

# EL231 – Señales y Sistemas

## Solucionario de la Práctica Calificada 2

César D. Salvador

2 de junio de 2024

### 1. Sistemas de Primer Orden

El circuito RL en serie de la Figura 1 se modela mediante un sistema lineal de primer orden. En el dominio del tiempo  $t$ , la señal de entrada  $x(t)$  es el voltaje de la fuente y la señal de salida  $y(t)$  es la corriente en la resistencia.

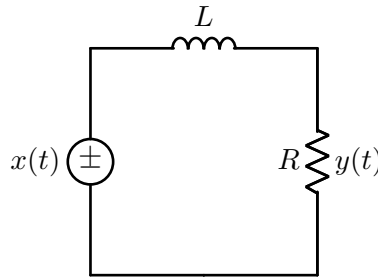


Figura 1: Circuito RL

Resolver los siguientes ítems detallando cada paso del procedimiento y formular los resultados en términos de  $R$  y  $L$ .

- Formular la ecuación diferencial que relaciona  $y(t)$  y  $x(t)$ . [2 puntos].
- Aplicar la transformación de Fourier a la ecuación diferencial para formular la función de transferencia  $H(\omega) = \frac{Y(\omega)}{X(\omega)}$  que modela al circuito en el régimen estacionario y en el dominio de la frecuencia angular  $\omega$ . [2 puntos].

Utilizar aproximaciones asintóticas para graficar las siguientes funciones en el dominio  $\omega$ . Mostrar  $\omega$  en escala logarítmica con intervalos uniformes en décadas indicando al menos 4 décadas. Graficar lo siguiente:

- La magnitud de  $H(\omega)$  en decibelios, es decir,  $20 \log_{10} |H(\omega)|$ . [2 puntos].
- La fase de  $H(\omega)$  en radianes, es decir,  $\angle H(\omega)$ . [2 puntos].

## Solución

a) Aplicando la ley del voltajes de Kirchhoff en el circuito de la Figura 1 tenemos:

$$x(t) = L \frac{d}{dt} y(t) + R y(t). \quad (1)$$

Organizando los términos en (1) obtenemos la siguiente ecuación diferencial del circuito en la forma estándar de operadores diferenciales:

$$\left(1 + \frac{L}{R} \frac{d}{dt}\right) y(t) = \frac{1}{R} x(t). \quad (2)$$

b) Aplicando la transformación de Fourier a ambos lados de (2) obtenemos:

$$\left(1 + \frac{L}{R} j\omega\right) Y(\omega) = \frac{1}{R} X(\omega). \quad (3)$$

De (3) obtenemos la función de transferencia:

$$H(\omega) = \frac{Y(\omega)}{X(\omega)} = \frac{1}{R} \left( \frac{1}{1 + j \frac{L}{R} \omega} \right). \quad (4)$$

c) En (4), el primer factor corresponde a un sistema de orden cero con ganancia

$$K = \frac{1}{R}. \quad (5)$$

El factor entre paréntesis corresponde a un sistema de primer orden tipo pasa bajos con constante de tiempo

$$\tau = \frac{L}{R}. \quad (6)$$

La Tabla 1 muestra distintos pares de valores  $R$  y  $L$  con sus respectivos valores de ganancia y frecuencia de corte.

Horario	$R$ ( $\Omega$ )	$L$ (H)	$20 \log_{10} \left( \frac{1}{R} \right)$ (dB)	$\frac{1}{\tau}$ (rad/s)
EL61	$8 \times 10^3$	4	-78.1	$2 \times 10^3$
EL63	6	$3 \times 10^{-3}$	-15.6	$2 \times 10^3$
LS6D	$0.1 \times 10^3$	$50 \times 10^{-3}$	-40	$2 \times 10^3$

Tabla 1: Parámetros del circuito RL.

