Facultad de Ingeniería

Carrera de Ingeniería Electrónica
Carrera de Telecomunicaciones y Redes
Carrera de Ingeniería Mecatrónica

CURSO

Señales y Sistemas

TEMA

Fundamentos de Probabilidad

Variable aleatoria

Operaciones sobre una variable aleatoria

Transformación de la variable aleatoria

PROFESOR

Ing. Christian del Carpio Damián

FUNDAMENTOS DE PROBABILIDAD

FUNDAMENTOS DE PROBABILIDAD

Experimento

Es un proceso que arroja un resultado. Sin embargo no se tiene certeza del resultado a obtener.

Espacio muestra

Conjunto de todos los resultados posibles de un experimento. El espacio muestra se denota por S

FUNDAMENTOS DE PROBABILIDAD

Suceso o Evento

Es un subconjunto del espacio muestra de un experimento.

Un evento especifica condiciones que son aplicadas a los resultados del experimento.

FUNDAMENTOS DE PROBABILIDAD

La probabilidad es un valor numérico que indica la chance de ocurrencia de un evento.

Axiomas de la probabilidad

Sea “A” un determinado evento y sea “S” el espacio muestra.

Por tanto se tiene que :

$$axioma\ 1: \quad 0 \leq P(A) \leq 1$$

$$axioma\ 2: \quad P(S) = 1$$

FUNDAMENTOS DE PROBABILIDAD

Axiomas de la probabilidad

Sean los eventos A_n, donde n=1,2,3,…N donde

$$A_n \wedge A_m = \varnothing \quad para \quad m \neq n$$

Por tanto

$$axioma\ 3: \quad \mathrm{P}\left(\bigcup_{n=1}^{N} A_n \right) = \sum_{n=1}^{N} P(A_n)$$

FUNDAMENTOS DE PROBABILIDAD

Probabilidad conjunta

Sean dos eventos “A” y “B”. Por lo tanto se tiene que

$$\boxed{P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B)}$$

De forma equivalente,

$$\boxed{P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \leq P(A) + P(B)}$$

FUNDAMENTOS DE PROBABILIDAD

Probabilidad condicional

Sea un evento "B" con probabilidad distinta de cero

$$P(B) > 0$$

La probabilidad condicional de un evento A, dado B, se define como

$$\boxed{P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}}$$

FUNDAMENTOS DE PROBABILIDAD

Eventos mutuamente excluyentes

Sean “A” y “B” dos eventos mutuamente excluyentes entonces

$$\boxed{P(A \cup B) = P(A) + P(B)}$$

Se dice que los eventos de una colección E_1, E_2,…E_k son mutuamente excluyentes si para todos los pares,

$$\boxed{E_i \cap E_j = \varnothing}$$

FUNDAMENTOS DE PROBABILIDAD

Eventos mutuamente excluyentes

Si se tiene que “A” y “C” son dos eventos mutuamente excluyentes

$$\boxed{P((A \cup C)/B) = P(A/B) + P(C/B)}$$

FUNDAMENTOS DE PROBABILIDAD

Ejemplo 1

En una caja se tiene 100 resistencias que tienen el valor y la tolerancia indicados en la siguiente tabla. Se selecciona una resistencia de la caja y se supone que cada resistencia tiene la misma probabilidad de ser elegida. Definamos tres sucesos siguientes:

A, “sacar una resistencia de 47 ohmios”;

B, “sacar una resistencia de tolerancia del 5%”,

C, “sacar una resistencia de 100 ohmios”.

Determinar: P(A/B), P(A/C), P(B/C)

FUNDAMENTOS DE PROBABILIDAD

Ejemplo 1 (continuación)

Resistencia	5%	10%	Total
22	10	14	**24**
47	28	16	**44**
100	24	8	**32**
Total	**62**	**38**	**100**

FUNDAMENTOS DE PROBABILIDAD

Probabilidad total

Si E_1, E_2, …E_k son k eventos mutuamente exclusivos, entonces

$$P(B) = P(B \cap E_1) + P(B \cap E_2) + \ldots + P(B \cap E_k)$$
$$P(B) = P(B/E_1)P(E_1) + P(B/E_2)P(E_2) + \ldots + P(B/E_k)P(E_k)$$

$$\mathrm{P(B)} = \bigcup_{n=1}^{N} P(B/E_n)P(E_n)$$

FUNDAMENTOS DE PROBABILIDAD

Teorema de Bayes

Si E_1, E_2, …E_k son k eventos mutuamente exclusivos y B es un evento cualquiera, entonces

$$P(E_k / B) = \frac{P(B / E_k)P(E_k)}{P(B / E_1)P(E_1) + P(B / E_2)P(E_2) + ... + P(B / E_k)P(E_k)}$$

para $P(B) > 0$

FUNDAMENTOS DE PROBABILIDAD

Ejemplo 2

Un sistema de comunicaciones binario elemental consta de un transmisor que envía uno de dos posibles símbolos (un 1 o un cero) a través de un canal hasta un receptor. Ocasionalmente se producen errores en el canal, de modo que un 1 aparece en el receptor como un 0, y viceversa. El espacio muestral tiene dos elementos (0 o 1). Designamos por B_i, i=1,2, a los eventos “el símbolo antes de entrar en el canal es 1” y “el símbolo antes de entrar en el canal es 0”, respectivamente. Además, se define A_i, i=1,2, como los eventos “el símbolo después de atravesar el canal es 1” y “el símbolo después de atravesar el canal es 0”, respectivamente.

