

# Lugar de Raíces

*Ing. Eddie Sobrado*

# Graficas del Lugar de las Raíces

- La característica básica de la respuesta transitoria de un sistema en lazo cerrado se relaciona estrechamente con la ubicación de los polos en lazo cerrado.
- Si el sistema tiene una ganancia de lazo variable, la ubicación de los polos en lazo cerrado depende del valor de la ganancia de lazo elegida.
- Es importante que el diseñador conozca cómo se mueven los polos en lazo cerrado en el plano  $s$  conforme varía la ganancia de lazo.

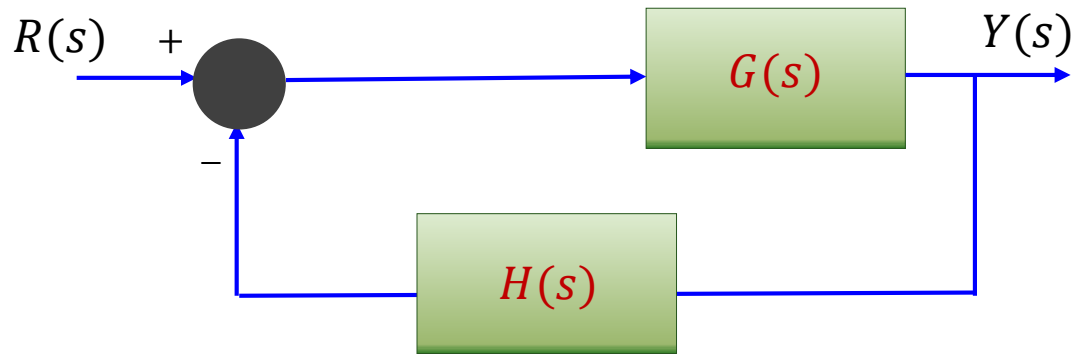
- Desde el punto de vista del diseño, *un simple ajuste de la ganancia en algunos sistemas mueve los polos en lazo cerrado* a las posiciones deseadas.
- Aquí el problema de diseño se centra en la *selección de un valor de ganancia adecuada*.
- Si el ajuste de la ganancia no produce por sí solo un resultado conveniente, será necesario *agregar al sistema un compensador*.
- Los *polos en lazo cerrado* son las *raíces de la ecuación característica*.

La idea básica detrás del método del LGR es que los valores que hacen que la función de transferencia alrededor del lazo sea igual a - 1 deben satisfacer la ecuación característica del sistema.

- El método debe su nombre al *lugar geométrico de las raíces de la ecuación característica del sistema en lazo cerrado* conforme la ganancia varía de cero a infinito.
- Dicha gráfica muestra claramente cómo contribuye cada polo o cero en lazo abierto a las posiciones de los polos en lazo cerrado.

# Condiciones de **Angulo** y **Magnitud**

- Considere el sistema de control realimentado mostrado en la Figura siguiente.



Sistema de control realimentado

# Condiciones de **Angulo** y **Magnitud**

- La función de transferencia de lazo cerrado es:

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)}$$

- La ecuación característica para este sistema en lazo cerrado se obtiene haciendo que el denominador del segundo miembro de la ecuación anterior sea igual a cero:

$$1 + G(s)H(s) = 0$$

$$G(s)H(s) = -1$$

# Condiciones de **Angulo** y **Magnitud**

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)}$$

$$G(s)H(s) = -1$$

- Los valores de  $s$  que cumplen tanto las condiciones de ángulo como las de magnitud son las raíces de la ecuación característica, o los polos en lazo cerrado.
- El LGR es una gráfica de los puntos del plano complejo que sólo satisfacen la condición de ángulo.
- La **estabilidad** del sistema realimentado queda definida por los **polos de este sistema**, que son las **raíces de la ecuación característica**:

# Condiciones de **Angulo** y **Magnitud**

- Las raíces de la ecuación característica (los polos en lazo cerrado) que corresponden a un valor específico de la ganancia se determinan a partir de la condición de magnitud.



- En muchos casos,  $G(s)H(s)$  contiene un parámetro de ganancia  $K$ , y la ecuación característica se escribe como:

$$1 + \frac{K(s + z_1)(s + z_1) \dots (s + z_m)}{(s + p_1)(s + p_2) \dots (s + p_n)}$$

- Entonces, los lugares geométricos de las raíces para el sistema son los lugares geométricos de los polos en lazo cerrado conforme la ganancia  $K$  varía de cero a infinito.

- Observe que, para empezar a trazar los LGR de un sistema mediante el método analizado aquí, se debe conocer la ubicación de los polos y los ceros de  $G(s)H(s)$ .
- Recuerde que los ángulos de las cantidades complejas que se originan a partir de los polos y los ceros en lazo abierto para el punto de prueba  $s$  se miden en sentido contrario al de las manecillas del reloj.

# Construcción de Lugar de Raíces

- Por lo tanto, las expresiones para módulo y ángulo, considerando  $K > 0$ , resultan:

$$k|G(s)| = 1$$

Condición de modulo

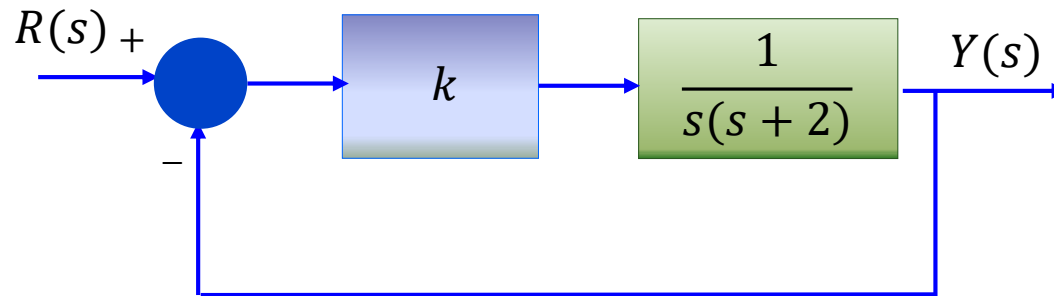
Condición de Angulo

$$\text{ang}(G(s)) = \text{ang}\left(\sum_i^m (s_i - z_i)\right) - \text{ang}\left(\sum_i^n (s_i - p_i)\right) = -180 + 360\lambda$$

- El coeficiente  $\lambda$  representa un entero cualquiera **positivo** o **negativo**.

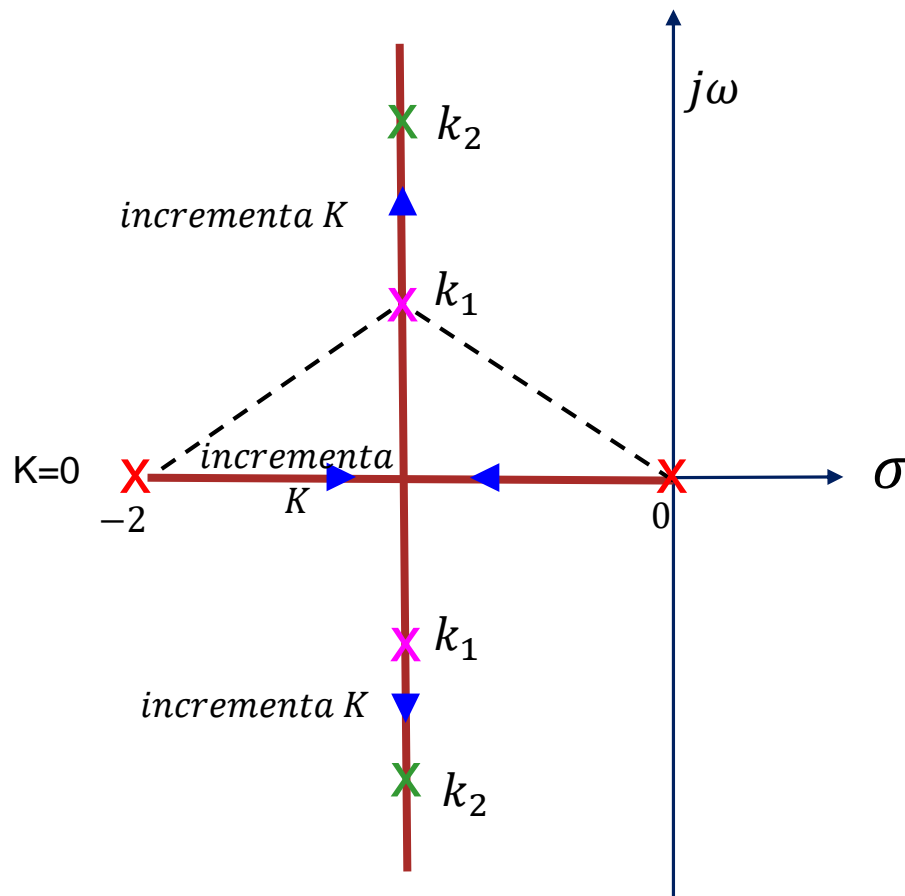
# Construcción de Lugar de Raíces

- Para el ejemplo anterior



# Construcción de Lugar de Raíces

- La condición de modulo permite determinar el valor de la ganancia  $K$  para cada polo  $s^*$  perteneciente al Lugar de las Raíces



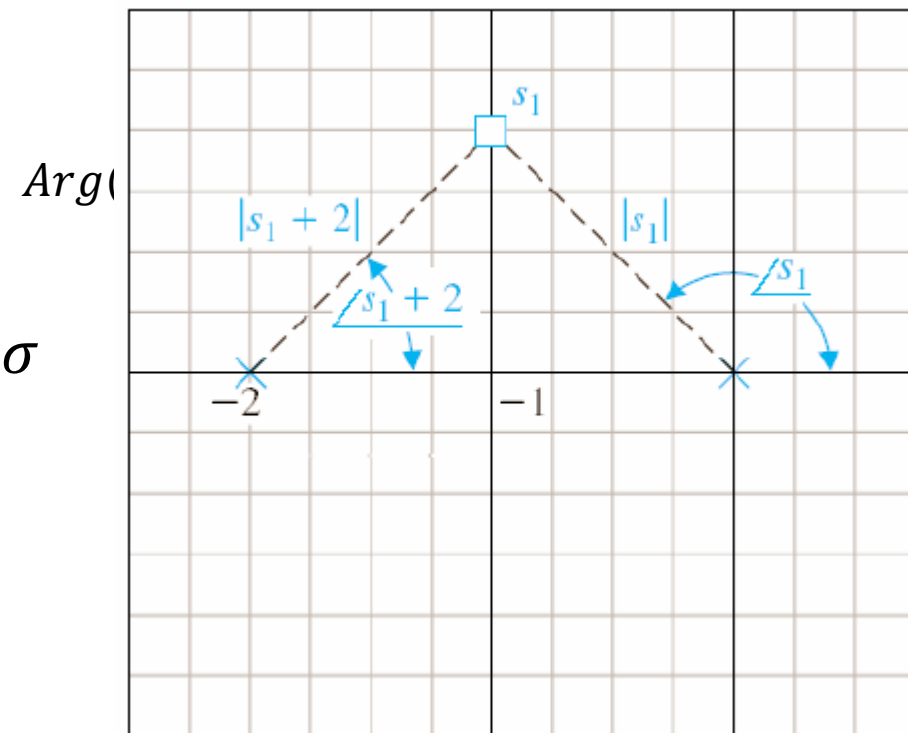
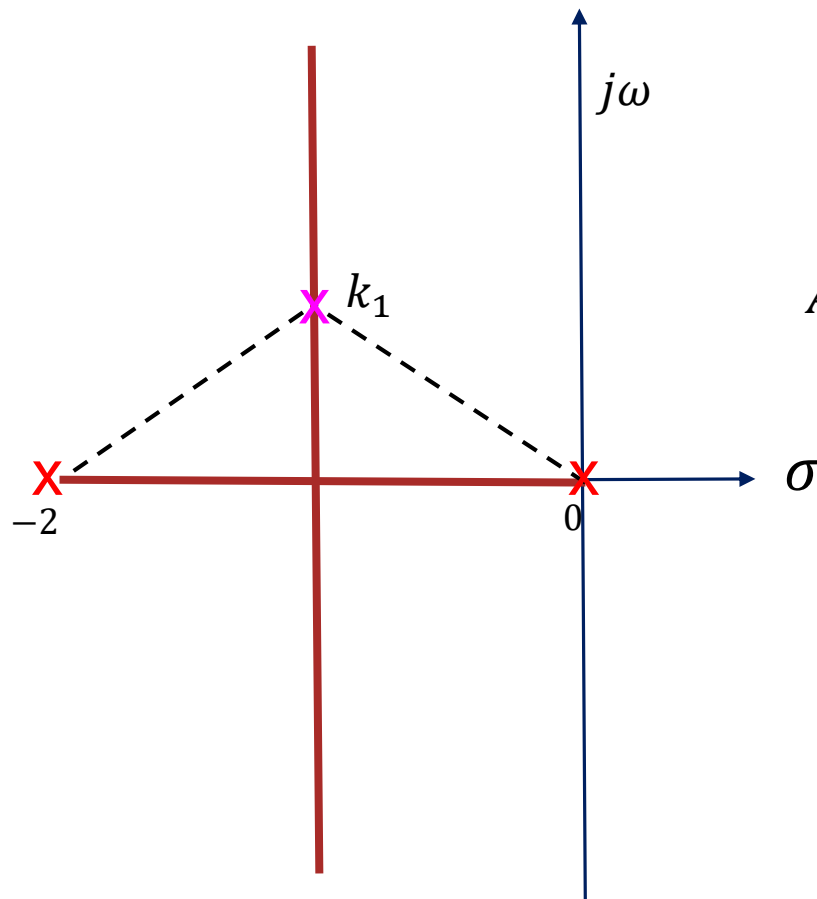
$$k = |s^*(s^* + 2)| = |s^*||s^* + 2|$$