Como la frecuencia de corte  $\frac{1}{\tau}$  es la misma para todos los casos, la aproximación asintótica para la magnitud del sistema de primer orden, descrito por el factor entre paréntesis en (4), está definida por:

$$20 \log_{10} |H(\omega)| = \begin{cases} 0 \text{ dB} & \omega \leq 2 \times 10^2, \\ -3 \text{ dB} & \omega = 2 \times 10^3, \\ -20 \frac{\text{dB}}{\text{dec}} & \omega \geq 2 \times 10^4. \end{cases} \quad (7)$$

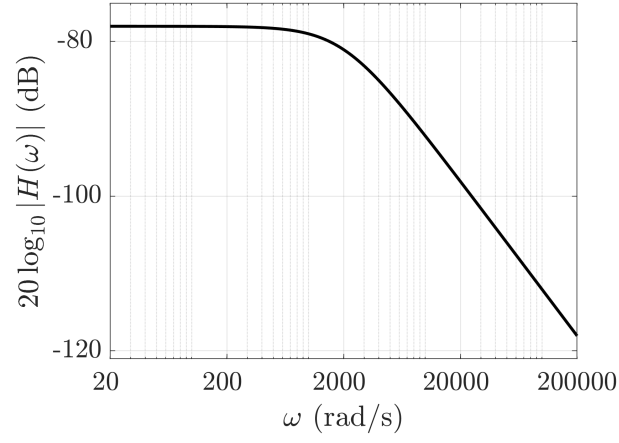


Figura 2: Magnitud de (4) para la fila EL61 de la Tabla 1.

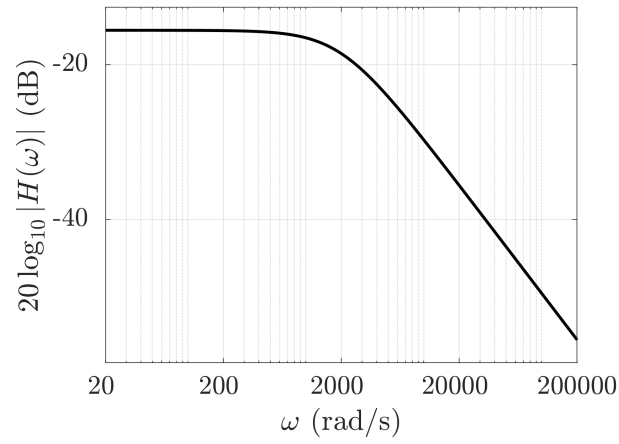


Figura 3: Magnitud de (4) para la fila EL63 de la Tabla 1.

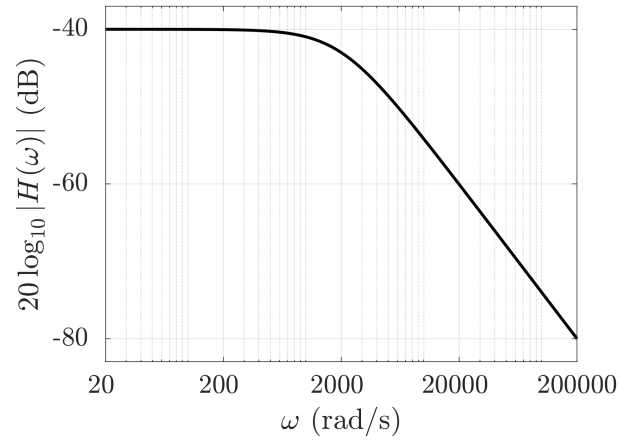


Figura 4: Magnitud de (4) para la fila LS6D de la Tabla 1.

Sumando (7) y la ganancia en decibelios de la Tabla 1 para cada fila obtenemos las aproximaciones asintóticas que sirven como líneas guía para obtener las curvas de magnitud de (4) mostradas a continuación en las Figuras 2, 3 y 4.

