Función periódica

Definición

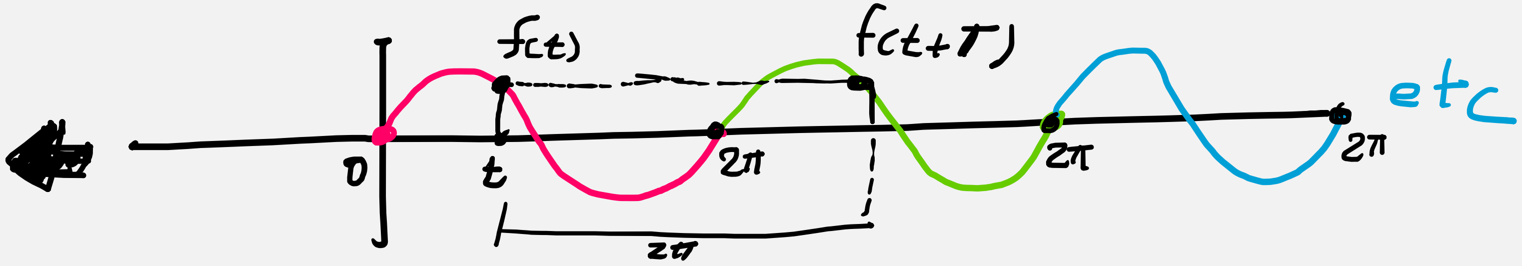
Una **Función** $f(t)$ es **periódica** con período T, si cumple la siguiente propiedad para todo valor de t.

$$f(t) = f(t+T)$$

A la constante mínima para la cual se cumple lo anterior se le llama el **periodo** de la función

Nota: $f(t) = f(t+kT)$, donde k=0,±1, ± 2, ±3,...

Aquí $T=2\pi$

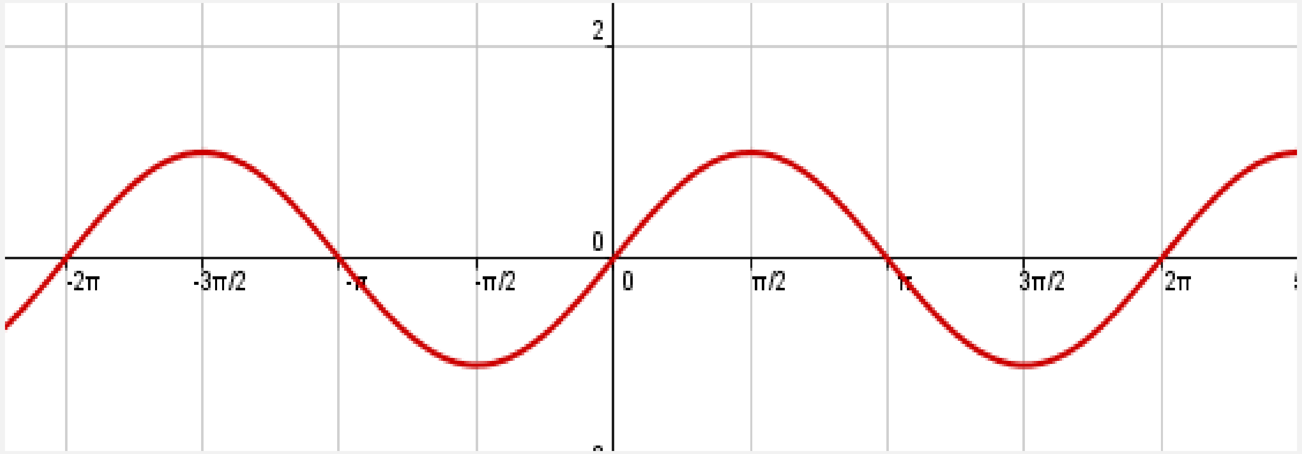


Función periódica

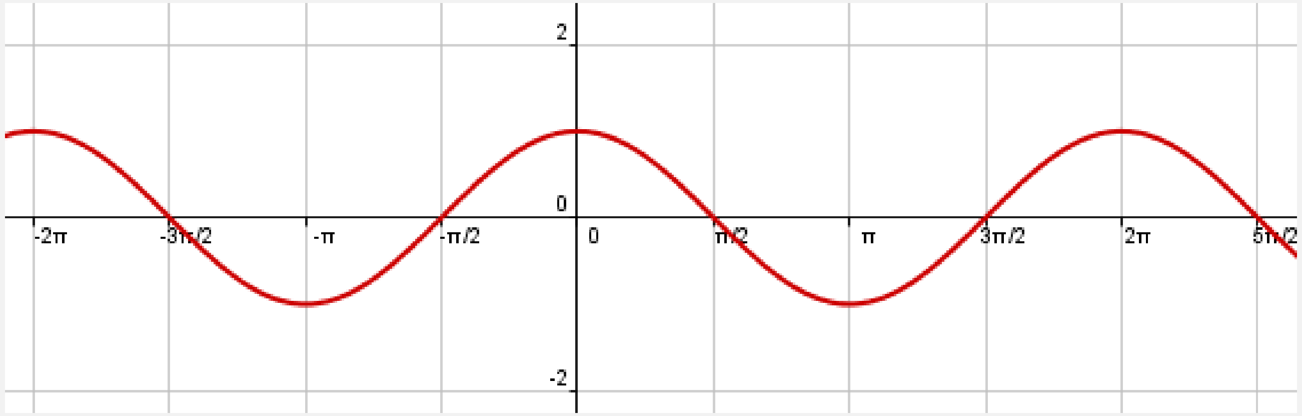
Ejemplo

El periodo T de la función sen(t) y cos(t) es 2π

$$f(t) = \text{sen}(t + 2k\pi)\,, k\epsilon\mathbb{Z}$$



$$f(t) = \cos(t + 2k\pi)\,, k\epsilon\mathbb{Z}$$



Función periódica

Suma o diferencia de funciones periódicas:

$$\boldsymbol{f(t) = f_1(t) + f_2(t) + f_3(t)}$$ ➔ **Periodo total=$MCM(T1, T2, T3)$**

Periodos: **T1** **T2** **T3**

Ejemplo

¿Cuál el periodo de la función $f(t) = \cos\left(\frac{t}{3}\right) + \cos\left(\frac{t}{4}\right)$?