X= polos del sistema en Lazo abierto  
 polos del sistema en Lazo cerrado

X X

# Construcción de Lugar de Raíces

- La condición de Angulo permite determinar si un polo  $s^*$  pertenece al Lugar de las Raíces



# Condición de Magnitud y Angulo

- Por ejemplo si  $G(s)H(s)$  se obtiene mediante:

$$G(s)H(s) = \frac{(s + z_1)}{(s + p_1)(s + p_3)(s + p_4)}$$

- En este caso,  $-p_2$  ,  $-p_3$  , son polos complejos conjugados de  $G(s)H(s)$  es:

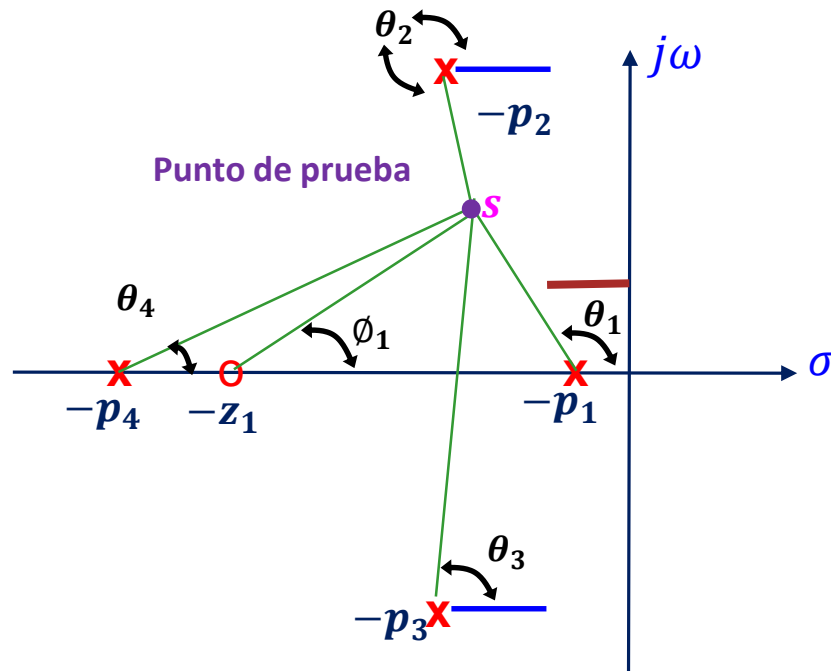
$$\angle G(s)H(s) = \phi_1 - \theta_1 - \theta_2 - \theta_3 - \theta_4$$

- En donde los ángulos se miden en sentido contrario a las manecillas del reloj,

# Condición de Magnitud y Angulo

$$G(s)H(s) = \frac{(s + z_1)}{(s + p_1)(s + p_2)(s + p_3)(s + p_4)}$$

$$\angle G(s)H(s) = \phi_1 - \theta_1 - \theta_2 - \theta_3 - \theta_4$$



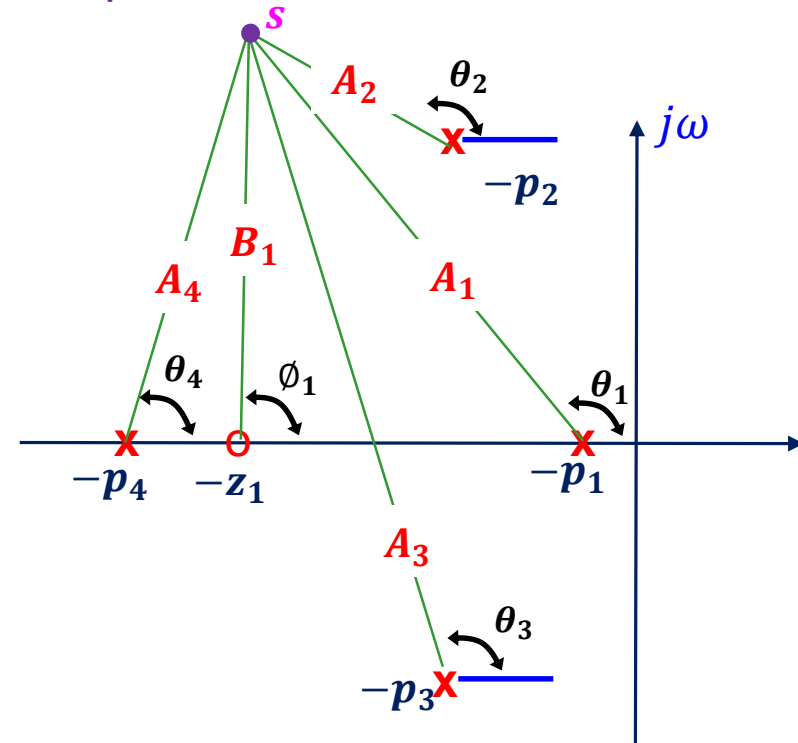


# Condición de Magnitud y Angulo

- Mientras que la magnitud de la función de transferencia  $G(s)H(s)$  es:

$$|G(s)H(s)| = \frac{K * B_1}{A_1 * A_2 * A_3 * A_4}$$

Punto de prueba



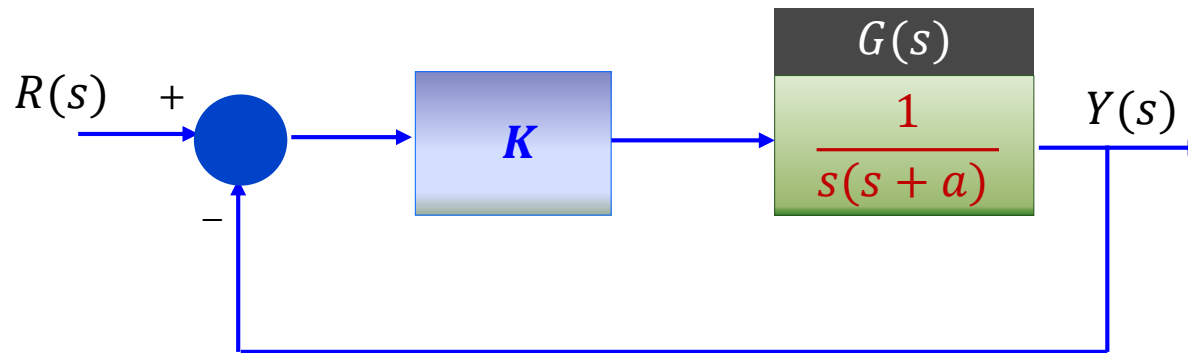
- En donde  $A_1, A_2, A_3, A_4$  y  $B_1$  son magnitudes de las cantidades complejas  $s + p_1, s + p_2, s + p_3, s + p_4$ , y  $s + z_1$ , respectivamente

# Condición de Magnitud y Angulo

- Observe que, debido a que los polos complejos conjugados y los ceros complejos conjugados en lazo abierto, si existen, *siempre se ubican simétricamente con respecto al eje real, los lugares geométricos de las raíces siempre son simétricos con respecto a este eje.*
- Por tanto, sólo es necesario construir la mitad superior de los lugares geométricos de las raíces y dibujar la *imagen espejo de la mitad superior en el plano inferior.*

# Variación de un parámetro diferente a K

- En la mayor parte de los casos, el parámetro del sistema es la ganancia de lazo  $K$ , aunque el parámetro puede ser cualquier otra variable del sistema.
- **Ejemplo:** en el sistema siguiente, la ganancia  $K$  es fija. Analice como varían los polos del sistema realimentado cuando varía un parámetro  $a$



Sistema realimentado con parámetro variable

# Variación de un parámetro diferente a K

- La ecuación característica:  $1 + KG(s) = 0$  resulta:

$$1 + \frac{K}{s(s + a)} = 0$$

- La ecuación característica **debe readecuarse** para que el parámetro  $a$  haga las veces de ganancia variable:

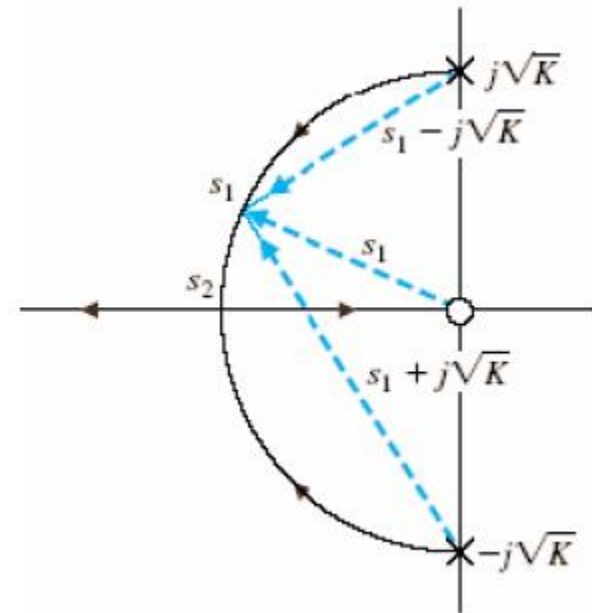
$$1 + a \frac{s}{s^2 + K} = 0$$

La ecuación característica se ha reescrito de la siguiente manera:

$$1 + k^*P(s) = 0$$

# Variación de un parámetro diferente a K

$$1 + a \frac{s}{s^2 + K} = 0$$



Lugar de raíces con  
parámetro  $a$  variable

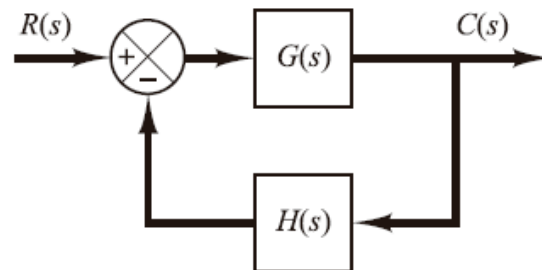
# Condiciones previas en la construcción del Lugar Geométrico de las Raíces

**Condiciones de ángulo y magnitud.** Considérese el sistema de la figura. La función de transferencia en lazo cerrado es

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)} \quad \text{Ecuación (1)}$$

La ecuación característica para este sistema en lazo cerrado se obtiene haciendo que el denominador del lado derecho de la Ecuación (1) sea igual a cero. Es decir,

$$1 + G(s)H(s) = 0$$



Sistema de control.

