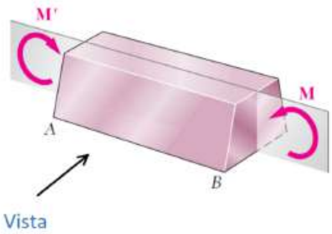
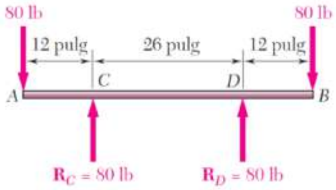
Flexión

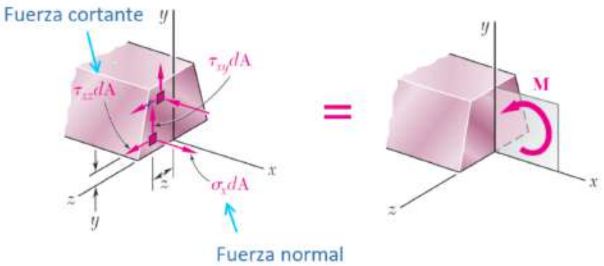
Se va a analizar los esfuerzos y deformaciones en elementos prismáticos sujetos a flexión. Es un concepto muy importante, ya que se utiliza en el diseño de elementos estructurales y de máquinas, como vigas.





El momento flector que se aplica en la sección CD es 960 lb.pulg $\longrightarrow$ $\sigma_{máx} < \sigma_{material}$

Elemento simétrico sometido a flexión pura

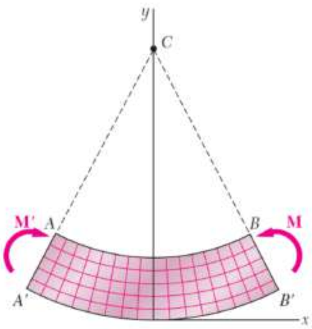


Ec. de equilibrio:

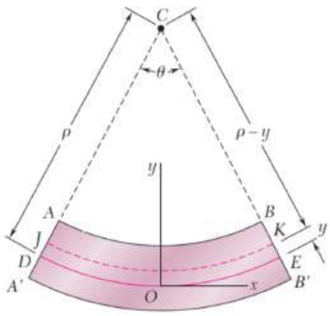
Componente x $\int \sigma_x . dA = 0$

Momentos alrededor del eje y $\int z . \sigma_x . dA = 0$

Momentos alrededor del eje z $\int -y . \sigma_x . dA = M$



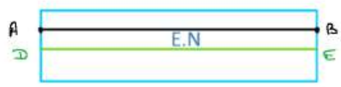
a) Sección longitudinal, vertical (plano de simetría)



a) Sección longitudinal, vertical (plano de simetría)

ρ : radio de curvatura

y : distancia medida desde el eje neutro.

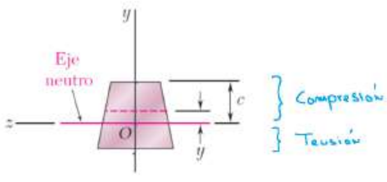


Para una flexión la linea AB se comprime, disminuye su longitud

Para la linea JK

$L = \rho . \theta$ inicial

$L' = (\rho - y)\theta$ final



b) Sección transversal

Restando:

$$\delta = L' - L = (\rho - y)\theta - \rho . \theta = -y . \theta$$

$$\epsilon_x = \frac{\delta}{L} = -\frac{y . \cancel{\theta}}{\rho . \cancel{\theta}} = -\frac{y}{\rho}$$

$$\epsilon_m = \frac{c}{\rho}$$

$$\frac{\epsilon_x}{\epsilon_m} = \frac{-\frac{y}{\rho}}{\frac{c}{\rho}} = -\frac{y}{c} \Rightarrow \boxed{\epsilon_x = -\epsilon_m . \frac{y}{c}}$$

