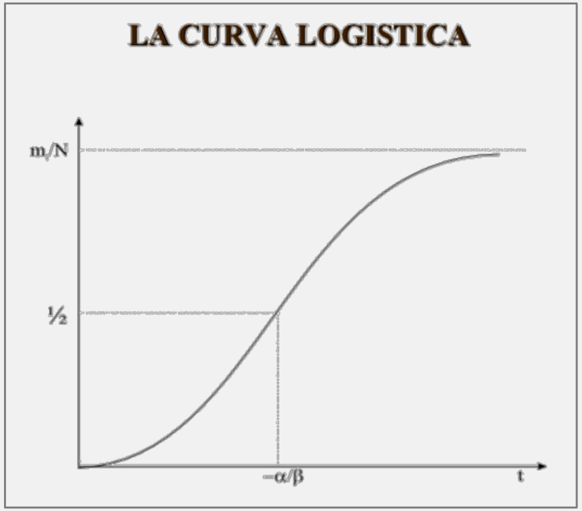
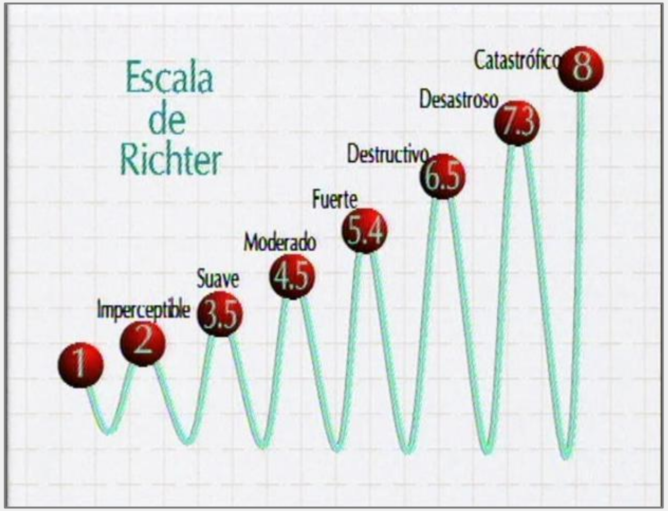
Motivación

Un gran número de procesos que se presentan en la naturaleza, por ejemplo, el crecimiento poblacional, la desintegración radiactiva, la difusión de calor y otros muchos, se pueden modelar usando funciones exponenciales. Se usan funciones logarítmicas en modelos para la intensidad de sonidos, la intensidad de terremotos y otros numerosos fenómenos.





1. Una enfermedad infecciosa empieza a propagarse en una pequeña ciudad de 10000 habitantes. Después de t días, el número de personas que han sucumbido al virus está modelado por la función

$$v(t) = \frac{10000}{5 + 1245e^{-0,97t}}$$

a. ¿Cuántas personas infectadas hay inicialmente y cuántas después de cinco días?

b. ¿Después de cuántos días hay 1563 infectados?

Solución:

a) t: inicial

$t=0$

$$v(0) = \frac{10000}{5+1245e^{-0,97.0}}$$

$$v(0) = 8$$

Respuesta:

Hay 8 personas infectadas inicialmente.

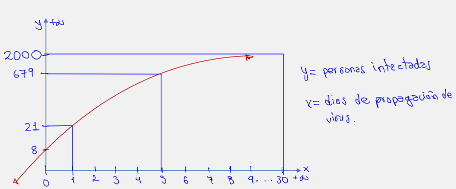
$t=5$

$$v(5) = \frac{10000}{5+1245e^{-0,97\times 5}}$$

$$v(5) = 678,134$$

$$v(5) \cong 679$$

despoes de 5 días hay 679 infectados.



b) $$1563 = \frac{10000}{5+1245e^{-0,97t}}$$

$$5+1245e^{-0,97t} = \frac{10000}{1563}$$

$$e^{-0,97t} = \frac{1}{1245}\left(\frac{10000}{1563} - 5\right)$$

$$-0,97t = \ln\left(\frac{437}{389187}\right)$$

$$t = \frac{-1}{0,97}\ln\left(\frac{437}{389187}\right) = 7,0019$$

Despoés de 7 días, hay 1563 infectados

2. En una olla a presión se hierve agua y se empieza a enfriar de acuerdo con la Ley de enfriamiento de Newton, de modo que la temperatura en el tiempo t está dada por: $T(t) = 30 + 60\,e^{-0{,}0673t}$ donde t se mide en minutos y T se mide en °C.

   a. ¿Cuál es la temperatura inicial del agua y a los 22 minutos?
   b. ¿Después de cuánto tiempo la temperatura del agua será de 40 °C?

