MC71 - Ingeniería de control 2

Unidad N°1: Modelamiento de sistemas mediante espacio de estados y análisis de su respuesta temporal

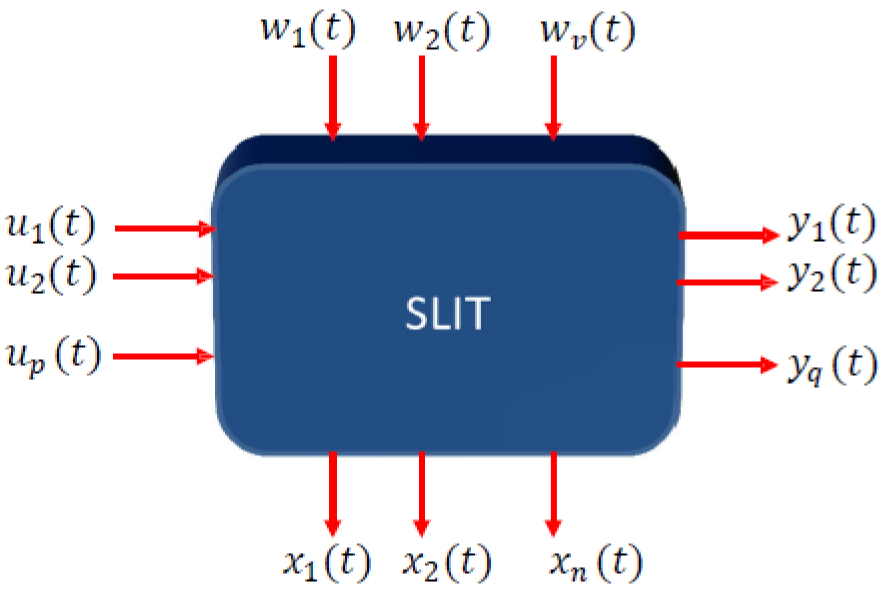
Semana 2

- Matriz de transición. Matriz Exponencial.
- Polos y valores propios.
- Estabilidad a partir de la representación en espacio de estado.
- Respuesta temporal de los sistemas a partir de su representación en espacio de estados.

MEng. Carlos H. Inga Espinoza

Relación entre la ecuación de estado y la FT

- Podemos obtener la FT de un SLIT a partir de la ecuación de estado.
- Dado un SLIT descrito por su modelo de estado

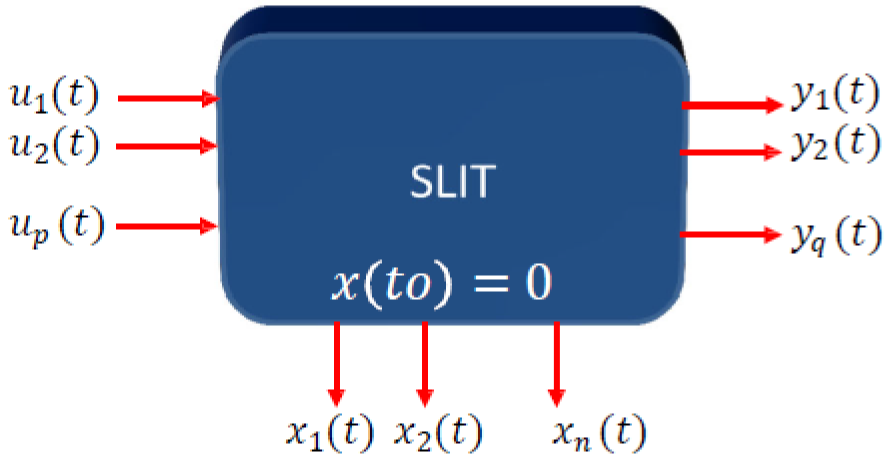


$$\frac{dx(t)}{dt} = Ax(t) + Bu(t) + Ew(t)$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t) + Hw(t)$$

Relación entre la ecuación de estado y la FT

- La FT de un SLIT se define asumiendo c.i.=0



- Para establecer una relación entre u(t) e y(t), es decir entrada-salida se asume w(t)=0 y se toma la transformada de Laplace

$$sX(s) - x(0) = AX(s) + BU(s)$$

Relación entre la ecuación de estado y la FT

De donde

$$X(s) = (sI - A)^{-1}x(0) + (sI - A)^{-1}BU(s)$$

$$Y(s) = CX(s) + DU(s)$$

Sustituyendo se tiene

$$Y(s) = C(sI - A)^{-1}x(0) + [C(sI - A)^{-1}B + D]\,U(s)$$

Por definicion la FT se obtiene para c.i.=0, asi x(0)=0

$$Y(s) = [C(sI - A)^{-1}B + D]U(s)$$

Relación entre la ecuación de estado y la FT

De donde

$$\boxed{G_u(s) = C(sI - A)^{-1}B + D}$$

Matriz de FT de dimensión *qxp* entre u$(t)e\ y(t) con\ w(t) = 0$

De la misma manera puede obtenerse:

$$\boxed{G_w(s) = C(sI - A)^{-1}E + H}$$

Matriz de la FT de dimensión *qxv* entre : w$(t)e\ y(t) con\ u(t) = 0$

Ecuación característica y valores propios

- La ecuación característica de un sistema se puede obtener a partir de la ecuación que relaciona la entrada u(t) con la salida y(t) teniendo en esa ecuación

$$(sI - A)^{-1} = \frac{1}{|sI - A|} adj(sI - A)$$

- Esta toma la forma

$$G_u(s) = \frac{C[adj(sI - A)]B + |sI - A|D}{|sI - A|}$$

Ecuación característica

- Del denominador de la matriz FT $G_u(s)$ se concluye que la ecuación característica del sistema es:

$$\boxed{\Delta(s) = |sI - A| = 0}$$

- Las raíces de la ecuación característica son referidas como los valores propios (autovalores) de la matriz A)

