PROBLEMA 1

Sea la función $f(z) = (1+j)z^2 + (2;2)z + 1$. $2+2j$

a. ¿Es h continua en $z = 0$?

$\lim_{z\to 0} h(z) = h(0)$

$$h(z) = \begin{cases} \dfrac{\overline{f'(z)} - 2 + 2j}{z} & , z \neq 0 \\ j & , z = 0 \end{cases}$$

b. ¿Es $g(z) = z\,\mathrm{Re}(f'(z))$ derivable en $(0,0)$?

c. ¿Es g analítica en $z = 0$?

$$\Rightarrow\quad f(z) = (1+j)z^2 + 2(1+j)z + 1$$

$$\boldsymbol{f'(z) = 2(1+j)z + 2(1+j)}$$

$$\overline{f'(z)} = 2(1-j)\bar{z} + 2(1-j)$$

$$h(z) = \begin{cases} \dfrac{2(1-j)\bar{z}}{z}, & z \neq 0 \\ j, & z = 0 \end{cases}$$

a) Se conoce que $\lim_{z\to 0} \frac{\bar{z}}{z}$ ➔ **no existe**.

Luego: $\lim_{z\to 0} \frac{2(1-j)\bar{z}}{z}$ ➔ **no existe**.

Entonces $h(z)$ no es contínua.

b) $g(z) = zRe(f'(z))$

$$g(z) = zRe(2(1+j)z + 2(1+j)) = 2z\,\mathrm{Re}((1+j)(z+1)) = 2z\,\mathrm{Re}((1+j)(x+1+jy))$$

$z = x+jy$

$(1+j)(x+1+jy) = x+1+jy+jx+j-y = (x+1-y)+j(y+x+1)$, $\mathrm{Re} = x+1-y$

$$\Rightarrow\quad g(z) = 2z(x+1-y) = 2(x+jy)(x+1-y)$$

$$g(z) = \underbrace{2(x^2 + x - xy)}_{u} + \underbrace{2(yx + y - y^2)}_{v}j$$

Vemos que aquí si se cumple las ecuaciones de Cauchy – Riemann: $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$, $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= 4x + 2 - 2y \\ \frac{\partial v}{\partial y} &= 2x + 2 - 4y \end{aligned}\right\} \neq,\ \equiv$$

Pero en (0;0) si se cumple:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial y} &= -2x \\ \frac{\partial v}{\partial x} &= 2y \end{aligned}\right\} \frac{\partial u}{\partial y} \neq -\frac{\partial v}{\partial x}$$

Pero en (0;0) si se cumple:

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

Luego, **si es derivable en (0;0).**

c) Se observa que las ecuaciones de Cauchy Riemann solo se cumplen en (0;0), Pero en otros puntos no se cumple. **Luego no es analítica en (0;0).**

PROBLEMA adicional

Sea la función real $v(x,y) = e^x \operatorname{sen}(y) + e^y \cos(x) + x + y$.

a. Verificar que es armónica.

b. Halle la función real $u(x,y)$ de modo que $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ sea una función analítica.

a) $v(x;y) = e^x sen(y) + e^y cos(x) + x + y$

$v_x = e^x sen(y) - e^y sen(x) + 1$

$\boldsymbol{v_{xx} = e^x sen(y) - e^y cos(x)} + 0$

$v_y = e^x cos(y) + e^y cos(x) + 1$

$\boldsymbol{v_{yy} = -e^x sen(y) + e^y cos(x)}$

Luego: $\boldsymbol{v_{xx} + v_{yy} = 0}$

Y dado que cumple con la ecuación de Laplace entonces $v(x;y)$ es armónica.

Una función es armónica si:

$$\boxed{f_{xx} + f_{yy} = 0}$$

b) Dado que $v(x;y)$ es armónica, entonces se puede hallar su armónica conjugada $u(x;y)$:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

Dado que $\boldsymbol{v(x;y) = e^x sen(y) + e^y cos(x) + x + y}$

Entonces.