- d) La aproximación asintótica para la fase del sistema de primer orden, descrito por el factor entre paréntesis en (4), está definida por:

$$\angle H(\omega) = \begin{cases} 0 \text{ rad} & \omega \leq 2 \times 10^2, \\ -\frac{\pi}{4} \frac{\text{rad}}{\text{dec}} & 2 \times 10^2 \leq \omega \leq 2 \times 10^4, \\ -\frac{\pi}{2} \text{ rad} & \omega \geq 2 \times 10^4. \end{cases} \quad (8)$$

Como la fase del sistema de orden cero en (5) es 0, la gráfica de fase de (4) para todas las filas de la Tabla 1 se obtiene directamente de la aproximación asintótica (8), la cual sirve como línea guía para obtener la curva mostrada en la Figura 5.

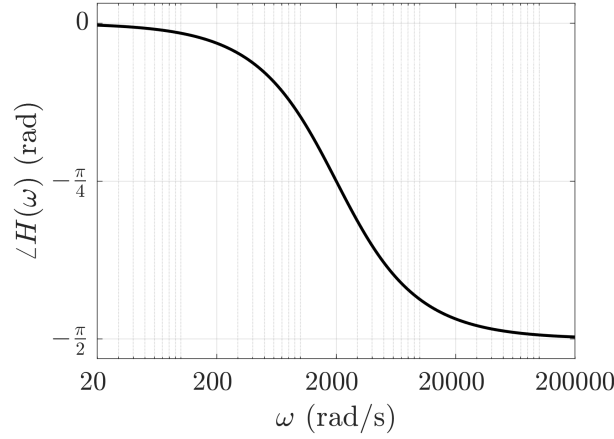


Figura 5: Fase de (4) para todas las filas de la Tabla 1.

## 2. Sistemas de Segundo Orden

Un circuito RLC en serie se modela en frecuencia angular  $\omega$  mediante una función de transferencia  $H(\omega)$  que relaciona el voltaje en la fuente  $X(\omega)$  y el voltaje en el capacitor  $Y(\omega)$ . El modelo es el siguiente sistema de segundo orden:

$$H(\omega) = \frac{Y(\omega)}{X(\omega)} = \frac{K}{\left(\frac{j\omega}{\omega_n}\right)^2 + 2\xi \left(\frac{j\omega}{\omega_n}\right) + 1}. \quad (9)$$

La frecuencia natural  $\omega_n$  y la tasa de amortiguamiento  $\xi$  se calculan a partir de la resistencia  $R$ , la capacitancia  $C$  y la inductancia  $L$  de la siguiente manera:

$$\omega_n = \left(\frac{1}{LC}\right)^{\frac{1}{2}}, \quad (10)$$

$$\xi = \frac{R}{2} \left(\frac{C}{L}\right)^{\frac{1}{2}}. \quad (11)$$

Utilizar aproximaciones asintóticas para graficar las siguientes funciones en el dominio  $\omega$ . Mostrar  $\omega$  en escala logarítmica con intervalos uniformes en décadas indicando al menos 4 décadas. Graficar lo siguiente:

- a) La magnitud de  $H(\omega)$  en decibelios, es decir,  $20 \log_{10} |H(\omega)|$ . [3 puntos].
- b) La fase de  $H(\omega)$  en radianes, es decir,  $\angle H(\omega)$ . [3 puntos].

## Solución

- a) En (9), distinguimos los factores:

$$H(\omega) = \frac{Y(\omega)}{X(\omega)} = K \left( \frac{1}{\left(\frac{j\omega}{\omega_n}\right)^2 + 2\xi \left(\frac{j\omega}{\omega_n}\right) + 1} \right), \quad (12)$$

en donde la constante  $K$  es un sistema de orden cero con magnitud

$$20 \log_{10} (K) \quad (13)$$

y el término entre paréntesis es un sistema de segundo orden con aproximación asintótica:

$$20 \log_{10} |H(\omega)| = \begin{cases} 0 \text{ dB} & \omega \leq 10^{-1}\omega_n, \\ -20 \log_{10}(2\xi) & \omega = \omega_n, \\ -40 \frac{\text{dB}}{\text{dec}} & \omega \geq 10\omega_n. \end{cases} \quad (14)$$

La Tabla 2 muestra distintos conjuntos de valores  $K$ ,  $R$ ,  $L$  y  $C$  con información relacionada a la frecuencia de resonancia  $\omega_n$  y a la tasa de amortiguamiento  $\xi$ .