Esfuerzos y deformaciones en el rango elástico

$$\sigma_x = E . \epsilon_x$$

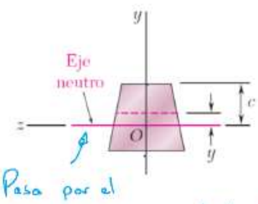
$$\sigma_x = E . \left(-\epsilon_m . \frac{y}{c}\right) = -\sigma_m \frac{y}{c} \qquad \boxed{\sigma_x = -\sigma_m . \frac{y}{c}}$$

Por condición de equilibrio

$$\int \sigma_x dA = 0$$

$$-\int \sigma_m . \frac{y}{c} . dA = 0$$

$$-\frac{\sigma_m}{c} \int y \, dA = 0$$



$$\int y \, dA = 0$$

Pasa por el centro de gravedad de la figura.

Momentos alrededor del eje z

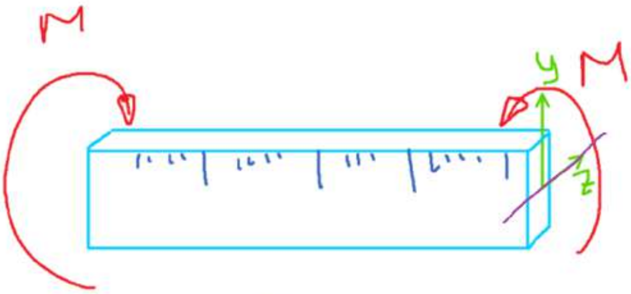
$$\int -y\,\sigma_x \, dA = M$$

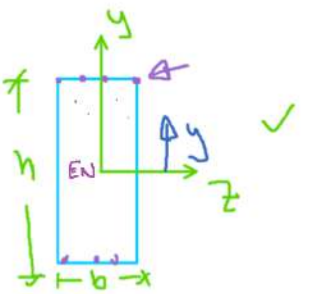
$$-\int y\left(-\sigma_m \cdot \frac{y}{c}\right) \cdot dA = M \quad \Rightarrow \quad \frac{\sigma_m}{c} \underbrace{\int y^2 \, dA}_{} = M$$