Solución.- Si $f(t)$ es periódica se debe cumplir:

$$f(t+T) = \cos\left(\frac{t+T}{3}\right) + \cos\left(\frac{t+T}{4}\right) = \cos\left(\frac{t}{3} + \frac{T}{3}\right) + \cos\left(\frac{t}{4} + \frac{T}{4}\right)$$

Pero como se sabe $\cos(x + 2k\pi) = \cos(x)$ para cualquier entero k, entonces para que se cumpla la igualdad se requiere que:

$$T/3 = 2k_1\pi \;,\; T/4 = 2k_2\pi$$

Es decir $T = k_1 6\pi = k_2 8\pi$, donde k_1 y k_2 son enteros,

$$\Rightarrow \frac{k_1}{k_2} = \frac{4}{3}$$

El valor mínimo de T se obtiene con $k_1 = 4$, $k_2 = 3$, es decir:

$T = 24\pi$

$* P_{\cos(\frac{1}{3}t)} = \frac{2\pi}{\frac{1}{3}} = 6\pi$

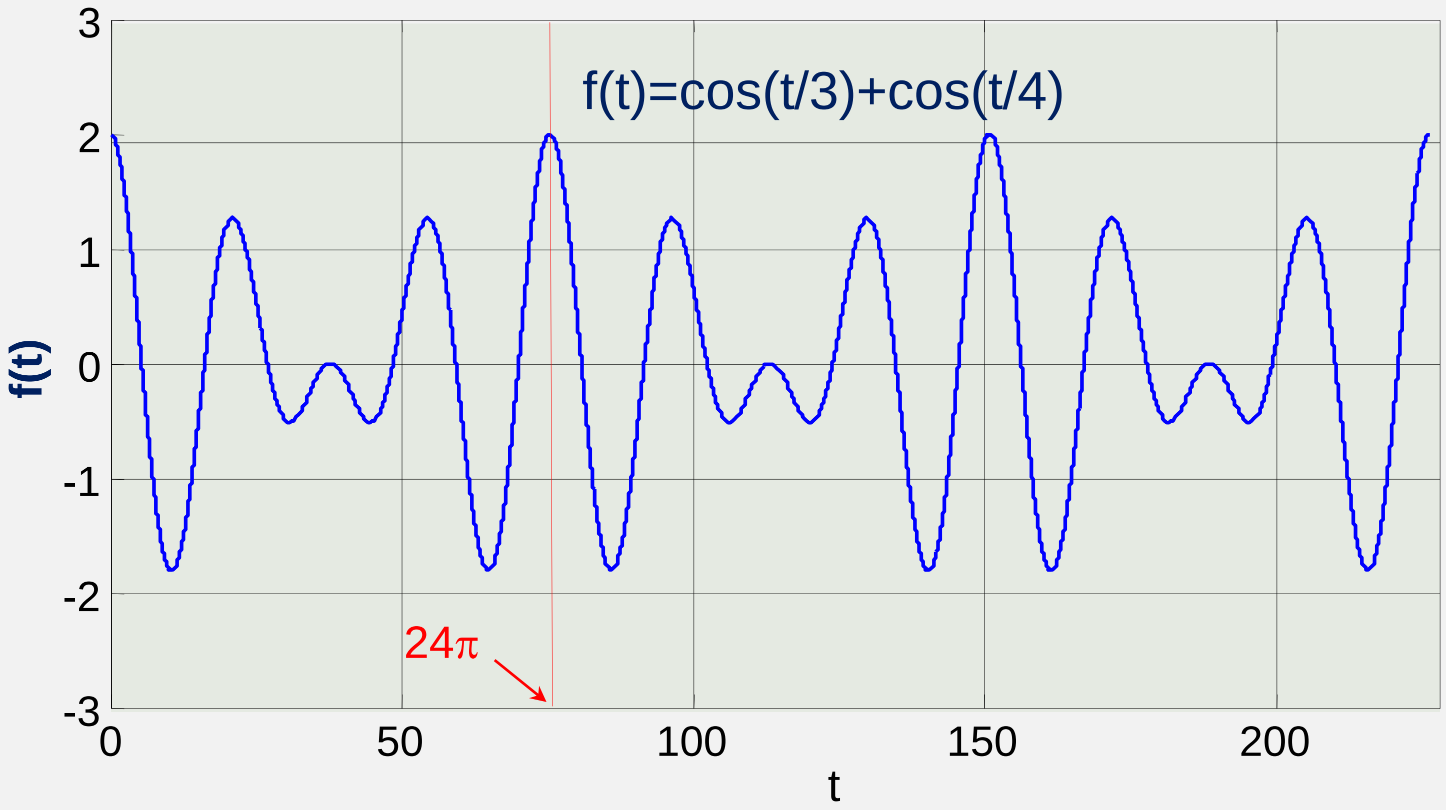
$* P_{\cos(\frac{1}{4}t)} = \frac{2\pi}{\frac{1}{4}} = 8\pi$

$P_{TOTAL} = MCM(6\pi, 8\pi) = 24\pi$

Función periódica

Ejemplo

Grafica de la función $f(t) = \cos\left(\frac{t}{3}\right) + \cos\left(\frac{t}{4}\right)$



Ortogonalidad de funciones en un intervalo

- Se dice que un conjunto de funciones $f_k(t)$ son **ortogonales** en el intervalo a < t < b si dos funciones cualesquiera $f_m(t), f_n(t)$ de dicho conjunto cumplen

$$\int_a^b \boldsymbol{f_m(t) f_n(t)}\, dt = \begin{cases} 0 & para\ m \neq n \\ r_n & para\ m = n \end{cases}$$

Ejemplo: Las funciones sen$t$ y cos$t$ son ortogonales en el intervalo $-\pi <$ t $< \pi$, ya que

$$\int_{-\pi}^{\pi} \text{sen}t \cdot \underbrace{\text{cos}t\ \text{d}t}_{du} = \underbrace{\frac{sen^2 t}{2}}_{\frac{u^2}{2}} \Bigg|_{-\pi}^{\pi} = 0$$

Ortogonalidad de funciones senoidales

- A continuación se muestra un conjunto de una infinidad de funciones ortogonales en el intervalo $-\frac{T}{2} < t < \frac{T}{2}$

$$1\,,\cos\omega_o t\,,\cos 2\omega_o t, \cos 3\omega_o t, \ldots.,\operatorname{sen}\omega_o t\,,\operatorname{sen} 2\omega_o t, \operatorname{sen} 3\omega_o t, \ldots.$$

(para cualquier valor de $\boldsymbol{\omega_o} = {}^{\boldsymbol{2\pi}}/_{\boldsymbol{T}}$).