$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} = e^x cos(y) + e^y cos(x) + 1$

➔integrando con x: $\boldsymbol{u = e^x cos(y) + e^y sen(x) + x + C(y)}$ ...1

$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \rightarrow \frac{\partial u}{\partial y} = -(e^x sen(y) - e^y sen(x) + 1)$

➔integrando con y: $\boldsymbol{u = e^x cos(y) + e^y sen(x) + y + C(x)}$ ...2

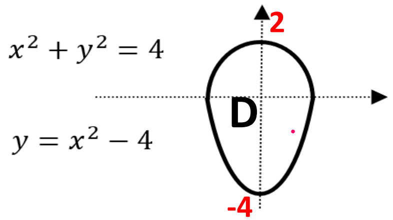
Luego:

$\boldsymbol{u = Términos\ comunes + Términos\ no\ comunes}$

1, 2: $\boldsymbol{u(x,y) = e^x cos(y) + e^y sen(x) + x + y + c}$

PROBLEMA adicional

Dada la función $f(z) = (2x + 2y + 1) + (2x - 2y + 2)j$ y siendo $z = x + yi$, explicar geométricamente la forma de la imagen de la región D (ver figura) al aplicar $f(z)$



Sugerencia: Formar la función $f(z)$ en términos de z.

$$f(z) = 2x + 2xj + 2y - 2yj + 1 + 2j$$
$$f(z) = 2(x - yj) + 2(xj + y) + 1 + 2j$$

NOTA: tener en cuenta lo siguiente:

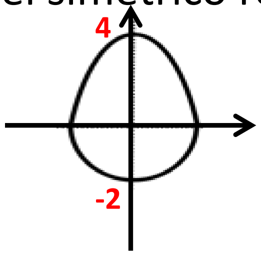
$$\boxed{\begin{array}{l} z = x + jy \rightarrow \; jz = xj - y \\ \bar{z} = x - jy \rightarrow \; j\bar{z} = jx + y \end{array}}$$

$$f(z) = 2\bar{z} + 2j\bar{z} + 1 + 2j$$
$$f(z) = 2\sqrt{2}e^{j\frac{\pi}{4}}\bar{z} + 1 + 2j$$

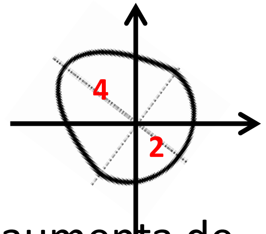
$$f(z) = 2\underbrace{(1+j)}_{\sqrt{2}\,e^{j\frac{\pi}{4}}}\bar{z} + 1 + 2j$$

Dado la región D:

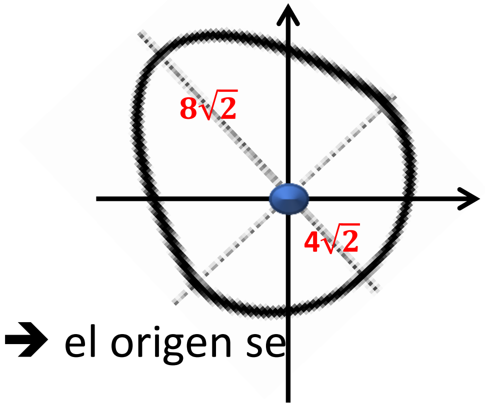
1) $f(z) = \bar{z}$ ➔ obtiene el simétrico respecto del eje X, de la región D:



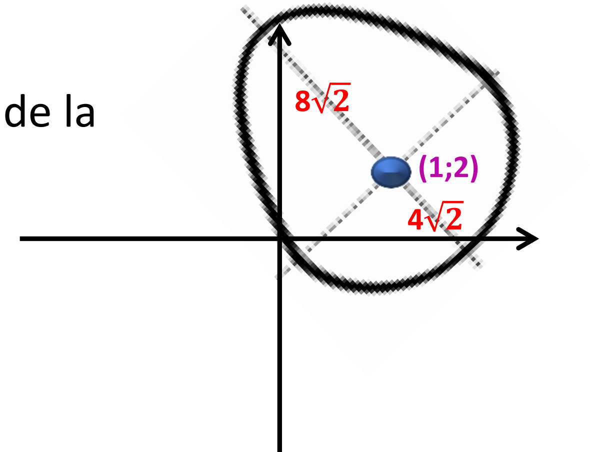
2) $f(z) = e^{j\frac{\pi}{4}}\bar{z}$ ➔ Gira $\frac{\pi}{4}$ radianes, en sentido antihorario, a la gráfica anterior.