# Condiciones previas en la construcción del Lugar Geométrico de las Raíces

o bien

$$G(s)H(s) = -1 \quad \text{Ecuación (2)}$$

Aquí se supone que  $G(s)H(s)$  es un cociente de polinomios en  $s$ . Luego:

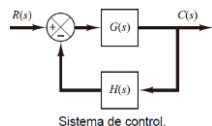
**Condición de ángulo:**

$$\angle G(s)H(s) = \pm 180^\circ(2k + 1) \quad (k = 0, 1, 2, \dots) \quad \text{Ecuación (3)}$$

**Condición de módulo:**

$$|G(s)H(s)| = 1 \quad \text{Ecuación (4)}$$

En muchos casos,  $G(s)H(s)$  contiene un parámetro de ganancia  $K$ , y la ecuación característica se escribe como



$$1 + \frac{K(s + z_1)(s + z_2) \cdots (s + z_m)}{(s + p_1)(s + p_2) \cdots (s + p_n)} = 0$$

$Z_m$  son los ceros del sistema  
 $P_n$  son los polos del sistema

# Condiciones previas en la construcción del Lugar Geométrico de las Raíces

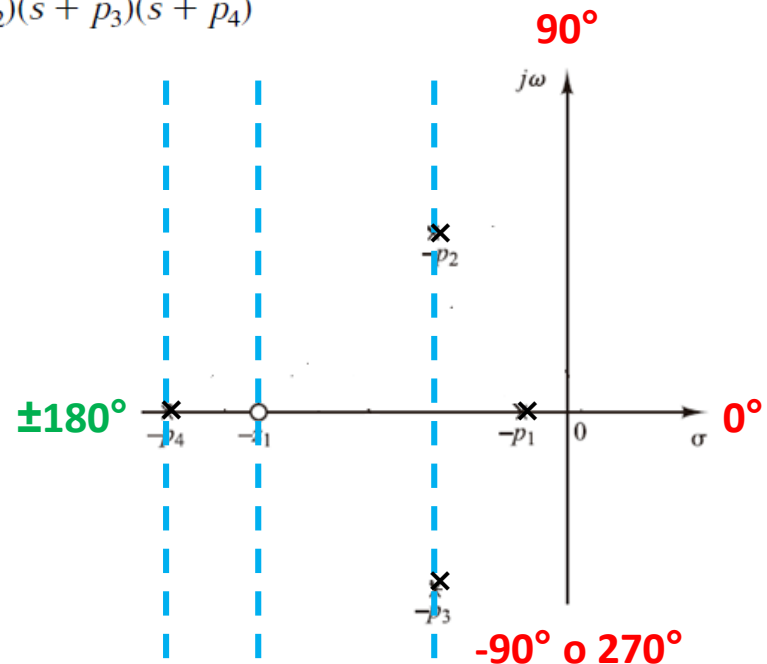
Analizando un caso particular. Por ejemplo, si  $G(s)H(s)$  se obtiene mediante

$$G(s)H(s) = \frac{K(s + z_1)}{(s + p_1)(s + p_2)(s + p_3)(s + p_4)}$$

Lo primero que hay que hacer es ubicar los ceros ( $z_1$ ) y los polos ( $p_1, p_2$  y  $p_3$ ) en el plano complejo con  $K = 0$  (sin controlador)

Con este valor de  $K = 0$  se va probando la existencia de las raíces del ángulo de GH de cumpla la condición:

$$\angle G(s)H(s) = \pm 180^\circ(2k + 1) \quad (k = 0, 1, 2, \dots)$$

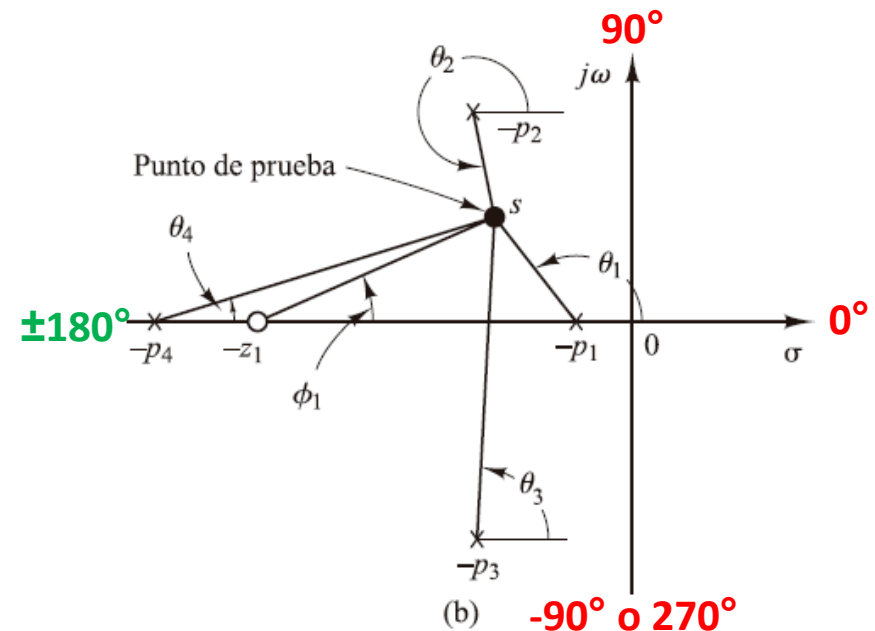
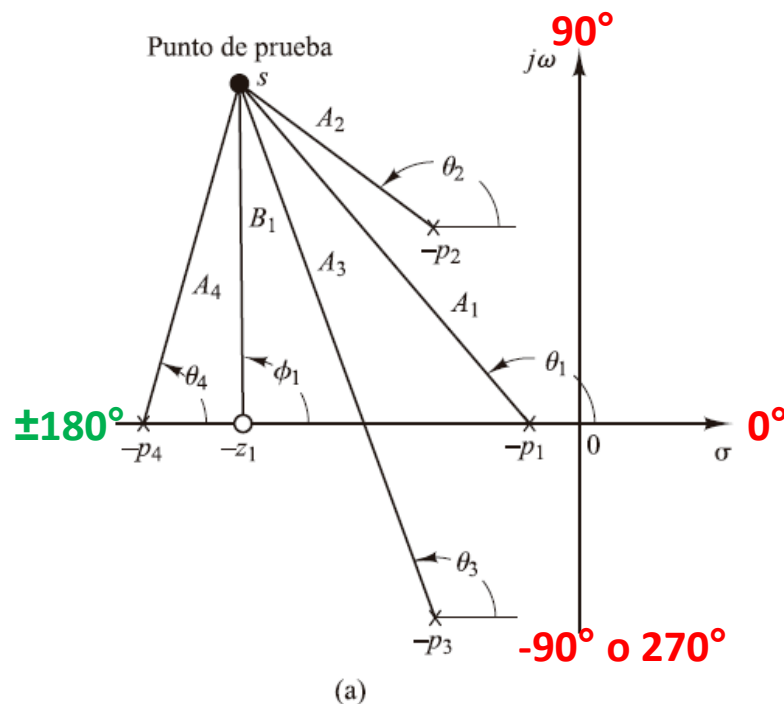


Regiones de existencia del lugar geométrico con  $K = 0$



# Condiciones previas en la construcción del Lugar Geométrico de las Raíces

Aplicando puntos de prueba  $s$  arbitrario en el plano complejo.



(a) y (b) Diagramas que muestran la medición de ángulos de los polos y los ceros en lazo abierto con el punto de prueba  $s$ .

# Condiciones previas en la construcción del Lugar Geométrico de las Raíces

donde  $-p_2$  y  $-p_3$  son polos complejos conjugados, el ángulo de  $G(s)H(s)$  es

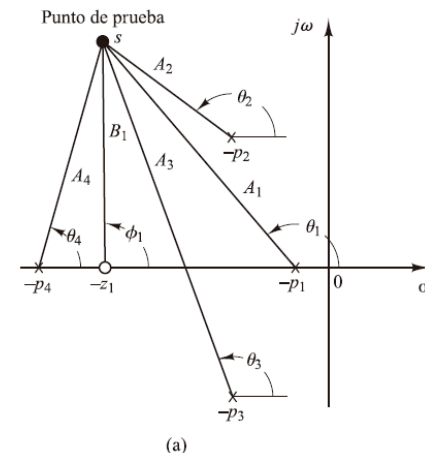
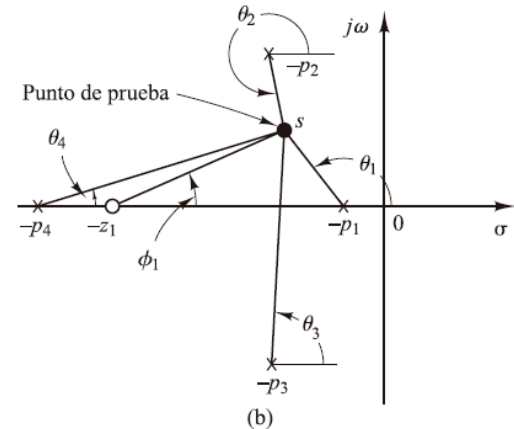
$$\angle G(s)H(s) = \phi_1 - \theta_1 - \theta_2 - \theta_3 - \theta_4$$

donde  $\phi_1$ ,  $\theta_1$ ,  $\theta_2$ ,  $\theta_3$  y  $\theta_4$  se miden en sentido contrario al de las agujas del reloj, como se muestra en la figura anterior.

La magnitud de  $G(s)H(s)$  para este sistema es

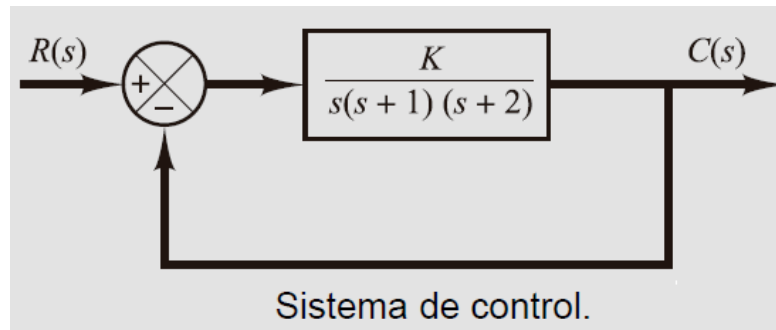
$$|G(s)H(s)| = \frac{KB_1}{A_1 A_2 A_3 A_4}$$

donde  $A_1$ ,  $A_2$ ,  $A_3$ ,  $A_4$  y  $B_1$  son las magnitudes de las cantidades complejas  $s+p_1$ ,  $s+p_2$ ,  $s+p_3$ ,  $s+p_4$  y  $s+z_1$ , respectivamente



# Construcción del Lugar Geométrico de las Raíces

Considere el sistema de la figura y que  $K > 0$



Para este sistema,

$$G(s) = \frac{K}{s(s+1)(s+2)}, \quad H(s) = 1$$

Dibuje la gráfica del lugar de las raíces y después determine el valor de  $K$  tal que el factor de amortiguamiento relativo  $\zeta$  de los polos dominantes complejos conjugados en lazo abierto sea 0.5.