momento de inercia I

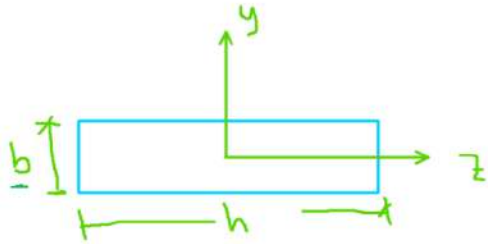
$$\sigma_m \cdot \frac{I}{c} = M$$

$$\boxed{\sigma_m = \frac{M \cdot c}{I}}$$



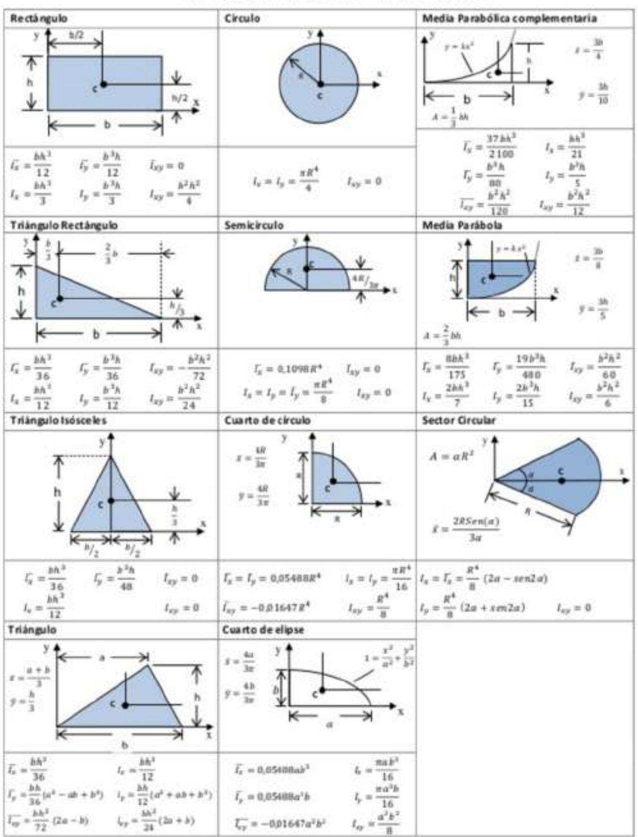


$$I_{zz,c} = \frac{1}{12} h^3 \cdot b$$

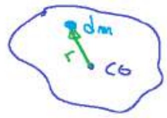


$$I_{zz,c} = \frac{1}{12} b^3 \cdot h$$

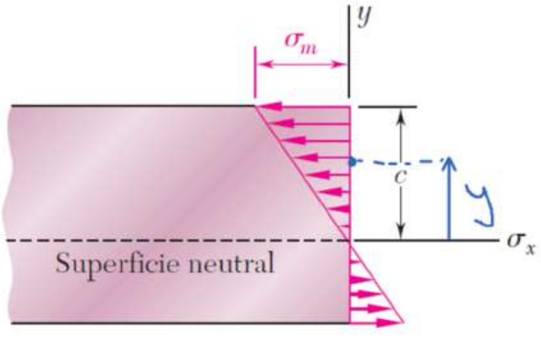
Momentos de inercia de áreas – Mecánica racional I



Rectángulo	Circulo	Media Parabólica complementaria
$\bar{I}_x = \frac{bh^3}{12}$, $\bar{I}_y = \frac{b^3h}{12}$, $\bar{I}_{xy} = 0$; $I_x = \frac{bh^3}{3}$, $I_y = \frac{b^3h}{3}$, $I_{xy} = \frac{b^2h^2}{4}$	$I_x = I_y = \frac{\pi R^4}{4}$, $I_{xy} = 0$	$\bar{x} = \frac{3b}{4}$, $\bar{y} = \frac{3h}{10}$, $A = \frac{1}{3}bh$; $\bar{I}_x = \frac{37bh^3}{2100}$, $I_x = \frac{bh^3}{21}$; $\bar{I}_y = \frac{b^3h}{80}$, $I_y = \frac{b^3h}{5}$; $\bar{I}_{xy} = \frac{b^2h^2}{120}$, $I_{xy} = \frac{b^2h^2}{12}$
Triángulo Rectángulo	**Semicirculo**	**Media Parábola**
$\bar{I}_x = \frac{bh^3}{36}$, $\bar{I}_y = \frac{b^3h}{36}$, $\bar{I}_{xy} = -\frac{b^2h^2}{72}$; $I_x = \frac{bh^3}{12}$, $I_y = \frac{b^3h}{12}$, $I_{xy} = \frac{b^2h^2}{24}$	$\bar{I}_x = 0{,}1098R^4$, $\bar{I}_{xy} = 0$; $I_x = I_y = \bar{I}_y = \frac{\pi R^4}{8}$, $I_{xy} = 0$	$\bar{x} = \frac{3b}{8}$, $\bar{y} = \frac{3h}{5}$, $A = \frac{2}{3}bh$; $\bar{I}_x = \frac{8bh^3}{175}$, $\bar{I}_y = \frac{19b^3h}{480}$, $\bar{I}_{xy} = \frac{b^2h^2}{60}$; $I_x = \frac{2bh^3}{7}$, $I_y = \frac{2b^3h}{15}$, $I_{xy} = \frac{b^2h^2}{6}$
Triángulo Isósceles	**Cuarto de circulo**	**Sector Circular**
$\bar{I}_x = \frac{bh^3}{36}$, $\bar{I}_y = \frac{b^3h}{48}$, $\bar{I}_{xy} = 0$; $I_x = \frac{bh^3}{12}$, $I_{xy} = 0$	$\bar{x} = \frac{4R}{3\pi}$, $\bar{y} = \frac{4R}{3\pi}$; $\bar{I}_x = \bar{I}_y = 0{,}05488R^4$, $I_x = I_y = \frac{\pi R^4}{16}$; $\bar{I}_{xy} = -0{,}01647R^4$, $I_{xy} = \frac{R^4}{8}$	$A = \alpha R^2$, $\bar{x} = \frac{2R\,Sen(\alpha)}{3\alpha}$; $I_x = \bar{I}_x = \frac{R^4}{8}(2\alpha - sen2\alpha)$; $I_y = \frac{R^4}{8}(2\alpha + sen2\alpha)$, $I_{xy} = 0$
Triángulo	**Cuarto de elipse**	
$\bar{x} = \frac{a+b}{3}$, $\bar{y} = \frac{h}{3}$; $\bar{I}_x = \frac{bh^3}{36}$, $I_x = \frac{bh^3}{12}$; $\bar{I}_y = \frac{bh}{36}(a^2 - ab + b^2)$, $I_y = \frac{bh}{12}(a^2 + ab + b^2)$; $\bar{I}_{xy} = \frac{bh^2}{72}(2a - b)$, $I_{xy} = \frac{bh^2}{24}(2a + b)$	$\bar{x} = \frac{4a}{3\pi}$, $\bar{y} = \frac{4b}{3\pi}$, $1 = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$; $\bar{I}_x = 0{,}05488ab^3$, $I_x = \frac{\pi ab^3}{16}$; $\bar{I}_y = 0{,}05488a^3b$, $I_y = \frac{\pi a^3 b}{16}$; $\bar{I}_{xy} = -0{,}01647a^2b^2$, $I_{xy} = \frac{a^2b^2}{8}$	



