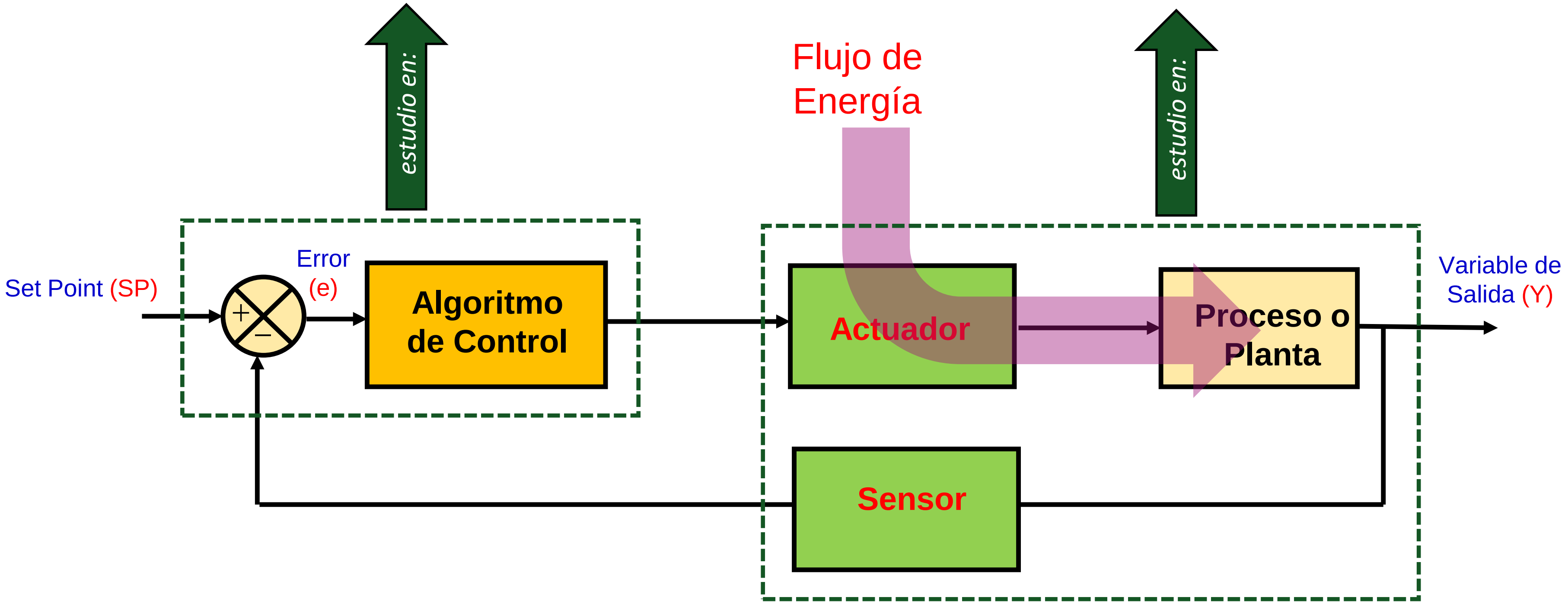
Modelamiento matemático de Sistemas

Ing. Eddie Angel Sobrado Malpartida

Herramientas matemáticas para el estudio de control

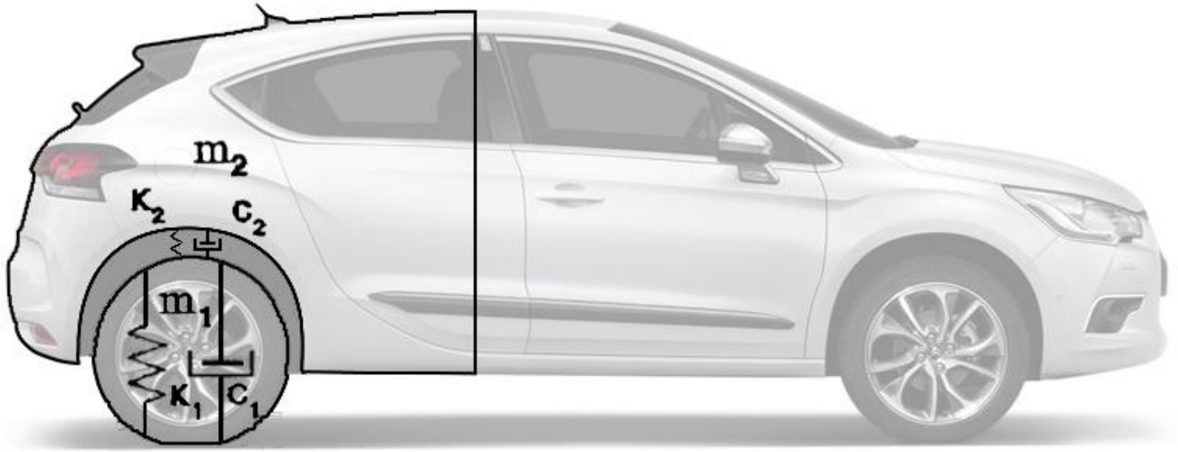
- ✓ Ecuaciones diferenciales
- ✓ Transformada de Laplace
- ✓ Transformada en Zeta
- ✓ Ecuaciones en diferencias

- ✓ Ecuaciones diferenciales
- ✓ Transformada de Laplace
- ✓ Transformada en Zeta
- ✓ Ecuaciones en diferencias

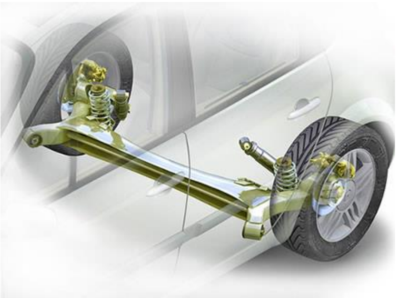


Modelado de sistemas

- Funciones de transferencia (relación de entrada/salida)
- Modelo de estado (relación de entrada/salida y estados)



$$G(s)=\frac{Bs+K}{ms^2+Bs+K}$$



Introducción

- Un sistema es una combinación de elementos que actúan conjuntamente y cumplen un determinado objetivo.
- En ingeniería de control los sistemas se estudian reemplazándolos por modelos matemáticos. Sin embargo obtener un modelo matemático que caracterice de forma adecuada el comportamiento de un determinado sistema no es sencillo y es uno de los grandes problemas de la ingeniería de control.

