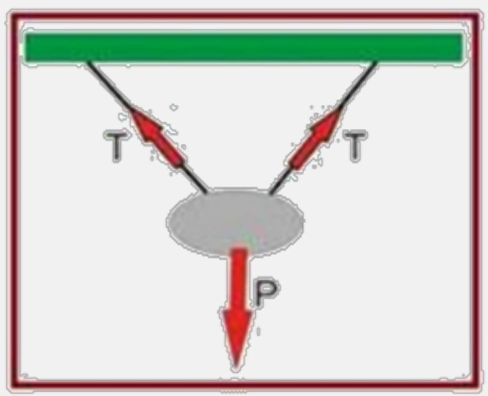
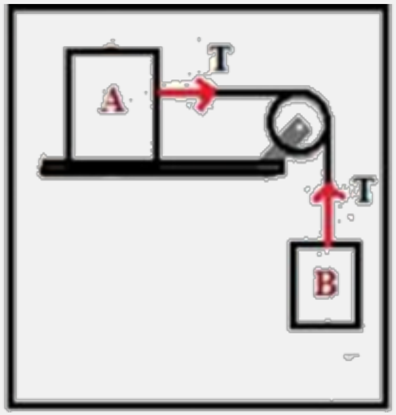
Motivación

Un vector en matemática y en física sirve para determinar, representar y calcular las magnitudes vectoriales como el desplazamiento de un cuerpo en movimiento, su velocidad, aceleración, fuerza, etc. Por ejemplo, con un vector podemos indicar la velocidad, dirección y sentido que lleva un avión en vuelo.

Con la ayuda de los vectores podemos verificar las leyes de la física y determinar los esfuerzos a los que están sometidos las cuerdas y cables.





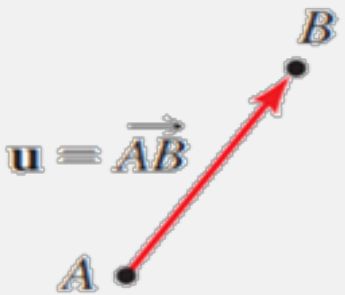
Vectores en 2D

Magnitud escalar. Es cualquier magnitud matemática o física que se pueda representar solamente por un número real. Ejemplos: longitud (m), área (m2), volumen (m3), temperatura en grados kelvin (°K), etc.

Magnitud vectorial. Son aquellas magnitudes en las que además del número que las determina, se requiere conocer la dirección. Ejemplos: desplazamiento (m), fuerza (N), aceleración (m/s^2), etc.

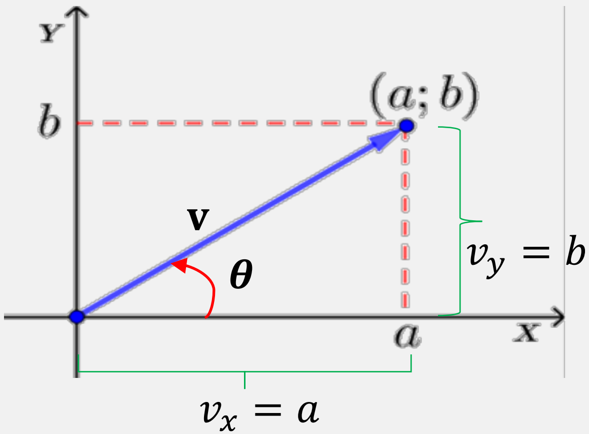
- El ente matemático que representa a estas magnitudes se llama **vector**.

Un vector en el plano es un segmento de recta con una dirección asignada. Tracemos un vector como se ve en la figura, con una flecha para especificar la dirección. Denotamos este vector con $\overrightarrow{AB}$. El punto A es llamado **punto inicial** y B es llamado **punto terminal** del vector $\overrightarrow{AB}$. **Notación:** escribiremos $\mathbf{u} = \overrightarrow{AB}$ para denotar a los vectores.



Vectores en 2D

Un vector $\mathbf{v}$ está representado por su componente horizontal v_x y su componente vertical v_y:



$$\mathbf{v} = \langle \mathrm{v}_x;\ \mathrm{v}_y \rangle = \langle a;\ b \rangle$$

- **Magnitud o longitud de un vector:** La longitud del segmento de recta (vector) recibe el nombre de **magnitud** o **longitud** del vector y está denotado por $\mathbf{v} = \|\mathbf{v}\|$.