$$I = \int r^2 \, dm$$



$$\sigma_x = -\frac{M \cdot y}{I}$$

$$\text{Módulo elástico de la sección} = S = \frac{I}{c}$$

$$\sigma_m = \frac{M}{S}$$

La deformación del elemento causada por el momento flector M se mide por la *curvatura* de la superficie neutra. La curvatura se define como el inverso del radio de curvatura ρ y puede obtenerse resolviendo la ecuación (4.9) entre $1/\rho$:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\epsilon_m}{c} \tag{4.20}$$

Pero, en el rango elástico, se tiene $\epsilon_m = \sigma_m/E$. Sustituyendo por ϵ_m en (4.20), y recordando (4.15):

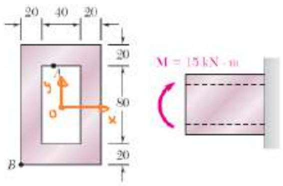
$$\frac{1}{\rho} = \frac{\sigma_m}{Ec} = \frac{1}{Ec}\frac{Mc}{I}$$

o

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI} \tag{4.21}$$

Problema 01

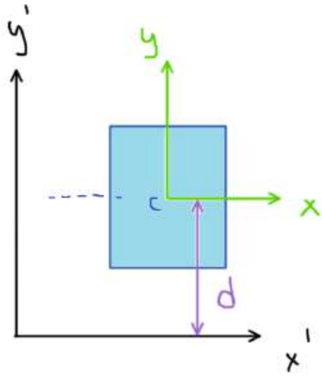
Si se sabe que el par mostrado en la figura actúa en un plano vertical, determine los esfuerzos en a) el punto A, b) el punto B.



Dimensiones en mm

$$\boxed{\sigma_m = \frac{M.c}{I}}$$

$$I = \frac{h^3.b}{12}$$



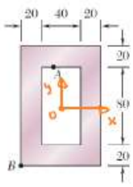
Teorema de Steiner

$$I_{xx,c} = \frac{1}{12} h^3.b$$

$$I_{x'x'} = I_{xx,c} + A.d^2$$

Para la figura:

$$I_{x'x'} = \frac{1}{12} h^3.b + A.d^2$$



Dimensiones en mm

Para el problema

Para el solido completo sin el agujero

$$\frac{1}{12}.120^3.80 = 11{,}52\times10^{6}\ mm^4 = 11{,}52\times10^{-6}\ m^4$$

Para el agujero

$$\frac{1}{12}.80^3\times 40 = 1{,}706\times10^{6}\ mm^4 = 1{,}706\times10^{-6}\ m^4$$