FUNDAMENTOS DE PROBABILIDAD

Ejemplo 2 (continuación)

Las probabilidades de que los símbolos 1 y 0 se seleccionen para ser transmitidos se supone que son

$$P(B_1)=0.6 \quad y \quad P(B_2)=0.4$$

La probabilidades condicionales describen el efecto que tiene el canal sobre los símbolos transmitidos Las probabilidades de recibir un 1 transmitido son

$$P(A_1/B_1)=0.9 \quad y \quad P(A_2/B_1)=0.1$$

Hallar

$P(B_1/A_1)$, $P(B_2/A_1)$, $P(B_1/A_2)$ y $P(B_2/A_2)$

FUNDAMENTOS DE PROBABILIDAD

P(error de bit)

P(error de bit)=P(Tx 1 y Rx 0) + P(Tx 0 y Rx 1)

P(error de bit)=P(Tx 1)P(Rx 0/Tx 1) + P(Tx 0)P(Rx 1/Tx 0)

FUNDAMENTOS DE PROBABILIDAD

Eventos independientes

Dos eventos

Dos eventos son independientes si es verdadero cualquiera de los siguientes enunciados equivalentes

$$1.\ P(A/B) = P(A)$$

$$2.\ P(B/A) = P(B)$$

$$3.\ P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

FUNDAMENTOS DE PROBABILIDAD

Eventos independientes

Múltiples eventos

En general, para decir que N eventos A_1, A_2, . . ., A_N son estadísticamente independientes, se requiere que satisfaga todas las condiciones siguientes para todo $1 \le i \le j \le k \le \cdots \le N$

$$P(A_i \cap A_j) = P(A_i)P(A_j)$$

$$P(A_i \cap A_j \cap A_k) = P(A_i)P(A_j)P(A_k)$$

$$\vdots$$

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_N) = P(A_1)P(A_2)\cdots P(A_N)$$

FUNDAMENTOS DE PROBABILIDAD

Ejemplo 3

En un experimento se elige una carta de una baraja de 52 cartas. Se definen los sucesos A "elegir un rey", B "elegir una jota o una reina" y C "elegir una carta de corazones"

Determinar si A, B, y C son independientes dos a dos.

FUNDAMENTOS DE PROBABILIDAD

Ejemplo 4

Considere la extracción de cuatro cartas de una baraja normal de 52 cartas. Sean los sucesos A_1, A_2, A_3, y A_4 que se definen como la extracción de un as en la primera, segunda, tercera y cuarta carta, respectivamente. Considere dos casos. Primero, extraer las cartas suponiendo que se reemplazan después de cada extracción y el segundo caso es que no existe reposición de cartas

FUNDAMENTOS DE PROBABILIDAD

Experimento de Bernoulli

Asúmase un experimento ejecutado “N” veces.

Se definen 2 eventos (A y Ā) que son estadísticamente independientes en todas las pruebas.

Se desea determinar la probabilidad de que “A” ocurra “k” veces en las “N” veces que se ejecutó el experimento.

$$\underbrace{P(A)P(A)....P(A)}_{k\ \ veces}\underbrace{P(\overline{\mathrm{A}})P(\overline{\mathrm{A}})....P(\overline{\mathrm{A}})}_{N-k\ \ veces}$$

FUNDAMENTOS DE PROBABILIDAD

Por tanto, se tiene que

$$P\left\{\text{A ocurra exactamente "k" veces}\right\} = \binom{N}{k} p^k (1-p)^{N-k}$$

donde $p = P(A)$

FUNDAMENTOS DE PROBABILIDAD

Ejemplo 5

Experimento: Lanzar un dado 4 veces.

Se define el evento A como obtener "tres" en **un** lanzamiento". Por tanto $\bar{A}$ es no obtener "tres" en **un** lanzamiento".

Se pide:

Obtener la probabilidad de que "A" ocurra 2 veces en los cuatro lanzamientos.

FUNDAMENTOS DE PROBABILIDAD

Ejemplo 6

Un sistema de comunicaciones digitales transmite la información en tramas de 8 bits. La transmisión de cada bit es independiente de la anterior. El BER del sistema es 0.01.

Se pide determinar:

La probabilidad de que exactamente 5 bits de una trama lleguen con error.

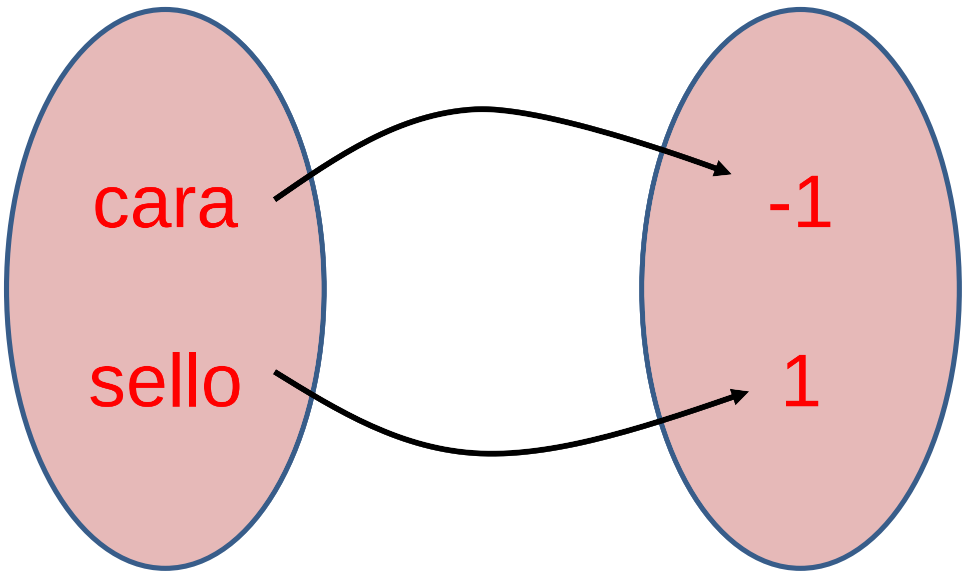
La probabilidad de que hasta 3 bits de una trama lleguen con error.

VARIABLE ALEATORIA

VARIABLE ALEATORIA

Es una función que asigna un número real a cada resultado del espacio muestra de un experimento aleatorio.

