Transformada inversa Z

Transformada inversa Z por definición

Dado

$$\boxed{Z(x[n]) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n} = X(z) \; ; \; z \in ROC}$$

Definición de transformada Z: Dada $x[n]$ se halla su transformada Z que es: $X(z)$.

Y **si se conoce $X(Z)$,** ¿Cómo hallamos la señal x(n)?

Se halla la transformada inversa:

Donde

$$\boxed{x[n] = \frac{1}{2\pi j}\oint_l X(z)z^{n-1}dz}$$

Donde l es cualquier circunferencia cerrada con centro el origen y radio cualquier valor para el cual X(z) converge (la circunferencia l debe estar dentro de la región de convergencia)

Transformada inversa Z

$$x[n] = \frac{1}{2\pi j}\oint_l X(z)z^{n-1}dz$$

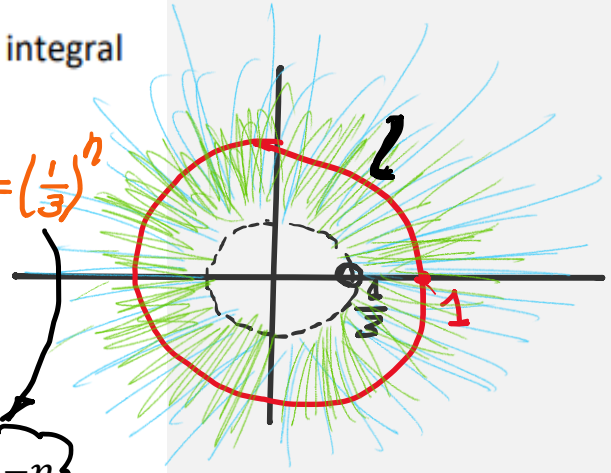
$\hookrightarrow \in ROC.$

Ejemplo

Sea la transformada Z, $\boxed{X(z) = \left(\frac{3z}{3z-1}\right) \quad \text{si} \quad \frac{1}{3} < |z|}$, apliquemos la En la trayectoria $\gamma : |z| = 1$ la integral

$\Rightarrow$ es: $x[n] = \frac{1}{2\pi j}\oint_\gamma \frac{z}{z-1/3} z^{n-1}dz$, $\rightarrow$ $x[n] = \frac{1}{2\pi j}\oint_l \frac{z^n}{z-\underbrace{\frac{1}{3}}_{z_0}}dz = f(z_0) = f(\frac{1}{3}) = (\frac{1}{3})^n$

$f(z) = z^n$



$$x[n] = f\left(\frac{1}{3}\right) = (\frac{1}{3})^n = 3^{-n}$$

Rpta.

Luego $x[n] = 3^{-n}$, $n \geq 0$, por tener dominio exterior a un disco.

* si ROC es el exterior de un círculo

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi j}\oint_C \frac{f(z)}{z-z_0}dz$$

C contiene a zo en interior y $f(z)$ es analitica en todo C y su interior.

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi j}\oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz$$

C contiene a zo en interior y $f(z)$ es analitica en todo C y su interior.

$$\oint_C f(z)dz = 0$$

C: *curva cerrada simplemente conexo*

$$\oint_C \frac{1}{(z-z_0)^n}dz = \begin{cases} 2\pi j & \text{si } n = 1 \\ 0 & \text{si } n \neq 1 \end{cases}$$

C es curva cerrada que contiene en su interior a zo

Transformada inversa Z

Ejemplo 1. Halle, mediante la definición, la señal x[n] con ROC: $|z| > |a|$,

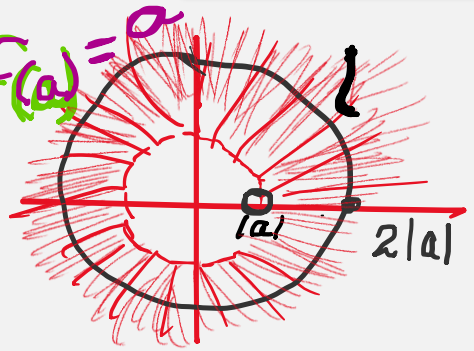
Siendo $\boldsymbol{X(z)} = \dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{1} - \boldsymbol{az^{-1}}}$