3) $f(z) = 2\sqrt{2}e^{j\frac{\pi}{4}}\bar{z}$ ➔la gráfica aumenta de tamaño en un factor $2\sqrt{2}$.



4) $f(z) = 2\sqrt{2}e^{j\frac{\pi}{4}}\bar{z} + \mathbf{1} + \mathbf{2j}$ ➔ el origen se traslada al punto (1;2).



Determine el valor de la integral compleja I, siendo:

$$I = \oint_C f(z)dz$$

a. $f(z) = \dfrac{z^2-4}{2z+3}$, $C: |z| = 2$

b. $f(z) = \dfrac{1}{z^2 - jz + 2}$, $C: |z| = 3$

c. $f(z) = \dfrac{1}{z^2(z+j)}$, $C: |z - j| = 3/2$

PROBLEMA 2

a) $I = \oint_C \dfrac{z^2-4}{2z+3} dz = \dfrac{1}{2} . \oint_C \dfrac{z^2-4}{z+\frac{3}{2}} dz \quad C: |z| = 2$

$f(z) = z^2 - 4$ $\quad z_0 = -3/2$

$$\oint_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz = 2\pi j f(z_0)$$

Zo adentro de C

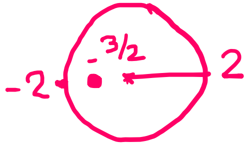
Esta función no es analítica en $z = -\frac{3}{2}$.

$z = -3/2$ está en el interior del círculo $|z| = 2$

Y se puede usar la fórmula de Cauchy con $f(z) = z^2 - 4$ con $zo = -\frac{3}{2}$.

$f(z)$ debe ser analítica en la región determinada por C.

$$I = \frac{1}{2} . \oint_C \frac{z^2 - 4}{z + \frac{3}{2}} dz = \frac{1}{2} . [2\pi j . f\left(-\frac{3}{2}\right)]$$



$$I = \pi j \left(\frac{9}{4} - 4\right) = -\frac{7\pi j}{4}.$$

b) $I = \oint_C \dfrac{1}{z^2 - jz + 2} dz = \oint_C \dfrac{1}{(z-2j)(z+j)} dz \qquad C: |z| = 3$

$z^2 - jz - 2j^2$

$z \quad -2j$

$z \quad +j$

En $|z| = 3$, toda la función f(z) no es analítica en $z = -j$ y en $z = 2j$. (2 agujeros ➔ No usar Cauchy)

Por ello aun no se puede usar la fórmula de Cauchy.

Se descompone en fracciones parciales:

$$\frac{1}{(z-2j)(z+j)} = \frac{A}{z-2j} + \frac{B}{z+j}$$

$$1 = A(z+j) + B(z-2j)$$

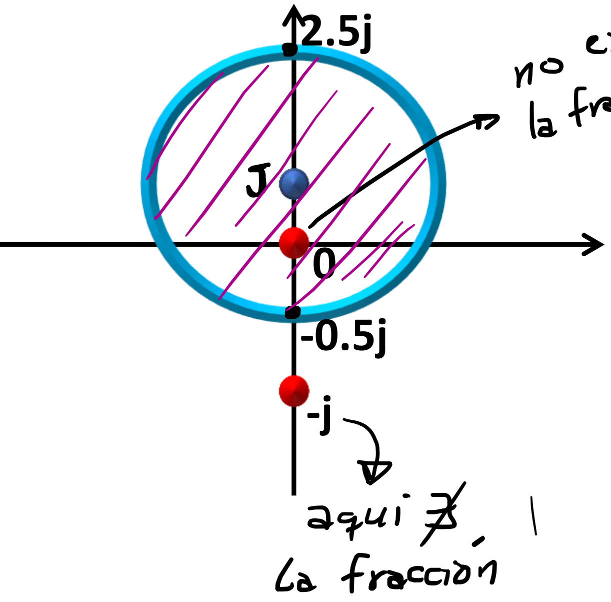
$z = -j$ ➔ $1 = -3jB$ ➔ $B = -\dfrac{1}{3j}$