Introducción

- Los modelos se rigen con ecuaciones diferenciales. Normalmente se buscan modelos matemáticos en los que interactúan ecuaciones diferenciales lineales de coeficientes constantes.
- En las ecuaciones diferenciales de un sistema de una variable se presentan primera, segunda, etc derivadas de la variable. El orden del sistema esta determinado por el mayor grado de derivada que presenta el modelo de un sistema

$$\boxed{f(t) = k \cdot x(t) + m \cdot \frac{d^2}{dt^2} x(t)}$$

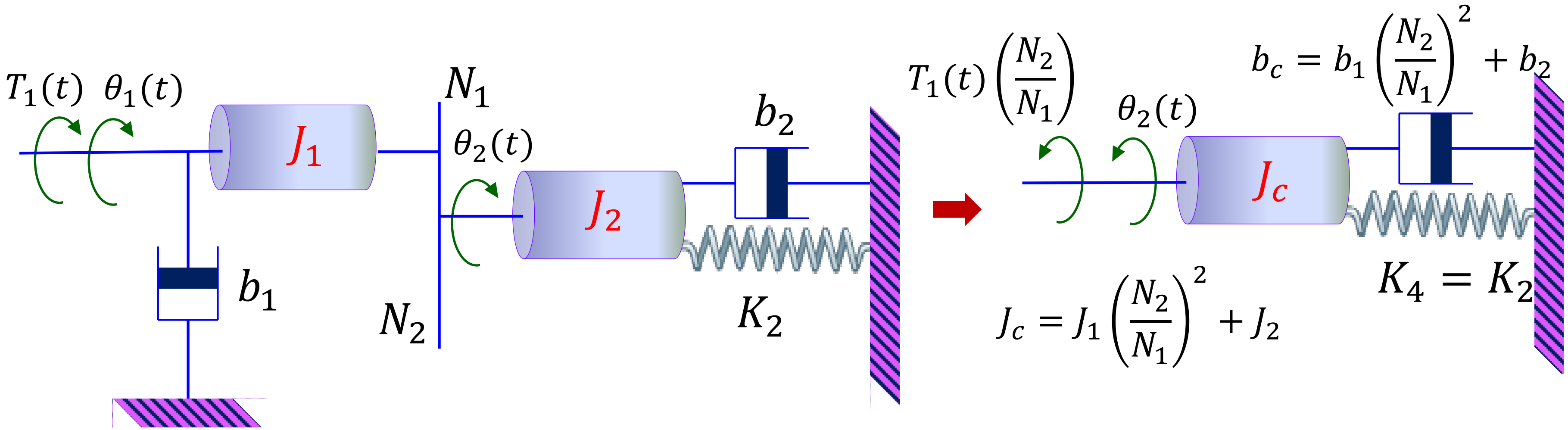
Sistema de segundo orden

- Si se encuentran ecuaciones no lineales, lo habitual es linealizarlas en las proximidades del punto de operación.

¿Porqué es importante modelar y simular un Sistema Dinámico?

- Porque salvo la experimentación con el sistema real, la simulación es la única técnica disponible para el análisis de sistemas en situaciones arbitrarias, siendo aplicable donde las técnicas analíticas no aportan soluciones (situación normal).

¿Porqué es importante modelar y simular un Sistema Dinámico?



¿Porqué es importante modelar y simular un Sistema Dinámico?

El modelamiento y simulación nos permite:

- Profundizar en el conocimiento sobre los mecanismos internos de un proceso.
- Prever el comportamiento del sistema bajo diferentes situaciones.
- Evaluar las prestaciones de diferentes tipos de algoritmos de control.
- Estimar variables de proceso que no son medibles directamente.
- Evaluar la sensibilidad de un sistema a cambios en sus parámetros.
- Organizar la producción de un sistema.

¿Porqué es importante modelar y simular un Sistema Dinámico?

- En ocasiones el sistema físico no está disponible. La simulación se realiza para determinar si se debe construir un sistema proyectado.
- El experimento real puede ser peligroso.
- El coste de la experimentación es demasiado alto.
- Las constantes de tiempo del sistema no son compatibles con las del experimentador. La simulación nos permite acelerar o retardar los experimentos según nos convenga.
- Nos permite acceder a todas las variables del modelo y a manipular el modelo fuera del rango permitido sin peligro.
- Supresión de los efectos de las perturbaciones, permitiendo aislar los efectos particulares y tener una mejor comprensión del sistema frente a perturbaciones.

Introducción

- Describiremos algunos sistemas físicos:
  - ✓ Eléctricos , electrónicos
  - ✓ Mecánicos Traslacionales
  - ✓ Mecánicos Rotacionales
  - ✓ Hidráulicos
  - ✓ Neumáticos
  - ✓ Térmicos

Sistemas

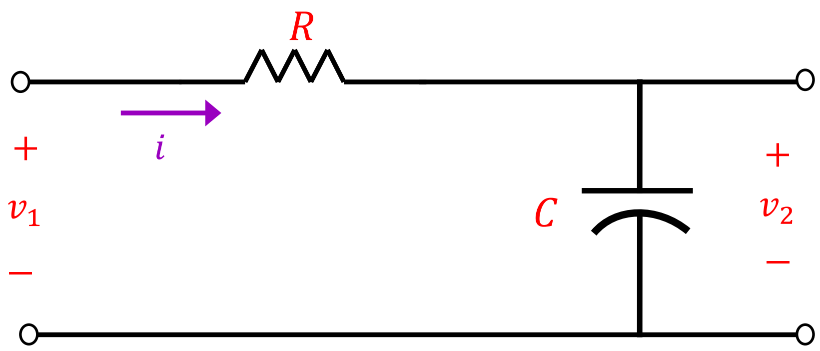
Eléctricos - Electrónicos

En todos los sistemas observe la relación Entrada Salida

Ejemplos de Modelos

- La forma clásica de escribir las ecuaciones de circuitos eléctricos se basa en el método de mallas o en el de nodos, formulados a partir de las leyes de Kirchoff