$\int \frac{z}{z-a} \cdot z^{n-1} \cdot dz$

$$x[n] = \frac{1}{2\pi j}\oint_l X(z)z^{n-1}dz$$

$$x[n] = \frac{1}{2\pi j}\oint_l X(z)z^{n-1}dz = \frac{1}{2\pi j}\oint_l \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{1} - \boldsymbol{az^{-1}}} \cdot z^{n-1}dz = \frac{1}{2\pi j}\oint_l \frac{z^n}{z-a}dz$$

$\frac{1}{z}$ $\quad f(z) = z^n \quad = f(a) = a^n \quad z_0$



Tomamos l como una circunferencia centro en el origen y radio mayor que $|a|$, tal que contiene en su interior al polo $z = a$. Luego, si consideramos que $f(z) = z^n$ entonces se puede usar la fórmula integral de Cauchy:

$$\boldsymbol{x[n]} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}\boldsymbol{\pi j}}\oint_l \frac{z^n}{z-a}dz = \boxed{\boldsymbol{f(a)} = \boldsymbol{a^n}} \rightarrow \boxed{\boldsymbol{x[n]} = \boldsymbol{a^n}, \textbf{ con } \boldsymbol{n} \geq \mathbf{0}} \textbf{ pues ROC: } |\boldsymbol{z}| > |\boldsymbol{a}|.$$

En general: $\underbrace{\boldsymbol{x[n]} = \boldsymbol{a^n u[n]}}_{-\infty < n < \infty}$, **ROC:** $|\boldsymbol{z}| > |\boldsymbol{a}|$.

$$x[n] = \frac{1}{2\pi j}\oint_l X(z)z^{n-1}dz$$

25	$a^n u[n]$	$\frac{1}{1-az^{-1}}$, ROC: $\lvert a\rvert < \lvert z\rvert$

$$\oint_C \frac{1}{(z-z_0)^n}dz = \begin{cases} 2\pi j & \text{si } n = 1 \\ 0 & \text{si } n \neq 1 \end{cases}$$

C es curva cerrada que contiene en su interior a zo

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi j}\oint_C \frac{f(z)}{z - z_0}dz$$

C contiene a zo en interior y $f(z)$ es analitica en todo C y su interior.

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi j}\oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz$$

C contiene a zo en interior y $f(z)$ es analitica en todo C y su interior.

$$\oint_C f(z)dz = 0$$

C: *curva cerrada simplemente conexo*

Transformada inversa Z

Transformada inversa Z para expresiones racionales

Anticausal ⇒

Causal ⇒

27	$-a^n u[-n-1]$	$\frac{-1}{1-az^{-1}}$, $ROC: \lvert z\rvert < \lvert a\rvert$
25	$a^n u[n]$	$\frac{1}{1-az^{-1}}$, $ROC: \lvert a\rvert < \lvert z\rvert$

Ejemplo 2. Halle la señal causal y bilateral que tiene como TZ a la función.

$$X(z) = \frac{3}{1-2z^{-1}} + \frac{4}{1-3z^{-1}}$$

Polos: $z=2$

$z=3$

Solución

Hallando la señal causal:

en Zona Roja

$|2z^{-1}|<1$

$\frac{2}{|z|}<1 \Rightarrow 2<|z|$

ROC de la 1ª

en Zona Verde

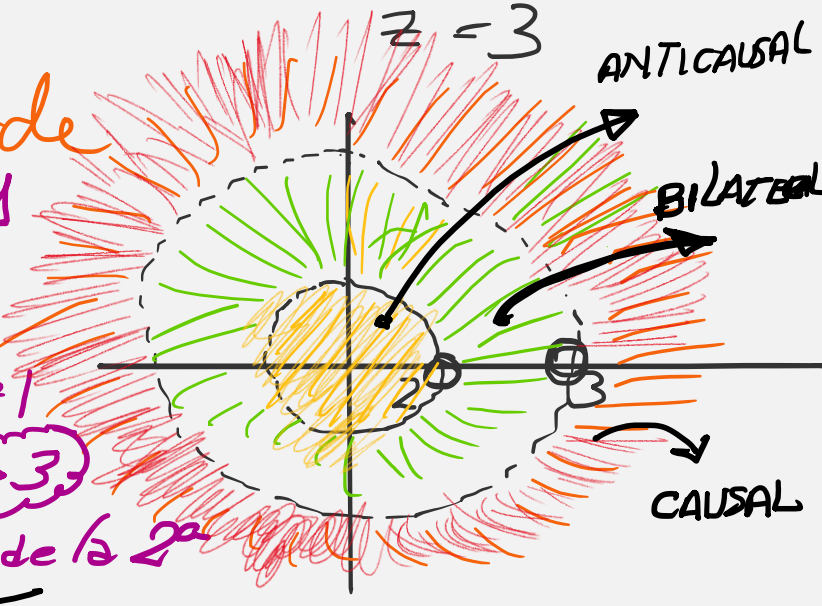
$|3z^{-1}|<1$

$\frac{3}{|z|}<1$

$3<|z|$

$|z|>3$

ROC de la 2ª



* ROC TOTAL: $|z|>3$ señal causal ⇒ Zona Roja

$$X(z) = 3\left(\frac{1}{1-2z^{-1}}\right) + 4\left(\frac{1}{1-3z^{-1}}\right) \Rightarrow \mathcal{Z}(x[n]) = 3\,\mathcal{Z}(2^n u[n]) + 4\,\mathcal{Z}(3^n u[n])$$

$$x[n] = 3\times 2^n u[n] + 4\times 3^n u[n] \quad . \quad ROC: |z|>3$$

❑ Transformada inversa Z para expresiones racionales

$$X(z) = \frac{z^{-1}}{z^{-2} - 5z^{-1} + 6}$$

z^{-1} -2
z^{-1} -3

Ejemplo 3. Dado $X(z)$, indique sus polos y ceros, y halle los diferentes tipos de señal para la transformada Z.

Solución

$$X(z) = \frac{z^{-1}}{z^{-2} - 5z^{-1} + 6} = \frac{z^{-1}}{(z^{-1} - 2)(z^{-1} - 3)} = \overbrace{-\frac{2}{z^{-1} - 2} + \frac{3}{z^{-1} - 3}}^{\text{fracc. parciales}}$$

$$Z(x[n]) \quad * \quad X(z) = \frac{2/2}{2/2 - z^{-1}/2} - \frac{3/3}{3/3 - z^{-1}/3} = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}.z^{-1}} - \frac{1}{1 - \frac{1}{3}.z^{-1}} \quad \ldots (*)$$

POLOS DE X(Z): $z = \frac{1}{2}, z = \frac{1}{3}$

CEROS: $z = 0$

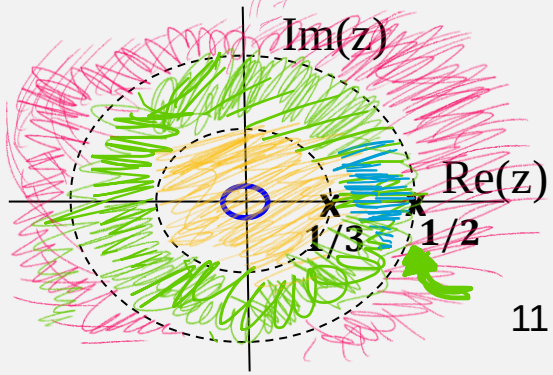
Polos: denominadores=0)

Si ROC: $|z| > \frac{1}{2}$: $Z(x[n]) = Z\left(\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]\right) - Z\left(\left(\frac{1}{3}\right)^n u[n]\right)$ ➔ $x[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] - \left(\frac{1}{3}\right)^n u[n]$ (CAUSAL)

Si ROC: $|z| < \frac{1}{3}$: $Z(x[n]) = Z\left(-\left(\frac{1}{2}\right)^n u[-n-1]\right) - Z\left(-\left(\frac{1}{3}\right)^n u[-n-1]\right)$ ➔ $x[n] = \left(-\left(\frac{1}{2}\right)^n + \left(\frac{1}{3}\right)^n\right)u[-n-1]$ (ANTI CAUSAL)

Si ROC: $\frac{1}{3} < |z| < \frac{1}{2}$: $Z(x[n]) = Z\left(-\left(\frac{1}{2}\right)^n u[-n-1]\right) - Z\left(\left(\frac{1}{3}\right)^n u[n]\right)$ ➔ $x[n] = -\left(\frac{1}{2}\right)^n u[-n-1] - \left(\frac{1}{3}\right)^n u[n]$ (BILATERAL)