Por ejemplo en el experimento de la moneda se tiene:



VARIABLE ALEATORIA

Se representa una ***variable aleatoria*** mediante una letra mayúscula (tal como *W*, *X*, o *Y*) y un valor particular de la variable aleatoria por una letra minúscula (tal como *w*, *x* o *y*).

Así pues, dado un experimento definido como un espacio muestra *S* con elementos *s*, se asigna *s* a cada número real.

$$X(s)$$

VARIABLE ALEATORIA

Condiciones para que una función sea una variable aleatoria

Una variable aleatoria (V.A) puede ser casi cualquier función que se desee, sin embargo, se requiere que esta no sea multivalor.

Las condiciones que se tienen que cumplir son:

- Existencia del evento $\{X \leq x\}$
- $P\{X = -\infty\} = 0$
- $P\{X = \infty\} = 0$

VARIABLE ALEATORIA

Tipos de variable aleatoria

- Una variable aleatoria **continua** sus valores son definidos e un rango continuo no contable.

- Una variable aleatoria **discreta** es asignada a experimentos que arrojan resultados contables discretos.

- Una variable aleatoria **mixta** es una variable aleatoria que presenta un rango continuo y un rango discreto.

FUNCIÓN DE DISTRIBUCIÓN

Se llama a esta función, $F_X(x)$, función de distribución de probabilidad acumulativa de la variable aleatoria *X*.

$$\boxed{F_X(x) = P\{X \leq x\}}$$

FUNCIÓN DE DISTRIBUCIÓN

Propiedades

Tiene la siguientes propiedades:

$$(1)\quad F_X(-\infty) = 0$$

$$(2)\quad F_X(\infty) = 1$$

$$(3)\quad 0 \leq F_X(x) \leq 1$$

$$(4)\quad F_X(x_1) \leq F_X(x_2) \quad \text{si} \quad x_1 < x_2$$

$$(5)\quad P\{x_1 < X \leq x_2\} = F_X(x_2) - F_X(x_1)$$

$$(6)\quad F_X(x^+) = F_X(x)$$

FUNCIÓN DE DISTRIBUCIÓN

Función de distribución para el caso discreto

La función de distribución acumulativa de una variable aleatoria discreta puede ser expresada como

$$F_X(x) = \sum_{i=1}^{N} P(x_i)u(x - x_i)$$

N: número de resultados del experimento

FUNCIÓN DE DENSIDAD

La función de densidad de probabilidad $f_X(x)$ se define como la derivada de la función de distribución:

$$\boxed{f_X(x) = \frac{dF_X(x)}{dx}}$$

FUNCIÓN DE DENSIDAD

Propiedades

Tiene las siguientes propiedades:

$$(1)\quad 0 \leq f_X(x) \qquad \text{para todo } x$$

$$(2)\quad \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)dx = 1$$

$$(3)\quad F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(\xi)d\xi$$

$$(4)\quad P\{x_1 < X \leq x_2\} = \int_{x_1}^{x_2} f_X(x)dx$$

FUNCIÓN DE DENSIDAD

Función de densidad para el caso discreto

La función de densidad de probabilidad para una variable aleatoria discreta puede ser expresada como