Ecuación característica

Ejemplo:

- Dada las matrices del modelo de estado de un sistema de control:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & -5 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

- Determinar la ecuación característica
- Determinar los valores propios de la matriz A
- Solución :

$$|sI - A| = \begin{bmatrix} s & -1 & 0 \\ 0 & s & 1 \\ 2 & 1 & s+5 \end{bmatrix} = s^3 + 5s^2 + s + 2 = 0$$

- De donde:

$$\lambda_1 = -4.88; \lambda_2 = -0.06 + j0.64; \quad \lambda_3 = 0.06 - j0.64$$

Valores y vectores propios

- Las raíces de la ecuación característica se conocen como valores característicos de la matriz A
- Si los coeficientes de A son todos reales, sus valores característicos son ya sea reales o pares complejos conjugados
- Si λ_i con $i = 1,2, \ldots n$, son valor característicos de A, entonces también es un valor característico de A^T
- Si A es no singular con λ_i con $i = 1,2, \ldots n$, entonces $1/\lambda_i$ son los valores característicos de A^{-1}

Los vectores propios o autovectores de un operador lineal son los vectores no nulos que, cuando son transformados por el operador, dan lugar a un múltiplo escalar de sí mismos, con lo que no cambian su dirección. Este escalar lambda recibe el nombre de valor propio, autovalor o valor característico. A menudo, una transformación queda completamente determinada por sus vectores propios y valores propios

$$A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}.$$

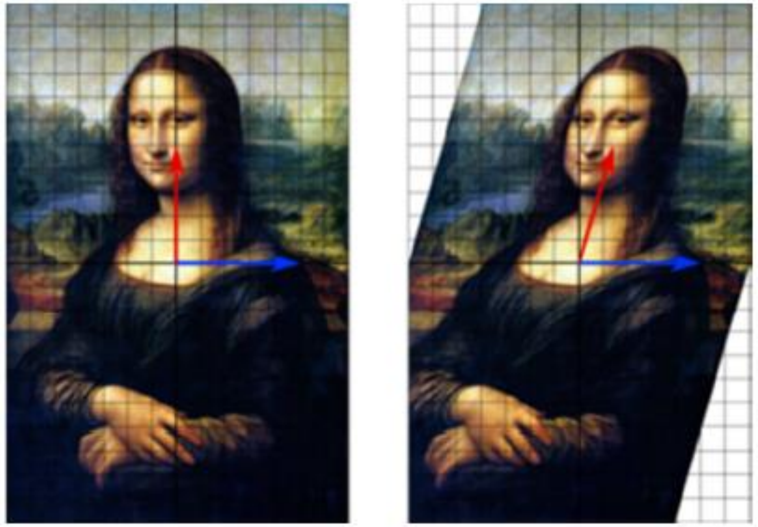
Valores y Vectores Propios

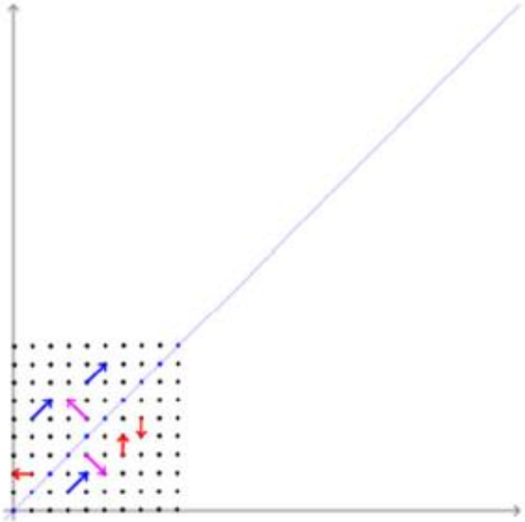
- Son útiles en temas de control moderno, una de los cuales es para la transformación de similitud:

Otras terminologías equivalentes

λ_i	P
Valor propio	Vector propio
Autovalor	Autovector
Valor característico	Vector característico
eigenvalor	eigenvector

$$A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}.$$





Valores y Vectores Propios

- La palabra alemana eigen, que se traduce en español como propio, se usó por primera vez en este contexto por David Hilbert en 1904 (aunque Helmholtz la usó previamente con un significado parecido). Eigen se ha traducido también como inherente, característico o el prefijo auto, donde se aprecia el énfasis en la importancia de los valores propios para definir la naturaleza única de una determinada transformación lineal. Las denominaciones valor vector y característicos también se utilizan habitualmente.