Circuito RC



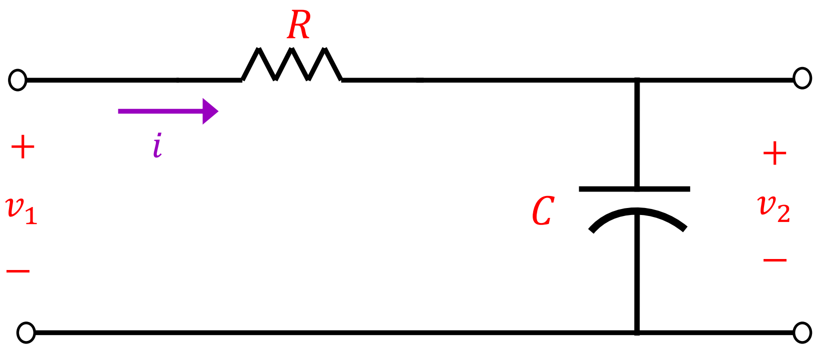
$$v_1 = v_R + v_2$$

$$v_1 = R.i$$

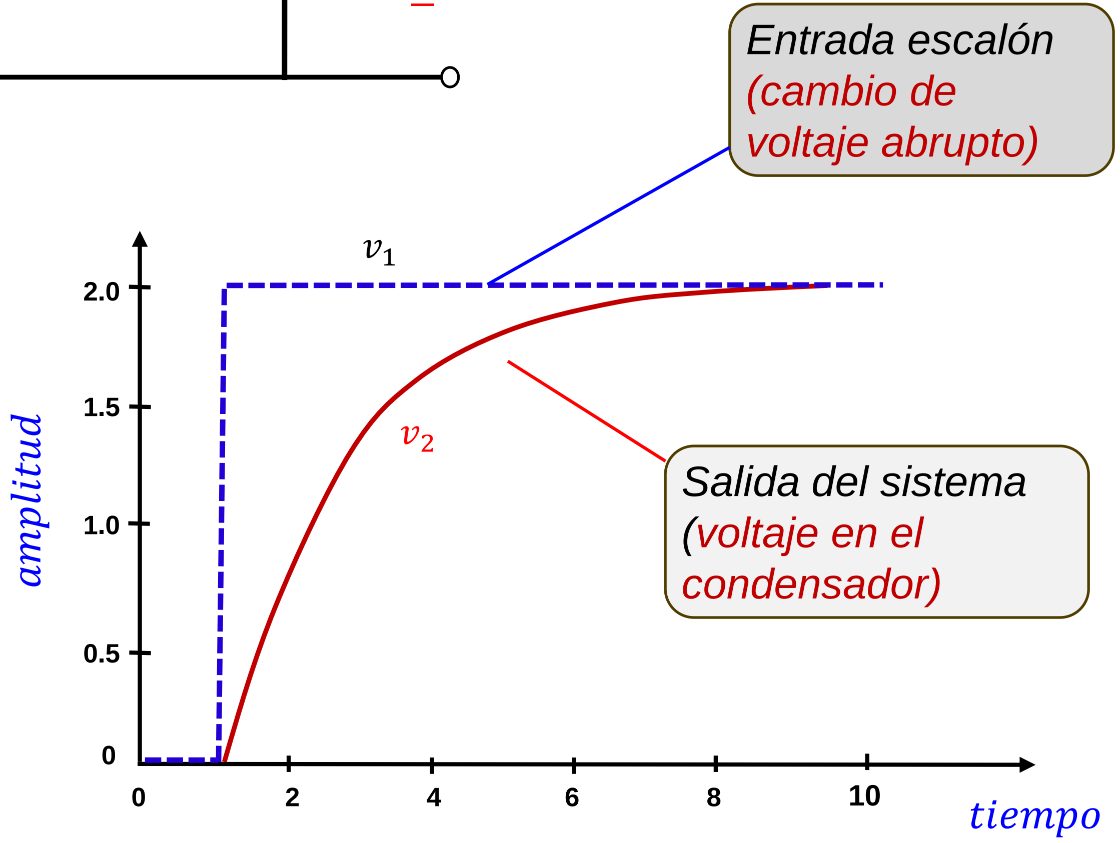
$$i = C.\frac{dv_2}{dt}$$

$$\boxed{RC.\frac{dv_2}{dt} + v_2 = v_1}$$

Ejemplos de Modelos



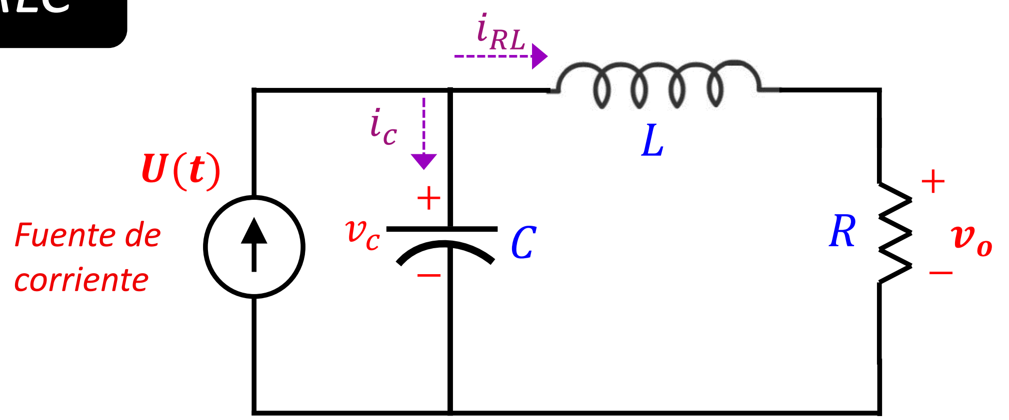
Mediante el modelo podemos saber como será la respuesta en el tiempo de la salida



Circuito RC y evolución temporal de la señal de entrada y de la salida

Ejemplos de Modelos

Circuito RLC



$$u = i_c + i_{RL}$$

$$i_c = C.\frac{dv_c}{dt}$$

$$v_c = L.\frac{di_{RL}}{dt} + v_o$$

$$v_o = R.i_{RL}$$

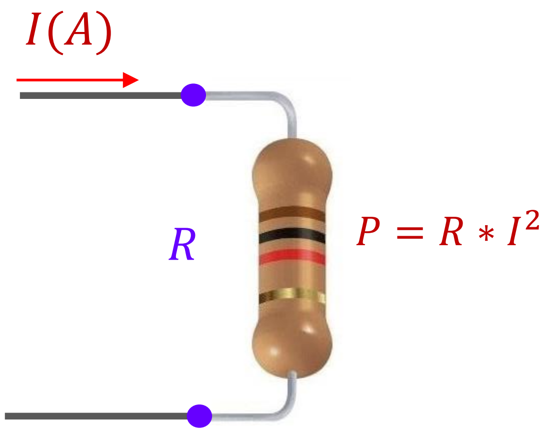
$$u = C.\frac{dv_c}{dt} + i_{RL}$$

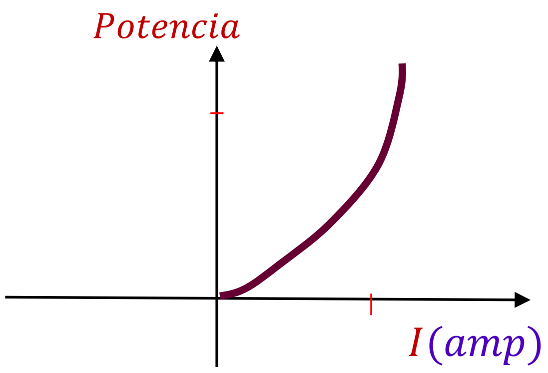
$$u = C.\frac{d}{dt}\left[L.\frac{di_{RL}}{dt} + v_o\right] + i_{RL}$$

$$\boxed{LC\frac{d^2v_o}{dt^2} + RC\frac{dv_o}{dt} + v_o = Ru}$$

Analicemos un instante……

- Las salidas de un sistema estático dependen exclusivamente del valor de las entradas en el mismo instante. Un sistema así es también llamado sin memoria. Por ejemplo, una resistencia eléctrica cumple que $v(t) = Ri(t)$, siendo $v(t)$ el voltaje e $i(t)$ la intensidad. Obsérvese que si la entrada $i(t)$ no varia, la salida $v(t)$ tampoco lo hace.
- Además, cualquier variación de la entrada es reflejada instantáneamente en la salida.