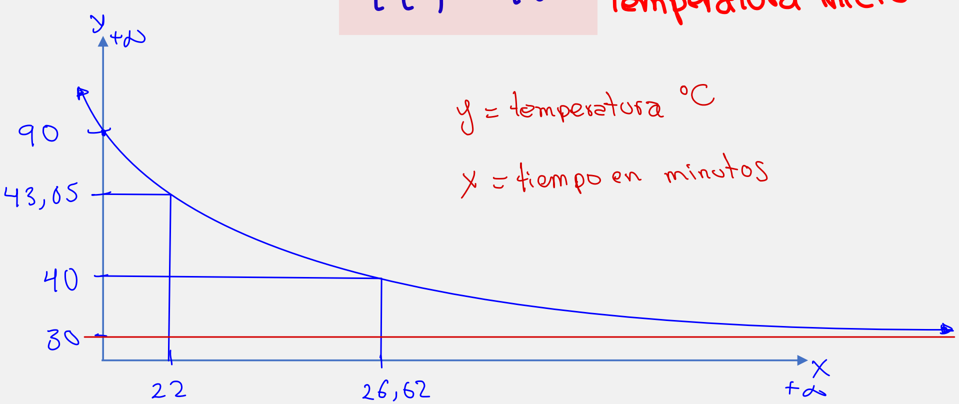
Solución:

a) $t = 22 \rightarrow T(22) = 30 + 60e^{-0{,}0673(22)}$

$T(22) = 43{,}65$

$t = 0 \longrightarrow T(0) = 30 + 60e^{-0{,}0673(0)}$

$\boxed{T(0) = 90}$ Temperatura inicial



b) $T(t) = 40$

$30 + 60e^{-0{,}0673.t} = 40$

$e^{-0{,}0673.t} = \frac{1}{6}$

$-0{,}0673t = \ln(1/6)$

$t = \frac{-1}{0{,}0673} \times \ln(1/6)$

$t = 26{,}62234$

La temperatora del agoa sera 40° a los 26,62 minitos aproximadamente.

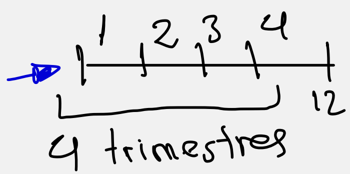
3. Se sabe que el monto acumulado A de invertir un capital P a una tasa de interés anual r, capitalizable k veces por año y durante un periodo de t años. Se calcula mediante:

$$A(t) = P\left(1 + \frac{r}{k}\right)^{kt}$$

Nota: Si la capitalización es mensual $k = 12$, bimestral $k = 6$, trimestral $k = 4$, semestral $k = 2$,...

a. Si el Sr. Jhonny invierte \$ 1000 a una tasa de interés anual de 6 %. ¿Cuál es el saldo que obtiene después de 10 años si el interés se capitaliza trimestralmente?

Sol: $P = 1000$
$r = 0,06$
$t = 10$
$k = 4$



$$A = 1000\left(1 + \frac{0,06}{4}\right)^{4\times 10}$$

$$\boxed{A = 1814,02}$$

El saldo es 1814,02 \$ aproxima-

b. Si el Sr. José recibió \$ 1849,39 después de t años de haber invertido \$1500 a una tasa de interés anual del 7%, capitalizable mensualmente. ¿En cuántos años obtuvo dicho monto?

Sol: $P = 1500$
$A = 1849,39 \rightarrow t = ¿?$
$r = 0,07$
$k = 12$

$$\rightarrow 1844,39 = 1500\left(1 + \frac{0,07}{12}\right)^{12\times t}$$

$t = 3,000012541$
$t = 3$

Rpta: al cabo de 3 años tiene 1849,39 \$ o dolares.