**PASOS**

# Construcción del Lugar Geométrico de las Raíces

Primeramente se tiene que especificar las condiciones de ángulo y de módulo antes de iniciar el proceso de graficado del LGR.

Para el sistema dado, la condición de ángulo es:

$$\begin{aligned}\angle G(s) &= \angle \frac{K}{s(s+1)(s+2)} \\ &= -\angle s - \angle s+1 - \angle s+2 = \pm 180^\circ(2k+1) \quad (k = 0, 1, 2, \dots)\end{aligned}$$

La condición de magnitud es:

$$|G(s)| = \left| \frac{K}{s(s+1)(s+2)} \right| = 1$$

# **Pasos para obtener el lugar de las raíces**

# Introducción

- Hay **reglas** para la construcción del lugar de las raíces de forma manual. En la actualidad se dispone de recursos computacionales, como el Matlab que facilitan su construcción, el análisis de la estabilidad del sistema de control y el diseño de un controlador para una respuesta estable deseada.

# Paso 1: Obtener la ecuación característica:

$$1 + K P(s) = 0$$

- En el análisis siguiente, las raíces de la ecuación característica resultan en función de **K (ganancia variable)**.
- El Lugar de las Raíces se grafica para:  $0 \leq K \leq \infty$
- **P(s)** es una razón de dos polinomios en que el numerador es de orden **m** y el denominador es de orden **n**, con **m < n**.
- Los coeficientes de ambos polinomios son reales.

Sea:

$$1 + kP(s) = 0$$

Donde:

$$P(s) = \frac{Num(s)}{Den(s)}$$

## Paso 2: determinar los polos y ceros de $P(s)$ .

- Los  $n$  polos de  $P(s)$  son los puntos de partida del Lugar de las Raíces.
- Los  $m$  ceros de  $P(s)$  son los puntos de llegada del Lugar de las Raíces.
- Si  $n > m$ , entonces hay  $(n - m)$  ramas al infinito.



## Paso 2: determinar los polos y ceros de $P(s)$ .

- Como el LR representa la posición de los polos a lazo cerrado a medida que  $K$  varía, **comenzamos con los polos de lazo abierto**, que corresponden a  $K = 0$ .

$$1 + k \frac{Num(s)}{Den(s)} = 0$$

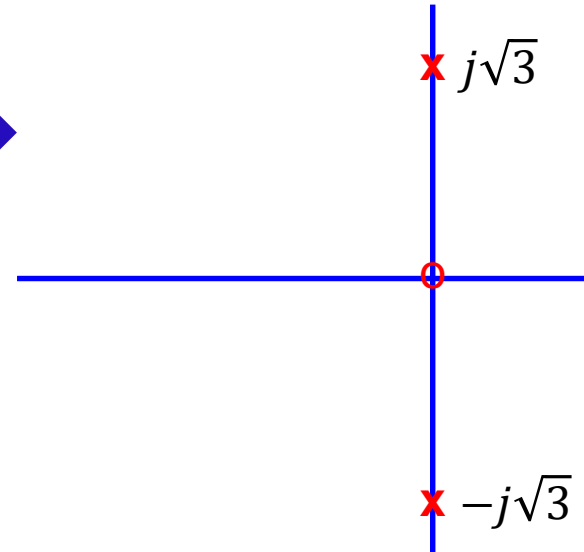
- Cada línea en el LR **empieza en un polo de lazo abierto** ( $k = 0$ ) y **termina en un cero a lazo abierto** ( $K \rightarrow \infty$ ).
- Si el sistema a lazo abierto tiene más polos que ceros, algunas de las ramas del LR terminan en ceros en el infinito.

$$Den(s) + kNum(s) = 0$$

## Paso 3: dibujar los polos y ceros a lazo abierto

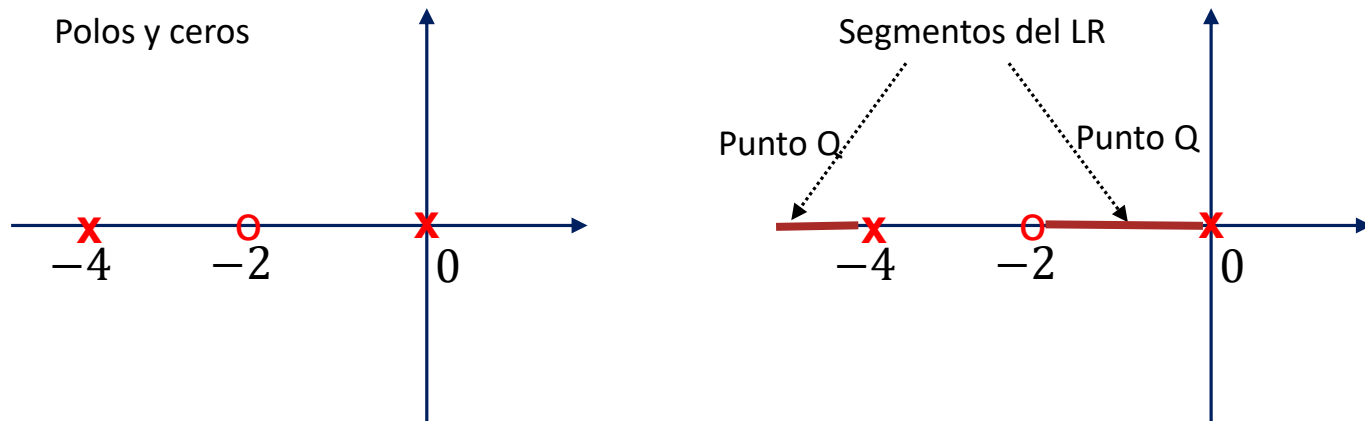
$$1 + k \frac{s}{s^2 + 3} = 0 \quad \longrightarrow$$

La ecuación característica en LA tiene un cero y dos polos



## Paso 4: Dibujar la parte del LR sobre el eje real.

- Muchos LR tienen partes sobre el eje real. Las porciones del eje real que pertenecen al LR se determinan según la siguiente regla: **Un punto "Q" en el eje real pertenece al LGR si el número de polos y ceros de  $P(s)$  a la derecha de Q es impar.**



Esta condición se demuestra aplicando la condición de ángulo.

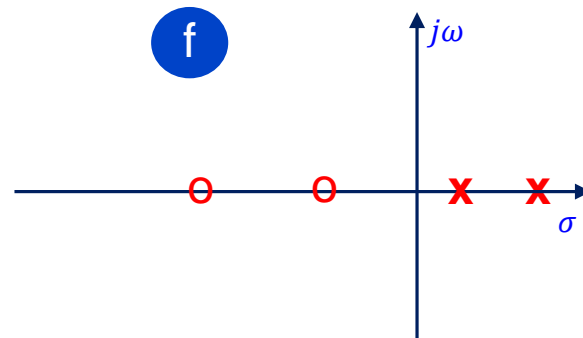
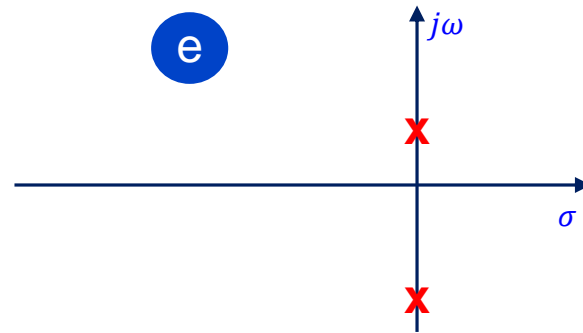
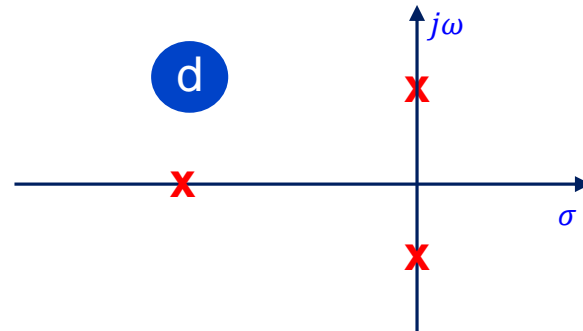
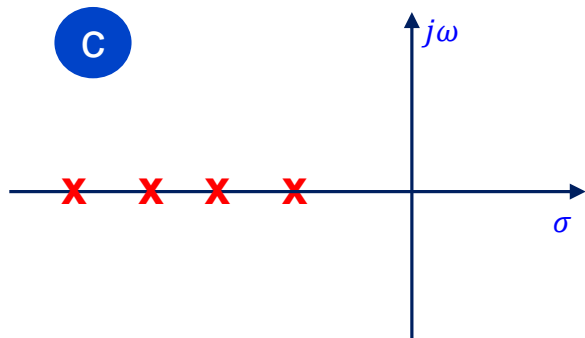
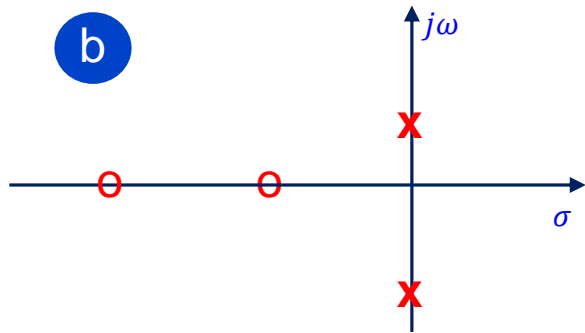
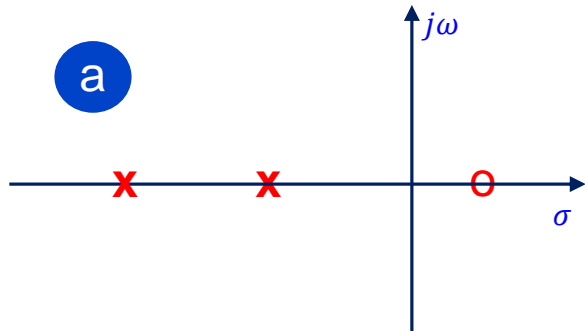
## Paso 4: Dibujar la parte del LR sobre el eje real.

### NOTA:

- Esta regla es sólo válida para polos y ceros **sobre el eje real** (los ceros y polos complejos cancelan sus efectos).
- Por otra parte, cada **polo o cero múltiple** debe ser contado **tantas veces** como sea su multiplicidad.

# Tarea

- Dibuje el LGR para cada una de las siguientes gráficas:



# Tarea

- Dibuje el LGR para cada una de las siguientes gráficas:

1  $\frac{K(s+2)(s+6)}{s^2+8s+25}$

2  $\frac{K(s^2+4)}{s^2+1}$

3  $\frac{K(s^2+1)}{s^2}$

4  $\frac{K}{(s+1)^3(s+4)}$

## Paso 5: Determinar el número de ramas del Lugar de las Raíces

- El orden  $n$  del polinomio del denominador de  $P(s)$  define el número de ramas del Lugar de las Raíces.
- Como en general  $n > m$ , el número de ramas es  $n$ .