25	$\mathcal{Z}(+a^n u[n])$	$= \frac{1}{1 - az^{-1}}$, $ROC: \lvert a\rvert < \lvert z\rvert$	Causal
27	$\mathcal{Z}(-a^n u[-n-1])$	$= \frac{+1}{1 - az^{-1}}$, $ROC: \lvert z\rvert < \lvert a\rvert$	ANTICAUSAL



Transformada inversa Z

Continuación ejemplo 3. Analizando para los 3 tipos de señal

$$X(z) = -\frac{1}{1-\frac{1}{3}z^{-1}} + \frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}$$

CAUSAL

$$x[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] - \left(\frac{1}{3}\right)^n u[n]$$

ROC: $|z| > \frac{1}{2}$

BILATERAL

$$x[n] = -\left(\frac{1}{2}\right)^n u[-n-1] - \left(\frac{1}{3}\right)^n u[n]$$

ROC: $\frac{1}{3} < |z| < \frac{1}{2}$

ANTICAUSAL

$$x[n] = \left(-\left(\frac{1}{2}\right)^n + \left(\frac{1}{3}\right)^n\right)u[-n-1]$$

ROC: $|z| < \frac{1}{3}$

Transformada z

$X(z) = Z(x[n])$ $\quad$ $Y(z) = Z(y[n])$

Propiedades

Sean x$[n]$ e y$[n]$ dos sucesiones y $X(z), Y(z)$ sus respectivas Transformada Z.

Linealidad

$$\mathrm{Z}[ax[n] + by[n]] = aX(z) + bY(z)$$

$$Z[a x_{[n]} + b y_{[n]}] = a\, Z[x_{[n]}] + b\, Z[y_{[n]}]$$

Demostracion:

$$\mathrm{Z}[ax[n] + by[n]] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (ax[n] + by[n])z^{-n} = a \sum_{n=-\infty}^{\infty} \boldsymbol{x[n]z^{-n}} + b \sum_{k=-\infty}^{\infty} \boldsymbol{y[n]z^{-n}}$$

$$\mathrm{Z}[ax[n] + by[n]] = aX(z) + bY(z)$$

Transformada z

se halla en la tabla o con alguna otra propiedad.

$Z(x[n]) = X(z)$

Propiedades

Sean x[n] e y[n] dos sucesiones y $X(z)$, $Y(z)$ sus respectivas Transformada Z.

Desplazamiento en el tiempo

$Z(x[n]) = X(z)$

$$Z[x[n-k]] = z^{-k}X(z) \quad , k \in \mathbb{Z}$$

sale de la Σ

$$Z(x[n]) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n} = X(z)$$

$$* \; Z[x[n-k]] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n-k]\, z^{-n+k-k} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n-k]\, z^{-(n-k)} z^{-k}$$

$$Z[x[n-k]] = z^{-k} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[\underbrace{n-k}_{p}]\, z^{-(\underbrace{n-k}_{p})} = z^{-k} \sum_{p=-\infty}^{\infty} x[p]\, z^{-p} \quad , \quad \text{siendo } \underset{\substack{\downarrow \\ -\infty}}{n} - \underset{\substack{\downarrow \\ -\infty}}{k} = p$$

$$Z[x[n-k]] = z^{-k}X(z)$$

Transformada Z

Ejemplo 4. Dada la secuencia discreta **causal** $\mathbf{x[n] = 5^n u[n]}$, halle la transformada de secuencia $y[n] = x[n-3] + x[n+2]$

$$Z(x[n-k]) = z^{-k}X(z)$$

$$Z(y[n]) = Z(x[n-3]) + Z(x[n+2])$$

$$Z(y[n]) = \boldsymbol{Z(x[n-3])} + \boldsymbol{Z(x[n+2])} \quad \ldots (*)$$

Pero se conoce que: $\boldsymbol{X(z)} = \boldsymbol{Z(x[n])} = Z(\mathbf{5^n u[n]}) = \frac{1}{1-5z^{-1}}$ ← FORMULA 25

$a = 5$ ROC: $|5| < |z|$

Luego por propiedad (2):