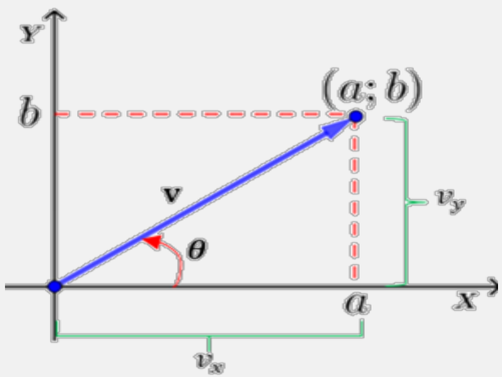
$$|\mathbf{v}| = \|\mathbf{v}\| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Operaciones con vectores

Si $\mathbf{u} = \langle u_1; u_2\rangle$ y $\mathbf{v} = \langle v_1; v_2\rangle$, entonces:

- ✓ $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \langle u_1; u_2\rangle + \langle v_1;\ v_2\rangle = \langle u_1 + v_1;\ u_2 + v_2\rangle$
- ✓ $\mathbf{u} - \mathbf{v} = \langle u_1;\ u_2\rangle - \langle v_1;\ v_2\rangle = \langle u_1 - v_1; u_2 - v_2\rangle$
- ✓ $c\mathbf{u} = c\langle u_1;\ u_2\rangle = \langle cu_1;\ cu_2\rangle;\ c \in \mathbb{R}$

Dirección de un vector



$$\tan(\boldsymbol{\theta}) = \frac{v_y}{v_x}$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{\theta} = \tan^{-1}\left(\frac{v_y}{v_x}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right)$$

1. Si el ángulo de dirección está en el segundo cuadrante y en sentido antihorario, usaremos la relación:

$$\theta = 180° - \tan^{-1}\left(\left|\frac{b}{a}\right|\right)$$

2. Si el ángulo de dirección está en el tercer cuadrante y en sentido antihorario, usaremos la relación:

$$\theta = 180° + \tan^{-1}\left(\left|\frac{b}{a}\right|\right)$$

3. Si el ángulo de dirección está en el cuarto cuadrante y en sentido antihorario, usaremos la relación:

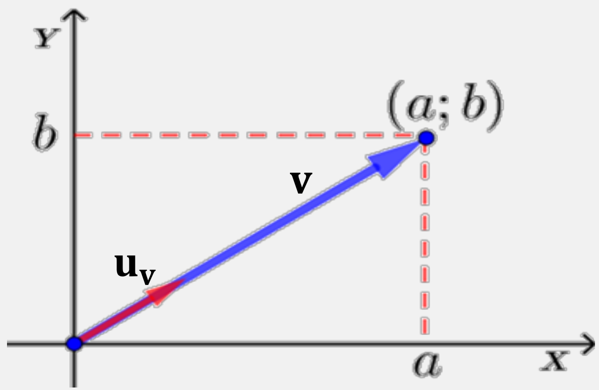
$$\theta = 360° - \tan^{-1}\left(\left|\frac{b}{a}\right|\right)$$

Vector unitario en la dirección de un vector

❖ Un vector de magnitud 1 se llama vector **unitario**, es decir: $\|\mathrm{u_v}\| = 1$

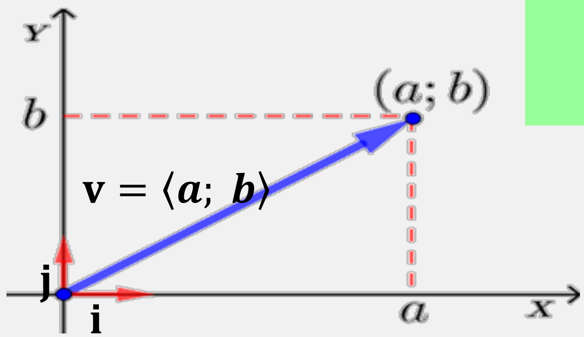
❖ Las componentes del vector unitario en la dirección del vector $\mathbf{v}$, están dadas por:

$$\mathbf{u_v} = \frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|} = \langle \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} ; \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \rangle$$



