1. Dada la función por tramos:

$$f(t)=\begin{cases} f_1, & 0<t<a \\ f_2, & a<t<b \\ f_3, & b<t \end{cases}$$

$$f(t)=\begin{cases} 2t & si\ 0\le t\le 1 \\ 2 & si\ 1<t<2 \\ 4-t & si\ 2\le t<3 \\ 0 & otro\ caso \end{cases}$$

$$f(t)=f_1+(f_2-f_1).U(t-a)+(f_3-f_2).U(t-b)$$

a. Escribir a la función $f(t)$ en forma horizontal empleando el escalón unitario.
b. Halle la transformada de Laplace de la función $f(t)$.
c. Determinar la transformada de Laplace de la primera derivada generalizada de la función dada.

$$\mathcal{L}(f(t-a)u(t-a))=e^{-as}.\mathcal{L}(f(t))$$

$$\mathcal{L}(g(t)u(t-a))=e^{-as}.\mathcal{L}(g(t+a))$$

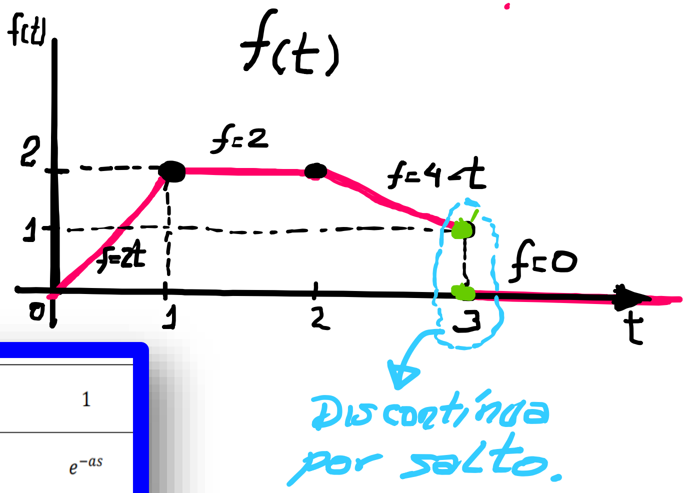
15	$\mathcal{L}\{f(t-a)u(t-a)\}$ =	$e^{-as}F(s)$

$$a)\ f(t)=2tu(t-0)+(2-2t)u(t-1)+(2-t)u(t-2)+(t-4)u(t-3)$$

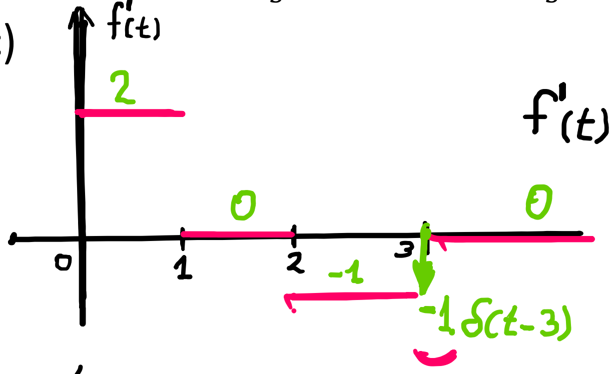
$$b)\ L\{f(t)\}=2L\{tu(t-0)\}+L\{(2-2t)u(t-1)\}+L\{(2-t)u(t-2)\}+L\{(t-4)u(t-3)\}$$

$$L\{f(t)\}=2e^{-0s}L\{t+0\}+e^{-1s}L\{2-2(t+1)\}+e^{-2s}L\{2-(t+2)\}+e^{-3s}L\{(t+3)-4\}$$

$$L\{f(t)\}=2.\frac{1}{s^2}+e^{-1s}.(-2.\frac{1}{s^2})+e^{-2s}.(-\frac{1}{s^2})+e^{-3s}.(\frac{1}{s^2}-\frac{1}{s})$$



c)



$$f'(t)=\begin{cases} 2, & 0<t<1 \\ 0, & 1<t<2 \\ -1, & 2<t<3 \\ 0, & 3<t \\ -1\delta(t-3), & t=3 \end{cases}$$