Probemos con algunos pares de funciones dadas:

1.- $f_1(\mathrm{t}) = 1$ Vs. $f_2(\mathrm{t}) = \cos(\mathrm{m}\omega_0\mathrm{t})$:

$$\int_{-T/2}^{T/2} \cos(\mathrm{m}\omega_0\mathrm{t})\mathrm{dt} = \left.\frac{\operatorname{sen}(m\omega_o t)}{m\omega_o}\right|_{-T/2}^{T/2} = \frac{\operatorname{sen}(m\frac{\omega_o T}{2})}{m\omega_o} - \frac{\operatorname{sen}\left(m\left(-\frac{\omega_o T}{2}\right)\right)}{m\omega_o} = 0\ , \qquad m \neq 0$$

2.- $f_1(\mathrm{t}) = 1$ Vs. $f_2(\mathrm{t}) = \operatorname{sen}(\mathrm{m}\omega_0\mathrm{t})$:

$$\int_{-T/2}^{T/2} \operatorname{sen}(\mathrm{m}\omega_0\mathrm{t})\mathrm{dt} = \left.\frac{-\cos(m\omega_o t)}{m\omega_o}\right|_{-T/2}^{T/2} = \frac{-\cos(m\omega_o\frac{T}{2})}{m\omega_o} + \frac{\cos(m\omega_o(-\frac{T}{2}))}{m\omega_o} = 0, \qquad m \neq 0$$

Ortogonalidad de funciones senoidales

1 Vs. $\cos(\mathbf{m}\boldsymbol{\omega}_0\mathbf{t})$	$\int_{-T/2}^{T/2} \cos(\mathrm{m}\omega_0\mathrm{t})\mathrm{dt} = 0, \qquad m \neq 0$
1 Vs. $\mathrm{sen}(\mathbf{m}\boldsymbol{\omega}_0\mathbf{t})$	$\int_{-T/2}^{T/2} \mathrm{sen}(\mathrm{m}\omega_0\mathrm{t})\mathrm{dt} = 0, \qquad m \neq 0$
$\cos(\mathbf{m}\boldsymbol{\omega}_0\mathbf{t})$ **Vs.** $\cos(\mathbf{n}\boldsymbol{\omega}_0\mathbf{t})$	$\int_{-T/2}^{T/2} \cos(\mathrm{m}\omega_0\mathrm{t})\cos(\mathrm{n}\omega_0\mathrm{t})\mathrm{dt} = \begin{cases} 0 & para\ m \neq n \\ T/2 & para\ m = n \neq 0 \end{cases}$
$\mathrm{sen}(\mathbf{m}\boldsymbol{\omega}_0\mathbf{t})$ **Vs.** $\mathrm{sen}(\mathbf{n}\boldsymbol{\omega}_0\mathbf{t})$	$\int_{-T/2}^{T/2} \mathrm{sen}(\mathrm{m}\omega_0\mathrm{t})\mathrm{sen}(\mathrm{n}\omega_0\mathrm{t})\mathrm{dt} = \begin{cases} 0 & para\ m \neq n \\ T/2 & para\ m = n \neq 0 \end{cases}$
$\mathrm{sen}(\mathbf{m}\boldsymbol{\omega}_0\mathbf{t})\ \boldsymbol{Vs}.\ \cos(\mathbf{n}\boldsymbol{\omega}_0\mathbf{t})$	$\int_{-T/2}^{T/2} \mathrm{sen}(\mathrm{m}\omega_0\mathrm{t})\cos(\mathrm{n}\omega_0\mathrm{t})\mathrm{dt} = 0, \qquad \text{para cualquier } m, n$

Serie Trigonométrica de Fourier

- Algunas funciones periódicas f(t) de periodo T pueden expresarse por la siguiente serie, llamada **Serie Trigonométrica de Fourier**

$$f(t) = \frac{1}{2}a_0 + (a_1\cos(\omega_0 t) + a_2\cos(2\omega_0 t) + \ldots) + (b_1 sen(\omega_0 t) + b_2 sen(2\omega_0 t) + \ldots)$$

Donde $\omega_0 = 2\pi/T$.

T: *Periodo*
wo: *frecuencia*

Es decir,

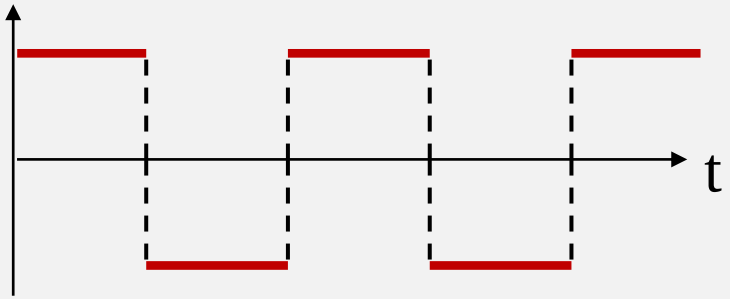
$$f(t) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}[a_n\cos(n\omega_0 t) + b_n sen(n\omega_0 t)]$$