Para la figura:

$$I_{xx,c} = 11{,}52\times10^{-6}\ m^4 - 1{,}706\times10^{-6}\ m^4 = 9{,}81333\times10^{-6}\ m^4$$

$$\sigma_A = -\frac{M.y_A}{I_{xx,c}} = -\frac{15\,000\ N.m\ .\ 0{,}04\ m}{9{,}81333\times10^{-6}\ m^4} = -61{,}6\times10^{6}\ Pa$$

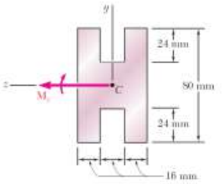
$$= -61{,}6\ MPa \quad \text{Compresión.}$$

$$\sigma_B = -\frac{M.y_B}{I_{xx,c}} = \frac{-15000\ N.m\ .\ (-0{,}06\ m)}{9{,}81333\times10^{-6}\ m^4} = 91{,}7\times10^{6}\ Pa$$

$$= +91{,}7\ MPa \quad \text{Tracción}$$

Problema 02

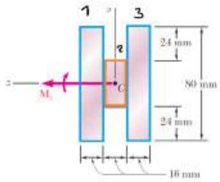
Una viga con la sección transversal que se muestra en la figura se troquela con una aleación de aluminio para la que σ_y = 250 MPa y σ_U = 450 MPa. Utilizando un factor de seguridad de 3.0, determine el par máximo que puede aplicarse a la viga cuando se flexiona alrededor del eje z.



$$F.S = \frac{\sigma_u}{\sigma_{máx}}$$

$$3 = \frac{450\,MPa}{\sigma_{max}}$$

$$\sigma_{max} = 150\,MPa$$



Momentos de inercia alrededor del eje z

$$I_1 = \frac{1}{12} \times 80^3 \cdot 16 = 682,67 \times 10^3\ mm^4$$

$$I_2 = \frac{1}{12} \times 32^3 \cdot 16 = 43,69 \times 10^3\ mm^4$$

$$I_3 = I_1 = 682,67 \times 10^3\ mm^4$$

Momento de inercial total

$$I_1 + I_2 + I_3 = 682,67 \times 10^3\ mm^4 + 43,69 \times 10^3\ mm^4 + 682,67 \times 10^3\ mm^4$$

$$I = 1,40902 \times 10^{-6}\ m^4$$

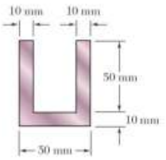
$$\sigma = -\frac{M.C}{I} \quad \Rightarrow \quad M = -\frac{\sigma . I}{C} = -\frac{150 \times 10^6\ Pa \times 1,40902 \times 10^{-6}\ m^4}{-0,04\ m}$$

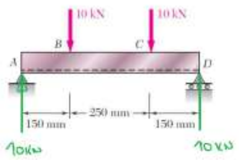
$$M = 5,28 \times 10^3\ N.m$$

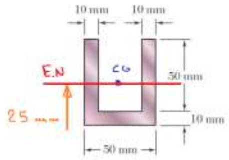
$$M = 5,28\ KN.m$$

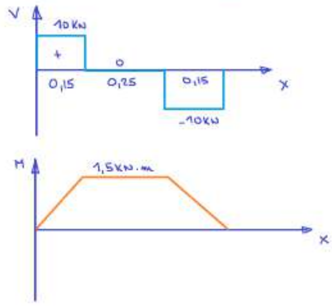
Problema 04

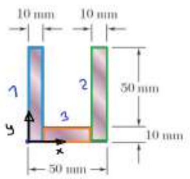
Dos fuerzas verticales se aplican a una viga con la sección transversal que se muestra en las figuras. Determine los esfuerzos máximos de tensión y de compresión en la porción BC de la viga.