25	$\delta(t)$	1
26	$\delta(t-a)$	e^{-as}

$$f'(t)=2+(-2)U(t-1)+(-1).U(t-2)+(+1)U(t-3)-1\delta(t-3)$$

$$L(f'(t))=L(2)-2L(U(t-1))-L(U(t-2))+L(U(t-3))-L(\delta(t-3))$$

$$=\frac{2}{s}-2\cdot\frac{e^{-1s}}{s}-\frac{e^{-2s}}{s}+\frac{e^{-3s}}{s}-e^{-3s}.$$

2. Una señal tiene por transformada de Laplace la función $F(s)$, halle dicha señal en el tiempo.

$f(t)$

a. $F(s) = \dfrac{s^2}{(s+1)^3} = L(f(t))$?? b. $F(s) = \dfrac{s - se^{-\pi s/2}}{s^2+16} = L(f(t))$??

a) $L\{f(t)\} = \dfrac{s^2}{(s+1)^3}$ vamos a desaparecerlo.

14	$L(e^{at}f(t))$	=	$F(s-a)$

Multiplicamos a $f(t)$ por e^{1t} para que las s disminuyan en 1:

$L(f(t)) = \dfrac{s^2}{(s+1)^3} \Rightarrow L\{e^{+1t}f(t)\} = \dfrac{(s-1)^2}{(s-1+1)^3}$

$L(e^t f(t)) = \dfrac{s^2 - 2s + 1}{s^3}$

$L(e^t f(t)) = \dfrac{1}{s} - \dfrac{2.1}{s^2} + \dfrac{1}{2}\dfrac{1.2}{s^3}$

$L(e^t f(t)) = L(1) - 2L(t) + \frac{1}{2}L(t^2)$

$e^t f(t) = 1 - 2t + \frac{1}{2}t^2 \Rightarrow f(t) = e^{-t}(1 - 2t + \frac{1}{2}t^2)$

b) $L\{f(t)\} = \dfrac{s - se^{-\pi s/2}}{s^2+16}$

$L\{f(t)\} = \dfrac{s}{s^2+16} - e^{-\frac{\pi s}{2}}\dfrac{s}{s^2+16}$

$L\{f(t)\} = L\{cos4t\} - e^{-\frac{\pi}{2}.s}.L\{cos4t\}$

15	$L(f(t-a)u(t-a))$	=	$e^{-as}F(s)$

$e^{-as}.\mathcal{L}(f(t)) = \mathcal{L}(f(t-a)u(t-a))$

$L\{f(t)\} = L\{cos4t\} - L\left\{u(t-\frac{\pi}{2})cos4(t-\frac{\pi}{2})\right\}$

$f(t) = Cos4t - u(t-\frac{\pi}{2}).\underbrace{Cos(4t-2\pi)}_{cos\,4t}$ Rpta.

La Rpta sin $u(t-\frac{\pi}{2}) = \begin{cases} 0, & t<\pi/2 \\ 1, & t\geq \pi/2 \end{cases}$

$f(t) = \begin{cases} cos4t - 0.cos4t, & t<\frac{\pi}{2} \\ \underbrace{cos4t - 1.cos4t}_{0}, & t>\frac{\pi}{2} \end{cases}$

3. Dada la ecuación integro-diferencial que representa a un sistema LTI como sigue:

$$0{,}5\frac{di(t)}{dt} + \int_0^t i(z)dz + i(t) = v(t)$$

Donde la señal de entrada es $v(t)$ y la señal de salida es $i(t)$. Usando la trasformada de Laplace.

ó Respuesta.

a. Halle la función de transferencia del sistema. → ¿ $G(s) = \frac{L(\text{salida})}{L(\text{entrada})} = \frac{I_{(s)}}{V_{(s)}}$?

b. Halle la respuesta si la entrada es $v(t) = u(t-3)$

c. Halle la respuesta si la entrada es el impulso unitario.

d. ¿Cuál es la ecuación diferencial que verifica $i(t)$ si la entrada es $v(t) = u(t-1) - u(t-2)$?