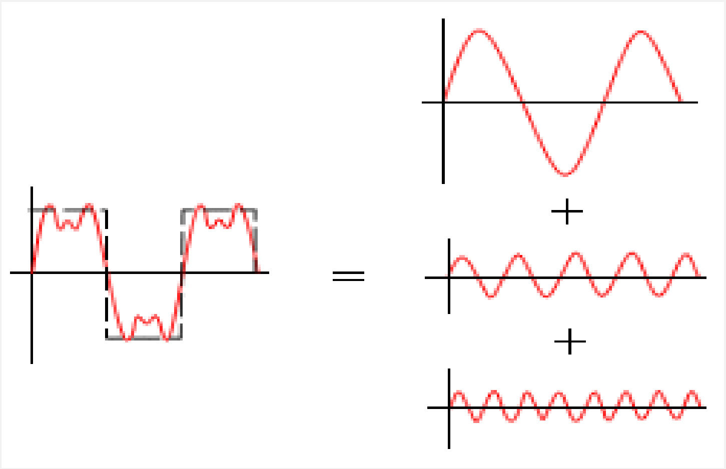
$a_0 = ?$ $a_n = ?$ $b_n = ??$

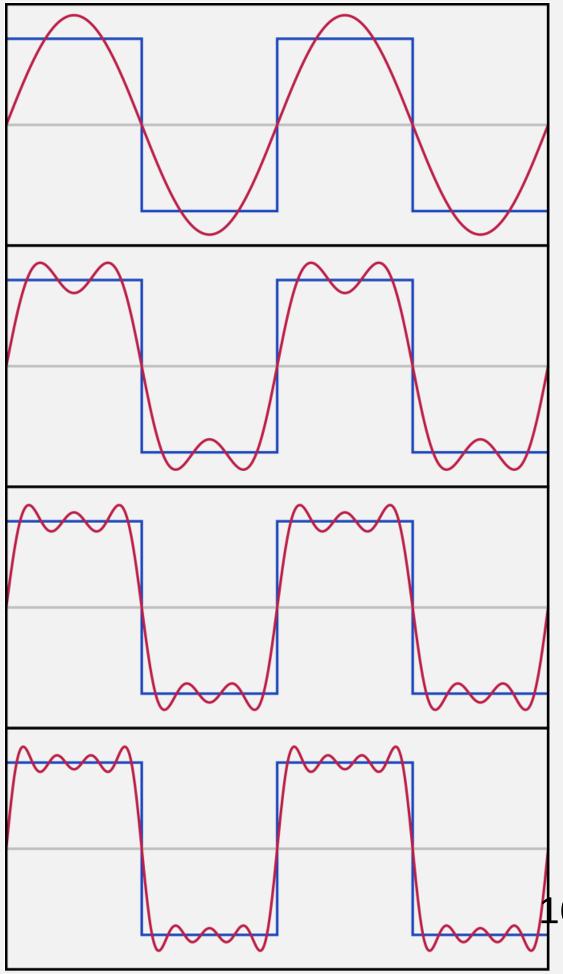
Serie Trigonométrica de Fourier

$$f(t) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}[a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n sen(n\omega_0 t)]$$

¿Cómo se modela la señal de tren de pulsos con la serie de Fourier?







Coeficientes de la Serie de Fourier

- Dada una función periódica f(t) ¿cómo se obtiene su serie de Fourier?

$$f(t) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}[a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n sen(n\omega_0 t)]$$

El problema se resuelve si podemos calcular los coeficientes a_0, a_1, a_2,..., b_1, b_2,...

Esto se puede resolver considerando la ortogonalidad de las funciones seno y coseno comentada anteriormente.

$$\int_{-T/2}^{T/2} \mathrm{sen}(\mathrm{m}\omega_0 \mathrm{t})\mathrm{dt} = 0, m \neq 0$$

$$\int_{-T/2}^{T/2} \cos(\mathrm{m}\omega_0 \mathrm{t})\mathrm{dt} = 0, m \neq 0$$

Ejemplo: Hallando el coeficiente a_0

Serie Trigonométrica de Fourier

- Algunas funciones periódicas f(t) de periodo T pueden expresarse por la siguiente serie, llamada **Serie Trigonométrica de Fourier**

$$f(t) = \frac{1}{2}a_0 + (a_1\cos(\omega_0 t) + a_2\cos(2\omega_0 t) + \ldots) + (b_1 sen(\omega_0 t) + b_2 sen(2\omega_0 t) + \ldots)$$

Donde $\omega_0 = 2\pi/T$.

$T: Periodo$

$wo: frecuencia$

Es decir,

$$f(t) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}[a_n\cos(n\omega_0 t) + b_n sen(n\omega_0 t)]$$

$a_0 = ?$ $a_n = ?$ $b_n = ??$

conociendo f(t) y el periodo T

Coeficientes de la Serie de Fourier

- De esta manera tenemos:

$$\boxed{a_0 = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t)dt}$$

$\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$

- **Multiplicando ambos miembros por cos($\boldsymbol{n\omega_0 t}$)** e integrando de –T/2 a T/2, obtenemos:

$$\boxed{a_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t)\cos(n\omega_0 t)dt \quad n = 1,2,3,\ldots}$$

$\Rightarrow$ Coeficientes de cosenos

- Similarmente, multiplicando por $sen(n\omega_0 t)$ e integrando de –T/2 a T/2, obtenemos:

$$\boxed{b_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t)sen(n\omega_0 t)dt \quad n = 1,2,3,\ldots}$$

$\Rightarrow$ Coeficientes de senos

Coeficientes de la Serie de Fourier

- **Observación:**
  - El intervalo de integración no necesita ser simétrico respecto al origen.
  - Como la ortogonalidad de las funciones seno y coseno no sólo se da en el intervalo de –T/2 a T/2, sino en cualquier intervalo que cubra un periodo completo. Por ejemplo:

De $\boldsymbol{t_0}$ a $\boldsymbol{t_0 + T}$, con t_0 arbitrario

Las fórmulas para calcular los coeficientes de la serie trigonométrica de Fourier pueden calcularse en cualquier intervalo que mida T.