## Paso 6: aplicar a condición de simetría

- Como los coeficientes del polinomio  $P(s)$  son reales, el Lugar de las Raíces es simétrico con respecto al eje real.



## Paso 7: Determinar las asíntotas al infinito

- Las asíntotas indican a dónde tenderán los polos a medida que la ganancia tiende a infinito.
- Para sistemas con más polos que ceros, el número de asíntotas es igual al grado relativo  $n-m$  (número de polos menos número de ceros).
- El ángulo de inclinación  $n_1, n_2, \dots, n_{n-m}$  de cada asíntota está dado por:

$$n_i = \frac{(2i - 1)\pi}{n - m}$$

$$i = 0, 1, 2, \dots (n - m - 1)$$

## Paso 7: Determinar las asíntotas al infinito

- Las asíntotas son simétricas respecto al eje real, y parten de un punto **s** definido por las magnitudes relativas de los polos y ceros a lazo abierto. Este **punto** es el centroide.
- Las asíntotas se cortan en el eje real en el **punto**:

$$\sigma_A = \frac{\sum_{i=1}^n p_i - \sum_{j=1}^m z_j}{n - m}$$

- En esta expresión **pi** y **zj** son los valores de los polos y los ceros, respectivamente, de  $P(s)$ .

En algunos sistemas no hay asíntotas; cuando el grado relativo es 0, toda rama del LR termina en un cero (finito).

# Ejemplo

- Trace el LGR del sistema realimentado en el cual:

$$G(s) = \frac{(s + 1)}{s(s + 2)(s + 4)^2}$$

- La ecuación característica para el sistema realimentado con ganancia K resulta:

$$s(s + 2)(s + 4)^2 + k(s + 1) = 0$$

# Ejemplo

## POLOS

$$p_1 = 0$$

$$p_2 = -2$$

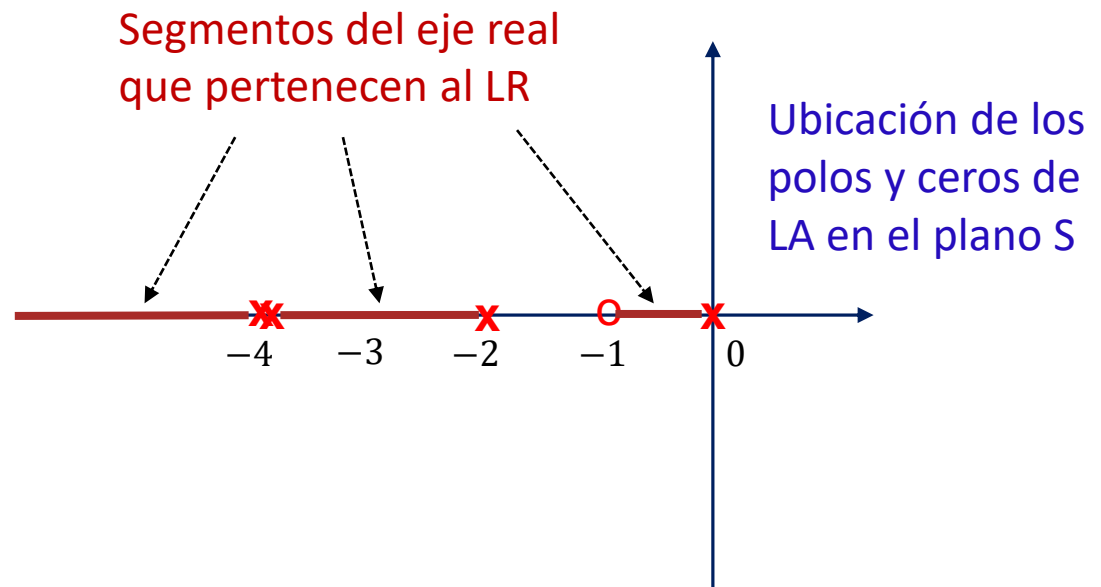
$$p_3 = -4$$

$$p_4 = -4$$

$$G(s) = \frac{(s + 1)}{s(s + 2)(s + 4)^2}$$

## CEROS

$$z_1 = -1$$



# Ejemplo

Punto de cruce de asíntotas  
en el eje real

$$\sigma_A = \frac{(-4 - 4 - 2 + 0) - (-1)}{4 - 1} = -3$$

Angulo de asíntotas

polos  $n = 4$

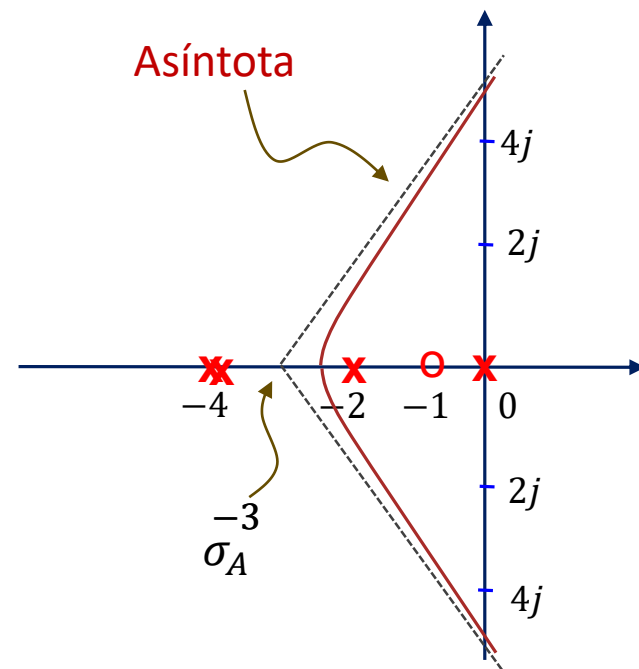
ceros  $m = 1$

$$n_i = \frac{(2i - 1)\pi}{3} \quad i = 0, 1, 2$$

$$n_i = \frac{(2(0) - 1)\pi}{3} = -60$$

$$n_i = \frac{(2(1) - 1)\pi}{3} = 60$$

$$n_i = \frac{(2(2) - 1)\pi}{3} = 180$$



## Paso 8: Determinar la intersección (cruces) con el eje imaginario.

- Los puntos de cruce con el eje imaginario marcan valores de  $k$  para los que el sistema a lazo cerrado es **marginalmente estable**. El lazo cerrado será inestable para valores de  $k$  para los que el LR está en el semiplano derecho de  $s$ .
- No todo LR intersecta el eje  $j\omega$ , por lo que primero hay que determinar, si es posible, si definitivamente se cruza el eje (por ejemplo, cuando hay más de dos asíntotas), o si hay buenas chances de que se cruce (por ejemplo, si hay polos o ceros cerca del *eje*  $j\omega$  y los ángulos de salida/llegada indican que podría haber un cruce).

## Paso 8: Determinar la intersección (cruces) con el eje imaginario.

- a. **Primer Método:** La intersección del Lugar de las Raíces con el eje imaginario se **obtiene resolviendo la ecuación característica** para  $s = j\omega$ .

Luego, resolviendo esta ecuación se obtiene también la ganancia **K** crítica:

$$1 + kP(j\omega) = 0$$

- b. **Segundo Método:** También se puede utilizar el criterio de **Routh Hurwitz**, determinando el valor de **K** que hace al lazo cerrado inestable, y luego el correspondiente valor de **s=jw**.

# Ejemplo

Determine los **cruces con el eje imaginario** del sistema:  $G(s) = \frac{(s + 1)}{s(s + 2)(s + 4)^2}$

$$1 + kG(s) = s(s + 2)(s + 4)^2 + k(s + 1) = 0$$

$$s^4 + 10s^3 + 32s^2 + 32s + k(s + 1) = 0$$

Lo evaluamos en:  $s = j\omega$

$$(j\omega)^4 + 10(j\omega)^3 + 32(j\omega)^2 + 32j\omega + k(j\omega + 1) = 0$$

$$\omega^4 - 10j\omega^3 - 32\omega^2 + 32j\omega + kj\omega + k = 0$$

$$\underbrace{(\omega^4 - 32\omega^2 + k)}_{\text{Real}} + \underbrace{(-10j\omega^3 + 32\omega + kj\omega)}_{\text{Imaginaria}}j = 0 + 0j$$

La parte real e imaginaria lo igualamos cero::

$$\omega^4 - 32\omega^2 + k = 0 \quad -10\omega^3 + 32\omega + k\omega = 0$$

Despejamos y tenemos dos ecuaciones con dos incógnitas:

$$k = -\omega^4 + 32\omega^2$$

$$k = 10\omega^2 - 32$$

Igualamos ambas ecuaciones y tenemos  $\omega$  :

$$-\omega^4 + 32\omega^2 = 10\omega^2 - 32$$

$$\omega^4 - 22\omega^2 - 32 = 0$$

$$\omega = \pm 4.83 \quad \checkmark$$

$$\omega = \pm 1.17 \quad \times$$

Luego despejamos el valor de  $k$ :

$$k = 201$$



## Paso 9: Determinar la separación del eje real: puntos de bifurcación.

- Los puntos de bifurcación se producen donde dos o más ramas del LR se encuentran y luego divergen. Aunque es más común encontrarlos sobre el eje real, pueden ocurrir en cualquier parte del plano complejo.
- Se puede deducir que la condición de separación del eje real es equivalente a:

$$\frac{dP(s)}{ds} = 0$$

- Los puntos de bifurcación son puntos donde se da un polo múltiple para algún valor de  $k$ .

# Ejemplo

Determinamos los **puntos de ruptura** sobre el eje real, del sistema:

$$G(s) = \frac{(s + 1)}{s(s + 2)(s + 4)^2}$$

$$\frac{dG(s)}{ds} = \frac{d}{ds} \left[ \frac{(s + 1)}{s(s + 2)(s + 4)^2} \right] = 0 = \frac{d}{ds} \left[ \frac{(s + 1)}{s^4 + 10s^3 + 32s^2 + 32s} \right]$$

$$\frac{(s^4 + 10s^3 + 32s^2 + 32s) - (4s^3 + 30s^2 + 64s + 32)(s + 1)}{(s^4 + 10s^3 + 32s^2 + 32s)^2} = 0$$

$$3s^4 + 20s^3 + 32s^2 + 4s^3 + 30s^2 + 64s + 32 = 0$$

$$3s^4 + 24s^3 + 62s^2 + 64s + 32 = 0$$

$$s = -4 \quad \times$$

$$s = -2.59 \quad \checkmark$$

$$s = -0.7 \pm j0.73 \quad \times$$

# Ejemplo

- Analice el LR para:

$$G(s) = \frac{1}{(s + 2)(s + 4)}$$

- La ecuación característica para el sistema realimentado con ganancia  $K$  resulta :

$$(s + 2)(s + 4) + k = 0$$

**POLOS**

$$p_1 = -2$$

$$p_2 = -4$$

**CEROS**

*no hay*

# Ejemplo

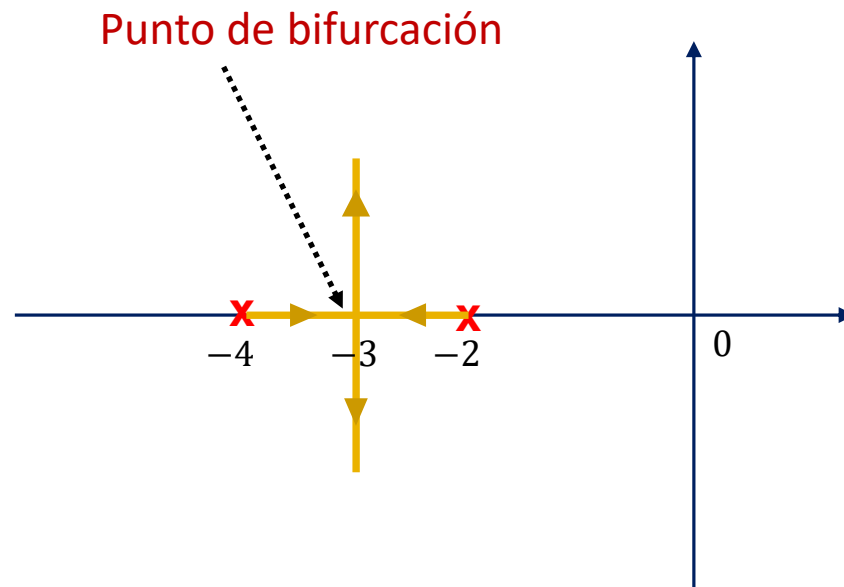
- Para determinar el punto de separación del eje real:

$$\frac{dP(s)}{ds} = 0$$



$$s = -3$$

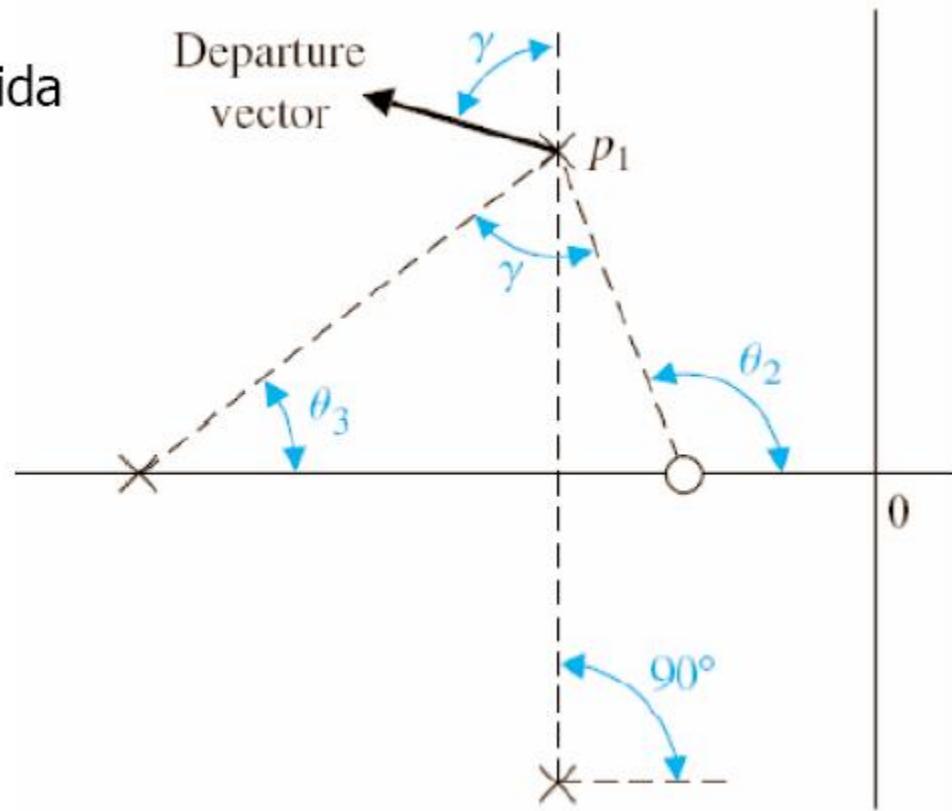
Separación del  
eje real en el LR



## Paso 10: Determinar los ángulos de partida de un polo y de llegada a un cero.

- Se obtienen imponiendo la **condición de ángulo** al polo del Lugar de las Raíces cuando  $K \rightarrow 0$  (ángulo de partida) o  $K \rightarrow \infty$  (ángulo de llegada): salida en los polos a lazo abierto; llegada en los ceros de lazo abierto.

Ejemplo ángulo de partida



## Paso 10: Determinar los ángulos de partida de un polo y de llegada a un cero.

Ángulo de partida desde un polo complejo =  $\gamma_p$ ;

$$\gamma_p = 180 - \Sigma(\theta p_i) + \Sigma(\theta z_j)$$

- $\theta p_i$  = Ángulo medido desde el semi eje positivo que pasa por el polo  $p_i$  y el vector que une este polo con el polo para el cual se desea determinar  $\gamma_p$ .
- $\theta z_j$  = Ángulo medido desde el semi eje positivo que pasa por el cero  $z_j$  y el vector que une este cero con el polo para el cual se desea determina  $\gamma_p$ .

Ángulo de llegada hacia un cero complejo =  $\gamma_z$ ;

$$\gamma_z = 180 - \Sigma(\theta z_i) + \Sigma(\theta p_j)$$

- $\theta z_i$  = Ángulo medido desde el semi eje positivo que pasa por el cero  $z_i$  y el vector que une este cero con el cero para el cual se desea determinar  $\gamma_z$ .
- $\theta p_j$  = Ángulo medido desde el semi eje positivo que pasa por el polo  $p_j$  y el vector que une este polo con el cero para el cual se desea determina  $\gamma_z$ .

## Paso 11 y 12:

### Paso 11:

- Aplicar la condición de ángulo para determinar los puntos que pertenecen al Lugar de las Raíces.

$$\text{Arg}(P(s)) = (2k + 1)\pi$$

### Paso 12:

- Determinar la ganancia correspondiente a un punto del Lugar de las Raíces, aplicando la condición de módulo.

$$K = \frac{1}{|P(s^*)|}$$

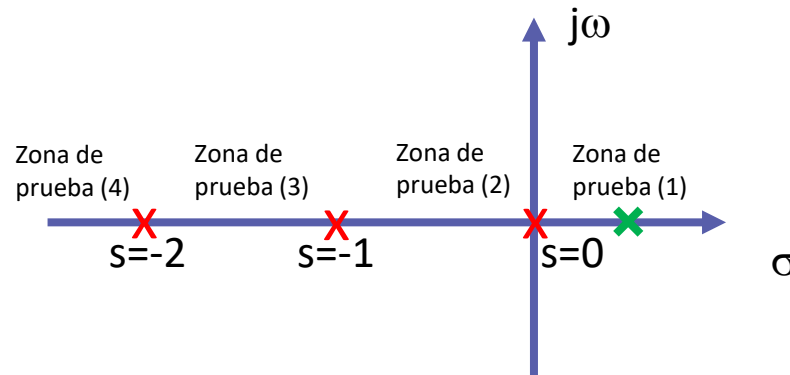


# Construcción del Lugar Geométrico de las Raíces

## PASOS

### 1. Determinar los lugares de las raíces sobre el eje real.

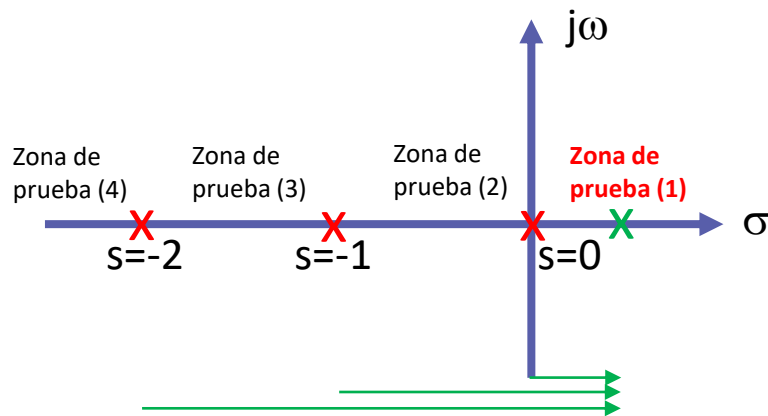
El primer paso al construir una gráfica del lugar de las raíces es situar los polos en lazo abierto,  $s = 0$ ,  $s = -1$  y  $s = -2$ , en el plano complejo.



Para determinar los lugares de las raíces sobre el eje real en este caso en cuatro zonas de prueba, se selecciona un punto de prueba,  $s$ .

(1) Si el punto de prueba está en el eje real positivo, entonces

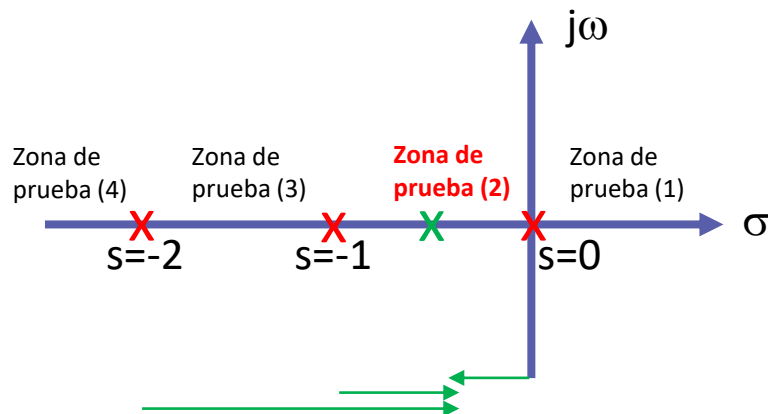
# Construcción del Lugar Geométrico de las Raíces



$$\angle s = \angle s + 1 = \angle s + 2 = 0^\circ$$

Esto demuestra que no es posible satisfacer la condición de ángulo. Por tanto, no hay un lugar de las raíces sobre el eje real positivo.

$$-\angle s - \angle s + 1 - \angle s + 2 = 0^\circ$$



$$\angle s = 180^\circ, \quad \angle s + 1 = \angle s + 2 = 0^\circ$$

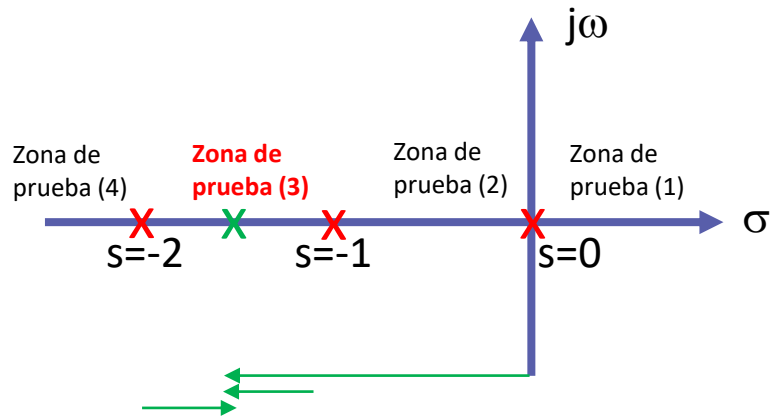
satisface la condición de ángulo, ya que

$$-\angle s - \angle s + 1 - \angle s + 2 = -180^\circ$$

$$= \pm 180^\circ(2k + 1) \quad (k = 0, 1, 2, \dots)$$

El LGR pasará por esta zona

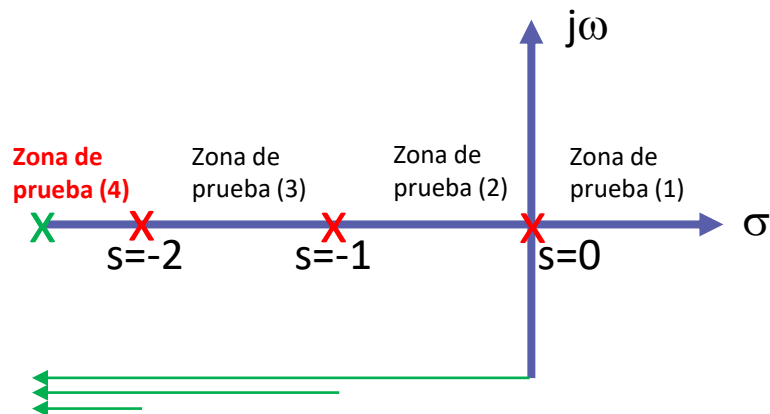
# Construcción del Lugar Geométrico de las Raíces



$$\angle s = \angle s + 1 = 180^\circ, \quad \angle s + 2 = 0^\circ$$

Se observa que no se satisface la condición de ángulo, ya que:

$$-\angle s - \angle s + 1 - \angle s + 2 = -360^\circ$$



$$\angle s = \angle s + 1 = \angle s + 2 = 180^\circ$$

Se observa que si satisface la condición de ángulo, ya que:

$$-\angle s - \angle s + 1 - \angle s + 2 = -540^\circ$$

$$= \pm 180^\circ(2k + 1) \quad (k = 0, 1, 2, \dots)$$

El LGR pasará por esta zona

# Construcción del Lugar Geométrico de las Raíces

## 2. Determinar el ángulo de las asíntotas y su origen (si existen)

Si el número de polos ( $n$ ) de GH es mayor que el número de ceros ( $m$ ) de GH, entonces:

$$\text{Ángulos de las asíntotas} = \frac{\pm 180^\circ(2k + 1)}{n - m} \quad (k = 0, 1, 2, \dots)$$