20	$\int_0^t f(u)\,du$	$\frac{F(s)}{s}$

a)

$$\frac{1}{2}L\{i'(t)\} + L\{\int_0^t i(z)dz\} + L\{i(t)\} = L\{v(t)\}$$

$$\frac{1}{2}.(sI_s - \cancel{i(0)}^{0}) + \frac{I_s}{s} + I_s = V_s$$

$$I_s\left[\frac{s}{2} + \frac{1}{s} + 1\right] = V_s$$

$$I_s[\frac{s^2+2+2s}{2s}] = V_s$$

$$G(s) = \frac{I_s}{V_s} = \frac{2s}{(s+1)^2+1}$$ Rpta.

Asumir ?:

$i_{(0)} = 0$

$i'_{(0)} = 0$

$V_{(0)} = 0$

$V'_{(0)} = 0$

b) $v(t) = u(t-3)$ → $V(s) = L(v(t)) = \frac{e^{-3s}}{s}$

Y se reemplaza en $\frac{I_s}{V_s} = \frac{2s}{(s+1)^2+1}$

$$\frac{I_s}{\frac{e^{-3s}}{s}} = \frac{2s}{(s+1)^2+1} \Rightarrow I_s = \frac{e^{-3s}}{s}\cdot\frac{2s}{(s+1)^2+1}$$

$$I_s = 2e^{-3s}\cdot\frac{1}{(s+1)^2+1}$$

14	$L(e^{at}f(t)) =$	$F(s-a)$

$$L(i(t)) = 2e^{-3s}\cdot L(e^{-t}\operatorname{sen} t)$$

$$L(i(t)) = 2.L(U_{(t-3)}.e^{-(t-3)}.\operatorname{sen}(t-3))$$

$$i(t) = 2U_{(t-3)}.e^{3-t}.\operatorname{sen}(t-3).$$ Rpta.

$$i(t) = \begin{cases} 0 & ,0<t<3 \\ 2e^{3-t}\operatorname{sen}(t-3), & t>3 \end{cases}$$

15	$L(f(t-a)u(t-a))$ =	$e^{-as}F(s)$

$$e^{-as}.\mathcal{L}(f(t)) = \mathcal{L}(f(t-a)u(t-a))$$

c) Consideramos aquí que el Impulso unitario es: $v(t) = \delta(t)$

$\rightarrow V_s = L(\delta(t)) = 1 \rightarrow$

Reemplazando en $G(s) = \frac{I_s}{V_s} = \frac{2s}{(s+1)^2+1}$ ($V_s \to 1$)

$I_s = \frac{2s}{(s+1)^2+1} \rightarrow L(i(t)) = \frac{2s}{(s+1)^2+1}$

Multiplicando adentro de L por e^{+1t}:

$$L\left(e^{+1t}.i(t)\right) = \frac{2(s-1)}{(s-\cancel{1}+\cancel{1})^2+1}$$

$$L\left(e^{+1t}.i(t)\right) = \frac{2s-2}{(s)^2+1} = 2.\frac{s}{s^2+1} - 2.\frac{1}{s^2+1}$$

$$L\left(e^{+1t}.i(t)\right) = 2L(cost) - 2L(sent)$$

$$e^{+1t}.i(t) = 2cost - 2sent$$

$$i(t) = e^{-t}(2cost - 2sent)$$

$* L\{i\} = I_s$

$* L\{i'\} = sI_s - i(0)$, $i(0) \to 0$

$* L\{i''\} = s^2 I_s - s\,i(0) - i'(0)$, $i(0) \to 0$, $i'(0) \to 0$

d) v(t)=u(t-1)-u(t-2) $\rightarrow L(v(t)) = \frac{e^{-1s}}{s} - \frac{e^{-2s}}{s} = V_s$

$$\frac{I_s}{V_s} = \frac{2s}{(s+1)^2+1}$$

Se pide hallar una ecuacion diferencial:

$$(s^2+2s+2)I_s = 2sV_s \rightarrow$$

$$\rightarrow \underbrace{s^2 I_s}_{} + \underbrace{2sI_s}_{} + 2I_s = 2s\left(\frac{e^{-s}-e^{-2s}}{s}\right)$$

$$L\{i''(t)\} + 2L(i'(t)) + 2L(i(t)) = 2(e^{-s} - e^{-2s})$$

$$L(\delta(t-1)) - L(\delta(t-2))$$

La Ec. dif. es:

$$i''(t) + 2i'(t) + 2i(t) = 2(\delta(t-1) - \delta(t-2))$$

25	$\delta(t)$	1
26	$L(\delta(t-a)) =$	e^{-as}

4. Dado la función de transferencia del sistema LTI como sigue:

$$H(s)=\frac{s^2+1}{(s+3)(s+4)} = \frac{L\{salida\} \to Y_s}{L\{entrada\} \to X_s}$$

a. Halle la respuesta al impulso unitario

b. Halle la señal de salida a una señal de entrada $x(t)=e^{-2t}u(t)$.

c. Halle una ecuación diferencial que relacione la señal de entrada $x(t)$ si la señal salida del sistema es $y(t)$.

d. Halle la señal de entrada si la señal de salida es $y(t)=e^{-4t}u(t)$.

$$H(s)=\frac{Y_s}{X_s}=\frac{s^2+1}{(s+3)(s+4)}$$

a) $\boldsymbol{x(t)=\delta(t)}$ es un impulso unitario (es la entrada)

$\rightarrow$ $\boldsymbol{X_s=L(x(t))=L(\delta(t))=1}$.

Luego reemplazando en $H(s)$ *se tendrá*:

$$Y_s=\frac{s^2+1}{(s+3)(s+4)}$$

$$\rightarrow L(y(t))=\frac{s^2+1}{s^2+7s+12}=\frac{s^2+7s+12-7s-12+1}{s^2+7s+12}$$

$$=\frac{s^2+7s+12}{s^2+7s+12}+\frac{-7s-11}{s^2+7s+12}$$

$$L(y(t))=\mathbf{1}+\frac{\mathbf{-7s-11}}{s^2+7s+12}$$

$$L(y(t))=L(\delta(t))-\frac{\mathbf{7s+11}}{s^2+7s+12}$$

Descomponemos en fracciones parciales:

$$\frac{\mathbf{7s+11}}{s^2+7s+12}=\frac{7s+11}{(s+3)(s+4)}=\frac{A}{s+3}+\frac{B}{s+4}$$

$$7s+11=A(s+4)+B(s+3)$$

$s=-4 \rightarrow -17=-B \rightarrow B=17$

$s=-3 \rightarrow -10=A$

Luego: $\boldsymbol{L(y(t))=L(\delta(t))-[\frac{-10}{s+3}+\frac{17}{s+4}]}$

$$L(y(t))=L(\delta(t))+10L(e^{-3t})-17L(e^{-4t})$$

$$\boldsymbol{y(t)=\delta(t)+10e^{-3t}-17e^{-4t}}.$$

Ojo: importante

Notar que $\frac{s^2+1}{(s+3)(s+4)}$ no se puede descomponer en fracciones parciales ya que el grado del denominador debe ser mayor que el grado del numerador.

4. Dado la función de transferencia del sistema LTI como sigue:

$$H(s) = \frac{s^2+1}{(s+3)(s+4)}$$

a. Halle la respuesta al impulso unitario
b. Halle la señal de salida a una señal de entrada $x(t) = e^{-2t}u(t)$.
c. Halle una ecuación diferencial que relacione la señal de entrada $x(t)$ si la señal salida del sistema es $y(t)$.
d. Halle la señal de entrada si la señal de salida es $y(t) = e^{-4t}u(t)$.

