$

Nota:

$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \dfrac{adj\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}$

$[d \ -b]$

$\frac{Y(s)}{U(s)} = ?$

$$= \frac{\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}}{ad - cb} \qquad \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

$$F.T. = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s+3 & -1 \\ 2 & s \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s & 1 \\ -2 & s+3 \end{bmatrix}}{s^2+3s+2} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{s}{s^2+3s+2} & \frac{1}{s^2+3s+2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$F.T. = \frac{1}{s^2+3s+2}$$

$$X(t) = \underbrace{\mathcal{L}^{-1}\left((sI-A)^{-1} \cdot X_{(0)}\right)} + \mathcal{L}^{-1}\left((sI-A)^{-1} \cdot B \cdot u\right)$$

Nota

$$\frac{a}{s+b} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} a \cdot e^{-bt}$$

Ejemplo: $y(t) = CX$

Se tiene el modelo de estado de un sistema,

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \mathbf{u}(t)$$

$$y = \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & -1 \end{bmatrix}}_{C} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

a) Determinar la respuesta en el tiempo de las variables de estado de este sistema debido a las c.i.

$$\mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} x_{10} \\ x_{20} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$y = C x_i$$

$$y = \begin{bmatrix} 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} = 4$$

b) Determinar la respuesta en el tiempo de las variables de estado de este sistema debido a una entrada tipo escalón unitario.

a) $$\underset{c.i.}{X(t)} = \mathcal{L}^{-1}(sI-A)^{-1} \cdot X_{(0)} = \mathcal{L}^{-1}\left(\begin{bmatrix} s+3 & -1 \\ 2 & s \end{bmatrix}^{-1}\right) \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{\begin{bmatrix} s & 1 \\ -2 & s+3 \end{bmatrix}}{s^2+3s+2}\right) \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \mathcal{L}^{-1} \begin{bmatrix} \frac{s}{(s+1)(s+2)} & \frac{1}{(s+1)(s+2)} \\ \frac{-2}{(s+1)(s+2)} & \frac{s+3}{(s+1)(s+2)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\begin{bmatrix} \frac{-1}{s+1}+\frac{2}{s+2} & \frac{1}{s+1}-\frac{1}{s+2} \\ \frac{-2}{s+1}+\frac{2}{s+2} & \frac{2}{s+1}-\frac{1}{s+2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix}3\\2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -e^{-t}+2e^{-2t} & e^{-t}-e^{-2t} \\ -2e^{-t}+2e^{-2t} & 2e^{-t}-e^{-2t} \end{bmatrix}\begin{bmatrix}3\\2\end{bmatrix}$$

$$X_{c.i.}(t) = \begin{bmatrix} -e^{-t}+4e^{-2t} \\ -2e^{-t}+4e^{-2t} \end{bmatrix}$$

$$u = \frac{1}{s}$$

b) $X_u(t) = \mathcal{L}^{-1}\left((sI-A)^{-1}\cdot B\cdot u\right)$

$$= \mathcal{L}^{-1}\left(\begin{bmatrix} \frac{s}{(s+1)(s+2)} & \frac{1}{(s+1)(s+2)} \\ \frac{-2}{(s+1)(s+2)} & \frac{s+3}{(s+1)(s+2)} \end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\left(\frac{1}{s}\right)\right)$$

$$= \mathcal{L}^{-1}\begin{bmatrix} \frac{1}{(s+1)(s+2)s} \\ \frac{s+3}{(s+1)(s+2)s} \end{bmatrix}$$

$$\frac{s+3}{(s+1)(s+2)\,s} = \frac{A}{s+1}+\frac{B}{s+2}+\frac{C}{s}$$

$$s+3 = A(s+2)(s)+B(s+1)(s)+C(s+1)(s+2)$$

$$s+3 = A(1s^2+2s)+B(1s^2+1s)+C(1s^2+3s+2)$$

$$\left.\begin{matrix} A+B+C=0 \\ 2A+B+3C=1 \end{matrix}\right\} \quad \begin{matrix} A+3=1 \\ A=-2 \end{matrix}$$

$$2C=3 \rightarrow C=1.5$$

$$B=0.5$$

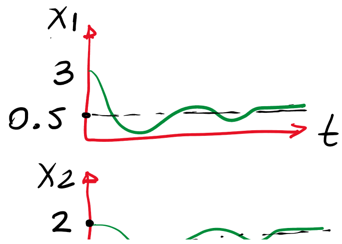
$$\mathcal{L}^{-1}\begin{bmatrix} \frac{-1}{s+1}+\frac{0.5}{s+2}+\frac{0.5}{s} \\ \frac{-2}{s+1}+\frac{0.5}{s+2}+\frac{1.5}{s} \end{bmatrix}$$

$$X_u(t) = \begin{bmatrix} -e^{-t}+0.5e^{-2t}+0.5 \\ -2e^{-t}+0.5e^{-2t}+1.5 \end{bmatrix}$$