$$\boxed{f_X(x) = \sum_{i=1}^{N} P(x_i)\delta(x - x_i)}$$

N: número de resultados del experimento

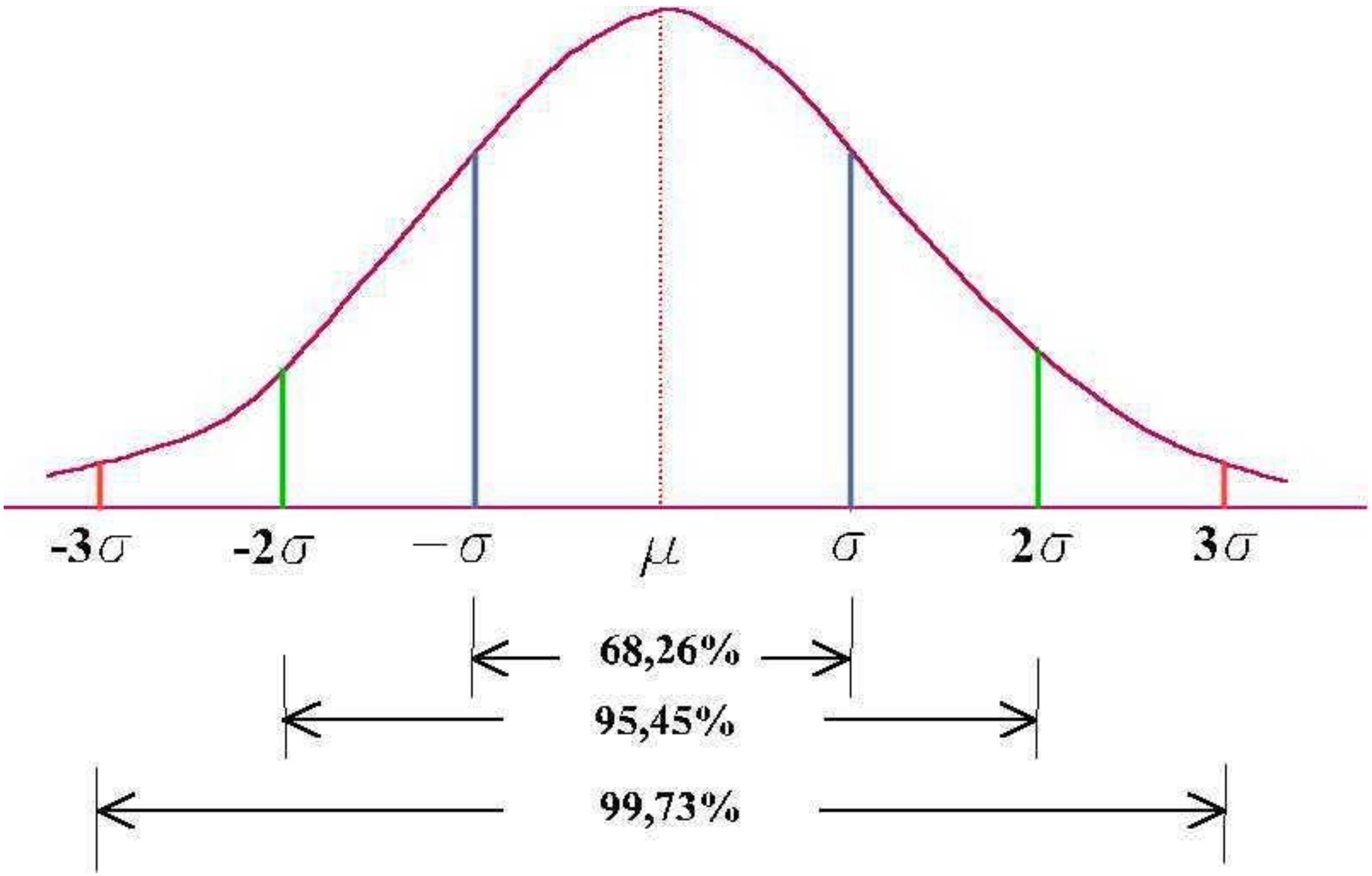
VARIABLE ALEATORIA GAUSSIANA

Se define su función de densidad de probabilidad como:

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_X}} e^{\frac{-(x-\overline{X})^2}{2\sigma_X^2}}$$

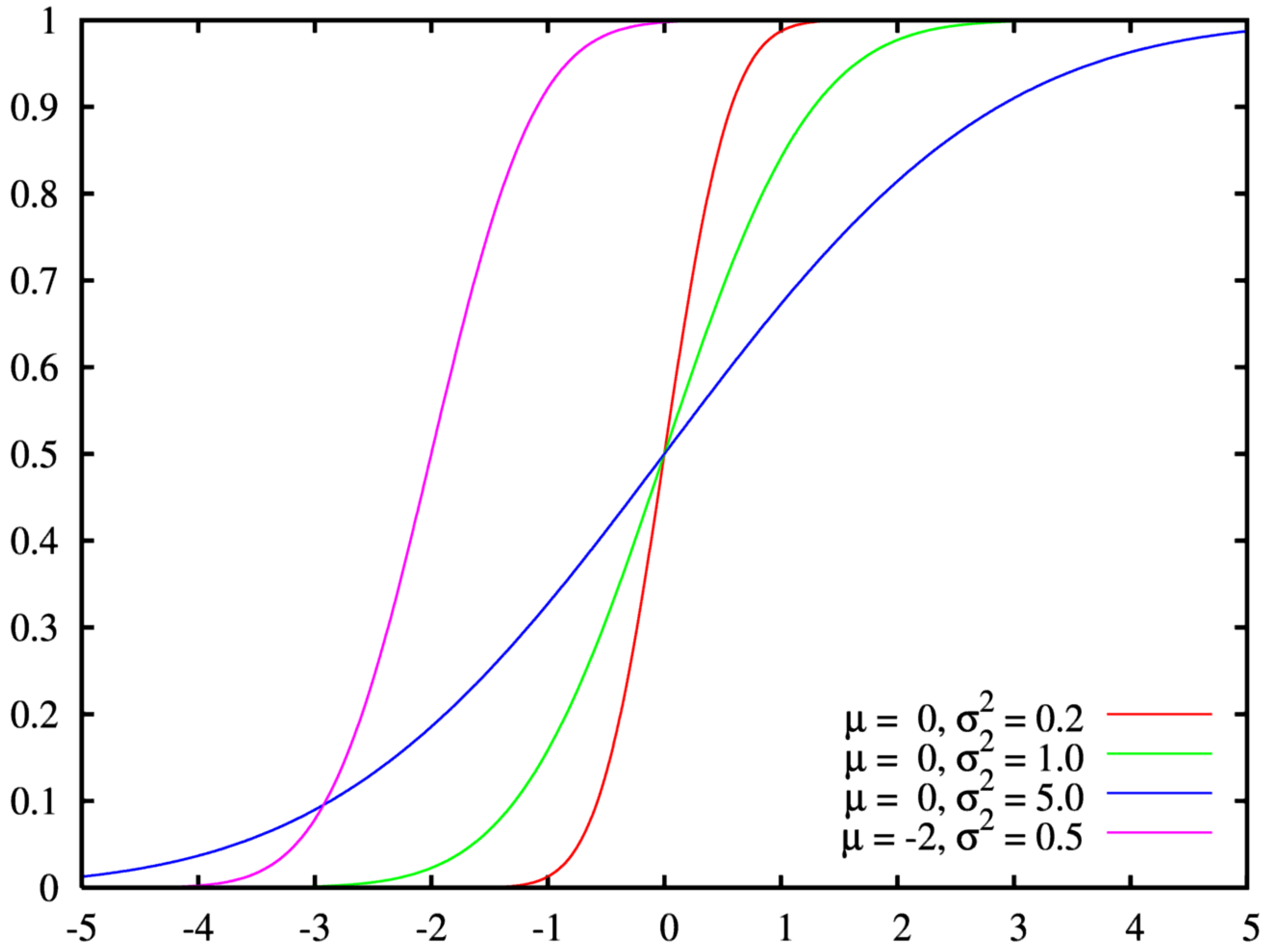
Donde $\sigma_x > 0$ y $-\infty < \overline{X} < +\infty$ son constantes reales

VARIABLE ALEATORIA GAUSSIANA



Gráfica de la función de densidad de probabilidad de una variable aleatoria Gaussiana

VARIABLE ALEATORIA GAUSSIANA



Gráfica de la función de distribución de probabilidad acumulativa de una variable aleatoria Gaussiana

VARIABLE ALEATORIA GAUSSIANA

Distribución Normal: N(0,1)

A una variable aleatoria Gaussiana con media 0 y varianza 1 se le llama variable aleatoria normal. La notación correspondiente para su función de distribución es *F(x).*