Vectores Característicos: Vectores Propios

- Si A, tiene valores propios distintos, sus vectores propios se pueden deducir empleando la ecuación matricial:

$$(\lambda_i I - A)p_i = 0$$

- Donde p_i es distinto de cero, asimismo λ_i con $i = 1,2, \ldots n$, denota el i-esimo valor propio de A

Vectores Propios: Ejemplos

Ejemplo:

- Dada las matrices del modelo de estado de un sistema de control:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 4 \end{bmatrix};$$

Solución :

- la ecuación característica

$$|\lambda I - A| = \lambda^2 - 7\lambda + 10$$

los valores propios : $\lambda_1 = 2; \lambda_2 = 5$

- Los vectores propios serian:

$$p_1 = \begin{bmatrix} p_{11} \\ p_{21} \end{bmatrix}; \quad p_2 = \begin{bmatrix} p_{12} \\ p_{22} \end{bmatrix};$$

Vectores Propios: Ejemplos

- Los vectores propios serian:

Para $\lambda_1 = 2$:

$$\left(\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix} p_{11} \\ p_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} p_{11} \\ p_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{l} -p_{11} + 2p_{21} = 0 \\ p_{11} - 2p_{21} = 0 \end{array}\right\} \quad p_{11} = 2p_{21}$$

Asumo arbitrariamente: $p_{21} = 1$ entonces , $p_{11} = 2$

$$p_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix};$$

Vectores Propios: Ejemplos

- Los vectores propios serian:

Para $\lambda_2 = 5$:

$$\left(\begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix} p_{12} \\ p_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} p_{12} \\ p_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{l} 2p_{12} + 2p_{22} = 0 \\ p_{12} + p_{22} = 0 \end{array}\right\} \quad p_{12} = -p_{22}$$

Asumo arbitrariamente: $p_{22} = 1$ entonces , p_{12} =-1

$$p_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix};$$

Vectores Propios: Ejemplo 1

Ejemplo:

- Dada las matrices del modelo de estado de un sistema de control:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}; \qquad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}; \qquad E = 0$$

Solución :

- la ecuación característica

$$|\lambda I - A| = \lambda^2 - 1$$

[Sin título]

los valores propios son: $\lambda_1 = 1; \lambda_2 = -1$

Por lo que habría dos vectores:

$$(\lambda_1 I - A)p_1 = 0 \qquad (a)$$

$$(\lambda_2 I - A)p_2 = 0 \qquad (b)$$

Vectores Propios: Ejemplo 1

a. Sustituyendo $\lambda_1 = 1$ y p_1 se obtiene:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{11} \\ p_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

de donde o $p_{21} = 0$ y p_{11} es desconocido(arbitrario), en este caso se le elige $p_{11} = 1$

b. En forma similar para $\lambda_2 = -1,$ la ecuación se convierte en:

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{12} \\ p_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

[Sin título]

De donde

$$-2p_{12} + p_{22} = 0$$

$$p_{22} = 2p_{12}$$

se le elige $p_{12} = 1$

entonces $p_{22} = 2$

Vectores Propios: Ejemplo 1

- Los vectores serian:

$$p_1 = \begin{bmatrix} p_{11} \\ p_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}; \qquad p_2 = \begin{bmatrix} p_{12} \\ p_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix};;$$

Así:

$$p_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}; \qquad p_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix};$$

Vectores Propios: Ejemplo 2

- Sea la matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

- Vamos a hallar un valor propio y un vector propio asociado. Es preciso resolver la ecuación en λ

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 1 & -4 \\ -3 & \lambda - 2 & 1 \\ -2 & -1 & \lambda + 1 \end{vmatrix} = \lambda^3 - 2\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$$

Vectores Propios Generalizados

- Si **A** tiene valores propios de orden múltiple y no es simétrica:
  - ✓ Los vectores propios que corresponden a los q(<n) valores propios distintos se determinan de $(\lambda_i I - A)p_i$=0
  - ✓ Los otros vectores propios se determinan en el caso de λ de *m-esimo* orden de:

$$\boxed{(\lambda_j I - A)p_{n-q+1} = 0}$$

$$(\lambda_j I - A)p_{n-q+2} = -p_{n-q+1}$$

$$(\lambda_j I - A)p_{n-q+3} = -p_{n-q+2}$$

$$(\lambda_j I - A)p_{n-q+m} = -p_{n-q+m-1}$$

Vectores Propios Generalizados: Ejemplo 1

Dada la matriz: $A = \begin{bmatrix} 0 & 6 & -5 \\ 1 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 4 \end{bmatrix}$

$$|sI - A| = \begin{vmatrix} s & -6 & 5 \\ -1 & s & -2 \\ -3 & -2 & s-4 \end{vmatrix}$$

$$|sI - A| = s(s^2 - 4s - 4) + 6(4 - s + 6) + 5(2 + 3s)$$

$$|sI - A| = (s-2)(s-1)(s-1)$$

Los valores propios son $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$

Entonces A tiene un valor característico doble en 1.