b) *Nota:* $\boldsymbol{L(u(t)) = \frac{1}{s}}$

$x(t) = e^{-2t}u(t) \rightarrow X_s = L\left(e^{-2t}u(t)\right) = \frac{1}{s+2}$

Luego: $H(s) = \frac{Y_s}{X_s} = \frac{s^2+1}{(s+3)(s+4)} \rightarrow Y_s = \frac{s^2+1}{(s+3)(s+4)} \cdot \frac{1}{s+2}$

$$Y_s = \frac{s^2+1}{(s+3)(s+4)(s+2)}$$

A fracciones parciales (se debe mencionar el procedimiento)

$$Y_s = \frac{s^2+1}{(s+3)(s+4)(s+2)} = \frac{A}{s+2} + \frac{B}{s+3} + \frac{C}{s+4}$$

$$s^2+1 = A(s+3)(s+4) + B(s+2)(s+4) + C(s+2)(s+3)$$

$s = -2 \rightarrow 5 = 2A \rightarrow A = 5/2$

$s = -3 \rightarrow 10 = -B \rightarrow B = -10$

$s = -4 \rightarrow 17 = 2C \rightarrow C = 17/2.$

Luego:

$$L(y(t)) = \frac{5}{2} \cdot \frac{1}{s+2} - 10 \cdot \frac{1}{s+3} + \frac{17}{2} \cdot \frac{1}{(s+4)}$$

$$L(y(t)) = \frac{5}{2} \cdot L(e^{-2t}) - 10 \cdot L(e^{-3t}) + \frac{17}{2} \cdot L(e^{-4t})$$

$$y(t) = \frac{5}{2} \cdot e^{-2t} - 10 \cdot e^{-3t} + \frac{17}{2} \cdot e^{-4t}$$

4. Dado la función de transferencia del sistema LTI como sigue:

$$H(s) = \frac{s^2+1}{(s+3)(s+4)} = \frac{L(\text{Salida})}{L(\text{entrada})}$$

a. Halle la respuesta al impulso unitario
b. Halle la señal de salida a una señal de entrada $x(t) = e^{-2t}u(t)$.
c. Halle una ecuación diferencial que relacione la señal de entrada $x(t)$ si la señal salida del sistema es $y(t)$.
d. Halle la señal de entrada si la señal de salida es $y(t) = e^{-4t}u(t)$.

c) **Se pide una ecuación diferencial entere x(t) e y(t)**

Luego: $\boldsymbol{H(s)} = \frac{Y_s}{X_s} = \frac{s^2+1}{(s+3)(s+4)} \rightarrow Y_s = \frac{s^2+1}{(s+3)(s+4)}.X_s$

$$(s^2+7s+12)Y_s = (s^2+1)X_s$$

$$s^2Y_s + 7s.Y_s + 12Y_s = s^2X_s + X_s$$

$$L(y''(t)) + 7L(y'(t)) + 12L(y(t)) = L(x''(t)) + L(x(t))$$

$$y''(t) + 7y'(t) + 12y(t) = x''(t) + x(t)$$

Es la ecuación diferencial.

Ojo: en problemas de transferencia recordar que se asume $y(0) = 0,\ y'(0) = 0$

Y por ello

$$L(y'') = s^2Y_s$$
$$L(y') = sY_s$$
$$L(y) = Y_s$$

d) $y(t) = e^{-4t}u(t) \rightarrow Y_s = L\left(e^{-4t}u(t)\right) = \frac{1}{s+4}$

$\rightarrow H(s) = \frac{Y_s}{X_s} = \frac{s^2+1}{(s+3)(s+4)} \rightarrow Y_s = \frac{s^2+1}{(s+3)(s+4)}.X_s$

$\frac{1}{\cancel{s+4}} = \frac{s^2+1}{(s+3)\cancel{(s+4)}}.X_s \rightarrow X_s = \frac{s+3}{s^2+1}$

$$L(x(t)) = \frac{s}{s^2+1} + 3.\frac{1}{s^2+1}$$

$$L(x(t)) = L(cost) + 3L(sent)$$

$$x(t) = cost + 3sent.$$

$$L(u_{(t)}) = \frac{1}{s}\ ;\ L(u_{(t-a)}) = \frac{e^{-as}}{s}$$