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-x^2}{2}}$$

VARIABLE ALEATORIA GAUSSIANA

Distribución Normal: N(0,1)

Si X es una variable aleatoria Gaussiana con media µ y varianza σ_x^2 , entonces su función de distribución

$$F_X(x) = F\left(\frac{x-\overline{X}}{\sigma_x}\right)$$

Para valores negativos de x se usa

$$F(-x) = 1 - F(x)$$

VARIABLE ALEATORIA GAUSSIANA

Distribución Normal: N(0,1)

x	.00	.01	.02	.03	.04
0.0	.5000	.5040	.5080	.5120	.5160
0.1	.5398	.5438	.5478	.5517	.5557
0.2	.5793	.5832	.5871	.5910	.5948
0.3	.6179	.6217	.6255	.6293	.6331
0.4	.6554	.6591	.6628	.6664	.6700
0.5	.6915	.6950	.6985	.7019	.7054
0.6	.7257	.7291	.7324	.7357	.7389
0.7	.7580	.7611	.7642	.7673	.7704

Tabla de valores de la distribución acumulativa Normal (Gaussiana)

OTRAS DISTRIBUCIONES

Ejemplo 7

La duración de un láser semiconductor a potencia constante tiene una distribución Gaussiana con media de 7.000 horas y desviación estándar de 600 horas. Se pide determinar:

a. ¿Cuál es la probabilidad de que el láser falle antes de 5.000 horas?

b. ¿Cuál es la duración en horas excedida por el 95 % de los láseres?

c. Si se hace uso de tres laseres en un producto y se supone que fallan de manera independiente. ¿Cuál es la probabilidad de que los tres sigan funcionando después de 7.000 horas?

OTRAS DISTRIBUCIONES

Distribución de Poisson

$$f_X(x) = e^{-b} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{b^k}{k!}\, \delta(x-k)$$

$$F_X(x) = e^{-b} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{b^k}{k!}\, u(x-k)$$

Donde

$b = \lambda \mathrm{T}$

T: intervalo de interés

λ: tasa de ocurrencia de eventos (eventos/unidad de tiempo)

OTRAS DISTRIBUCIONES

Distribución de Poisson

Ejemplo 8

La llegada de automóviles a una gasolinera ocurre a un promedio de 50 autos/hora. El establecimiento cuenta con una única estación para la atención a los clientes. Si se asume que un automóvil requiere un minuto para ser atendido. ¿Cuál es la probabilidad que ocurra una fila de espera ?

OTRAS DISTRIBUCIONES

Distribución uniforme

La función de densidad y distribución uniforme es:

$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a}, & a \le x \le b \\ 0, & \text{otro valor} \end{cases}$$

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < a \\ (x-a)/(b-a), & a \le x < b \\ 1, & \mathrm{x} \ge \mathrm{b} \end{cases}$$

Para constantes reales $-\infty < a < +\infty$ y $b > a$

OTRAS DISTRIBUCIONES

Distribución exponencial

La función de densidad y distribución exponencial son :

$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b} e^{\frac{-(x-a)}{b}}, & x > a \\ 0, & x < a \end{cases}$$

$$F_X(x) = \begin{cases} 1 - e^{\frac{-(x-a)}{b}}, & x > a \\ 0, & x < a \end{cases}$$

Para constantes reales $-\infty < a < +\infty$ y $b > 0$

OTRAS DISTRIBUCIONES

Distribución exponencial

Ejemplo 9

La potencia reflejada por un avión es recibida por un radar. Este nivel de potencia puede ser descrito como una variable aleatoria P de distribución exponencial. Su función de densidad de P es:

$$f_P(p) = \begin{cases} \dfrac{1}{P_0} e^{\frac{-p}{P_0}}, & \mathrm{p} > 0 \\ 0, & \mathrm{p} < 0 \end{cases}$$

OTRAS DISTRIBUCIONES

Distribución exponencial

Ejemplo 9 (continuación)

Donde P_0 es la potencia promedio de potencia recibida. Se pide determinar la probabilidad que la potencia recibida se encuentre por encima del promedio.

OTRAS DISTRIBUCIONES

Distribución Rayleigh

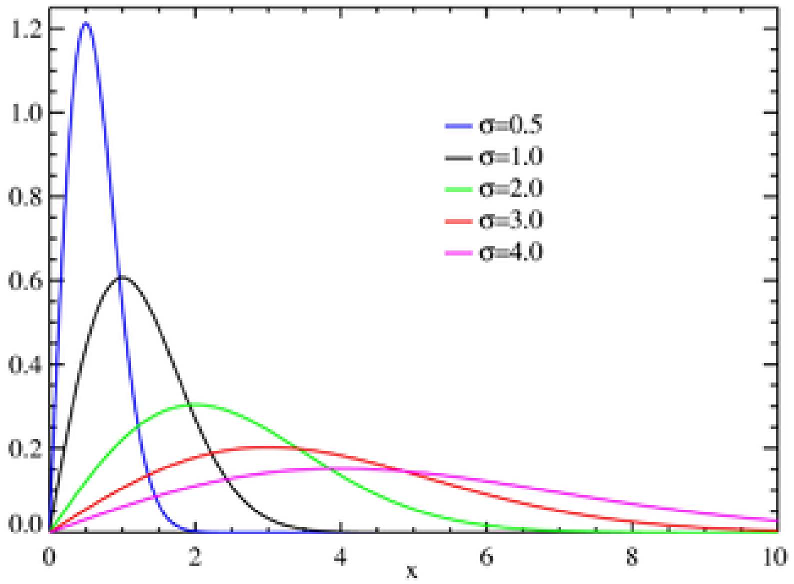
La función de densidad y distribución rayleigh son :