$z = 2j$ ➔ $1 = 3jA$ ➔ $A = \dfrac{1}{3j}$

$$I = \frac{1}{3j} . \oint_C \frac{1 . dz}{z - 2j} - \frac{1}{3j} . \oint_C \frac{1 . dz}{z + j}$$

$$I = \frac{1}{3j}(2\pi j) - \frac{1}{3j}(2\pi j) = \mathbf{0}.$$

c) $I = \oint_C \frac{1}{z^2(z+j)}dz \qquad C: |z-j| = \frac{3}{2}$



$$\frac{1}{z^2(z+j)} = \frac{A}{z+j} + \frac{B}{z} + \frac{C}{z^2}$$

$$\mathbf{1 = Az^2 + Bz(z+j) + C(z+j)}$$

$$z = 0 \;\Rightarrow 1 = Cj \Rightarrow C = \frac{1}{j}$$

$$z = -j \Rightarrow 1 = A(\mathbf{-1}) \Rightarrow A = -1$$

$$z = j \;\Rightarrow \cancel{1} = \cancel{\mathbf{1}} - 2B + \frac{1}{\cancel{j}}(2\cancel{j}) \Rightarrow \text{B} = 1$$

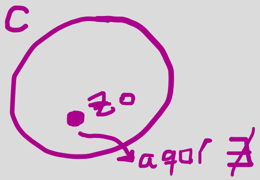
$$I = \oint_C \frac{1}{z^2(z+j)}dz = \oint_C \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{(z+j)}}\mathbf{dz} + \oint_C \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{z}}\mathbf{dz} + \oint_C \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{z^2}}\mathbf{dz}$$

n=1 n=2

$$I = 0 + 2\pi j + 0 = 2\pi j.$$

Corolario

Si C es una curva cerrada simple borde de la región que contiene al complejo z_0 , y n un entero:



$$\oint_C \frac{1}{(z-z_0)^n}dz = \begin{cases} 2\pi j & \text{si } n=1 \\ 0 & \text{si } n \neq 1 \end{cases}$$

INTEGRACIÓN COMPLEJA

$$2\pi j f(z_0) = \oint_C \frac{f(z)}{z-z_0}dz$$

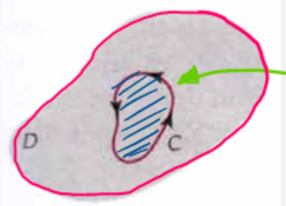
$$\boldsymbol{f^{(n)}(z_0)\frac{2\pi j}{n!} = \oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz}$$

❑ Teorema de Cauchy-Goursat

Región sin huecos

Si f(z) es analítica en un dominio $\underbrace{\text{simplemente conexo}}$ D, entonces para todo curva cerrada simple C en D se tiene:

$$\boxed{\oint_C \boldsymbol{f(z)dz} = 0}$$

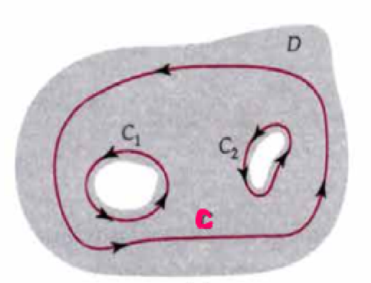


curva cerrada sin huecos.