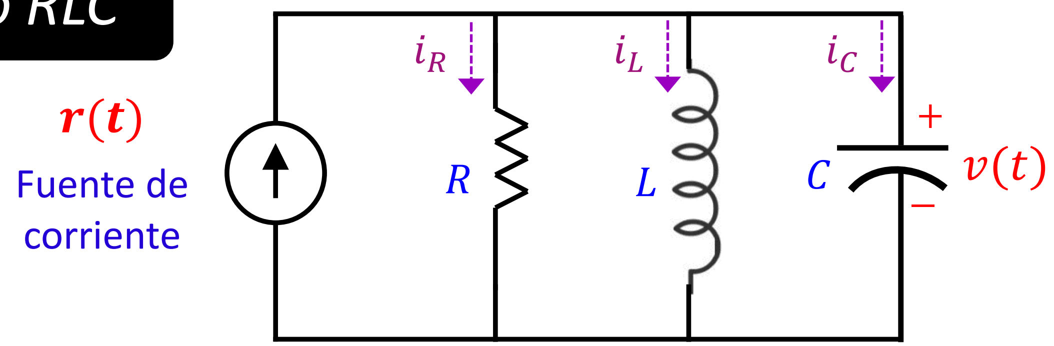


Analicemos un instante……

- El valor de la salida de un sistema dinámico es función de las entradas y salidas en otros instantes de tiempo distintos del actual. Así, en los sistemas causales, la salida depende de salidas pasadas y entradas pasadas.
- Un ejemplo de sistema dinámico causal es un depósito de agua. La salida es el nivel, el cual depende del nivel anterior y de la cantidad de agua suministrada (entrada).

Ejemplos de Modelos

Otro Circuito RLC



$$r = i_R + i_L + i_C$$

$$i_R = \frac{v}{R}$$

$$i_C = C.\frac{dv}{dt}$$

$$v = L\frac{di_L}{dt}$$

$$r = \frac{v}{R} + C\frac{dv}{dt} + i_L$$

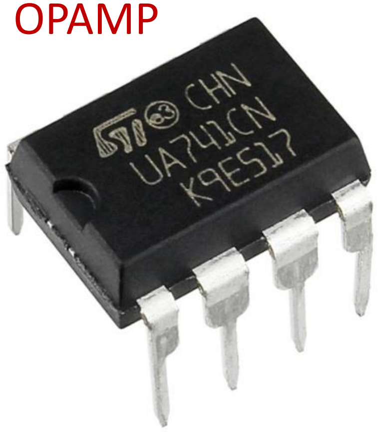
$$i_2 = 0$$

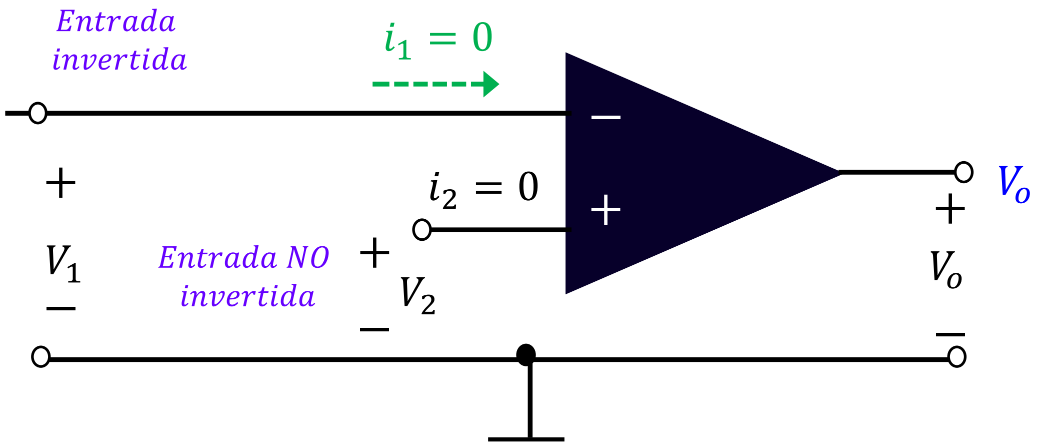
$$\frac{dr}{dt} = \frac{1}{R}\frac{dv}{dt} + C\frac{d^2v}{dt^2} + \frac{di_L}{dt}$$

$$\boxed{C.\frac{d^2v}{dt^2} + \frac{1}{R}\frac{dv}{dt} + \frac{1}{L}v = \frac{dr}{dt}}$$

Ejemplos de Modelos

IC 741
OPAMP





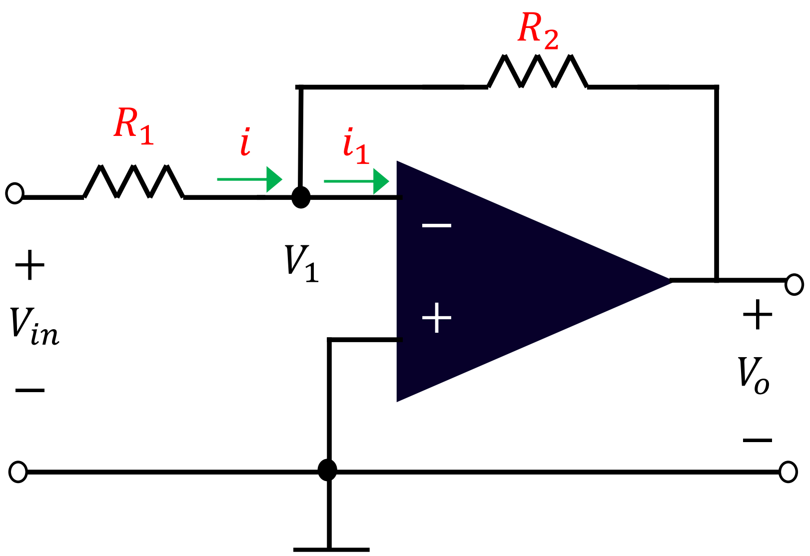
Impedancia de entrada infinita: $i_1 = i_2 = 0$

Ganancia infinita: $v_0 = A_0(v_2 - v_1)$ $A_0 \to \infty$

corto virtual: $v_1 = v_2$

Amplificadores

Amplificador Inversor



Ecuaciones

$$i = \frac{v_{in} - v_1}{R_1} = \frac{v_1 - v_0}{R_2}$$

$$v_0 = A_0(v_1 - 0)$$

Para amplificador ideal

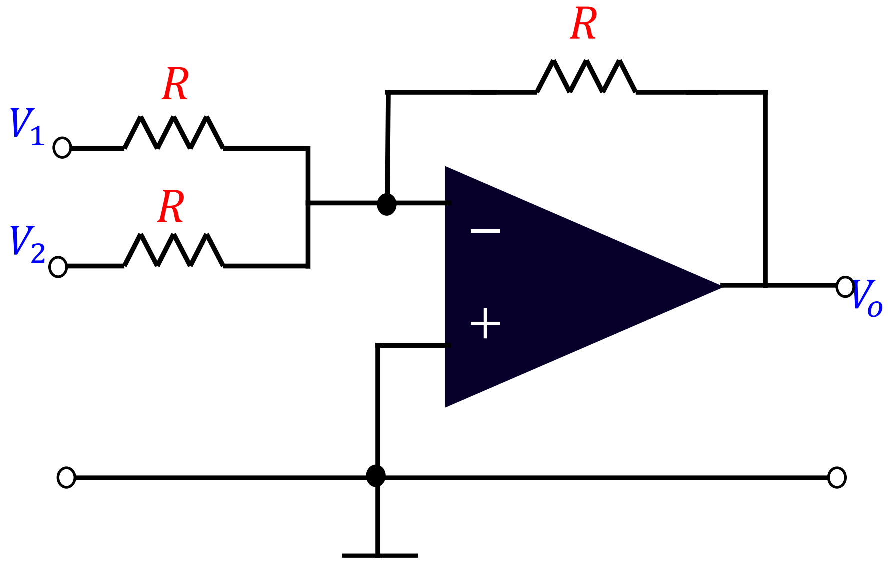
$$A_0 \to \infty \Leftrightarrow v_1 = 0$$