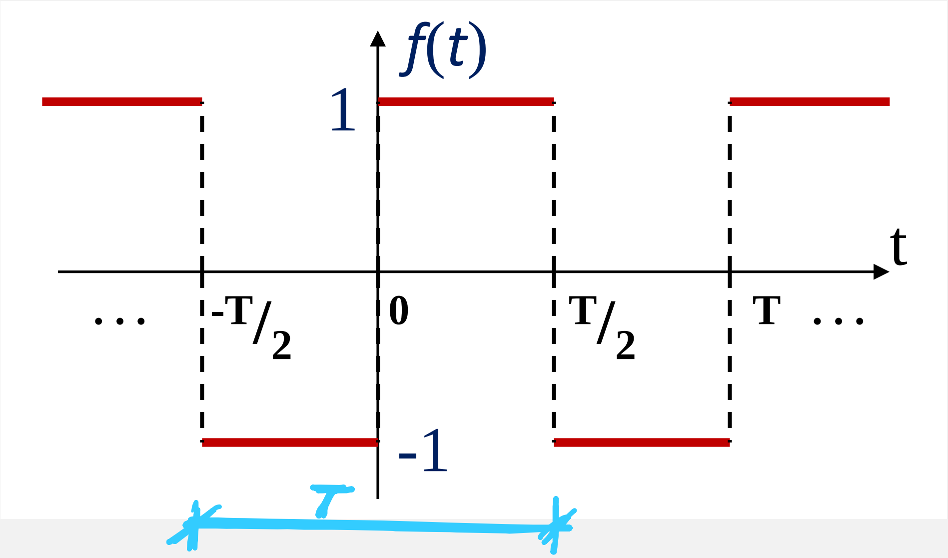
$$a_0 = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\,dt = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}+\alpha}^{\frac{T}{2}+\alpha} f(t)\,dt = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{4}}^{\frac{3T}{4}} f(t)\,dt$$

¡etc!

$\frac{T}{2} - \left(-\frac{T}{2}\right) = T$ $\qquad$ $\left(\frac{T}{2}+\alpha\right) - \left(-\frac{T}{2}+\alpha\right) = T$ $\qquad$ $3\frac{T}{4} - \left(-\frac{T}{4}\right) = T$

Representación de función periódica por Serie de Fourier

Ejemplo: Encontrar la Serie de Fourier para la siguiente función de periodo T:



Solución: La expresión para f(t) en $^{-T}/_2 < t < ^{T}/_2$ es:

$$f(t) = \begin{cases} -1 \quad para -\dfrac{T}{2} < t < 0 \\ 1 \qquad para\ 0 < t < \dfrac{T}{2} \end{cases}$$

Representación de función periódica por Serie de Fourier

$$f(t) = \begin{cases} -1 & para\ -\frac{T}{2} < t < 0 \\ 1 & para\ 0 < t < \frac{T}{2} \end{cases}$$

- Calculando coeficiente a_0:

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t)dt$$

$$a_0 = \frac{2}{T}\left[\int_{-T/2}^{0} -1.dt + \int_{0}^{T/2} 1.dt \right] = \frac{2}{T}\left[-t \Big/_{-\frac{T}{2}}^{0} + t \Big/_{0}^{\frac{T}{2}} \right]$$

$$a_0 = \frac{2}{T}\left[-(0 - -\frac{T}{2}) + (\frac{T}{2} - 0) \right] \Rightarrow a_0 = 0$$

$$a_0 = 0$$

Representación de función periódica por Serie de Fourier

$*\int \cos(\alpha t)dt = \frac{\operatorname{sen}(\alpha t)}{\alpha}$

$*\int \operatorname{sen}(\alpha t)\,dt = \frac{-\cos(\alpha t)}{\alpha}$

- Calculando coeficiente a_n:

$$a_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\cos(n\omega_0 t)dt$$

$$f(t) = \begin{cases} -1 & para\ -\frac{T}{2} < t < 0 \\ 1 & para\ 0 < t < \frac{T}{2} \end{cases}$$

$*$ NOTA

$\Rightarrow$ • $\operatorname{Sen}(n\pi) = 0$

• $\cos(n\pi) = (-1)^n$

$$\left(\omega_0 = \frac{2\pi}{T}\right) \Rightarrow \boxed{\omega_0 T = 2\pi}$$

$$a_n = \frac{2}{T}\left[\int_{-\frac{T}{2}}^{0} -1.\ \cos(n\omega_0 t)\,dt + \int_0^{T/2} 1.\ \cos(n\omega_0 t)\,dt\right]$$

$$a_n = \frac{2}{T}\left[-\frac{\operatorname{sen}(n\omega_0 t)}{n\omega_0}\Bigg|_{-T/2}^{0} + \frac{\operatorname{sen}(n\omega_0 t)}{n\omega_0}\Bigg|_{0}^{T/2}\right]$$

$$a_n = \frac{2}{Tn\omega_0}\left[-(\cancel{\operatorname{Sen} 0}^{\,0} - \operatorname{Sen}(-n\omega_0 \tfrac{T}{2})) + (\operatorname{Sen}(n\omega_0 \tfrac{T}{2}) - \overbrace{\operatorname{Sen} 0}^{0})\right]$$

$$a_n = \frac{2}{2\pi n}\left[-\cancel{\operatorname{sen}(n\pi)}^{\,0} + \cancel{\operatorname{sen}(n\pi)}^{\,0}\right] \Rightarrow a_n = 0$$

$$a_n = 0$$

Representación de función periódica por Serie de Fourier

- Calculando coeficiente b_n:

$$f(t) = \begin{cases} -1 & para\ -\frac{T}{2} < t < 0 \\ 1 & para\ 0 < t < \frac{T}{2} \end{cases}$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)sen(n\omega_0 t)dt$$

$$b_n = \frac{2}{T}\left[\int_{-\frac{T}{2}}^{0} -1.\,Sen(n\omega_0 t)\,dt + \int_{0}^{\frac{T}{2}} 1.\,Sen(n\omega_0 t)\,dt\right]$$

$$b_n = \frac{2}{T}\left[-\frac{-Cos(n\omega_0 t)}{n\omega_0}\Big|_{-\frac{T}{2}}^{0} + \frac{-Cos(n\omega_0 t)}{n\omega_0}\Big|_{0}^{\frac{T}{2}}\right]$$

$$b_n = \frac{2}{T.n\omega_0}\left[\underbrace{Cos 0}_{1} - Cos(-n\omega_0 \tfrac{T}{2}) - Cos(n\omega_0 \tfrac{T}{2}) + \underbrace{Cos\,0}_{1}\right]$$

$$b_n = \frac{\cancel{2}}{\cancel{2}n\pi}\left[2 - 2\underbrace{Cos(\pi n)}_{(-1)^n}\right]$$

$$b_n = \frac{2}{n\pi}\left[1 - (-1)^n\right]$$

Nota:

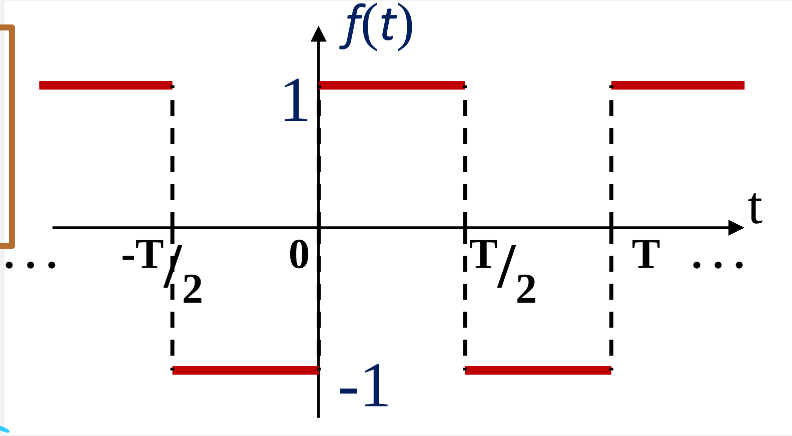
- $Sen(n\pi) = 0$
- $\Rightarrow$ $Cos(n\pi) = (-1)^n$

$$b_n = \begin{cases} 0 & ,n\ \text{par} \\ \frac{4}{n\pi} & ,n\ \text{impar} \end{cases} \quad \text{o} \quad b_n = \frac{2}{n\pi}(1-(-1)^n), n \in Z$$

Representación de función periódica por Serie de Fourier

- Finalmente la serie de Fourier

$$\boxed{f(t) = \frac{1}{2}\cancel{a_0}^{\,0} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\cancel{a_n}^{\,0}\cos(n\omega_0 t) + b_n sen(n\omega_0 t)\right]}$$



queda:

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{2(1-(-1)^n)}{n\pi}\,\mathrm{sen}(n\omega_o t)\right]$$

LA SERIE DE FOURIER.

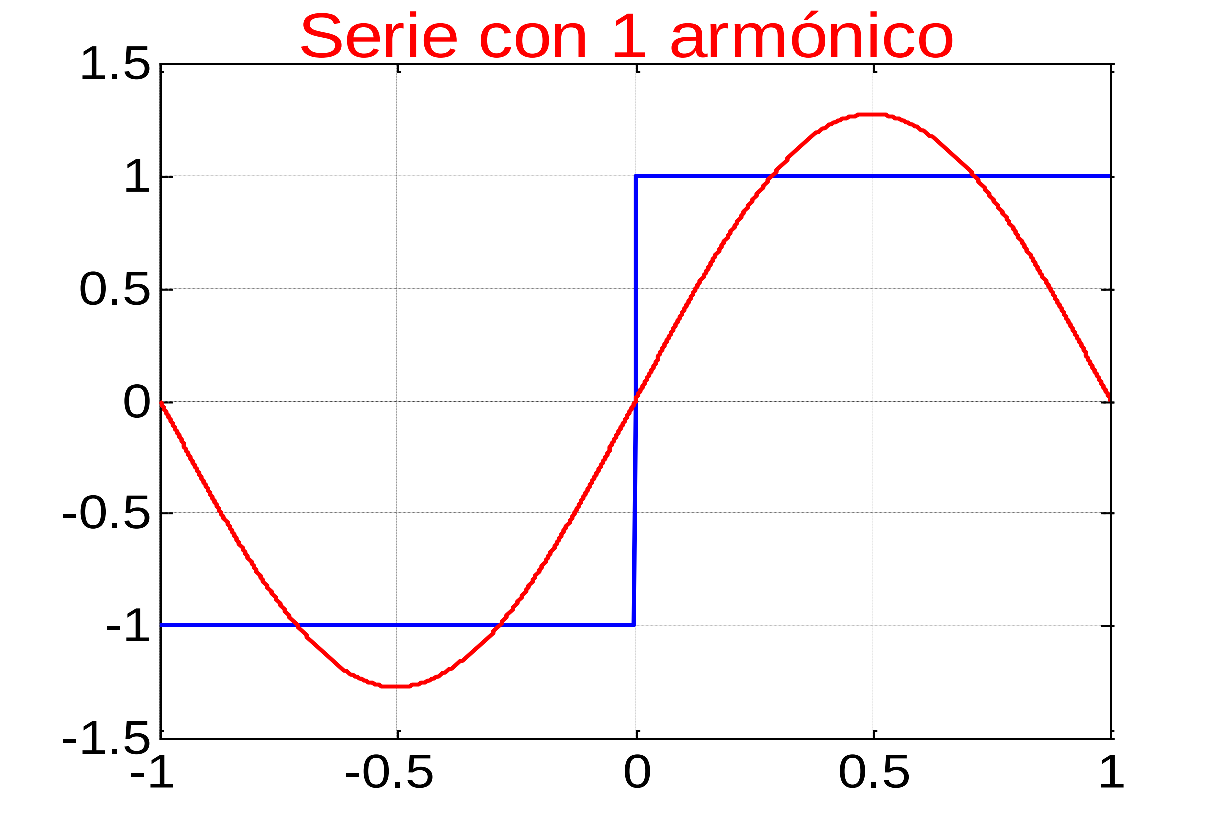
$$f(t) = \frac{4}{\pi}\left[sen(\omega_0 t) + \frac{1}{3}sen(3\omega_0 t) + \frac{1}{5}sen(5\omega_0 t) + \ldots\right]$$

En la siguiente figura se muestran: **la primera armónica** o componente fundamental (n=1) así como la suma parcial de los primeros siete términos de la serie para $\omega_0=\pi$, es decir, T=2:

Representación de función periódica por Serie de Fourier

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{2(1-(-1)^2)}{n\pi}\,\mathrm{sen}(n\pi t)\right] = \frac{4}{\pi}\left[sen(\pi t) + 0 + \frac{1}{3}sen(3\pi t) + 0 + \frac{1}{5}sen(5\pi t) + 0 + \frac{1}{7}sen(7\pi t) + \ldots\right]$$