Horario	$K$	$R$ ( $\Omega$ )	$L$ (H)	$C$ (F)	$20 \log_{10}  K $	$\omega_n$ (rad/s)	$-20 \log_{10}(2\xi)$
EL61	$10^3$	1	$5 \times 10^{-3}$	$50 \times 10^{-6}$	60	2000	-20
EL63	$10^2$	1	$10 \times 10^{-3}$	$100 \times 10^{-6}$	40	1000	-20
LS6D	10	1	$20 \times 10^{-3}$	$200 \times 10^{-6}$	20	500	-20

Tabla 2: Parámetros del circuito RLC.

Sumando (13) y (14) para los valores de cada fila de la Tabla 2 obtenemos las aproximaciones asintóticas que delimitan las curvas de magnitud de (9) mostradas a continuación en las Figuras 6, 7 y 8.

- b) El factor de orden cero en (12), descrito por la constante  $K$ , tiene fase 0. Por tanto, la curva de fase del sistema total (9) está delimitada por la aproximación asintótica del factor entre paréntesis en (12). La aproximación asintótica de fase es:

$$\angle H(\omega) = \begin{cases} 0 \text{ rad} & \omega \leq 10^{-1}\omega_n, \\ -\frac{\pi}{2} \frac{\text{rad}}{\text{dec}} & 10^{-1}\omega_n \leq \omega \leq 10\omega_n, \\ -\pi \text{ rad} & \omega \geq 10\omega_n. \end{cases} \quad (15)$$

Las aproximaciones asintóticas en (15) producen líneas guía que delimitan las curvas de fase del sistema total (9) mostradas a continuación en las Figuras 9, 10 y 11.

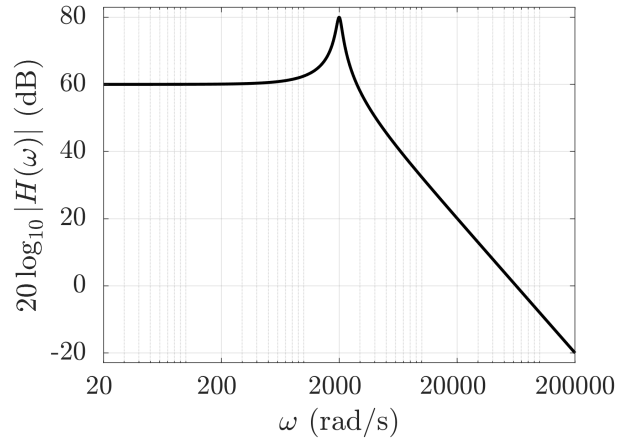


Figura 6: Magnitud de (9) para la fila EL61 de la Tabla 2.

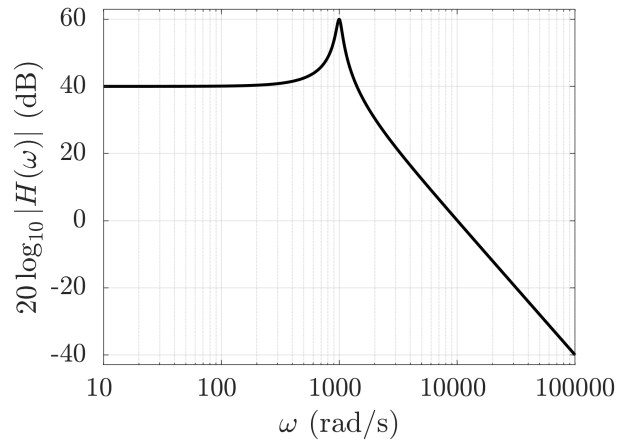


Figura 7: Magnitud de (9) para la fila EL63 de la Tabla 2.