❑ Teorema de Cauchy-Goursat para dominios múltiplemente conexos

Sea $f(z)$ analítica en un dominio D múltiplemente conexo

$$\oint_C f(z)dz = \oint_{C_1} f(z)dz + \oint_{C_2} f(z)dz$$



PROBLEMA adicional

Halle, por definición, la transformada Z de la secuencia $x[n]$ indicando su ROC

$$x[n] = 3^{-n}u[n-1] + 4^{n}u[-n]$$

$Z(x[n]) = Z(3^{-n}u[n-1] + 4^{n}u[-n])$

La definición de transf. Z:

$$\boxed{Z(x[n]) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n} = X(z)}$$

$$Z(x[n]) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (\mathbf{3^{-n}u(n-1) + 4^{n}u(-n)})z^{-n}$$

$$Z(x[n]) = X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (3^{-n}u[n-1])z^{-n} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} (4^{n}u[-n])z^{-n}$$

$$Z(x[n]) = X(z) = \sum_{n=1}^{\infty} (3^{-n}(\mathbf{1}))z^{-n} + \sum_{n=-\infty}^{0} (4^{n}(\mathbf{1}))z^{-n}$$

$*u[n-1] = 1$; $n-1 \geq 0$
$n \geq 1$

$*u[-n] = 1$, $-n \geq 0$
por -1: $n \leq 0$

$$Z(x[n]) = X(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3z}\right)^{n} + \sum_{n=-\infty}^{0} (4^{n})z^{-n}$$

$n = -k$

$-\infty \leq n \leq 0$
$-\infty \leq -k \leq 0 \rightarrow 0 \leq k \leq \infty$

$*$ Serie geométrica: $a^{k} + a^{k+1} + a^{k+2} + \ldots = \dfrac{a^{k}}{1-a}$ Converge solo si $|a| < 1$.

$$Z(x[n]) = X(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3z}\right)^{n} + \sum_{k=+\infty}^{k=0} (4^{-k})z^{k}$$

$$Z(x[n]) = X(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3z}\right)^{n} + \sum_{k=+\infty}^{k=0} \left(\frac{z}{4}\right)^{k}$$

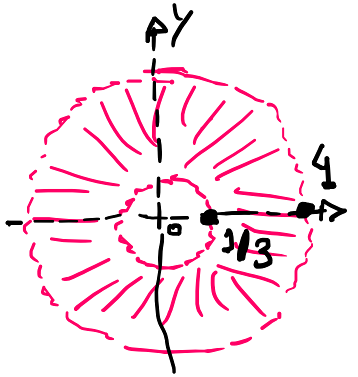
$$\left.\mathbf{Z(x[n]) = X(z) = \frac{\frac{1}{3z}}{1-\frac{1}{3z}} + \frac{1}{1-\frac{z}{4}}}\right\} \text{Rpta.}$$

Para hallar el ROC:

$\left|\frac{1}{3z}\right| < 1 \rightarrow |z| > \frac{1}{3}$

$\left|\frac{z}{4}\right| < 1 \rightarrow |z| < 4$

ROC: $\frac{1}{3} < |z| < 4$



PROBLEMA 3

Un sistema L.T.I. en tiempo discreto tiene función de transferencia:

$$\frac{Y_{(z)}}{X_{(z)}} = H(z) = \frac{1 - z^{-1}}{\left(1 + \frac{1}{2}z^{-1}\right)\left(1 - \frac{1}{4}z^{-1}\right)}$$

a. Indicar las posibles regiones de convergencia y el tipo de sistema en cada caso.

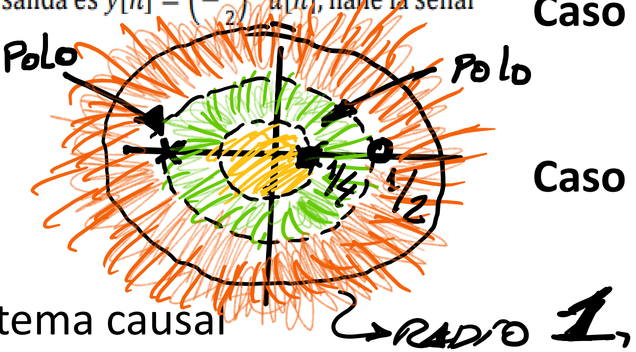
b. ¿El sistema es estable? Justifique.

c. Halle la respuesta al impulso unitario del sistema para cada región del ítem (a).