$$f_X(x) = \frac{x}{\sigma^2} e^{-x^2/(2\sigma^2)} \quad , \quad x \geq 0$$

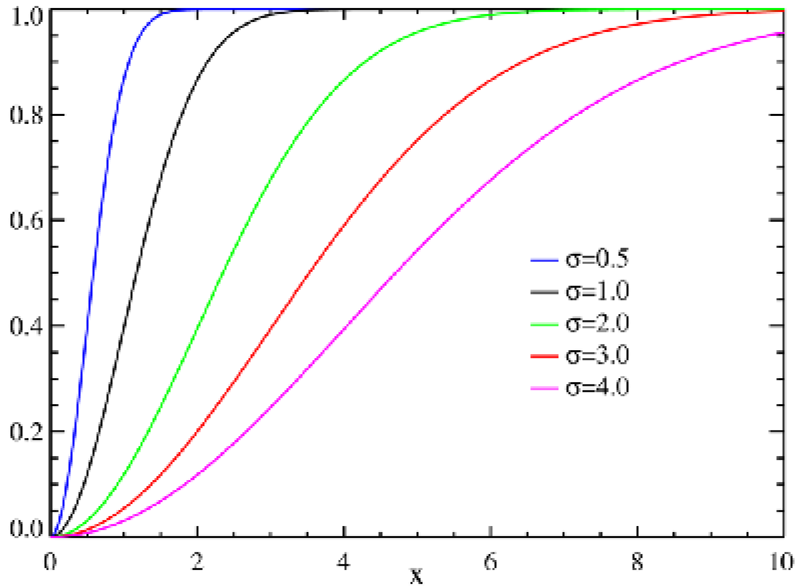
$$F_X(x) = 1 - e^{-x^2/(2\sigma^2)} \quad , \quad x \geq 0$$

OTRAS DISTRIBUCIONES

Distribución Rayleigh



Gráfica de la función de densidad de probabilidad de una variable aleatoria de Rayleigh.



Gráfica de la función de distribución de probabilidad acumulativa de una variable aleatoria de Rayleigh.

OTRAS DISTRIBUCIONES

Distribución Laplaciana

La función de densidad Laplaciana es:

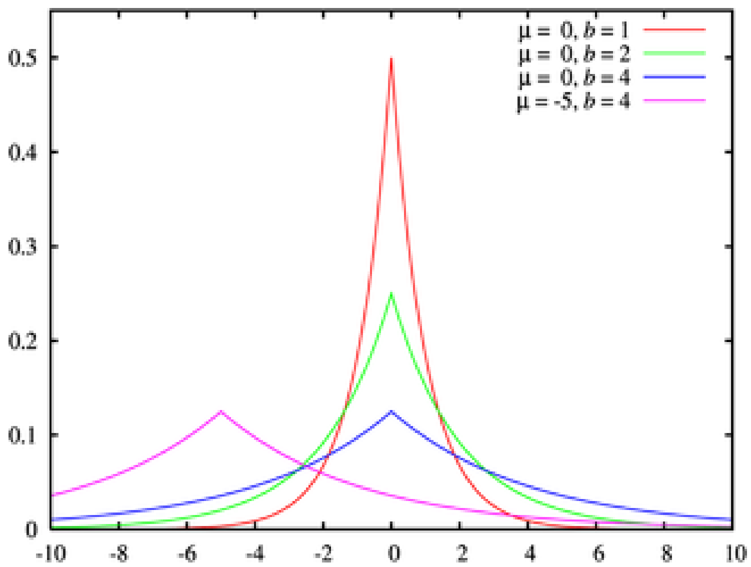
$$f_X(x) = \frac{1}{2b} e^{\frac{-|x-\mu|}{b}}$$

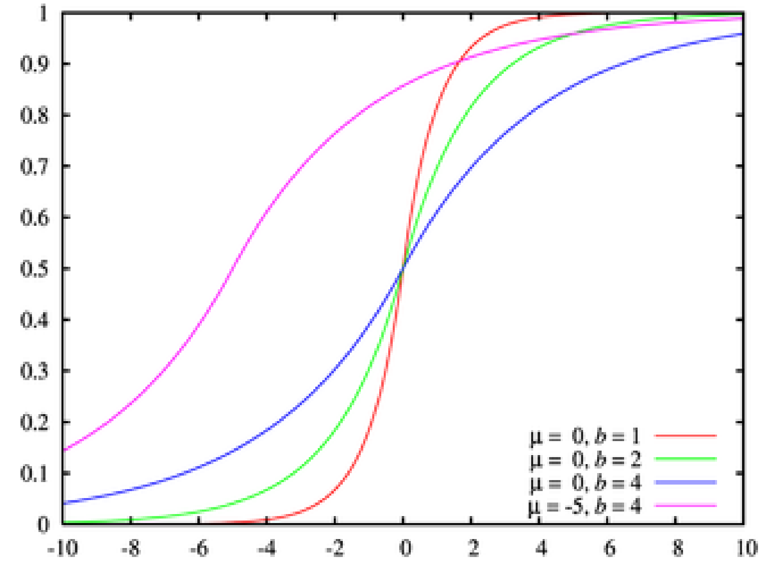
Donde μ es la media y $2b^2$ es la varianza

Para constantes reales $-\infty < \mu < \infty$ y $b > 0$

OTRAS DISTRIBUCIONES

Distribución Laplaciana





Gráfica de la función de densidad de probabilidad de una variable aleatoria Laplaciana.

Gráfica de la función de distribución de probabilidad acumulativa de una variable aleatoria Laplaciana.

OPERACIONES SOBRE UNA VARIABLE ALEATORIA

OPERACIONES SOBRE UNA VARIABLE ALEATORIA

Momento respecto al origen

El enésimo momento de una V.A. *X*, esta definido por

$$E[x^n] = \overline{X^n} = \begin{cases} \int_{-\infty}^{\infty} x^n f_x(x)dx & \text{variable aleatoria continua} \\ \sum_{i=1}^{N} x_i^n P(x_i) & \text{variable aleatoria discreta} \end{cases}$$

OPERACIONES SOBRE UNA VARIABLE ALEATORIA

Valor Medio

El valor medio (o valor esperado) de una V.A. *X*, esta definido por

$$E[x] = \bar{X} = \begin{cases} \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} x f_x(x)dx & v.a.continua \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{N} x_i P(x_i) & v.a.discreta \end{cases}$$

OPERACIONES SOBRE UNA VARIABLE ALEATORIA

Valor Medio

El valor medio de una función que depende de una variable aleatoria

$$E[g(x)] = \begin{cases} \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f_x(x) dx & v.a. continua \\ \\ \sum_{i=1}^{N} g(x_i) P(x_i) & v.a. discreta \end{cases}$$

g(x) → una función que depende de una V.A.