$$\boxed{v_0 = -\frac{R_2}{R_1} v_{in}}$$

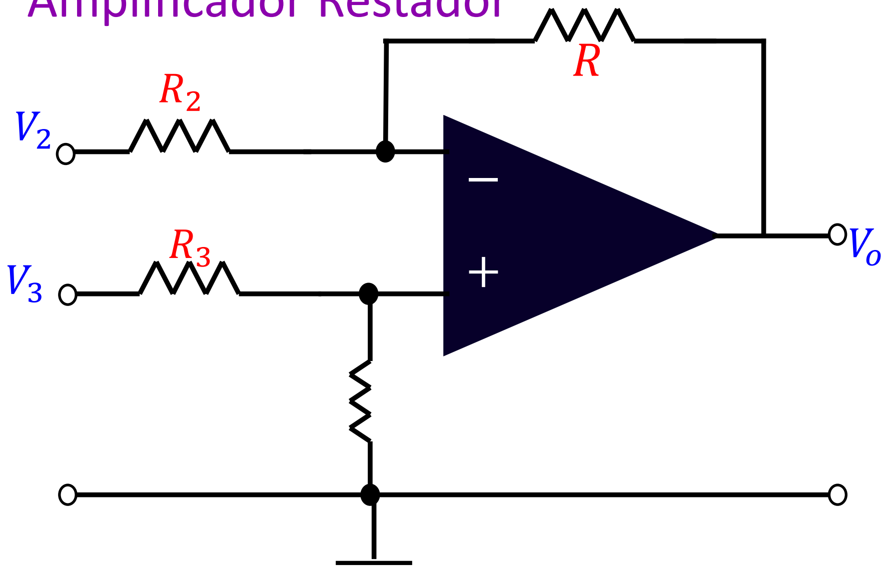
Obs: V_o Es independiente de la corriente por lo tanto actúa como una fuente ideal