4. La longitud f (en centímetros) de las truchas de t meses de edad en la "etapa juvenil" se puede aproximar mediante una función de crecimiento de la forma:

$$f(t) = 90(1 - 0{,}956e^{-0{,}15t})$$

a. Estime la longitud de la trucha al momento de iniciar esta etapa.

b. En el mercado internacional la trucha se compra cuando tiene una longitud mínima de 42,7cm, estime cuanto tiempo debe pasar para poder ofertar un lote en el mercado internacional.

Sol:

$t=0$ (time start)

$f(0) = 90(1 - 0{,}956e^{-0{,}15(0)})$

$f(0) = 3{,}96$ cm

a) la longitud inicial es de 3,96 cm

b) $f_{(t)} = 42{,}7$cm

$90(1 - 0{,}956e^{-0{,}15t}) = 42{,}7$

$1 - 0{,}956e^{-0{,}15t} = \frac{427}{900}$

$-0{,}956e^{-0{,}15t} = \left(-1 + \frac{427}{900}\right)$

$+0{,}956e^{-0{,}15t} = +\frac{473}{900}$

$e^{-0{,}15t} = \frac{1}{0{,}956} \times \frac{473}{900}$

$-0{,}15t = \ln\left(\frac{2365}{4302}\right)$

$t = 3{,}9886$ meses

Rpta: Al cabo de 4 meses aproximadamente

6. Dadas las funciones f y g con reglas de correspondencia:

a. $f(x) = -\log_2(x+2) - 3$

b. $g\ x = \begin{cases} -2^{x+1} + 3 & ; x \leq 1 \\ \ln(x-1) + 4 & ; x > 1 \end{cases}$

Trace su gráfica y determine analíticamente los puntos de corte con los ejes coordenados e indíquelos como pares ordenados en su gráfica. Además, escriba la ecuación de la asíntota, indicando si esta es vertical u horizontal.

Solución:

$Df \rightarrow x + 2 > 0$

$x > -2$

$Df =]-2, +\infty[$

Asíntota:

$x + 2 = 0 \quad \ldots\ldots \quad x = -2$

tabulación

x	$f(x)$
-1	-3
0	-4

Corte con el eje X (y=0)