- $\boldsymbol{Z(x[n-3]) = z^{-3}X(z)} = z^{-3}.\frac{1}{1-5z^{-1}}$
- $\boldsymbol{Z(x[n+2]) = z^{+2}X(z)} = z^{+2}.\frac{1}{1-5z^{-1}}$

en $(*)$

ROC: $|z| > 5$

Finalmente:

$$\boldsymbol{Z(y[n]) = z^{-3}.\frac{1}{1-5z^{-1}} + z^{+2}.\frac{1}{1-5z^{-1}}}$$

CAUSAL

25	$Z(a^n u[n])$	$=$	$\frac{1}{1-az^{-1}}$, $ROC: \lvert a\rvert < \lvert z\rvert$
2	$Z(f[n-k])$	$=$	$z^{-k}F(z)$

ANTICAUSAL

27	$a^n u[-n-1]$	$\frac{-1}{1-az^{-1}}$	, $ROC: \lvert z\rvert < \lvert a\rvert$

Transformada z

$$X(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} x[n]\, z^{-n} = \sum_{-\infty}^{n=-1} \underbrace{x[n]}_{0}\, z^{-n} + \sum_{0}^{\infty} x[n]\, z^{-n}$$

Propiedades

En el caso de una **señal causal** $x[n]$:

$x[n] = 0$, si $n < 0$

$$\boldsymbol{X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x[n]\, z^{-n}}$$

Siendo $\boldsymbol{k > 0}$:

Desplazamiento en el tiempo para señal causal

$$Z(\boldsymbol{x[n+k]u[n]}) = z^k\left[X(z) - x[0] - x[1]z^{-1} - \ldots - x[k-1]z^{-(k-1)}\right] \quad , n \geq 0$$

$$Z(\boldsymbol{x[n-k]u[n]}) = z^{-k}X(z) \quad , n \geq k$$

Propiedades 17 y 18 de la tabla de transformada Z.

Transformada z

Propiedades Sea x[n] una sucesión y $X(z)$ su TZ con ROC=R.

Escalamiento en el dominio de tiempo: Modulación con a^n

Se tendrá

$Z(x[n]) = X(z)$

$$Z[a^n x[n]] = X\left(\frac{z}{a}\right) \quad , \quad ROC = |a|R$$

Escalamiento en el dominio de Z: Modulación con e^{jan}

$$Z\left[e^{jan} x[n]\right] = X\left(\frac{z}{e^{ja}}\right) \quad , \quad ROC = R$$

Inversión en el tiempo

$Z(x[n]) = X(z) \Rightarrow$

$$Z[x[-n]] = X\left(\frac{1}{z}\right) \quad , \quad ROC = 1/R$$

Transformada Z

Ejemplo 5. Dada la secuencia discreta **causal** $\mathbf{x[n] = 3^n u[n]}$, halle la transformada de secuencia

$\mathbf{y[n] = x[n-3]u[n]}$, usando:

$x[n-3] = 3^{n-3} \cdot u[n-3]$

a) La definición

$$\boldsymbol{Z}(\boldsymbol{y}[\boldsymbol{n}]) = Y(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \boldsymbol{y}[\boldsymbol{n}] z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \boldsymbol{x}[\boldsymbol{n}-\mathbf{3}]\boldsymbol{u}[\boldsymbol{n}] z^{-n}$$

$$Z(y[n]) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathbf{3}^{n-3}\boldsymbol{u}[\boldsymbol{n}-\mathbf{3}]\boldsymbol{u}[\boldsymbol{n}] z^{-n}$$

* $u[n] = 1$, si $n \geq 0$
* $u[n-3] = 1$, si $\underbrace{n-3 \geq 0}_{n \geq 3}$

La intersección $n \geq 3$

$u = 1$

$$Z(y[n]) = \sum_{n=3}^{\infty} 3^{n-3}(\mathbf{1})(\mathbf{1})\, z^{-n} = 3^{-3} \sum_{n=3}^{\infty} 3^n\, z^{-n} = 3^{-3} \underbrace{\sum_{n=3}^{\infty} \left(\frac{3}{z}\right)^n}_{\text{Serie geométrica}}$$

$3^3 \cdot 3^{-3}$

Serie geométrica: $\frac{1^0}{1-q}$

$$Z(y[n]) = 3^{-3} \cdot \frac{\mathbf{3^3\, z^{-3}}}{\mathbf{1 - 3z^{-1}}}$$

$$Z(y[n]) = \frac{z^{-3}}{1 - 3z^{-1}}$$

Transformada Z

Ejemplo 5. Dada la secuencia discreta **causal** $x[n] = 3^n u[n]$, halle la transformada de secuencia $y[n] = x[n-3]u[n]$ usando:

$X(z) = Z(x[n]) = Z(3^n u(n))$

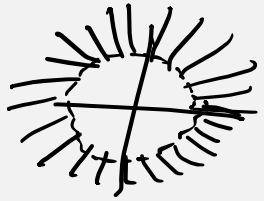
b) La tabla de transformada Z

$$Z(x[n-k]u[n]) = z^{-k}X(z)$$

$$Z(y[n]) = Z(x[n-3]u[n])$$

$$Z(y[n]) = z^{-3}X(z)$$

$$Z(y[n]) = z^{-3}Z(3^n u[n]) = z^{-3}.\frac{1}{1-3z^{-1}} = \frac{z^{-3}}{1-3z^{-1}}$$



ROC: $|z| > |3|$

$|z| > 3$

25	$Z(a^n u[n])$ =	$\frac{1}{1-az^{-1}}$, $ROC: \lvert z\rvert > \lvert a\rvert$

18	$f[n-k]u[n]$	$z^{-k}F(z)$, $k>0$
25	$a^n u[n]$	$\frac{1}{1-az^{-1}}$, $ROC: \lvert a\rvert < \lvert z\rvert$

Transformada Z

$x[n+2] = 3^{n+2} \cdot u[n+2]$

Ejemplo 6. Dada la secuencia discreta **causal** $x[n] = 3^n u[n]$, halle la transformada de secuencia $y[n] = x[n+2]u[n]$, usando:

a) La definición

$$Z(y[n]) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} y[n]z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n+2]u[n]z^{-n}$$

$$Z(y[n]) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} 3^{n+2}u[n+2]u[n]z^{-n}$$

$* \; u[n] = 1, \; si \; n \geq 0$

$* \; u[n+2] = 1, \; si \; n+2 \geq 0 \rightarrow n \geq -2$

intersec. $\boxed{n \geq 0}$

$$Z(y[n]) = \sum_{n=0}^{\infty} 3^{n+2}(1)(1)\, z^{-n} = 3^2 \sum_{n=0}^{\infty} 3^n\, z^{-n}$$

$$Z(y[n]) = 3^2 . \frac{1}{1-3z^{-1}}$$

$(3z^{-1})^n$

$$Z(y[n]) = \frac{9}{1-3z^{-1}}$$

Transformada Z

$X_{(z)} = Z(x_{(n)}) = Z(3^n u[n])$

Ejemplo 6. Dada la secuencia discreta **causal** $x[n] = 3^n u[n]$, halle la transformada de secuencia $y[n] = x[n+2]u[n]$, usando:

b) La tabla de transformada Z

$x[1].z^{-1}$

$$Z(x[n+k]u[n]) = z^k[X(z) - x[0] - x[1]z^{-1} - \ldots - x[k-1]z^{-(k-1)}]$$

$k=2$

$$* \quad Z(y[n]) = Z(x[n+2]u[n])$$

$$Z(y[n]) = z^2[X(z) - x[0] - x[1]z^{-1}]$$

$$Z(y[n]) = z^2[Z(3^n u[n]) - 3^0 u[0] - 3^1 u[1]z^{-1}]$$

$$Z(y[n]) = z^2[\frac{1}{1-3z^{-1}} - 1 - 3z^{-1}]$$

$$Z(y[n]) = z^2[\frac{1-(1-3z^{-1})(1+3z^{-1})}{1-3z^{-1}}]$$

$$Z(y[n]) = z^2[\frac{1-(1-9z^{-2})}{1-3z^{-1}}]$$

$$Z(y[n]) = \frac{9}{1-3z^{-1}}$$

25	$Z(a^n u[n])$	$=$	$\frac{1}{1-az^{-1}}$, $ROC: \lvert a\rvert < \lvert z\rvert$