Amplificadores

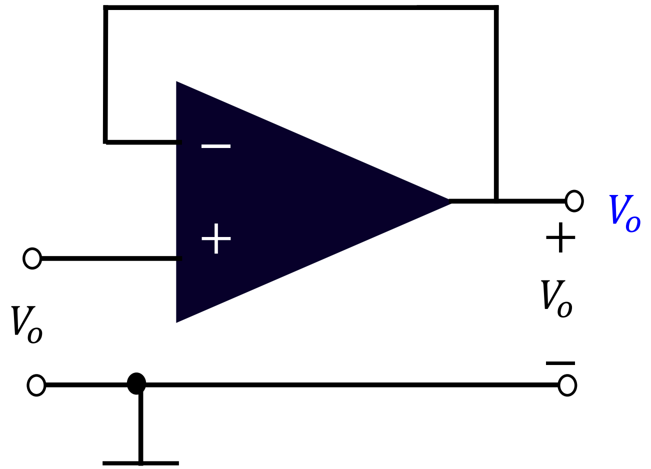
Amplificador Sumador



Amplificador Restador

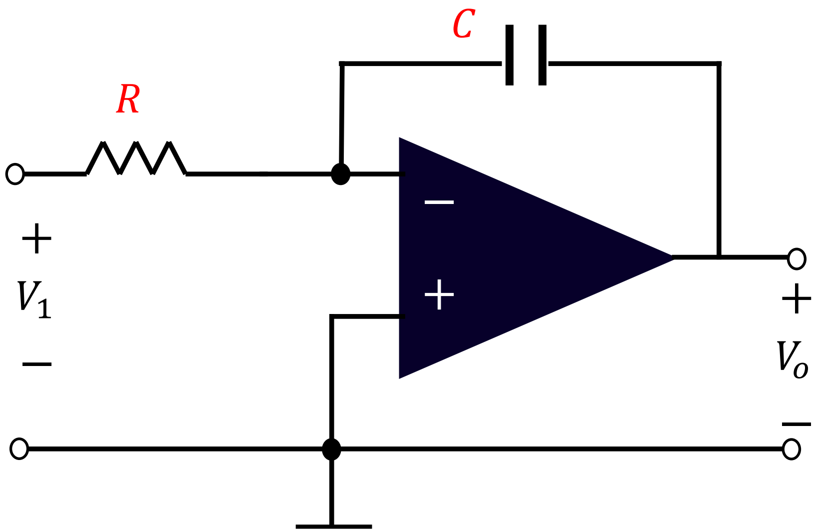


Amplificador Seguidor



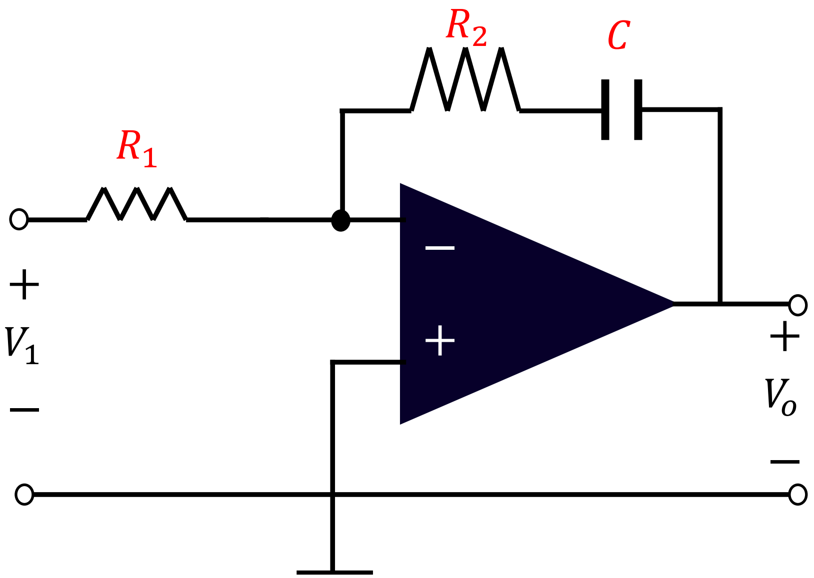
Amplificadores Integradores

Integrador



$$\frac{dv_0}{dt} = -\frac{1}{RC} v_1$$

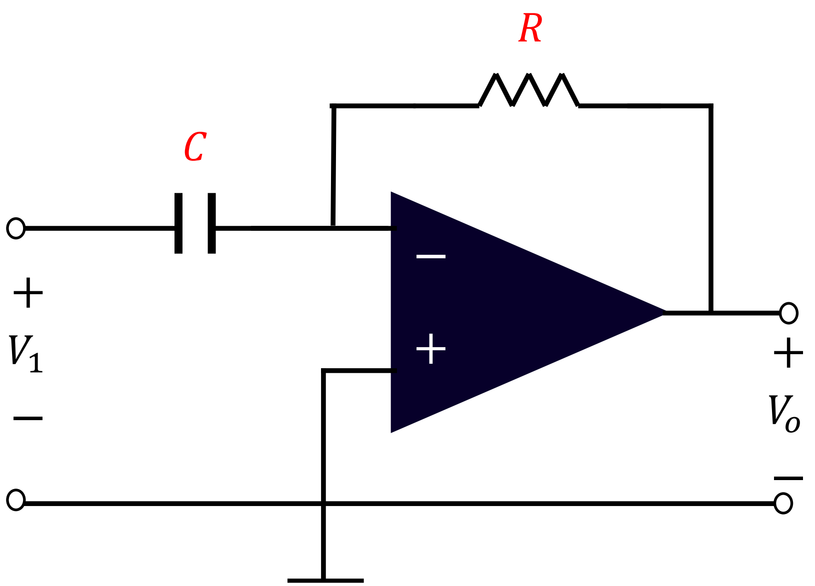
Proporcional +Integrador



$$\frac{dv_0}{dt} = -\frac{R_2}{R_1}\left[\frac{dv_1}{dt} + \frac{1}{R_2 C} v_1\right]$$

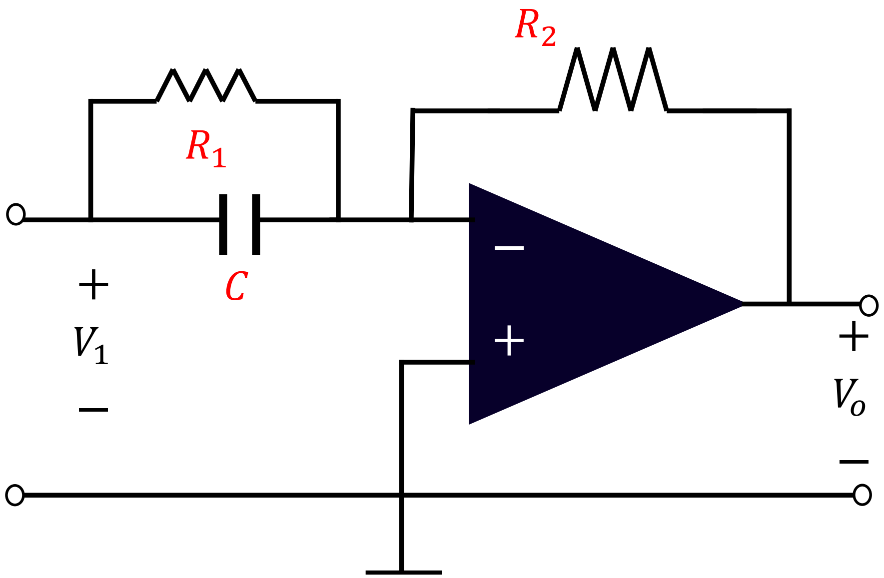
Amplificadores diferenciadores

derivativo



$$v_0 = -RC\frac{dv_1}{dt}$$

Proporcional
+
derivativo



$$v_0 = -\frac{R_2}{R_1}\left[v_1 + R_1 C\frac{dv_1}{dt}\right]$$

Sistemas Mecánicos

de Traslación

En todos los sistemas observe la relación Entrada Salida

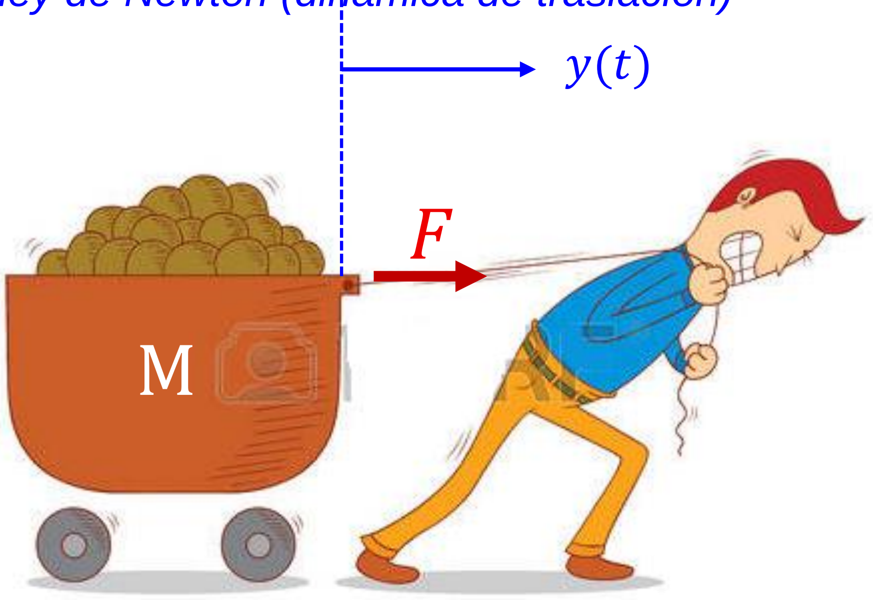
Movimiento de traslación

- El movimiento de traslación esta definido como un movimiento a lo largo de una línea recta.
- Las variables que se utilizan para describir el movimiento de traslación son la aceleración, velocidad y desplazamiento

Movimiento de traslación

- Las ecuaciones que gobiernan el movimiento de sistemas mecánicos, están formuladas directa o indirectamente mediante la ley de movimiento de Newton

Inercia: 2da ley de Newton (dinámica de traslación)



$$F = m.a$$

$$F = \frac{mdv(t)}{dt}$$

$$F = \frac{md^2y(t)}{dt^2}$$

F: $fuerza\ neta$

M: $masa$

A: $aceleración$

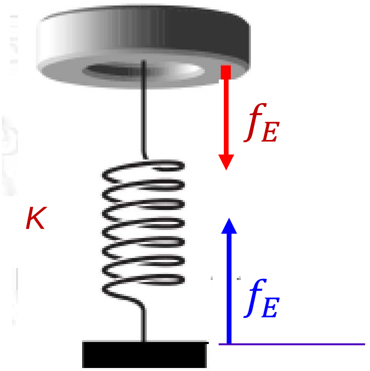
Movimiento de traslación

Principio de acción y reacción

3era Ley de Newton

Elemento elástico

$$f_E = K.x$$



f_E: *fuerza que ejerce el elemento elástico sobre los cuerpos conectados a este*

x: *deformacion de elemento elastico*

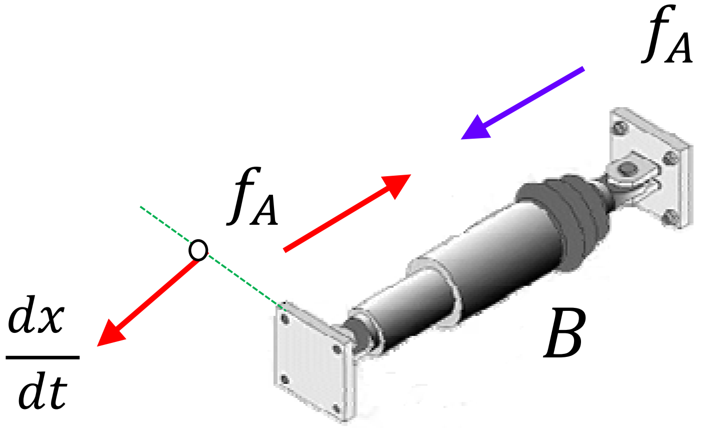
K: *constante de resorte*

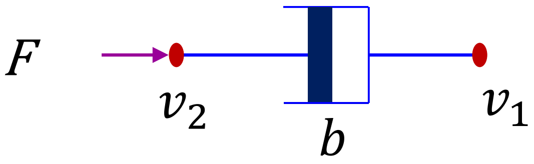
Nota: *si la deformación es pequeña su comportamiento se aproxima por una relación lineal*