Por lo que habría dos vectores generalizados:

$$\boxed{\begin{aligned} &(\lambda_1 I - A)p_1 = 0 && (a) \\ &(\lambda_2 I - A)p_2 = 0 && (b) \\ &(\lambda_3 I - A)p_1 = -p_2 && (c) \end{aligned}}$$

Vectores Propios Generalizados: Ejemplo 1

a. para $\lambda_1 = 2$,se halla con la ecuación conocida:

$$(\lambda_1 I - A)p_1 = \begin{bmatrix} 2 & -6 & 5 \\ -1 & 2 & -2 \\ -3 & -2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{11} \\ p_{21} \\ p_{31} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$2p_{11} - 6p_{21} + 5p_{31} = 0 \qquad (1)$$

$$-p_{11} + 2p_{21} - 2p_{31} = 0 \qquad (2)$$

$$-3p_{11} - 2p_{21} - 2p_{31} = 0 \qquad (3)$$

Sumando (2) y (3):

$$4p_{11} - 4p_{31} = 0 \qquad (4)$$

De aquí solucionando hay dos ecuación independientes: (3) y (4)

Vectores Propios Generalizados: Ejemplo 1

entonces en forma arbitraria eligiendo

arbitrariamente $\boxed{p_{11} = 1}$

entonces $\boxed{p_{31} = -1}$

en la ecuacion (3) $\boxed{p_{21} = -0.5}$

$$\boxed{p_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1/2 \\ -1 \end{bmatrix}}$$

También podemos escoger, en forma arbitraria $p_{11} = 2$ se tiene $p_{21} = -1$ y $p_{31} = -2$

Por lo que obtenemos

$$\boxed{p_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix}}$$

Vectores Propios Generalizados: Ejemplo 1

b. Los vectores característicos generalizados que están asociados al va con el valor característico de 2do orden $\lambda_2 = 1$, se sustituye en la ecuación:

$$(\lambda_2 I - A)p_2 = \begin{bmatrix} 1 & -6 & 5 \\ -1 & 1 & -2 \\ -3 & -2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{12} \\ p_{22} \\ p_{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$p_{12} - 6p_{22} + 5p_{32} = 0 \qquad (1)$$

$$-p_{12} + p_{22} - 2p_{32} = 0 \qquad (2)$$

$$-3p_{12} - 2p_{22} - 3p_{32} = 0 \qquad (3)$$

$$p_{12} = 1 \quad \text{arbitrariamente}$$

Vectores Propios Generalizados: Ejemplo 1

- Al hacer $p_{12} = 1$ en forma arbitraria se tiene $p_{22} = -3/7$ y $p_{32} = -5/7$

$$\boxed{\begin{matrix} p_{22} = -3/7 \\ p_{32} = 5/7 \end{matrix}}$$

Por lo que obtenemos

$$\boxed{p_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -\dfrac{3}{7} \\ -\dfrac{5}{7} \end{bmatrix}}$$

Vectores Propios Generalizados: Ejemplo 1

c. para $\lambda_3 = 1$,sustituyendo:

$$(\lambda_3 I - A)p_3 = \begin{bmatrix} 1 & -6 & -5 \\ -1 & 1 & -2 \\ -3 & -2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{13} \\ p_{23} \\ p_{33} \end{bmatrix} = -p_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 3/7 \\ 5/7 \end{bmatrix}$$

$$p_{13} - p_{23} + p_{33} = -1 \qquad (1)$$

$$-p_{13} + p_{23} - 2p_{33} = 3/7 \qquad (2)$$

$$-3p_{13} - 2p_{23} - 3p_{33} = 5/7 \qquad (3)$$

Vectores Propios Generalizados: Ejemplo 1

Con $p_{13} = 1$ de manera arbitraria, entonces se tiene que el vector característico generalizado

$$p_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -\dfrac{22}{49} \\ -\dfrac{46}{49} \end{bmatrix}$$

Independencia lineal

- Sean X_1, X_2, X_3 vectores columna 3 × 1. Se dice que el sistema de vectores { X_1, X_2, X_3 } es linealmente independiente (L.I.) si para escalares $\propto_1$, $\propto_2$, $\propto_3$, la relación

$$\propto_1 X_1 + \propto_2 X_2 + \propto_3 X_3 = 0$$

  sólo es posible cuando $\propto_1 = 0$, $\propto_1 = 0$, $\propto_1 = 0$.

- El sistema {X_1, X_2, X_3 } se dice linealmente dependiente (L.D.) si existen escalares β1, β2, β3 no todos nulos tales que

$$\beta 1u1 + \beta 2u2 + \beta 3u3 = 0$$

Independencia lineal

- El concepto de independencia lineal siempre se refiere a un sistema o conjunto de vectores. No existe el concepto de vector linealmente independiente.

- Los vectores X_1, X_2, X_3 son linealmente independientes (en plural) MAL DICHO

- El sistema $\{X_1, X_2, X_3\}$ es linealmente independiente. BIEN

Los vectores

$$\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{x}_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}$$

son linealmente independientes ya que

$$\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_3 = \mathbf{0}$$

Los vectores

$$\mathbf{y}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{y}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{y}_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

son linealmente independientes ya que

$$c_1\mathbf{y}_1 + c_2\mathbf{y}_2 + c_3\mathbf{y}_3 = \mathbf{0}$$

implica que

$$c_1 = c_2 = c_3 = 0$$

Observe que si una matriz $n \times n$ es no singular (es decir, tiene un rango n o el determinante es diferente de cero), entonces n vectores columna (o fila) son linealmente independientes. Si la matriz $n \times n$ es singular (es decir, tiene un rango menor que n o el determinante es cero), entonces n vectores columna (o fila) son linealmente dependientes. Para demostrar esto, considere que

$$[\mathbf{x}_1 \vdots \mathbf{x}_2 \vdots \mathbf{x}_3] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \end{bmatrix} = \text{singular}$$

$$[\mathbf{y}_1 \vdots \mathbf{y}_2 \vdots \mathbf{y}_3] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \text{no singular}$$