Transformada Z

Ejemplo 7. Halle la transformada Z de $\mathbf{y[n] = 2^n u[n-1]}$, usando

a. Por definición

$$Z[a^n x[n]] = X\left(\frac{z}{a}\right)$$

$$Z(x[n-k]) = z^{-k}X(z)$$

a) Por definición:

$$Z(y[n]) = Y(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \boldsymbol{y[n]} z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathbf{2^n u[n-1]} z^{-n}$$

$$Z(y[n]) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^n(\mathbf{1}) z^{-n} = \frac{\mathbf{2z^{-1}}}{1-\mathbf{2z^{-1}}}$$

ROC: $|z| > 2$

* $u[n-1] = 1$, si $n-1 \geq 0$

$n \geq 1$

$|2z^{-1}| < 1$

$\frac{2}{|z|} < 1$

$2 < |z|$

$|z| > 2$

Transformada Z

Ejemplo 7. Halle la transformada Z de $y[n] = 2^n u[n-1]$, usando

b) Escalamiento en el tiempo

c) Desplazamiento en el tiempo

$k = 1$

$Z(x[n-k]) = z^{-k}X(z)$

b) $Z(\boldsymbol{y[n]}) = Z(\boldsymbol{2^n u[n-1]})$

se sabe que $\boldsymbol{Z(u[n])} = \frac{1}{1-z^{-1}}$ ROC: $|z| > 1$ ➔ $Z(u[\boldsymbol{n}-\boldsymbol{1}]) = \boldsymbol{z^{-1}}.\frac{1}{1-z^{-1}}$ ROC: $|\boldsymbol{z}| > \boldsymbol{1}$

Por Escalamiento: $Z(2^n.u[n-1]) = Y\left(\frac{z}{2}\right) = \left(\frac{z}{2}\right)^{-1}.\frac{1}{1-\left(\frac{z}{2}\right)^{-1}}$ ROC: $\left|\frac{z}{2}\right| > 1$ ➔ $Z(y[n]) = \frac{2z^{-1}}{1-2z^{-1}}$ ROC: $|z| > 2$

$Z[a^n x[n]] = X\left(\frac{z}{a}\right)$

c) $Z(y[n]) = Y(z) = Z(2^n u[n-1]) = 2Z(2^{n-1}u[n-1])$

se sabe que $Z(2^n u[n]) = \frac{1}{1-2z^{-1}}$ ROC: $|z| > 2$

Por Desplazamiento: $Z(2^{n-1}.u[n-1]) = z^{-1}.\frac{1}{1-2z^{-1}}$ ROC: $|z| > 2$

Luego: $Z(y[n]) = 2Z(2^{n-1}u[n-1]) = \frac{2.z^{-1}}{1-2z^{-1}}$ ROC: $|z| > 2$

25	$Z(a^n u[n])$	$=$	$\frac{1}{1-az^{-1}}$, ROC: $\lvert a\rvert < \lvert z\rvert$

24	$Z(u[n])$	$=$	$\frac{1}{(1-z^{-1})}$, ROC: $\lvert z\rvert > 1$

$Z(u[n-1])$

Transformada Z

Ejemplo 8. Halle, usando la propiedad de inversión, la transformada Z de:

a) $x[n] = u[-n]$

b) $x[n] = a^{-n}u[-n]$

$$Z[x[-n]] = X\left(\frac{1}{z}\right)$$

a) Se tiene que: $Z(u[n]) = \frac{1}{1-z^{-1}} = U(z)$, ROC: $|z| > 1$ ➔ $Z(u[-n]) = U\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{1}{1-(\frac{1}{z})^{-1}}$ ROC: $\left|\frac{1}{z}\right| > 1$

$Z(u[-n]) = U\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{1}{1-z}$ ROC: $|z| < 1$

b) Se tiene que: $Z(a^n u[n]) = \frac{1}{1-az^{-1}} = Y(z)$, ROC: $|z| > |a|$ ➔ $Z(a^{-n}u[-n]) = Y\left(\frac{1}{z}\right)$ ROC: $\left|\frac{1}{z}\right| > |a|$

$Z(a^{-n}u[-n]) = \frac{1}{1-a(\frac{1}{z})^{-1}} = \frac{1}{1-az}$ ROC: $|z| < \frac{1}{|a|}$

24	$u[n]$	$\frac{1}{(1-z^{-1})}$, $ROC: \lvert z\rvert > 1$
25	$a^n u[n]$	$\frac{1}{1-az^{-1}}$, $ROC: \lvert a\rvert < \lvert z\rvert$