OPERACIONES SOBRE UNA VARIABLE ALEATORIA

Valor Medio

Para cualquier constante a y b

$$E[aX+b]=aE[X]+b$$

OPERACIONES SOBRE UNA VARIABLE ALEATORIA

Valor cuadrático medio

$$E[x^2] = \overline{X^2} = \begin{cases} \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_x(x)\,dx & v.a.\,continua \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{N} x_i^2 P(x_i) & v.a.\,discreta \end{cases}$$

OPERACIONES SOBRE UNA VARIABLE ALEATORIA

Momentos Centrales

El enésimo momento central de una V.A. *X*, esta definido por

$$\mu_n = E[(X-\bar{X})^n] = \begin{cases} \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} (x-\bar{X})^n f_x(x)dx & v.a.continua \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{N} (x_i-\bar{X})^n P(x_i) & v.a.discreta \end{cases}$$

OPERACIONES SOBRE UNA VARIABLE ALEATORIA

Varianza

La varianza de una V.A. *X*, esta definido por

$$\sigma_X^2 = E[(X-\bar{X})^2] = \begin{cases} \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} (x-\bar{X})^2 f_X(x)dx & v.a.continua \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{N} (x_i-\bar{X})^2 P(x_i) & v.a.discreta \end{cases}$$

$$\sigma_X^2 = Var[X] = E\left\{[X-E[X]]^2\right\} = E[X^2] - E[X]^2$$

OPERACIONES SOBRE UNA VARIABLE ALEATORIA

Varianza

Tener en cuenta que, siempre

$$Var[X] \geq 0$$

La desviación estándar de una variable aleatoria *X*, es la raíz cuadrada positiva de la varianza. Se denota por σ_X

OPERACIONES SOBRE UNA VARIABLE ALEATORIA

Skew

El skew de una V.A. *X*, esta definido por

$$\mu_3 = E[(X - \bar{X})^3] = \begin{cases} \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} (x - \bar{X})^3 f_x(x)dx & v.a.continua \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{N} (x_i - \bar{X})^3 P(x_i) & v.a.discreta \end{cases}$$

$$\mu_3 = E\left\{(X - E[X])^3\right\} = E[X^3] - 3E[X]\sigma_X^2 - E[X]^3$$

OPERACIONES SOBRE UNA VARIABLE ALEATORIA

Skew

El momento central de tercer orden es una medida de la asimetría de $f_X(x)$ alrededor de la media.

OPERACIONES SOBRE UNA VARIABLE ALEATORIA

Coeficiente de skewness

$$C_s = \frac{E[(X-\bar{X})^3]}{\sigma_X^3} = \frac{\mu_3}{\sigma_X^3}$$

OPERACIONES SOBRE UNA VARIABLE ALEATORIA

Curtosis

La curtosis de una V.A. *X*, esta definido por

$$\mu_4 = E[(X-\bar{X})^4] = \begin{cases} \int_{-\infty}^{\infty} (x-\bar{X})^4 f_x(x)dx & v.a. continua \\ \sum_{i=1}^{N} (x_i-\bar{X})^4 P(x_i) & v.a. discreta \end{cases}$$

OPERACIONES SOBRE UNA VARIABLE ALEATORIA

Curtosis

El momento central de cuarto orden es una medida de concentración de la $f_X(x)$ alrededor de su media.

OPERACIONES SOBRE UNA VARIABLE ALEATORIA

Coeficiente de curtosis

$$C_k = \frac{E\left[\left(X - \bar{X}\right)^4\right]}{\sigma_X^4} = \frac{\mu_4}{\sigma_X^4}$$

TRANSFORMACIÓN DE LA VARIABLE ALEATÓRIA

TRANSFORMACIÓNES DE UNA VARIABLE ALEATORIA

Se puede transformar una variable aleatoria *"X"* en una nueva variable aleatoria *"Y"* por medio de una transformación

$$\boxed{Y = T(X)}$$

$$X \longrightarrow \boxed{Y = T(X)} \longrightarrow Y$$

$f_X(x)$ $\qquad$ $f_Y(y)$

$F_X(x)$ $\qquad$ $F_Y(y)$

TRANSFORMACIÓN MONOTÓNICA DE UNA VARIABLE ALEATORIA CONTINUA

Una transformación T se dice que es monótonamente creciente si

$$T(x_1) < T(x_2), \quad \text{para cualquier } \; x_2 > x_1$$

Es monótonamente decreciente si

$$T(x_1) > T(x_2), \quad \text{para cualquier } \; x_2 > x_1$$

TRANSFORMACIÓN MONOTÓNICA DE UNA VARIABLE ALEATORIA CONTINUA

Para cualquier transformación monótona, se tiene que

$$\boxed{f_Y(y) = f_X(T^{-1}(y))\left|\frac{dx}{dy}\right|}$$

o simplemente,

$$\boxed{f_Y(y) = f_X(x)\left|\frac{dx}{dy}\right|}$$

TRANSFORMACIÓN MONOTÓNICA DE UNA VARIABLE ALEATORIA CONTINUA

Ejemplo 10

Si tomamos T tal que sea la transformación lineal

$$Y = T(X) = aX + b, \quad donde\ a\ y\ b \text{ son cualquier constante real}$$

Hallar $f_Y(y)$ si X es gaussiana con la función de densidad

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_X^2}} e^{\frac{-(x-\overline{X})^2}{2\sigma_X^2}}$$

TRANSFORMACIÓN MONOTÓNICA DE UNA VARIABLE ALEATORIA CONTINUA

Ejemplo 11

Una Variable aleatoria X esta uniformemente distribuida en el intervalo (-5, 15). Se define otra variable aleatoria tal que

$$Y = e^{-X/5}$$

Hallar $f_Y(y)$ y E[Y]

TRANSFORMACIÓN MONOTÓNICA DE UNA VARIABLE ALEATORIA CONTINUA

<u>Ejemplo 12</u>

Una Variable aleatoria "*X*" esta uniformemente distribuida en el intervalo (-π/2, π/2). "*X*" se transforma en la nueva variable aleatoria Y=T(X)= $a\tan(X)$, donde a>0.