Problema

- $\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -11 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \end{bmatrix} u$
- $y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$
- Calcule los valores propios del sistema, realice una transformación lineal y calcule los nuevos valores propios.
- Utilice la transformación: $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & -3 \\ 1 & 4 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix}$

Estabilidad en espacio estado

- Ya que los autovalores de la matriz A son identicos a los polos del sistema antes de cualquier cancelación de polos y ceros en la función transferencia, podemos determinar la estabilidad del sistema hallando los autovalores de la matriz A con los métodos estudiados en control clásico.

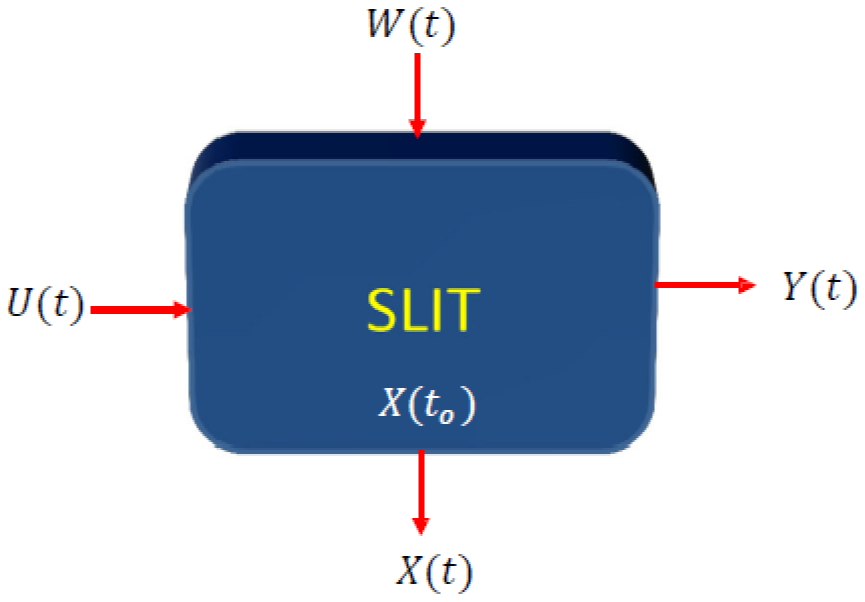
Solución de la Ecuación de Estado

- Implica determinar en un sistema el vector de estado $x(t)$ y el vector de salida $y(t)$ para $t \geq t_o$ dado cualquier condiciones iniciales $x(t_o)$ y su entrada $u(t)$ para $t \geq t_o$

  En un SLIT:

$$\frac{dx(t)}{dt} = Ax(t) + Bu(t) + Ew(t)$$

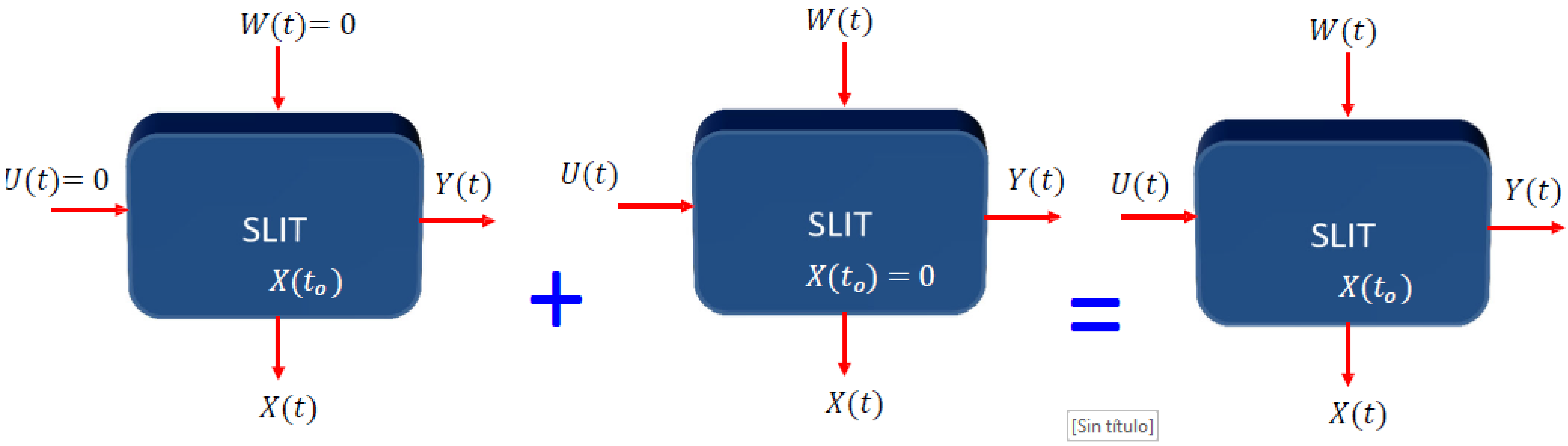
$$y(t) = Cx(t) + Du(t) + Hw(t)$$



- $x(t)$ puede ser hallado aplicando el principio de superposición

Solución de la Ecuación de Estado

- Sumando la respuesta a las ci $x(t_o)$ y las respuesta a las entradas $u(t)$ y $w(t)$
- Adicionalmente, la salida $y(t)$ puede ser obtenida de $x(t)$ y $u(t)$ mediante manipulación matricial