d. Considerando el sistema causal, si la señal de salida es $y[n] = \left(-\frac{1}{2}\right)^n u[n]$, halle la señal de entrada.

a) $\underbrace{}_{}$ Denom. = 0

POLOS: $z = -\frac{1}{2},\quad z = \frac{1}{4}$



Posibles ROC:

Caso 1 ➔ |z|>1/2 sistema causal

Caso 2 ➔ |z|<1/4 sistema anticausal

Caso 3 ➔ ¼<|z|<1/2 sistema bilateral

b) Seria un sistema **BIBO estable** si el ROC contiene a la circunferencia unitaria. **Esto sucede cuando el sistema es causal, ya que el ROC |z|>1/2** si esta conteniendo a la circunferencia unitaria.

c) Respuesta al impulso unitario: $X(z) = \mathcal{Z}(\delta[n]) = 1$

$$\frac{Y(z)}{X(z)} = H(z) = \frac{1 - z^{-1}}{(1 + \frac{1}{2}z^{-1})(1 - \frac{1}{4}z^{-1})} \xrightarrow{\text{FRAC. PARC.}} = 2.\frac{1}{1 + \frac{1}{2}z^{-1}} - \frac{1}{1 - \frac{1}{4}z^{-1}}$$

$X(z) \rightsquigarrow 1$ $\quad a = -\frac{1}{2}$ $\quad a = \frac{1}{4}$

Caso 1 ➔ |z|>1/2 sistema causal

$$y[n] = 2\left(-\frac{1}{2}\right)^n u[n] - \left(\frac{1}{4}\right)^n u[n]$$

Caso 2 ➔ |z|<1/4 sistema anticausal

$$y[n] = -2\left(-\frac{1}{2}\right)^n u[-n-1] - -\left(\frac{1}{4}\right)^n u[-n-1]$$

Caso 3 ➔ ¼<|z|<1/2 sistema bilateral

$$y[n] = -2\left(-\frac{1}{2}\right)^n u[-n-1] - \left(\frac{1}{4}\right)^n u[n]$$

ANTICAUSAL

27	$\mathcal{Z}(-a^n u[-n-1]) =$	$\frac{+1}{1-az^{-1}}$,	ROC: $\lvert z\rvert < \lvert a\rvert$

CAUSAL

25	$\mathcal{Z}(a^n u[n]) =$	$\frac{1}{1-az^{-1}}$,	ROC: $\lvert a\rvert < \lvert z\rvert$

Un sistema L.T.I. en tiempo discreto tiene función de transferencia:

$$H(z) = \frac{1 - z^{-1}}{\left(1 + \frac{1}{2}z^{-1}\right)\left(1 - \frac{1}{4}z^{-1}\right)}$$

a. Indicar las posibles regiones de convergencia y el tipo de sistema en cada caso.

b. ¿El sistema es estable? Justifique.

c. Halle la respuesta al impulso unitario del sistema para cada región del ítem (a).

d. Considerando el $\underbrace{\text{sistema causal}}_{|z|>a}$, si la señal de salida es $y[n] = \left(-\frac{1}{2}\right)^n u[n]$, halle la señal de entrada.

d) $H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1-z^{-1}}{(1+\frac{1}{2}z^{-1})(1-\frac{1}{4}z^{-1})}$ ...(*)

Dado que $y[n] = (-\frac{1}{2})^n u[n] \rightarrow Y(z) = \frac{1}{1+\frac{1}{2}z^{-1}}$ } $|z| > \frac{1}{2}$.

$a = -\frac{1}{2}$

Reemplazando en (*):

$$\frac{\frac{1}{\cancel{1+\frac{1}{2}z^{-1}}}}{X(z)} = \frac{1 - z^{-1}}{\cancel{(1+\frac{1}{2}z^{-1})}(1-\frac{1}{4}z^{-1})}$$

y despejando $X(z)$:

$$X(z) = \frac{1 - \frac{1}{4}z^{-1}}{1 - z^{-1}}$$

$$X(z) = \underbrace{\frac{1}{1 - z^{-1}}}_{} - \frac{1}{4}.\underbrace{z^{-1}.\frac{1}{1 - z^{-1}}}_{}$$

$\mathcal{Z}(x[n]) = \mathcal{Z}(u[n]) - \frac{1}{4}\cdot\mathcal{Z}(u[n-1])$

$$x[n] = u[n] - \frac{1}{4}.u[n-1]$$ rpta.