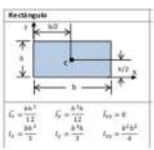


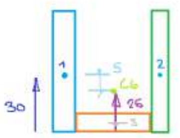




	$A\ (mm^2)$	$\bar{y}\ (mm)$	$A.\bar{y}_o$
1	600	30	18000
2	600	30	18000
3	300	5	1500
	$\Sigma = 1500$		$\Sigma = 37500$

$$y_o = \frac{\Sigma A.\bar{y}_o}{\Sigma A} = \frac{37500}{1500} = 25\ mm$$





$$I_1 = \frac{10 \cdot 60^3}{12} + 600 \cdot 5^2 = 195 \times 10^3\ mm^4$$

$$I_2 = 195 \times 10^3\ mm^4$$

$$I_3 = \frac{30 \times 10^3}{12} + 300 \cdot 20^2 = 122,5 \times 10^3\ mm^4$$

$$I = I_1 + I_2 + I_3 = 512,5 \times 10^3\ mm^4$$

$$\sigma_{comp,máx} = -\frac{M\,y}{I} = -\frac{1500\ N.m\ (0,035\,m)}{512,5 \times 10^3\ mm^4} = -102,4 \times 10^6\ Pa$$

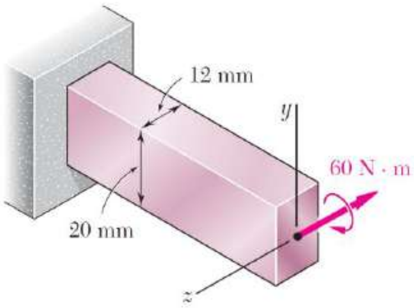
$$= -102\ MPa$$

Para la Tracción:

$$\sigma_{Trac,máx} = -\frac{M\,y}{I} = -\frac{1500\ N.m \cdot (-0,025\,m)}{512,5 \times 10^3\ mm^4} = 73,2 \times 10^6\ Pa = 73,2\ MPa$$

Problema 07

Un par de 60 N·m se aplica a la barra de acero que se muestra en la figura. a) Suponiendo que el par se aplica alrededor del eje z como se muestra, determine el esfuerzo máximo y el radio de curvatura de la barra. b) Resuelva el inciso a), suponiendo que el par se aplica alrededor del eje y. Utilice E = 200 GPa.



a) Flexión alrededor de eleje z

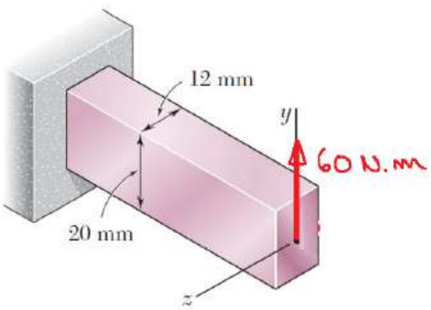
$$I_{zz} = \frac{1}{12} \cdot 20^3 \cdot 12 = 8 \times 10^3\ mm^4 = 8 \times 10^{-9}\ m^4$$

$$\sigma = -\frac{M.C}{I_{zz}} = \frac{-60\ N.m.(-0{,}01\ m)}{8 \times 10^{-9}\ m^4} = 75 \times 10^6\ Pa = 75\ MPa$$

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{E.I} = \frac{60\ N.m}{200 \times 10^9\ Pa \times 8 \times 10^{-9}\ m^4} = 37{,}5 \times 10^{-3}\ m^{-1}$$

$$\rho = 26{,}7\ m$$

b) Flexión con respecto al eje y



$$I_{yy} = \frac{1}{12} \times 12^3 \times 20 = 2{,}88 \times 10^3\ mm^4$$

$$= 2{,}88 \times 10^{-9}\ m^4$$

$$C = 12/2 = 6\ mm$$

$$\sigma = -\frac{M.C}{I} = -\frac{60\ N.m\ (-6 \times 10^{-3}\ m)}{2{,}88 \times 10^{-9}\ m^4}$$

$$\sigma = 125 \times 10^6\ Pa$$

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{E.I} = \frac{60\ N.m}{200 \times 10^9\ Pa \times 2{,}88 \times 10^{-9}\ m^4} = 104{,}17 \times 10^{-3}\ m^{-1}$$

$$\rho = 9{,}60\ m$$