- Obtención de la respuesta aplicando el principio de superposición

Respuesta a las condiciones iniciales

Solución de la ecuación de estado homogénea

- Hacemos $u(t) = 0$ y $w(t) = 0$ (solo condiciones iniciales)

$$\boxed{\frac{dx(t)}{dt} = Ax(t)} \qquad (1)$$

Suponemos que la solución es:

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{b}_0 + \mathbf{b}_1 t + \mathbf{b}_2 t^2 + \cdots + \mathbf{b}_k t^k + \cdots$$

Entonces:

$$\mathbf{b}_1 + 2\mathbf{b}_2 t + 3\mathbf{b}_3 t^2 + \cdots + k\mathbf{b}_k t^{k-1} + \cdots$$
$$= \mathbf{A}(\mathbf{b}_0 + \mathbf{b}_1 t + \mathbf{b}_2 t^2 + \cdots + \mathbf{b}_k t^k + \cdots)$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{b}_1 &= \mathbf{A}\mathbf{b}_0 \\
\mathbf{b}_2 &= \frac{1}{2}\mathbf{A}\mathbf{b}_1 = \frac{1}{2}\mathbf{A}^2\mathbf{b}_0 \\
\mathbf{b}_3 &= \frac{1}{3}\mathbf{A}\mathbf{b}_2 = \frac{1}{3 \times 2}\mathbf{A}^3\mathbf{b}_0 \\
&\vdots \\
\mathbf{b}_k &= \frac{1}{k!}\mathbf{A}^k\mathbf{b}_0
\end{aligned}$$

$$\mathbf{x}(t) = \underbrace{\left(\mathbf{I} + \mathbf{A}t + \frac{1}{2!}\mathbf{A}^2 t^2 + \cdots + \frac{1}{k!}\mathbf{A}^k t^k + \cdots\right)}_{\text{Matriz Exponencial}}\mathbf{x}(0)$$

$$\boxed{\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}(0)}$$

Respuesta a las condiciones iniciales

Solución de la ecuación de estado homogénea

- Hacemos $u(t) = 0$ y $w(t) = 0$ (solo condiciones iniciales)

$$\boxed{\frac{dx(t)}{dt} = Ax(t)} \qquad (1)$$

- Para solucionar la ecuación de estado, se define la matriz de transición $\phi(t)$ como una matriz *nxn* que satisface las siguientes dos condiciones

$$\phi(0) = I$$

$$\frac{d\phi(t)}{dt} = A\phi(t)$$

Respuesta a las condiciones iniciales

- Además dada $x(0)$ que denota el estado inicial en $t = 0$, la solución de la ecuación puede ser escrita como:

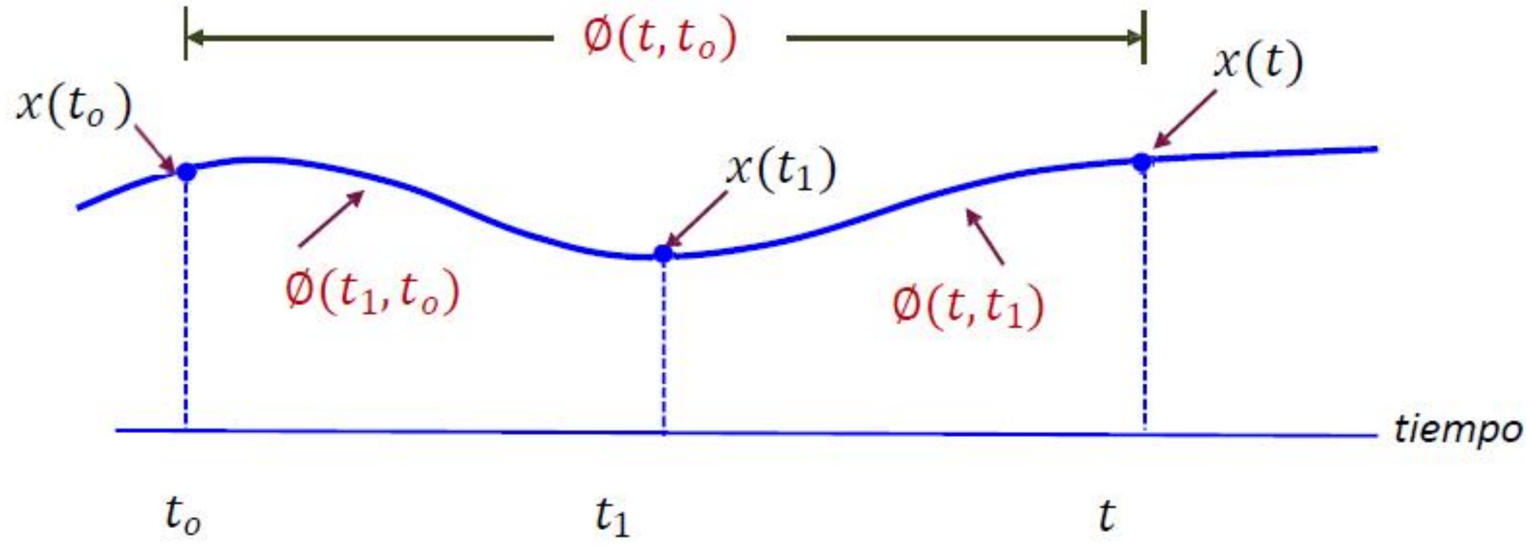
$$\boxed{x(t) = \phi(t).x(0)} \qquad (2)$$