Vectores en 2D

Vectores en términos de i y j

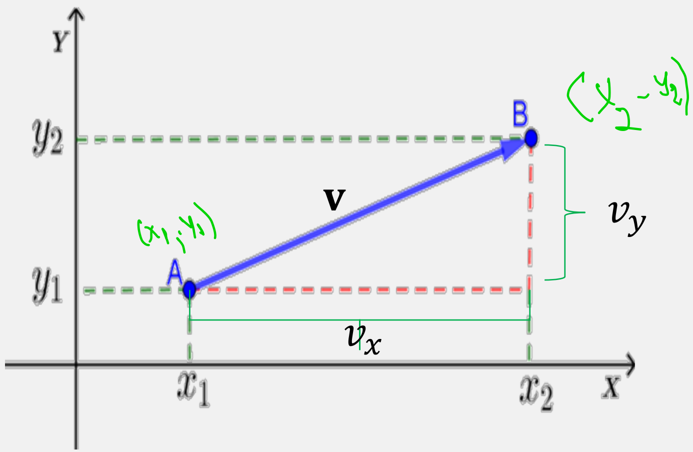


$$\mathbf{i} = \langle 1;\ 0 \rangle$$
$$\mathbf{j} = \langle 0;\ 1 \rangle$$

OBS: El vector $\mathbf{v} = \langle a;\ b \rangle$ puede ser expresado en términos de $\mathbf{i}$ y $\mathbf{j}$ por:

$$\mathbf{v} = \langle a;\ b \rangle = a\mathbf{i} + b\mathbf{j}$$

Vector desplazado



$$\mathbf{v} = \overrightarrow{AB} = \langle x_2 - x_1;\ y_2 - y_1 \rangle = \langle \mathrm{v}_x;\ \mathrm{v}_y \rangle$$

Vectores en 2D

Producto punto

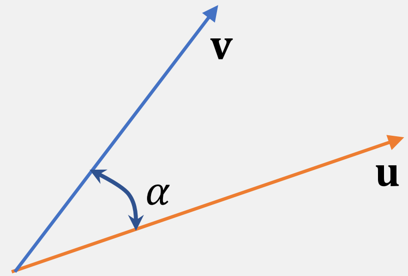
Dado los vectores $\mathbf{v} = \langle v_1;\ v_2 \rangle$ y $\mathbf{u} = \langle u_1;\ u_2 \rangle$, su producto punto o producto escalar, denotado por $\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}$ está definido por:

$$\boxed{\mathbf{v} \cdot \mathbf{u} = v_1\, u_1 + v_2\, u_2}$$

Ángulo entre dos vectores

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = |\mathbf{u}||\mathbf{v}| \cos \alpha$$

$$\boxed{\alpha = \cos^{-1}\left(\frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{|\mathbf{u}||\mathbf{v}|}\right)}$$



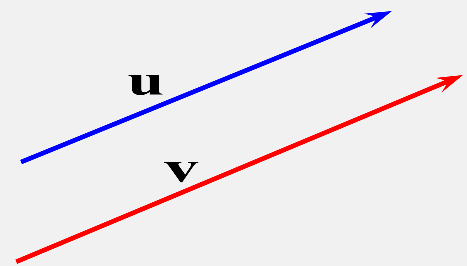
$$0 \leq \alpha \leq \pi \ \text{ o } \ (0 \leq \alpha \leq 180°\,)$$

Vectores ortogonales

Los vectores $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ son ortogonales sí y solo si

$$\boxed{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0}$$

Vectores paralelos

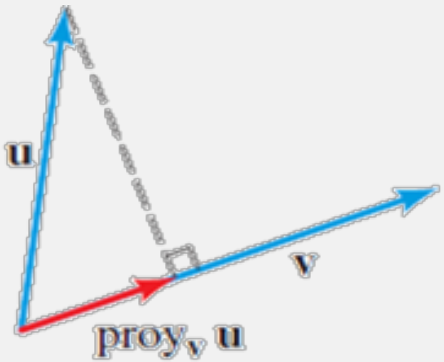


$$\boxed{\mathbf{u} = t\ \mathbf{v}}$$

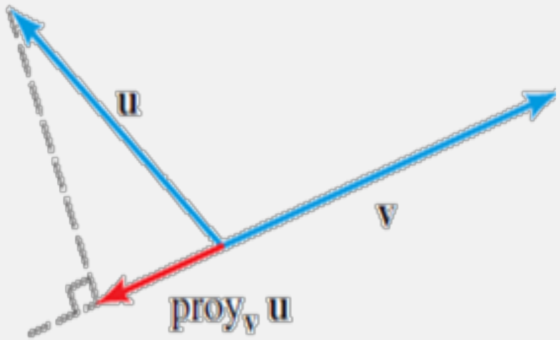
Vectores en 2D

Proyección de un vector sobre otro vector

La proyección del vector $\mathbf{u}$ sobre $\mathbf{v}$, denotada por $\text{proy}_{\mathbf{v}}\mathbf{u}$, es un vector paralelo a $\mathbf{v}$



$$\text{proy}_{\mathbf{v}}\mathbf{u} = \left(\frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|^2}\right)\mathbf{v}$$



Propiedades de vectores

Sean los vectores $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$, y sea c un número escalar.