$0 = -\log_2(x+2) - 3$

$\log_2(x+2) = -3$

$x + 2 = 2^{-3}$

$x = 2^{-3} - 2$

$x = -1{,}875$

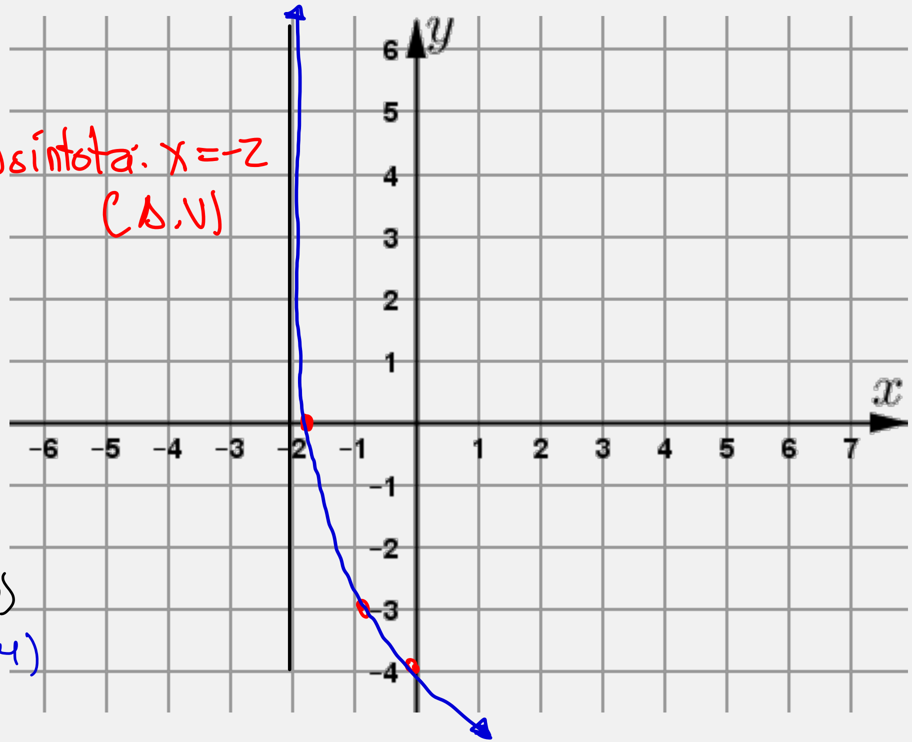
$\rightarrow A(-1{,}875; 0)$

Corte con el eje Y (x=0)

$y = -4 \rightarrow B(0; -4)$

Asíntota: $x = -2$

(A.V)



6. Dadas las funciones f y g con reglas de correspondencia:

a. $f(x) = -\log_2(x+2) - 3$

b. $g(x) = \begin{cases} -2^{x+1} + 3 & ; x \leq 1 \\ \ln(x-1) + 4 & ; x > 1 \end{cases}$

Trace su gráfica y determine analíticamente los puntos de corte con los ejes coordenados e indíquelos como pares ordenados en su gráfica. Además, escriba la ecuación de la asíntota, indicando si esta es vertical u horizontal.

Sol:

$g(x) = -2^{x+1} + 3$; $D_g =]-\infty; 1]$

* Asíntota: $y = +3$

* tabulación

x	$g(x)$
1	-1
0	1

$x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1$

* $g_2(x) = \ln(x-1) + 4$; $D_{g_2} =]1; +\infty[$

* Asíntota = $x = 1$

x	$g_2(x)$
2	4
3	4,69

Corte con eje X $(y=0)$

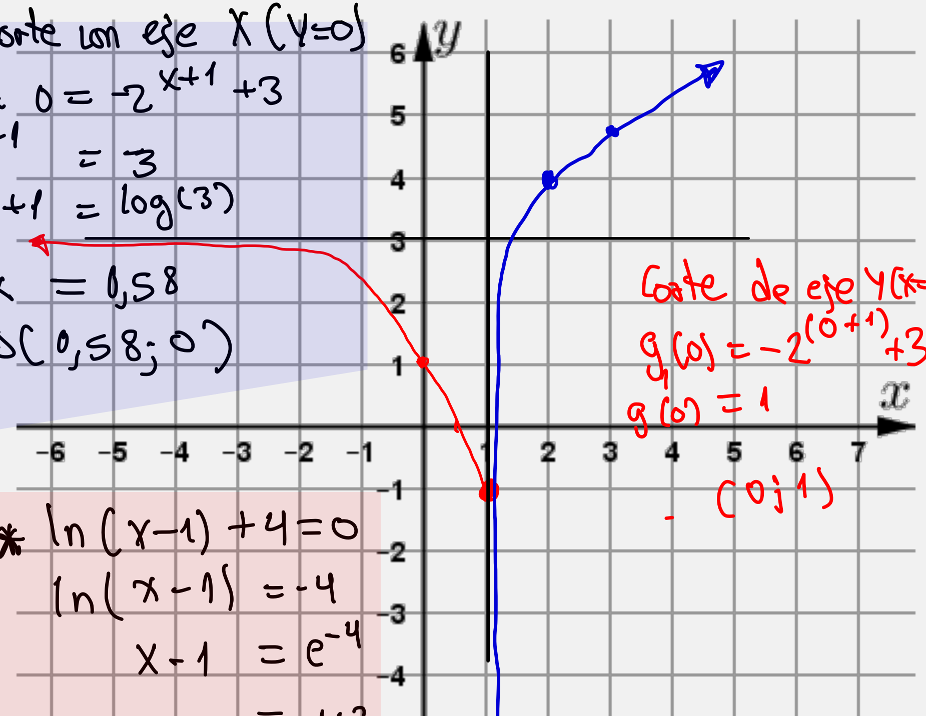
* $0 = -2^{x+1} + 3$

$2^{x+1} = 3$

$x + 1 = \log(3)$

$x = 0,58$

$A(0,58; 0)$



Corte de eje Y $(x=0)$

$g(0) = -2^{(0+1)} + 3$

$g(0) = 1$

$(0; 1)$

* $\ln(x-1) + 4 = 0$

$\ln(x-1) = -4$

$x - 1 = e^{-4}$

$x = 1,02$

$B(0; 1,02)$

Resuelve los siguientes ejercicios y si tienes dudas aprovecha la asesoría virtual con tu profesor AAD para asegurar que tus soluciones son correctas y retroalimentar tu aprendizaje.