la cual es la solución de la ecuación de estado homogénea para $t \geq 0$. La matriz de transición $\phi(t)$ transfiere el estado inicial $x(0)$ al estado $x(t)$ como se ve en la ecuación previa:

Respuesta a las condiciones iniciales

- Las siguientes propiedades son deducidas de la definición de la matriz de transición:

1. $\mathbf{\Phi}(0) = e^{\mathbf{A}0} = \mathbf{I}$
2. $\mathbf{\Phi}(t) = e^{\mathbf{A}t} = (e^{-\mathbf{A}t})^{-1} = [\mathbf{\Phi}(-t)]^{-1}$ o $\mathbf{\Phi}^{-1}(t) = \mathbf{\Phi}(-t)$
3. $\mathbf{\Phi}(t_1 + t_2) = e^{\mathbf{A}(t_1+t_2)} = e^{\mathbf{A}t_1}e^{\mathbf{A}t_2} = \mathbf{\Phi}(t_1)\mathbf{\Phi}(t_2) = \mathbf{\Phi}(t_2)\mathbf{\Phi}(t_1)$
4. $[\mathbf{\Phi}(t)]^n = \mathbf{\Phi}(nt)$
5. $\mathbf{\Phi}(t_2 - t_1)\mathbf{\Phi}(t_1 - t_0) = \mathbf{\Phi}(t_2 - t_0) = \mathbf{\Phi}(t_1 - t_0)\mathbf{\Phi}(t_2 - t_1)$



Método de la Transformada de Laplace

- Tomando la T de Laplace de la ecuación $\frac{dx(t)}{dt} = Ax(t)$ obtenemos:

$$sX(s) - x(0) = AX(s)$$

De donde: $$X(s) = (sI - A)^{-1}x(0)$$

$(sI - A)$ Es no singular:

Tomando la T inversa de Laplace:

$$x(t) = L^{-1}[(sI - A)^{-1}]x(0) \qquad t \geq 0$$

- De donde comparando con la matriz de transición de estado se identifica como :

$$\boxed{\emptyset(t) = L^{-1}[(sI - A)^{-1}]} \qquad (3)$$

Método de la Transformada de Laplace

- Así, la matriz de transición de estado depende solamente de la matriz **A**, por lo que en ocasiones se conoce como la matriz de transición de estado de **A**.

Respuesta a las Entradas

- Tomando la Transformada de Laplace de la ecuación de estados con condiciones iniciales cero se obtiene:

$$(sI - A)X(s) = BU(s) + EW(s)$$

$$X(s) = \emptyset(s)[BU(s) + EW(s)]$$

- Dado que el producto de dos funciones en el dominio de Laplace es igual a su convolucion en el dominio del tiempo se tiene:

$$\boxed{x(t) = \int_0^t \emptyset(t-\tau)[Bu(\tau) + Ew(\tau)]d\tau} \qquad \tau \geq 0 \qquad (4)$$

Respuesta **Total** de Estados

- Se obtiene sumando las respuestas anteriores

$$x(t) = \emptyset(t)x(0) + \int_0^t \emptyset(t-\tau)[Bu(t) + Ew(\tau)]d\tau \qquad \tau \geq 0$$

esta solución es útil solamente cuando el tiempo inicial se define en $t = 0$.
Si se trabaja con un tiempo inicial diferente de cero $t = t_0$ el estado inicial correspondiente será $x(t_0)$. La entrada $u(t)$ y la perturbación w(t) se aplican en $t = t_0$

$$\boxed{x(t) = \emptyset(t-t_0)x(t_0) + \int_{t_0}^t \emptyset(t-\tau_0)[Bu(t) + Ew(\tau)]d\tau} \qquad t \geq t_0 \qquad (5)$$

Vector de salida

- El vector de salida se halla reemplazando la solución (5) en la ecuación de salida:

$$\boxed{y(t) = C\emptyset(t-t_0)x(t_0) + \int_{t_0}^{t} C\emptyset(t-\tau)[Bu(\tau) + Ew(\tau)]d\tau + Du(t) + Hw(t)} \qquad (6)$$

$$t \geq t_0$$

Respuesta en el tiempo: Ejemplo

- Se tiene el modelo de estado del sistema:

$$x(t) = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

a. Determinar la respuesta en el tiempo de las variables de estado de este sistema debido a las ci

$$x(0) = \begin{bmatrix} x_{10} \\ x_{20} \end{bmatrix}$$

b. Determinar la respuesta en el tiempo de las variables de estado de este sistema debido a una entrada tipo escalón unitario.