Amortiguador Viscoso (fricción viscosa)

$$f_A = B\,\frac{dx}{dt}$$

f_A: *fuerza que ejerce el elemento amortiguador sobre los cuerpos conectados a este*

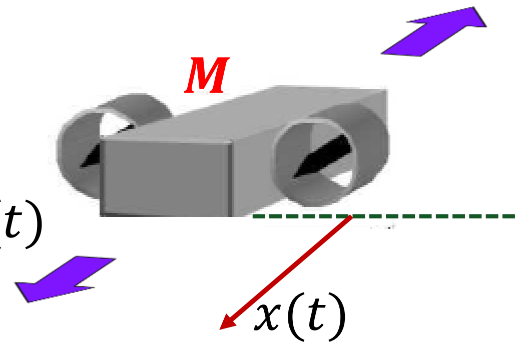




x: *desplazamiento del amortiguador*

B: *coeficiente de fricción viscosa*

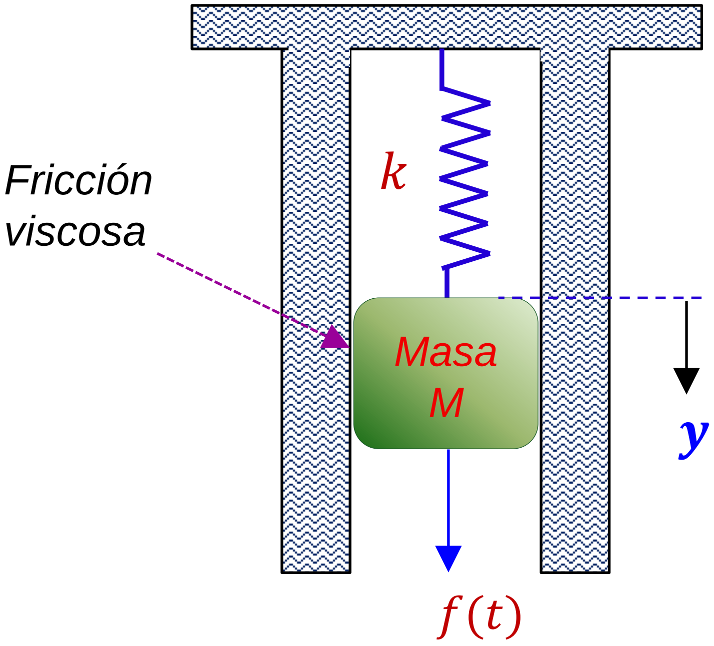
Ejemplo: Robot Submarino

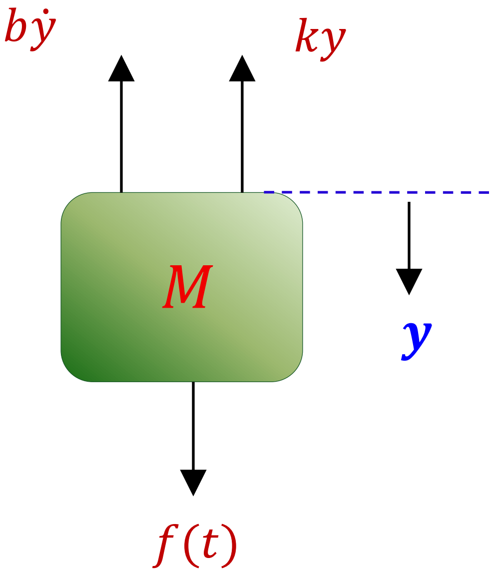


$$\sum Fuerzas = Masa \times Aceleracion$$

$$P - R_x = M \frac{d^2x}{dt^2} \longrightarrow \boxed{M \frac{d^2x}{dt^2} + C_x \frac{dx}{dt} = P}$$

Ejemplo: Sistema Masa-Resorte

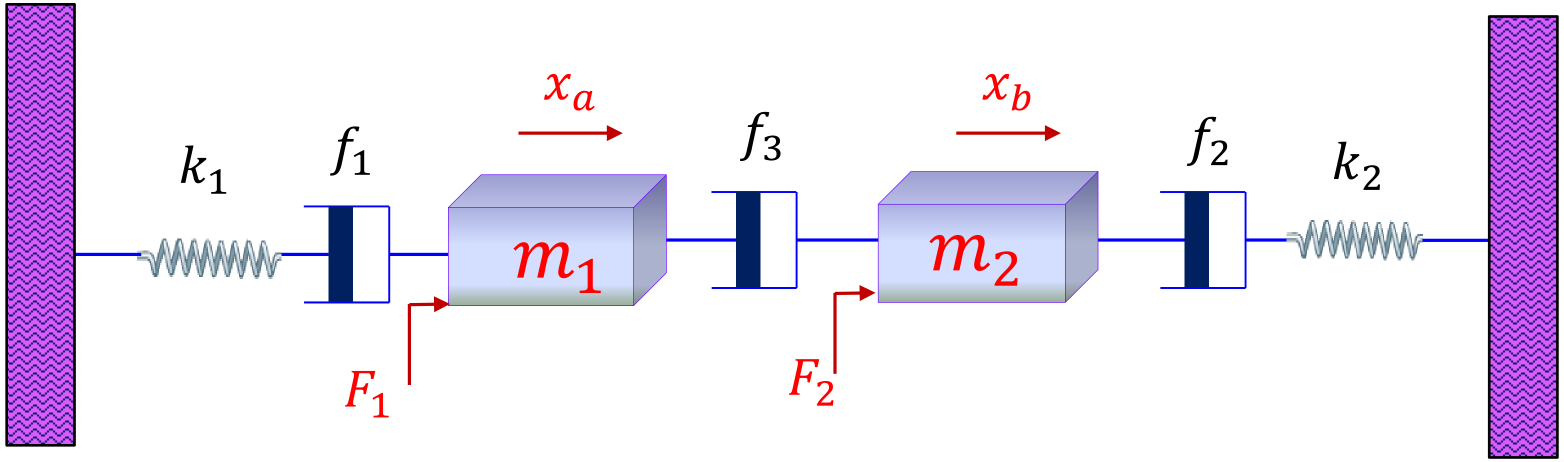




Ecuación: Ley de Newton $\sum Fuerzas = Masa \times Aceleracion$

$$f - ky - b\frac{dy}{dt} = M\frac{d^2y}{dt^2} \longrightarrow \boxed{M\frac{d^2y}{dt^2} + b\frac{dy}{dt} + ky = f}$$