23	$u(n)$	$1/(1-z^{-1})$	ROC $\|z\|>1$

2	$f(n-k)$	$z^{-k}F(z)$

causal:

25	$a^n u[n]$	$\Rightarrow \frac{1}{1-az^{-1}}$, ROC: $\|a\| < \|z\|$

PROBLEMA 4

4. Dado un sistema LTI representado por la ecuación de diferencia:

$$2y[n] - y[n-1] - y[n-2] = x[n]$$

a. Halle la función de transferencia del sistema y dibujar el sistema lineal respectivo.

b. Aplicar la transformada Z y halle la respuesta a la entrada $x[n] = u[n-1]$, considerando que el sistema es causal.

a) $2Z(y[n]) - Z(y[n-1]) - Z(y[n-2]) = \boldsymbol{Z(x[n])}$

$$2Y(z) - z^{-1}Y(z) - z^{-2}Y(z) = X(z)$$

$$\boldsymbol{Y(z)\left(2 - z^{-1} - z^{-2}\right) = X(z)}$$

$$\frac{\boldsymbol{Y(z)}}{\boldsymbol{X(z)}} = \frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{2 - z^{-1} - z^{-2}}}$$

$$\boldsymbol{H(z) = \frac{1}{2 - z^{-1} - z^{-2}}}$$

b) Aquí: $x[n] = u[n-1]$ Para hallar su transformada Z:

Se sabe: $Z(u[n]) = \frac{1}{1-z^{-1}} \rightarrow Z(u[n-1]) = z^{-1}.\frac{1}{1-z^{-1}}$ luego:

$$H(z) = \frac{\boldsymbol{Y(z)}}{\boldsymbol{X(z)}} = \frac{\boldsymbol{Y(z)}}{Z(u[n-1])} = \frac{z^{-1}}{(1-z^{-1})(2-z^{-1}-z^{-2})}$$

$(2+z^{-1})(1-z^{-1})$

$$\Rightarrow \quad Y(z) = \frac{z^{-1}}{(1-z^{-1})(2-z^{-1}-z^{-2})}$$

$$Y(z) = z^{-1}.\frac{1}{(2+z^{-1})(1-z^{-1})^2}$$

Descomponer a frac. parc.

$$Y(z) = z^{-1}\{-\frac{1}{9}.\frac{1}{(z^{-1}-1)} + \frac{1}{3}.\frac{1}{(z^{-1}-1)^2} + \frac{1}{9}.\frac{1/2}{z^{-1}+2/2}\}$$

$$Y(z) = \frac{1}{9}.z^{-1}.\frac{1}{(1-z^{-1})} + \frac{1}{3}.\frac{z^{-1}}{(1-z^{-1})^2} + \frac{1}{18}.z^{-1}.\frac{1}{1+\frac{1}{2}z^{-1}}\}$$

$z^{-1}.Z[U[n]]$ $\quad \Rightarrow Z((-\tfrac{1}{2})^n u_n)$

$$y[n] = \frac{1}{9}u[n-1] + \frac{1}{3}nu[n] + \frac{1}{18}(-\frac{1}{2})^{n-1}u[n-1]$$

Rpta.

26	$na^n u[n]$	$\frac{az^{-1}}{(1-az^{-1})^2}$, $ROC: \lvert z\rvert > \lvert a\rvert$
24	$Z(u[n]) =$	$\frac{1}{(1-z^{-1})}$, $ROC: \lvert z\rvert > 1$
2	$Z(f[n-k]) =$	$z^{-k}F(z)$
25	$a^n u[n]$	$\frac{1}{1-az^{-1}}$, $ROC: \lvert a\rvert < \lvert z\rvert$