Respuesta en el tiempo: Ejemplo

Solución A:

Hallamos la matriz de transición.

$$[sI - A] = \begin{bmatrix} s+3 & -1 \\ 2 & s \end{bmatrix}$$

$$\emptyset(s) = [sI - A]^{-1} = \frac{\begin{bmatrix} s & 1 \\ -2 & s+3 \end{bmatrix}}{(s+1)(s+2)} = \begin{bmatrix} \frac{s}{(s+1)(s+2)} & \frac{1}{(s+1)(s+2)} \\ \frac{-2}{(s+1)(s+2)} & \frac{s+3}{(s+1)(s+2)} \end{bmatrix}$$

Tomando la T^{-1} de Laplace se obtiene:

$$\emptyset(t) = \begin{bmatrix} -e^{-t} + 2e^{-2t} & e^{-t} - e^{-2t} \\ -2e^{-t} + 2e^{-2t} & 2e^{-t} - e^{-2t} \end{bmatrix}$$

Respuesta en el tiempo: Ejemplo

Así:

$$x(t) = \begin{bmatrix} -e^{-t} + 2e^{-2t} & e^{-t} - e^{-2t} \\ -2e^{-t} + 2e^{-2t} & 2e^{-t} - e^{-2t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{10} \\ x_{20} \end{bmatrix}$$

De donde:

$$x_1(t) = (-e^{-t} + 2e^{-2t})\, x_{10} + (e^{-t} - e^{-2t})x_{20}$$

$$x_2(t) = (-2e^{-t} + 2e^{-2t})\, x_{10} + (2e^{-t} - e^{-2t})x_{20}$$

Respuesta en el tiempo: Ejemplo

Solución B :

Aquí:

$$u(t) = 1$$

$$U(s) = \frac{1}{s}$$

Hallamos:

$$X(s) = \emptyset(s)BU(s) =$$

$$= \begin{bmatrix} \dfrac{5}{(s+1)(s+2)} & \dfrac{1}{(s+1)(s+2)} \\ \dfrac{-2}{(s+1)(s+2)} & \dfrac{s+3}{(s+1)(s+2)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \frac{1}{s}$$

Respuesta en el tiempo: Ejemplo

Tomando la T^{-1} de Laplace se obtiene:

$$x(t) = L^{-1}[\emptyset(s)BU(s)] = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} - e^{-t} + \frac{1}{2}e^{-2t} \\ \frac{3}{2} - 2e^{-t} + \frac{1}{2}e^{-2t} \end{bmatrix}$$

Problemas

B-9-4. Considere el sistema definido mediante

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u$$
$$y = \mathbf{C}\mathbf{x}$$

donde

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = [1 \quad 1 \quad 0]$$

Obtenga la función de transferencia $Y(s)/U(s)$.

Problemas

B-9-7. Dada la ecuación del sistema

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

encuentre la solución a partir de las condiciones iniciales $x_1(0)$, $x_2(0)$ y $x_3(0)$.

Problemas

B-9-8. Encuentre $x_1(t)$ y $x_2(t)$ del sistema descrito mediante

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

donde las condiciones iniciales son

$$\begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Problemas

B-2-12. Obtenga la matriz de transferencia del sistema definido por

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & -4 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

Problemas

- Sea el sistema:

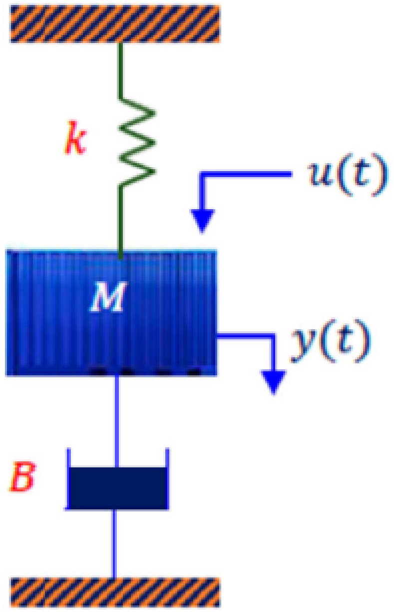
$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

Hallar $\phi(t)$, $x(t)$ para $t \geq 0$ si $u(t) = 1$

Considere las condiciones iniciales: $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

Problemas

Determine las ecuaciones de estado, el diagrama de simulación y la F.T. a partir de las ecuaciones de estado



$u(t)$: *Fuerza (entrada del sistema)*

$y(t)$: *desplazamiento lineal (salida del sistema)*

$$u(t) - ky(t) - \frac{Bdy(t)}{dt} = \frac{md^2y(t)}{dt^2}$$

$$m\ddot{y} = u - Ky - B\dot{y}$$

Problemas con Matlab

B-9-10. Obtenga con MATLAB una representación en el espacio de estados del sistema siguiente.

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{10.4s^2 + 47s + 160}{s^3 + 14s^2 + 56s + 160}$$

B-9-11. Obtenga con MATLAB una representación mediante la función de transferencia del sistema siguiente:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

$$y = [0 \quad 0 \quad 1] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

B-9-12. Obtenga con MATLAB una representación mediante la función de transferencia del sistema siguiente:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

$$y = [1 \quad 0 \quad 0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

Gracias por vuestra atención...