- $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = \mathbf{v}\cdot\mathbf{u}$ Propiedad conmutativa.
- $\mathbf{u}\cdot\mathbf{u} = |\mathbf{u}|^2$
- $\mathbf{0}\cdot\mathbf{v} = 0$
- $\mathbf{u}\cdot(\mathbf{v}+\mathbf{w}) = \mathbf{u}\cdot\mathbf{v} + \mathbf{u}\cdot\mathbf{w}$
- $(\mathbf{u}+\mathbf{v})\cdot\mathbf{w} = \mathbf{u}\cdot\mathbf{w} + \mathbf{v}\cdot\mathbf{w}$
- $(c\mathbf{u})\cdot\mathbf{v} = c(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v})$

1. Dado los vectores $\mathbf{a} = \langle -2; 4\rangle$, $\mathbf{b} = \langle 3; 5\rangle$ y $\mathbf{c} = -3\mathbf{i} + \mathbf{j}$, y los puntos $P(2; -1)$ y $Q(0; -4)$. Determine:
   a. el vector $\mathbf{w} = \mathbf{a} - 2\mathbf{c}$ y expréselo como combinación lineal de los vectores canónicos $\mathbf{i}$ y $\mathbf{j}$.
   b. la magnitud del vector $\mathbf{r} = \mathbf{b} + \mathbf{4a}$.
   c. el vector unitario en la dirección del vector $\overrightarrow{PQ}$.

a) $W = \langle -2; 4\rangle - 2\langle -3; 1\rangle$

$W = \langle -2; 4\rangle + \langle 6; -2\rangle$

$W = \langle 4; 2\rangle$

$W = 4\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$

b) $r = b + 4a$

$r = \langle 3; 5\rangle + 4\langle -2; 4\rangle$

$r = \langle -5; 21\rangle$

$r = \langle -5; 21\rangle$

modulo

$\|r\| = \sqrt{(-5)^2 + 21^2}$

$\|r\| = 21{,}59$

c) $V = \overrightarrow{PQ} = \langle Q\rangle - \langle P\rangle$

$PQ = \langle 0; -4\rangle - \langle 2; -1\rangle$

$PQ = \langle -2; -3\rangle$

2. Dado los vectores $\mathbf{u} = \langle -7; -2 \rangle$, $\mathbf{v} = \langle -3; 6 \rangle$ y $\mathbf{w} = \mathbf{i} - 2\mathbf{j}$, y los puntos $\mathrm{A}(-2; 8)$ y $\mathrm{B}(7; -3)$. Determine:

$w = \langle 1; -2 \rangle$

$\overrightarrow{BA}$ $\langle -2; 8 \rangle - \langle 7; -3 \rangle$

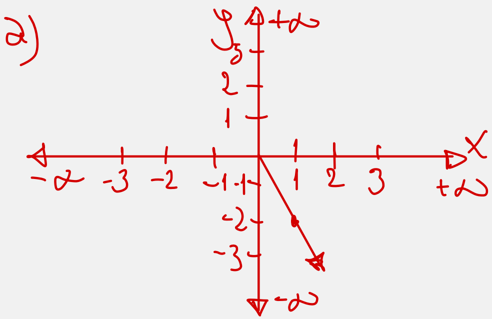
$\langle -9; 11 \rangle$

a. la dirección del vector $\mathbf{w}$.

b. el ángulo entre los vectores $\mathbf{u}$ y $\overrightarrow{BA}$.

c. el vector proyección del vector $\mathbf{u}$ sobre el vector $\mathbf{w}$.