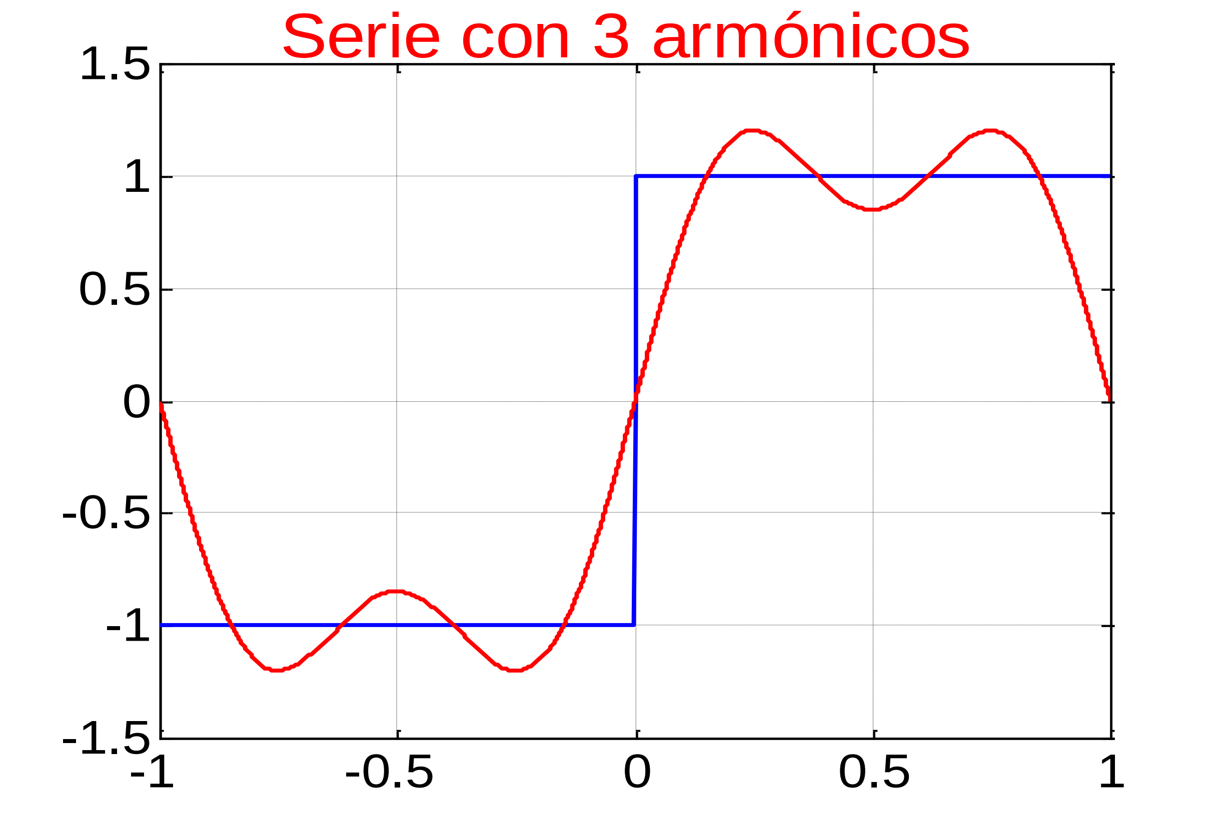
Para $n = 1$: $f(t) = \frac{4}{\pi}[sen(\pi t)]$ $\quad (componente\ fundamental)$



Representación de función periódica por Serie de Fourier

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{2(1-(-1)^2)}{n\pi}\operatorname{sen}(n\pi t)\right] = \frac{4}{\pi}\left[sen(\pi t) + 0 + \frac{1}{3}sen(3\pi t) + 0 + \frac{1}{5}sen(5\pi t) + 0 + \frac{1}{7}sen(7\pi t) + \ldots\right]$$

Para $n = \{1,2,3\}$: $f(t) = \frac{4}{\pi}\left[sen(\pi t) + \frac{1}{3}sen(3\pi t)\right]$