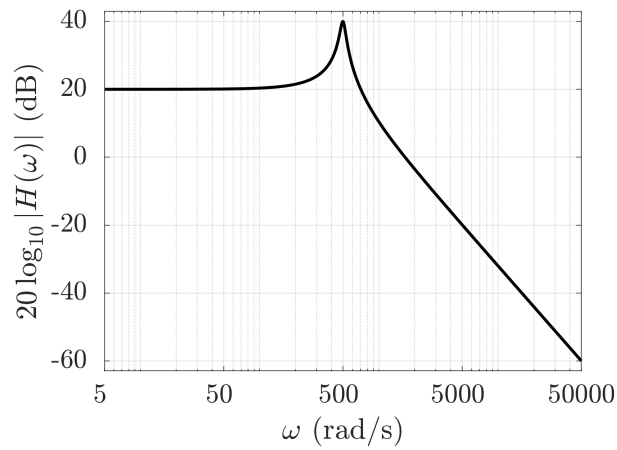


Figura 8: Magnitud de (9) para la fila LS6D de la Tabla 2.

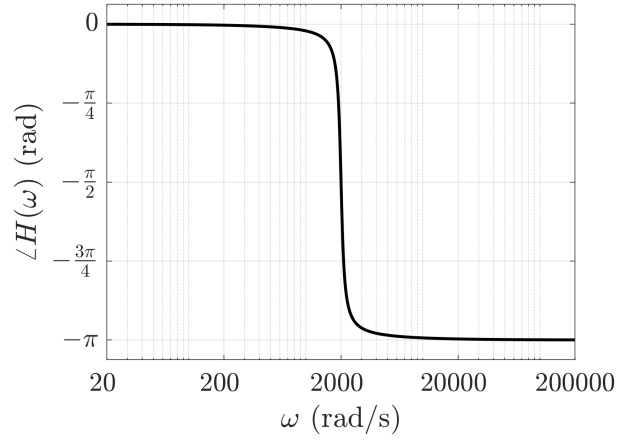


Figura 9: Fase de (9) para la fila EL61 de la Tabla 2.

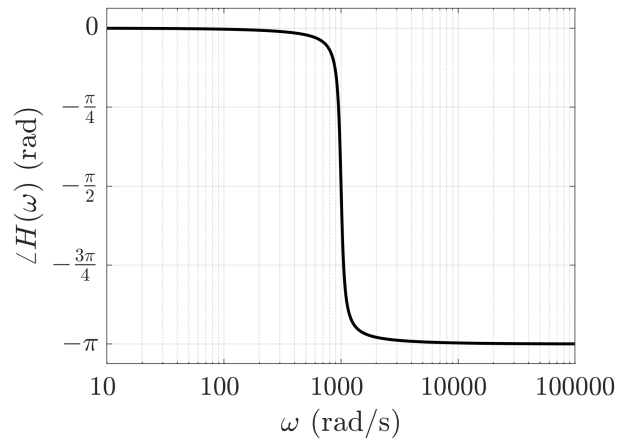


Figura 10: Fase de (9) para la fila EL63 de la Tabla 2.

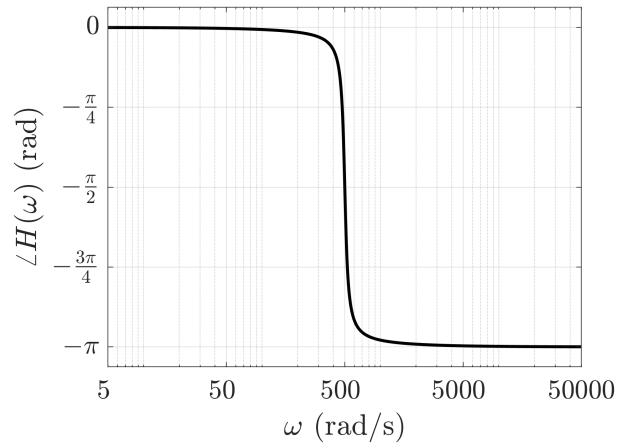


Figura 11: Fase de (9) para la fila LS6D de la Tabla 2.