Como  $n = 3$  y  $m = 0$ , entonces  $n - m = 3$

$$\text{Ángulos de asíntotas} = \frac{\pm 180^\circ(2k + 1)}{3} \quad (k = 0, 1, 2, \dots)$$

Dado que el ángulo se repite a sí mismo conforme  $K$  varía, los ángulos distintos para las asíntotas se determinan como  $60^\circ$ ,  $-60^\circ$  y  $180^\circ$ .

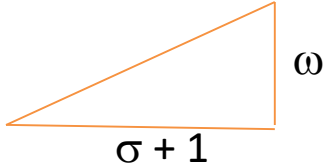
El punto de origen con el eje real de las trazas de dichas asíntotas.

$$\sigma_A = - \frac{(p_1 + p_2 + \dots + p_n) - (z_1 + z_2 + \dots + z_m)}{n - m} = - \frac{(0 - 1 - 2) - (0)}{3 - 0} = - \frac{-3}{3} = 1$$

# Construcción del Lugar Geométrico de las Raíces

Se puede determinar las ecuaciones de las rectas asíntotas de la siguiente manera  
Sustituyendo  $s = \sigma + j\omega$  en esta última ecuación, se obtiene

o bien  $\angle s + |\sigma_A| = \angle \sigma + j\omega + 1 = \pm 60^\circ(2k + 1)$



$$\tan^{-1} \frac{\omega}{\sigma + 1} = 60^\circ, \quad -60^\circ, \quad 0^\circ$$

Aplicando la tangente a ambos lados de esta última ecuación,

$$\frac{\omega}{\sigma + 1} = \sqrt{3}, \quad -\sqrt{3}, \quad 0$$

$$\sigma + 1 - \frac{\omega}{\sqrt{3}} = 0, \quad \sigma + 1 + \frac{\omega}{\sqrt{3}} = 0, \quad \omega = 0$$

1

2

3

# Construcción del Lugar Geométrico de las Raíces

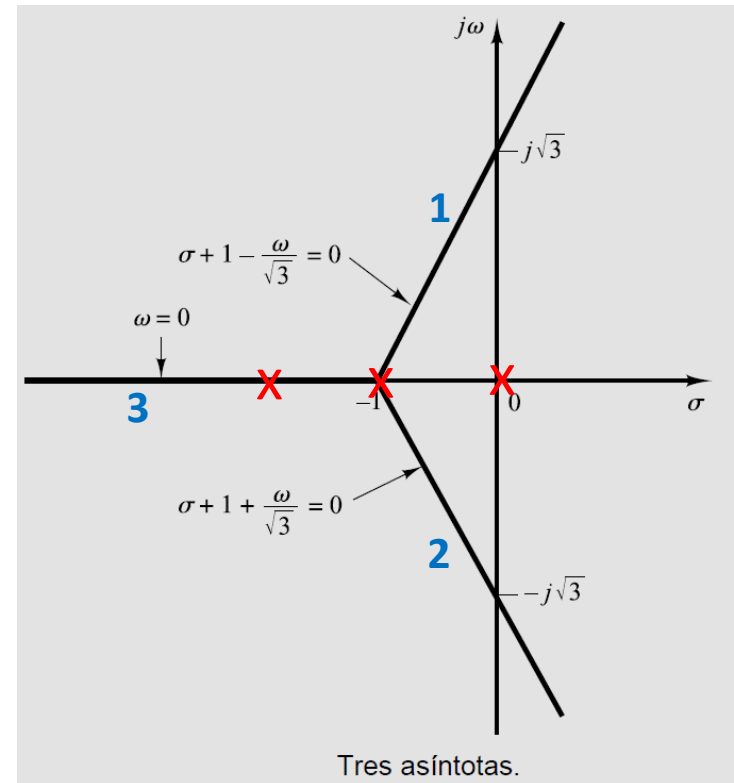
$$\sigma + 1 - \frac{\omega}{\sqrt{3}} = 0, \quad \sigma + 1 + \frac{\omega}{\sqrt{3}} = 0, \quad \omega = 0$$

1

2

3

La construcción de las asíntotas se puede apreciar en la figura adjunta



# Construcción del Lugar Geométrico de las Raíces

## 3. Determinar el punto de ruptura.

Para dibujar con precisión los lugares de las raíces, se debe encontrar el punto de ruptura, a partir del cual las ramas del lugar de las raíces que se originan en los polos en 0 y -1 (cuando  $K$  aumenta) se alejan del eje real y se mueven sobre plano complejo.

Se escribe la ecuación característica como

$$f(s) = B(s) + KA(s) = 0 \quad , \text{ donde } \begin{array}{l} B(s) \text{ es el num de } G(s) \\ A(s) \text{ es el den de } G(s) \end{array}$$

$$K = -\frac{B(s)}{A(s)} \quad \longrightarrow \quad \text{Los puntos de ruptura se encuentran Derivando } dK/ds = 0$$

Para el ejemplo actual, la ecuación característica  $G(s)H(s) + 1 = 0$  se obtiene mediante

$$\frac{K}{s(s+1)(s+2)} + 1 = 0$$

$$K = -(s^3 + 3s^2 + 2s) \quad \longrightarrow \quad \frac{dK}{ds} = -(3s^2 + 6s + 2) = 0$$

Resolviendo:

$$s = -0.4226, \quad s = -1.5774$$

# Construcción del Lugar Geométrico de las Raíces

Dado que el punto de ruptura debe encontrarse sobre el lugar de las raíces, es evidente que  $s = -0.4226$  corresponde al punto de ruptura real.

$$\begin{array}{ll} \text{para } s = -0.4226 & K = 0.3849, \\ \text{para } s = -1.5774 & K = -0.3849, \end{array}$$

Se descarta este valor de  $s = -1.5774$  ya que origina un valor de  $K$  negativo

4. *Determinar los puntos en donde el lugar de las raíces cruza el eje imaginario.*

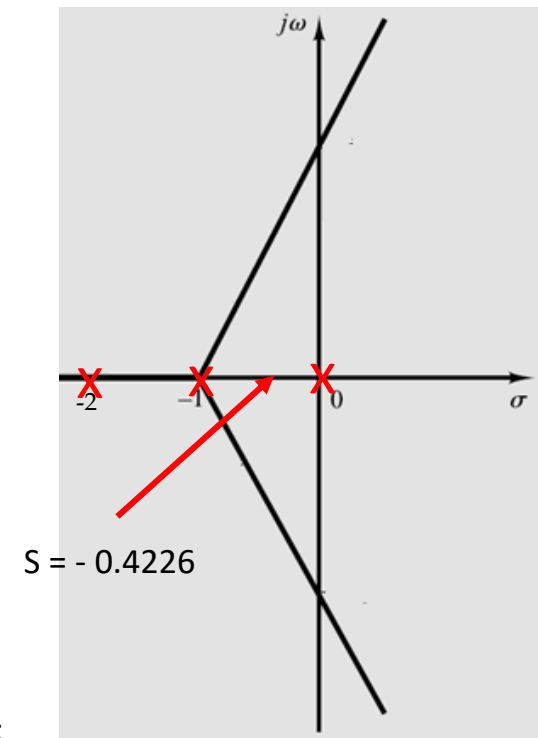
Estos puntos se encuentran mediante el criterio de estabilidad de Routh del modo siguiente. Dado que la ecuación característica para el sistema actual es

$$s^3 + 3s^2 + 2s + K = 0$$

La tabla de Routh:

$s^3$	1	2
$s^2$	3	$K$
$s^1$	$\frac{6-K}{3}$	
$s^0$	$K$	

$\rightarrow > 0 \rightarrow K = 6$





# Construcción del Lugar Geométrico de las Raíces

Los puntos de cruce con el eje imaginario se encuentran después despejando la ecuación auxiliar obtenida de la fila  $s^2$ ; es decir,

$$3s^2 + K = 3s^2 + 6 = 0$$

$$s = \pm j\sqrt{2}$$

Otra manera de encontrar este valor es haciendo  $s = j\omega$  en la ecuación característica,

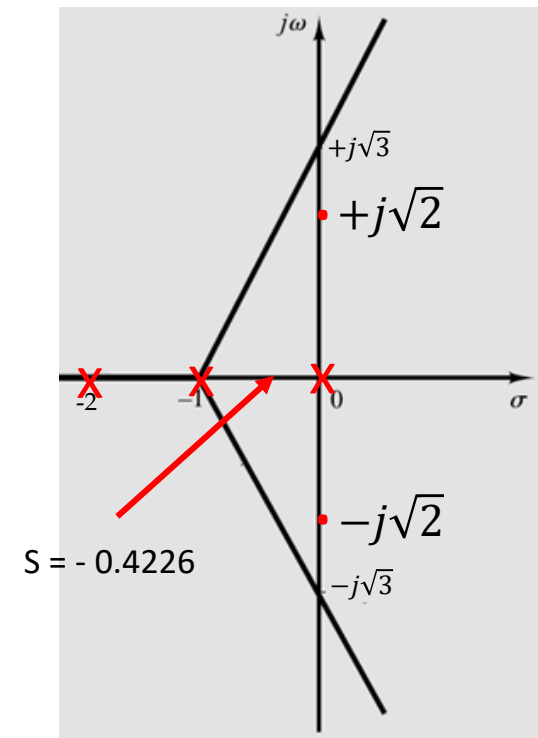
$$s^3 + 3s^2 + 2s + K = 0$$

$$(j\omega)^3 + 3(j\omega)^2 + 2(j\omega) + K = 0$$

$$(K - 3\omega^2) + j(2\omega - \omega^3) = 0$$

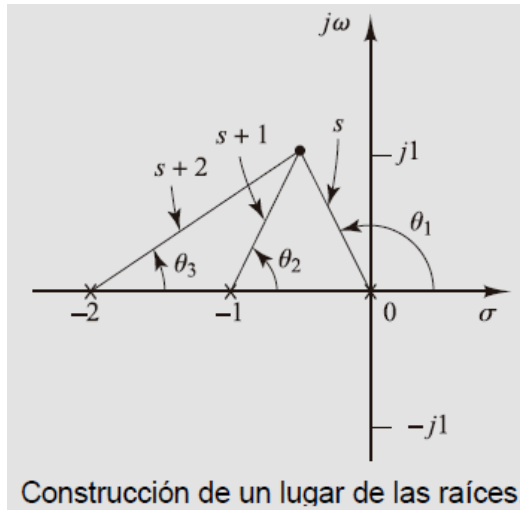
Se igualan ambas parte a cero. Se tiene que:

$$K - 3\omega^2 = 0, \quad 2\omega - \omega^3 = 0 \quad \rightarrow \quad \omega = \pm \sqrt{2}, \quad K = 6 \quad \text{o} \quad \omega = 0, \quad K = 0$$