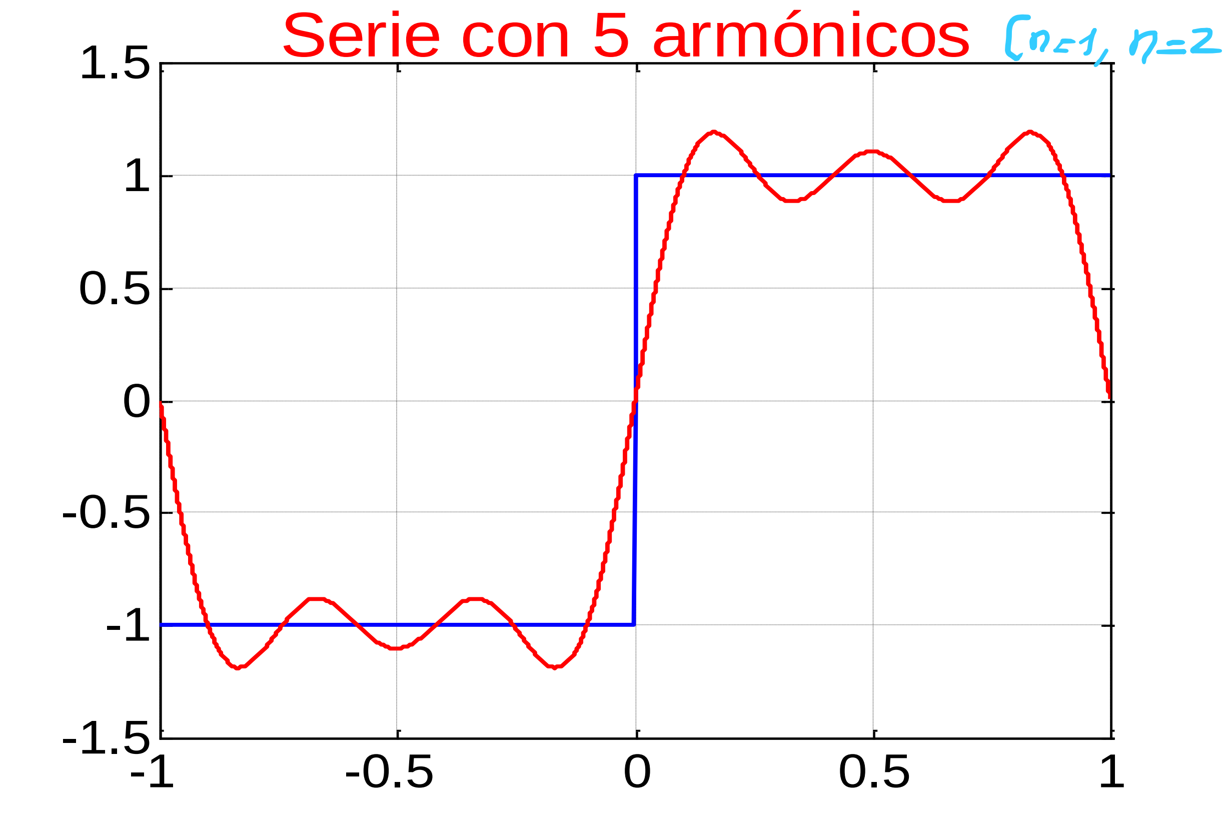


Representación de función periódica por Serie de Fourier

$$f(t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{2(1-(-1)^2)}{n\pi}\text{sen}(n\pi t)\right]=\frac{4}{\pi}\left[sen(\pi t)+0+\frac{1}{3}sen(3\pi t)+0+\frac{1}{5}sen(5\pi t)+0+\frac{1}{7}sen(7\pi t)+\ldots\right]$$

n=1 n=3 n=5

$$\text{Para } n=\{1,2,3,4,5\}\text{: } f(t)=\frac{4}{\pi}\left[sen(\pi t)+\frac{1}{3}sen(3\pi t)+\frac{1}{5}sen(5\pi t)\right]$$

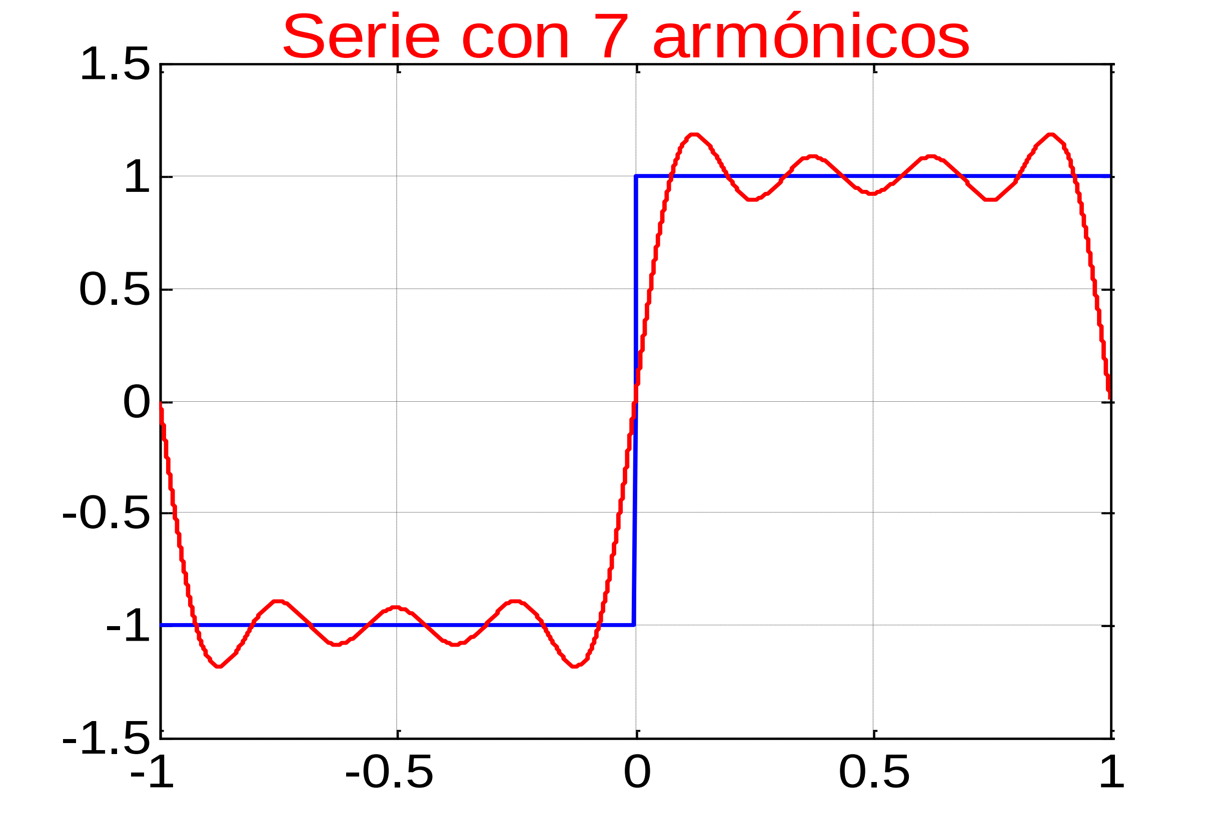


[n=1, n=2, n=3, n=4, n=5.

Representación de función periódica por Serie de Fourier

$$f(t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{2(1-(-1)^2)}{n\pi}\operatorname{sen}(n\pi t)\right]=\frac{4}{\pi}\left[sen(\pi t)+0+\frac{1}{3}sen(3\pi t)+0+\frac{1}{5}sen(5\pi t)+0+\frac{1}{7}sen(7\pi t)+\dots\right]$$

$$\text{Para } n=\{1,2,3,4,5,6,7\}\text{: } f(t)=\frac{4}{\pi}\left[sen(\pi t)+\frac{1}{3}sen(3\pi t)+\frac{1}{5}sen(5\pi t)+\frac{1}{7}sen(7\pi t)\right]$$



Representación de función periódica por Serie de Fourier

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{2(1-(-1)^2)}{n\pi} \text{sen}(n\pi t) \right] = \frac{4}{\pi} \left[sen(\pi t) + \frac{1}{3} sen(3\pi t) + \frac{1}{5} sen(5\pi t) + \frac{1}{7} sen(7\pi t) + \ \ldots \right]$$