Hallar la función de densidad de probabilidad de "*Y*".

Dato:

$$\frac{d}{dx}\tan^{-1}u = \frac{1}{1+u^2}\frac{du}{dx}$$

TRANSFORMACIÓN NO MONOTÓNICA DE UNA VARIABLE ALEATORIA CONTINUA

Una transformación puede no ser monotónica. No es más que un intervalo de valores de *"X"* que se corresponde con el evento

$$\{Y \leq y\}$$

$$f_Y(y) = \sum_n \frac{f_X(x_n)}{\left| \left. \frac{dT(x)}{dx} \right|_{x=x_n} \right|}$$

x_n : son las raices de la solución real de y=T(x)

TRANSFORMACIÓN NO MONOTÓNICA DE UNA VARIABLE ALEATORIA CONTINUA

Ejemplo 13

Una variable aleatoria gaussiana X que representa una tensión tiene un valor medio $\overline{X} = 0$ y una varianza $\sigma_X^2 = 9$. La tensión X se aplica a un detector de onda completa cuadrático que tiene una característica de transferencia

$$Y = 5X^2$$

Halla el valor medio de la tensión de salida "*Y*" *y* $f_Y(y)$

TRANSFORMACIÓN NO MONOTÓNICA DE UNA VARIABLE ALEATORIA CONTINUA

Ejemplo 14

Una variable aleatoria "*X*" tiene $\overline{X} = -3,\ \ \overline{X^2} = 11\ \ y\ \ \sigma_X^2 = 2$

Para una nueva variable aleatoria $Y = 2X - 3$

Hallar $(a)\ \mathrm{E}[Y],\ (b)\ \mathrm{E}[Y^2],\ (c)\ \sigma_Y^2$

TRANSFORMACIÓN NO MONOTÓNICA DE UNA VARIABLE ALEATORIA CONTINUA

Ejemplo 15

Una variable aleatoria tiene una densidad de probabilidad

$$fx(x) = \begin{cases} (5/4)(1 - x^4) & 0 < x \leq 1 \\ 0 & \text{para otro valor de } x \end{cases}$$

Hallar

$$(a) E[X]$$

$$(b) E[4X + 2]$$

$$(c) E[X^2]$$

TRANSFORMACIÓN DE UNA VARIABLE ALEATORIA DISCRETA

Si X es una variable aleatoria discreta cuando $Y = T(X)$ es una transformación continua, entonces

$$f_X(x) = \sum_n P(x_n)\delta(x - x_n)$$

$$F_X(x) = \sum_n P(x_n)u(x - x_n)$$

donde, $x_n, n = 1,2,\ldots, de\ X$

TRANSFORMACIÓN DE UNA VARIABLE ALEATORIA DISCRETA

Si la transformación es monótona, existe una correspondencia de uno a uno entre *X e Y,* de modo que un conjunto $\{y_n\}$ se corresponde con el conjunto $\{x_n\}$ a través de la ecuación $y_n=T(x_n)$. *La probabilidad* $P(y_n)$ *es igual a* $p(x_n)$. *Por tanto,*

$$f_Y(y) = \sum_n P(y_n)\delta(y - y_n)$$

$$F_Y(y) = \sum_n P(y_n)u(y - y_n)$$

TRANSFORMACIÓN DE UNA VARIABLE ALEATORIA DISCRETA

donde,

$$y_n = T(x_n)$$
$$P(y_n) = P(x_n)$$

Si *T* no es monótona, el procedimiento anterior sigue siendo válido pero ahora existe la posibilidad de que más de un valor x_n se corresponda con un valor y_n. En tal caso, $P(y_n)$ será igual a la suma de las probabilidades de los distintos x_n para los que $y_n=T(x_n)$

TRANSFORMACIÓN NO MONOTÓNICA DE UNA VARIABLE ALEATORIA CONTINUA

Ejemplo 16

Una variable aleatoria X puede tomar los valores -4,-1,2,3 y 4, la probabilidad de cada uno de ellos es 1/5. Hallar

(a) La función de densidad,

(b) la media y

(c) la función de densidad de $Y=3X^3$

(d) la varianza de la variable aleatoria "*Y*"

TRANSFORMACIÓN DE UNA VARIABLE ALEATORIA DISCRETA

Ejemplo 17

Sea una variable aleatoria discreta *X* que toma los valores de x=-1,0,1 y 2 con las siguientes probabilidades 0.1;0.3;0.4 y 0.2, respectivamente. Supongamos que a *X* se le aplica la transformación

$$Y = 2 - X^2 + (X^3/3)$$

Hallar la función de densidad de *Y*

GENERACIÓN POR COMPUTADOR DE UNA VARIABLE ALEATORIA

Para cualquier *x* e *y, se tiene que*

$$\boxed{F_Y[y = T(x)] = F_X(x)}$$

Para *X* uniforme se sabe que $F_X(x) = x, \qquad 0 < x < 1$

La inversa de la ecuación anterior es

$$\boxed{y = T(x) = F_Y^{-1}(x), \qquad 0 < x < 1}$$

FUENTE:

PEYTON Z. PEEBLES, Jr. “Principios de probabilidad, variables aleatorias y señales aleatorias” McGraw-Hill/INTERAMERICANA DE ESPAÑA, 4ª ed., 2006