Ejercicio: Masas Acopladas



Ecuaciones diferenciales (leyes de Newton)

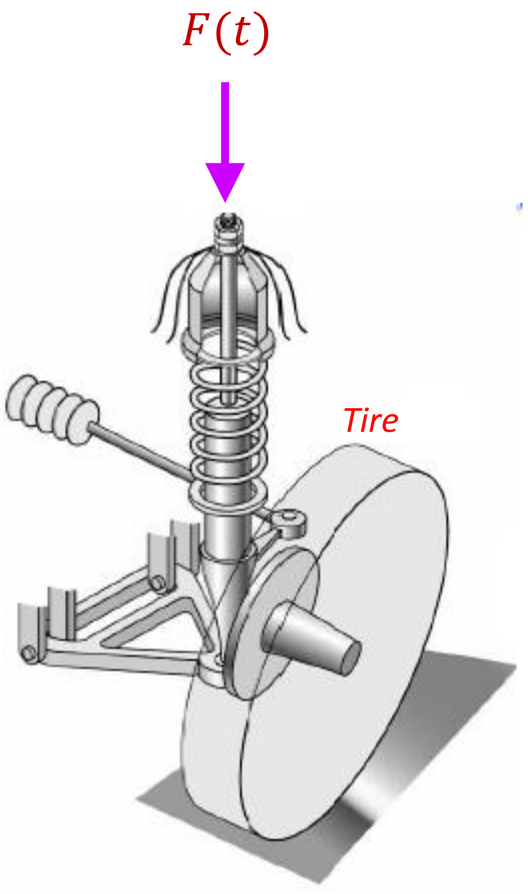
$$m_1\dot{v}_a = F_1(t) - k_1x_a - f_1v_a - f_3(v_a - v_b)$$

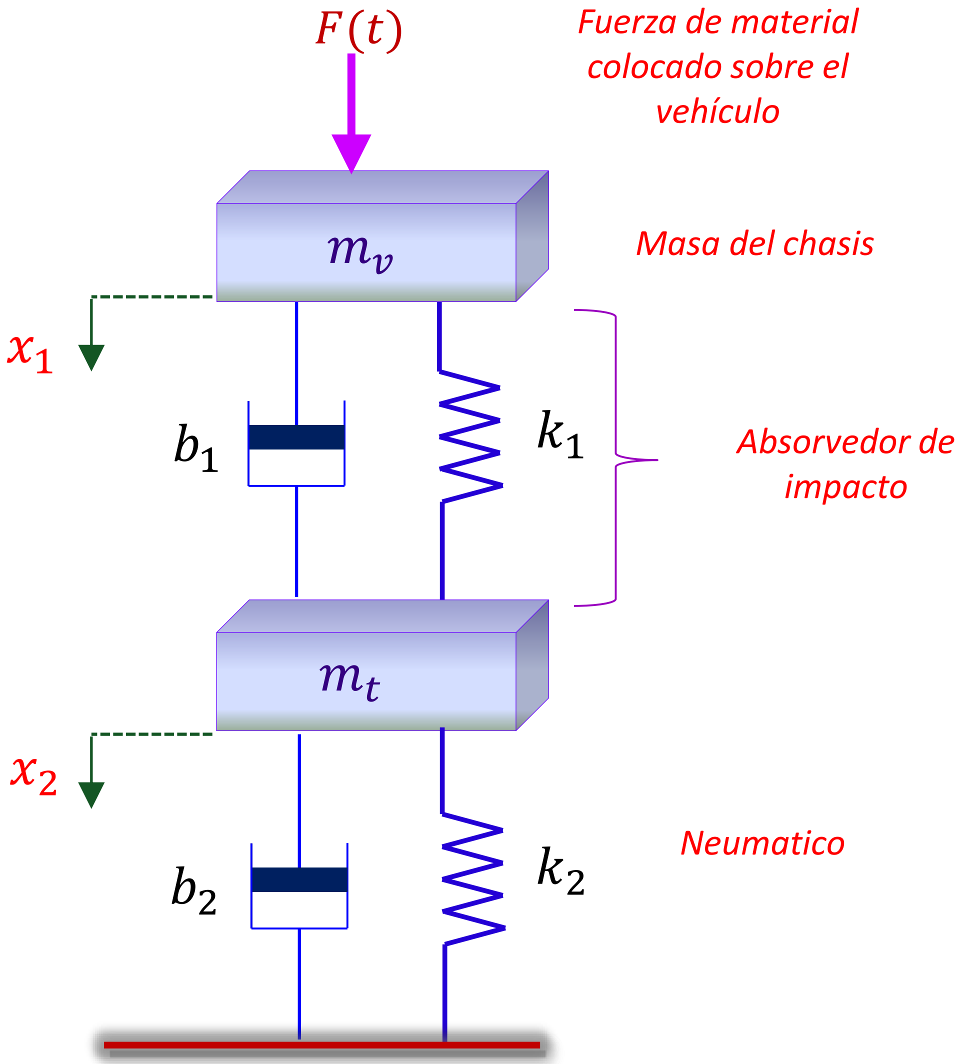
$$m_2\dot{v}_b = F_2(t) - k_2x_b - f_2v_b + f_3(v_a - v_b)$$

$$v_a = \dot{x}_a$$

$$v_b = \dot{x}_b$$

Ejercicio: suspensión





Recordar siempre….

- **Sistema dinámico.** Es aquel cuya salida presente depende de entradas pasadas y presentes. Si el valor de la salida en t_1 depende solamente de la entrada aplicada en t_1, el sistema se conoce como **estático** o sin memoria.
- La salida de un sistema estático permanece constante si la entrada no cambia.
- En un sistema dinámico la salida cambia con el tiempo aunque no se cambie la entrada, a menos que el sistema ya se encuentre en estado estable.

- Las salidas dependen de las entradas y de sus valores pasados (historia)

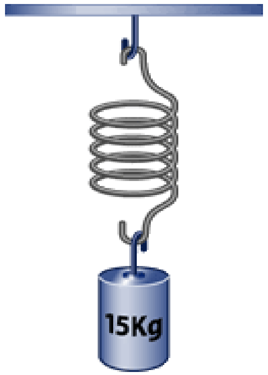
Recordar siempre….

- Los Sistema Lineal Invariante en el Tiempo (SLIT) son considerados en la práctica y la literatura como la clase de sistemas dinámicos más importante.

Recordar siempre….

- El orden del sistema esta determinado por el mayor grado de derivada que presenta el modelo de un sistema

$$u(t) = a \cdot y(t) + b \cdot \frac{dy}{dt} + c \cdot \frac{d^2y}{dt^2} + \cdots + z \cdot \frac{d^ny}{dt^n}$$



Ejemplo: Sistema masa resorte

$$f(t) = k \cdot x(t) + m \cdot \frac{d^2}{dt^2} x(t)$$

Segundo orden