1. Dadas las funciones f y g con reglas de correspondencia:

   a. $f(x) = \ln(x+1) - 2$

   b. $g(x) = \begin{cases} -e^{x-1} + 1 & ; x \leq 2 \\ \log_2(x-2) + 1 & ; x > 2 \end{cases}$

   Trace su gráfica y determine analíticamente los puntos de corte con los ejes coordenados e indíquelos como pares ordenados en su gráfica. Además, escriba la ecuación de la asíntota, indicando si esta es vertical u horizontal.

2. Si en el proceso de desintegración de cierta sustancia radiactiva, se sabe que la masa restante Q (en gramos) después de t minutos esta modelada mediante la siguiente función: $Q(t) = 6{,}6e^{\frac{-\ln 2}{14}t}$

   a. ¿Cuál fue la cantidad inicial de sustancia radiactiva?
   b. ¿Al cabo de qué tiempo quedará 2,5 gramos de sustancia?

3. La población P de avestruces después de t años en el criadero de Pimentel, está modelada mediante la función: $P(t) = \frac{1001}{1+90e^{-0,2t}}$

a. ¿Cuál fue la población inicial de avestruces?
b. ¿Al cabo de qué tiempo el número de avestruces será de 76?

4. Los biólogos han determinado que cuando se dispone de suficiente espacio y nutrientes, el número de bacterias N de un cultivo crece exponencialmente después de t minutos, mediante la función:

$$N(t) = 2000\, e^{\frac{\ln(3)}{20}t}$$

a. ¿Cuántas bacterias detectaron los biólogos inicialmente? y ¿Cuántas bacterias habrá al cabo de una hora?
b. ¿Al cabo de qué tiempo el número de bacterias será de 486 000?

5. La rapidez a la que se carga una batería es torna más lenta cuanto la batería está más cerca de su carga máxima C_0. El tiempo t (en horas) necesario para cargar una batería que está completamente descargada a una carga C está dado por:

$$t = -k \ln\left(1 - \frac{C}{C_0}\right)$$

donde k es una constante positiva que depende de la batería. Para cierta batería el valor de k es $0{,}25$, Si esta batería está completamente descargada, ¿cuánto tomará cargarla al 90 % de su carga máxima C_0?

6. Se sabe que el monto acumulado A de invertir un capital P a una tasa de interés anual r, capitalizable k veces por año y durante un periodo de t años. Se calcula mediante: $A(t) = P\left(1 + \frac{r}{k}\right)^{kt}$ ¿En cuánto tiempo una inversión de \$ 2000 crecerá hasta \$ 5000, si se invierte a una tasa anual de 8 %, capitalizable semestralmente?

7. Un pollo a la brasa se saca del horno cuando su temperatura es de 185 °F y se coloca en una mesa en una habitación donde la temperatura es de 75 °F.

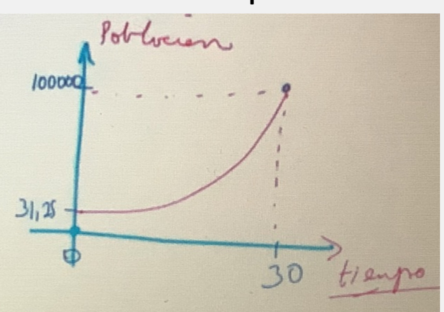
   a. Si la temperatura del pollo es de 150 °F después de media hora, ¿cuál es su temperatura después de 45 minutos? (utilice el modelo $T(t) = T_m + (T_o - T_m)e^{-k \cdot t}$, donde $T(t)$ es la temperatura en °F luego de un tiempo t (en minutos), T_m es la temperatura del ambiente, T_o es la temperatura inicial en °F y k es una constante positiva que depende del tipo de cuerpo.
   b. ¿Después de cuánto tiempo el pollo se enfría a 110 °F?
   c. Trace la gráfica de T, escriba la ecuación de la asíntota y diga que representa a largo plazo.