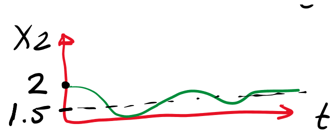
$$X_{TOTAL} = X_{c.i.}(t) + X_u(t)$$

$$\begin{bmatrix} -e^{-t}+4e^{-2t} \\ -2e^{-t}+4e^{-2t} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -e^{-t}+0.5e^{-2t}+0.5 \\ -2e^{-t}+0.5e^{-2t}+1.5 \end{bmatrix}$$

$$X_T = \begin{bmatrix} -2e^{-t}+4.5e^{-2t}+0.5 \\ -4e^{-t}+4.5e^{-2t}+1.5 \end{bmatrix}$$



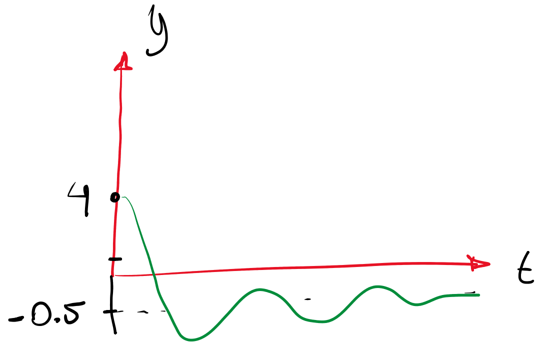
$$\left[-4e^{-t} + 4.5e^{-2t} + 1.5\right]$$



$$y = Cx = \begin{bmatrix} 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2e^{-t} + 4.5e^{-2t} + 0.5 \\ -4e^{-t} + 4.5e^{-2t} + 1.5 \end{bmatrix}$$

$$y_T = 4.5e^{-2t} - 0.5$$

$$y_{(0)} = 4$$
$$t = 0$$



Ejemplo 2

Se tiene el modelo de estado de un sistema,

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t); \qquad y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$$

a) Determinar la respuesta en el tiempo de las variables de estado de este sistema debido a las c.i.

$$\mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

b) Determinar la respuesta en el tiempo de las variables de estado de este sistema debido a una entrada tipo escalón unitario.

$$u(t) = 2u_s(t)$$

$$x_{ci} = \mathcal{L}^{-1} (sI - A)^{-1} \cdot x(0)$$

$$= \mathcal{L}^{-1} \begin{bmatrix} s+1 & 0 \\ 0 & s+2 \end{bmatrix}^{-1} x(0)$$

$$= \mathcal{L}^{-1} \begin{bmatrix} \frac{\cancel{s+2}}{(s+1)\cancel{(s+2)}} & 0 \\ 0 & \frac{\cancel{s+1}}{\cancel{(s+1)}(s+2)} \end{bmatrix}^{-1} x(0)$$

$$= \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^{-2t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2e^{-t} \\ 3e^{-2t} \end{bmatrix}$$

$$x_0(t) = \mathcal{L}^{-1} \begin{bmatrix} \frac{1}{s+1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{s+2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \left(\frac{2}{s}\right)$$

$$= \mathcal{L}^{-1} \begin{bmatrix} \frac{2}{(s+1)s} \\ 0 \end{bmatrix} = \mathcal{L}^{-1} \begin{bmatrix} \frac{-2}{s+1} + \frac{2}{s} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2e^{-t} + 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$x_T = \begin{bmatrix} 2 \\ 3e^{-2t} \end{bmatrix} \qquad y_T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 3e^{-2t} \end{bmatrix} = 2$$

$F.T. = C(sI-A)^{-1}B$

$$[1\ 0]\begin{bmatrix} \frac{s+2}{(s+1)(s+2)} & 0 \\ 0 & \frac{s+1}{(s+1)(s+2)} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{\cancel{s+2}}{(s+1)\cancel{(s+2)}} = \frac{1}{s+1}$$