### 3. Conversión de Escalas Logarítmicas de Frecuencia

La medición de la función de transferencia de un sistema de alto orden dio como resultado las magnitudes de la Tabla 3 en función de la frecuencia lineal en décadas.

El orden en la Tabla 3 indica el mayor exponente  $n$  del término  $(j\omega)^n$  cuya contribución es más prominente en el rango de frecuencia indicado. El orden  $n$  se relaciona con la pendiente de la aproximación asintótica de la magnitud según:

$$\text{Pendiente} = \pm 20n \frac{\text{dB}}{\text{dec}}, \quad (16)$$

en donde  $20 \frac{\text{dB}}{\text{dec}}$  es la pendiente de un sistema de primer orden y el signo indica pendiente positiva o negativa. Cuando la magnitud es constante, la pendiente y el orden son 0.

Para compartir las mediciones con otro laboratorio se desea convertir la escala de frecuencias de décadas a octavas, es decir, es necesario convertir los valores de la Tabla 3 a la Tabla 4.

La conversión de escala de frecuencia logarítmica de décadas a octavas se formula mediante la siguiente equivalencia:

$$20 \frac{\text{dB}}{\text{dec}} = 6 \frac{\text{dB}}{\text{oct}}. \quad (17)$$

$f$ (Hz)	10–10 <sup>2</sup>	10 <sup>2</sup> –10 <sup>3</sup>	10 <sup>3</sup> –10 <sup>4</sup>	10 <sup>4</sup> –10 <sup>5</sup>	10 <sup>5</sup> –10 <sup>6</sup>
$ H(f) $ (dB)	–24	80 dB/dec	56	–60 dB/dec	–4
Orden	0	4	0	3	0

Tabla 3: Magnitud en función de la frecuencia en décadas (EL61).

$f$ (Hz)	62.5–100	100–1000	1000–10000	10000–100000	100000–160000
$ H(f) $ (dB)	–24	24 dB/oct	56	–18 dB/oct	–4

Tabla 4: Magnitud en función de la frecuencia en octavas (EL61).



Las Tablas 5 y 6 muestran otro ejemplo de conversión de escalas de frecuencia.

$f$ (Hz)	$10-10^2$	$10^2-10^3$	$10^3-10^4$	$10^4-10^5$	$10^5-10^6$
$ H(f) $ (dB)	-12	60 dB/dec	48	-80 dB/dec	-32
Orden	0	3	0	4	0

Tabla 5: Magnitud en función de la frecuencia en décadas (EL63).

$f$ (Hz)	62.5–100	100–1000	1000–10000	10000–100000	100000–160000
$ H(f) $ (dB)	-12	18 dB/oct	48	-24 dB/oct	-32

Tabla 6: Magnitud en función de la frecuencia en octavas (EL63).

Las Tablas 7 y 8 muestran otro ejemplo de conversión de escalas de frecuencia.

$f$ (Hz)	$10-10^2$	$10^2-10^3$	$10^3-10^4$	$10^4-10^5$	$10^5-10^6$
$ H(f) $ (dB)	36	-60 dB/dec	-24	80 dB/dec	56
Orden	0	3	0	4	0

Tabla 7: Magnitud en función de la frecuencia en décadas (LS6D).

$f$ (Hz)	62.5–100	100–1000	1000–10000	10000–100000	100000–160000
$ H(f) $ (dB)	36	-18 dB/oct	-24	24 dB/oct	56

Tabla 8: Magnitud en función de la frecuencia en octavas (LS6D).

## 4. Tarea Opcional

Escribir en L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X utilizando Pgfplots Package:

- Figuras 2 a 11.
- Gráficas de las Tablas 3 a 8.

En <https://www.overleaf.com/>, compartir el proyecto **EL231SYSPC2SeccionApellidos** a pcukcsal@upc.edu.pe desde una cuenta UPC.

Fecha límite: Jueves 6 de junio 11:58 pm.