8. Una población de ardillas grises fue introducida en cierto condado de la Gran Bretaña hace 30 años. Los biólogos observaron que la población se duplica cada 6 años y ahora la población es de 100 000.

   a. ¿Cuál es el tamaño inicial de la población de ardillas?
   b. Trace una gráfica de la población de ardillas
   c. Nota: utilice el modelo $n(t) = n_o 2^{t/a}$, donde a y t se miden en las mismas unidades de tiempo, n_o es la población inicial y $n(t)$ es la población en un tiempo t

t, n
0 ; n_0
6 ; $2n_0$
12 ; $2^2 n_0$
18 ; $2^3 n_0$
24 ; $2^4 n_0$
30 ; $2^5 n_0$

→ $n(0) = n_0$
$n(30) = 2^5 . n_0 = 100000$
a) $n_0 = 3125$ ✓
$n(t) = n_0 \cdot 2^{\frac{t}{6}}$
$n(t) = 3125 . 2^{t/6}$



9. Se sabe que el monto acumulado A de invertir un capital P, a una tasa de interés anual r, capitalizable continuamente (en cada instante de tiempo) y durante un periodo de t años. Se calcula mediante: $A(t) = \mathrm{P}e^{rt}$

   a. Si el Sr. Dennis invierte \$ 2000 a una tasa de interés anual de 4 %. ¿Cuál es el saldo que obtiene a los 12 años de inversión, si el interés se capitaliza continuamente?
   b. Si la Sra. María invirtió \$ 2500 y después de t años recibió el monto de \$ 3574,38. Y se sabe que la inversión se hizo a una tasa de interés anual del 6,5 %, capitalizable continuamente. ¿En cuántos años obtuvo dicho monto?

10. La masa $W(t)$ (en gramos) que queda de una pastilla luego de t segundos de haber ingerido para calmar el dolor de garganta, está dada por $W(t) = 0{,}24(10^{-0{,}02t})$.

   a. Determine la masa inicial de la pastilla.
   b. Calcule la masa luego de 1 minuto de haber ingerido la pastilla.
   c. ¿Después de cuánto tiempo la masa se habrá reducido a 0,1 gramos?

1. a. $\mathrm{Dom}(f) =]-1\ ;\ +\infty\ [$
   Puntos de corte con los ejes coordenados:
   Eje x: (6,389…; 0)
   Eje y: (0; -2)
   Asíntota Vertical: x = - 1

   b. Puntos de corte con los ejes coordenados:
   Eje x: (1; 0); (2,5; 0)
   Eje y: (0; 0,632…)
   Asíntota Vertical: x = 2
   Asíntota Horizontal: y = 1

2. a. La cantidad inicial de la sustancia radiactiva fue 6,6 gramos.
   b. Quedará 2,5 gramos de sustancia radiactiva al cabo de 19,6 minutos aprox.

3. a. La población inicial de avestruces fue 11.
   b. El número de avestruces será 76 al cabo de 10 años aprox.

4. a. Inicialmente los biólogos detectaron 2 000 bacterias y al de una hora 54 000 bacterias.
   b. El número de bacterias será de 486 000 al cabo de 100 minutos aprox.

5. 0,58 minutos

6. El tiempo de la inversión fue 11,7 años aprox.

7. a. Después de 45 minutos la temperatura es 136,93 °F
   b. Se enfría a 110° F después de 89,7 minutos aprox.
   c. A largo plazo, la temperatura del pollo a la brasa tiende a ser la temperatura ambiente 75 °F.

8. a. La población inicial fue 3125 ardillas.

9. a. El saldo después de 12 años es $ 3232,15 aprox.
   b. La Sra. María obtuvo dicho monto en 5,5 años.

10. a. La masa inicial de la pastilla es 0,24 gramos.
    b. Luego de 1 min. La masa de la pastilla es 0,0151 gramos.
    c. La masa de la pastilla se habrá reducido a 0,1 gr. luego de 19 segundos aprox.