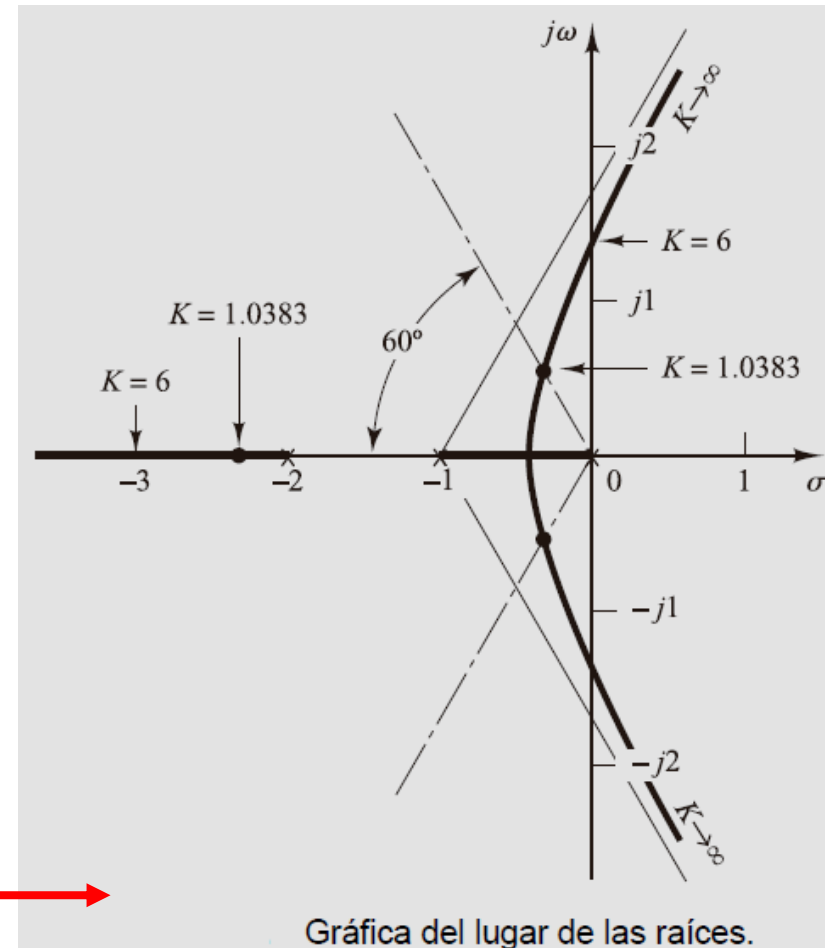
# Construcción del Lugar Geométrico de las Raíces

5. Seleccionar un punto de prueba en una vecindad amplia del eje  $j\omega$  y el origen,



Esto es para conocer la tendencia del cambio de ubicación de las raíces, conforme cambia  $K$

6. Dibujar los lugares de las raíces, tomando como base la información obtenida en los pasos anteriores, tal y como se muestra en la figura



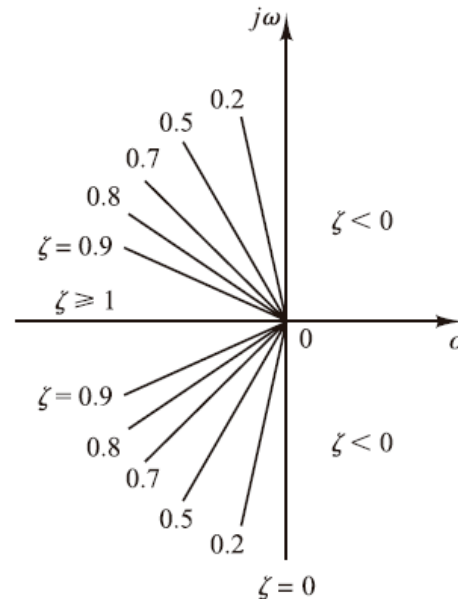
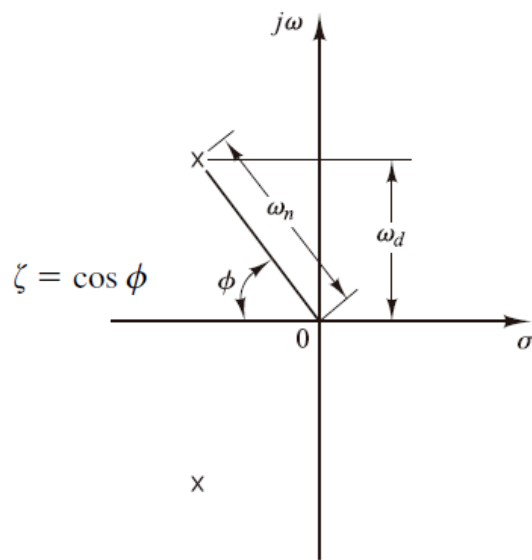
# Construcción del Lugar Geométrico de las Raíces

## Determinación de K para que $\zeta = 0.5$

**7.** Determinar un par de polos dominantes complejos conjugados en lazo cerrado tales que el factor de amortiguamiento relativo  $\zeta$  sea 0.5.

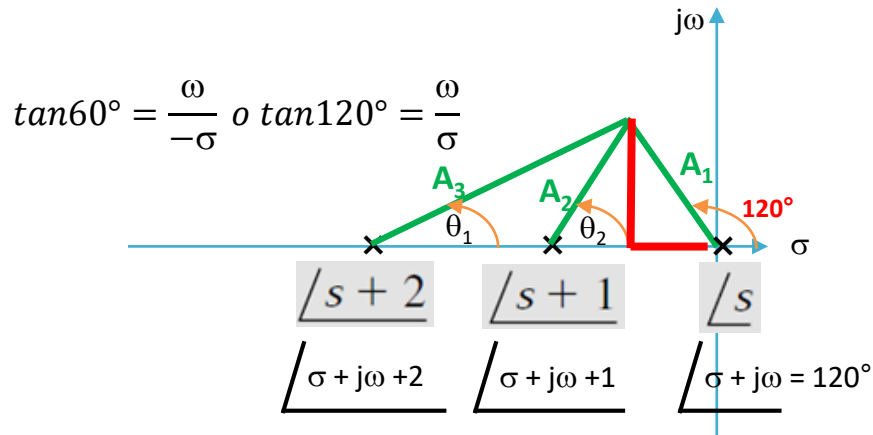
Como en la respuesta subamortiguada

$$\omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} \longrightarrow \zeta = \cos \phi$$



(a) Polos complejos; (b) líneas de amortiguamiento  $\zeta$  constante.

# Construcción del Lugar Geométrico de las Raíces



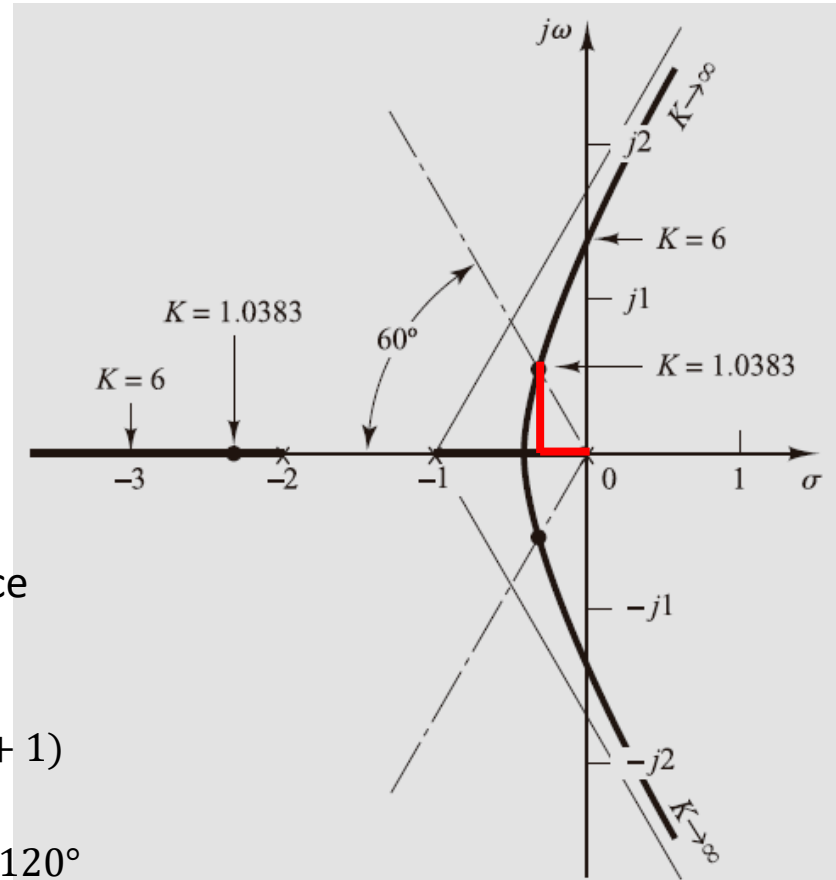
Por ser tres polos, entonces aplicando la condición de ángulo para encontrar el valor de la raíz que hace que el factor de amortiguamiento sea 0.5:

$$-\tan^{-1}\left(\frac{\omega}{\sigma+2}\right) - \tan^{-1}\left(\frac{\omega}{\sigma+1}\right) - 120^\circ = \pm 180(2k+1)$$

$$\tan^{-1}\left(\frac{\omega}{\sigma+2}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{\omega}{\sigma+1}\right) = -(\pm 180(2k+1) - 120^\circ)$$

Recordando la propiedad trigonométrica

$$\tan(x \pm y) = \frac{\tan x \pm \tan y}{1 \mp \tan x \tan y}$$



Gráfica del lugar de las raíces.

# Construcción del Lugar Geométrico de las Raíces

Aplicando **tan** a ambos miembros se tiene que

$$\frac{\frac{\omega}{\sigma+2} + \frac{\omega}{\sigma+1}}{1 - \frac{\omega}{\sigma+2} \times \frac{\omega}{\sigma+1}} = - \frac{\tan(180^\circ(2k+1)) + \tan 120^\circ}{1 - \tan(180^\circ(2k+1)) \times \tan 120^\circ} = \sqrt{3}$$

Como  $\tan 60^\circ = \frac{\omega}{-\sigma}$  entonces  $\omega = -\sqrt{3}\sigma$

$$\frac{\omega(2\sigma+3)}{\sigma^2+3\sigma+2-\omega^2} = \sqrt{3}$$

Operando y despejando  $\sigma$ , se concluye que  $\sigma = -\frac{1}{3}$  y  $\omega = \frac{\sqrt{3}}{3}$

Luego  $s = -0.3333 \pm j0.5773$

Para hallar K se acuerdo con el criterio de ángulo

$$|G(s)H(s)| = \frac{K}{A_1 A_2 A_3} = 1$$

$$K = |s(s+1)(s+2)| = 1.0383$$

Evaluado en  $s = -0.3333 + j0.5773$

$$\frac{\omega(2\sigma+3)}{\sigma^2+3\sigma+2-\omega^2} = \sqrt{3}$$