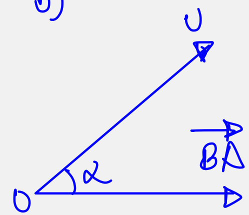
a)



$w = 360° - \tan^{-1}\left(\frac{2}{1}\right)$

$w = 296{,}57°$

b)



$\alpha = \cos^{-1}\left(\frac{41}{\sqrt{202} \times \sqrt{53}}\right)$

$\alpha = 66{,}66°$

$u \cdot \overrightarrow{BA} = \langle -9; 11 \rangle \langle -7; -2 \rangle$

$u \cdot \overrightarrow{BA} = 63 - 22$

$u \cdot \overrightarrow{BA} = 41$

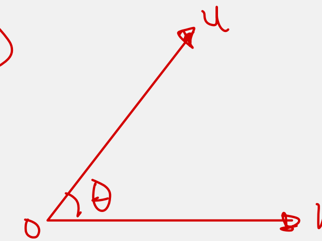
$|BA|^2 = (-9)^2 + (11)^2$

$|BA| = \sqrt{202}$

$|u|^2 = (-7)^2 + (-2)^2$

$|u| = \sqrt{53}$

c)



$P = W_u = \left(\frac{u \cdot w}{||w||^2}\right) w$

$W \cdot u = \langle -7; -2 \rangle \langle 1; -2 \rangle$

$w \cdot u = -7 + 4$

$w \cdot u = -3$

$|w|^2 = (1)^2 + (-2)^2$

$|w|^2 = 1 + 4$

$w = \sqrt{5}$

$P\left(-\frac{3}{5}; \frac{6}{5}\right)$

3. Determine si los vectores **u** y **v** son ortogonales o paralelos.

a. $\mathbf{u} = \langle 5; -6 \rangle$ y $\mathbf{v} = \langle -12; -10 \rangle$

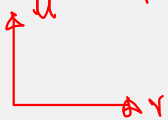
b. $\mathbf{u} = 2\mathbf{i} - 7\mathbf{j}$ y $\mathbf{v} = -4\mathbf{i} + 14\mathbf{j}$

a) ¿Ortogonales?

$u.v = -60 + 60$

$u.v = 0$

u y v son ortogonales



no son paralelos

b) ¿Son ortogonales?

$u.v = -8 - 98 \neq 0$

• $u = t\,v$

$\langle 2; -7 \rangle = t\langle -4; 14 \rangle$

$2 = -4t \wedge -7 = t\,14$

$-\frac{1}{2} = t$ $\quad$ $-\frac{1}{2} = t$

$t = -\frac{1}{2}$

es paralelo.

Resuelve los siguientes ejercicios y si tienes dudas aprovecha la asesoría virtual con tu profesor AAD para asegurar que tus soluciones son correctas y retroalimentar tu aprendizaje.

1. Dado los vectores $\mathbf{u} = \langle -1; 2 \rangle$, $\mathbf{v} = \langle -2; 5 \rangle$ y $\mathbf{w} = \mathbf{i} - 4\mathrm{j}$, y los puntos $\mathrm{A}(-2; 1)$ y $\mathrm{B}(-3; 4)$. Determine:
   a. el vector $\mathbf{r} = \mathbf{u} - 2\mathbf{v}$ y expréselo como combinación lineal de los vectores canónicos $\mathbf{i}$ y $\mathbf{j}$.
   b. la magnitud del vector $\mathbf{a} = \mathbf{4w} + \mathbf{2u}$
   c. el ángulo entre los vectores $\mathbf{u}$ y $\overrightarrow{AB}$
   d. dirección del vector $\mathbf{v}$
   e. un vector paralelo al vector $\mathbf{w}$
   f. un vector ortogonal al vector $\mathbf{w}$
   g. proyección del vector $\overrightarrow{AB}$ sobre $\mathbf{v}$

2. Sean los vectores $\mathbf{u} = \langle -2; \mathrm{n} - 4 \rangle$, $\mathbf{v} = \langle 2; -2 \rangle$ y $\mathbf{w} = 3\mathbf{i} + (4\mathrm{m})\mathbf{j}$. Determine:
   a. el valor de n de manera que el vector $\mathbf{u}$ sea ortogonal al vector $\mathbf{v}$.
   b. el valor de m de manera que el vector $\mathbf{v}$ sea paralelo al vector $\mathbf{w}$.
   c. el valor de n, de modo que $|\mathbf{u}| = 5$.

1. a. $3\mathbf{i} - 8\mathbf{j}$ b. $12{,}17\ u$ c. $\theta = 8{,}13°$ d. $\theta = 111{,}8°$

   e. $\langle 2; -8 \rangle$ (puede haber más de una respuesta correcta)

   f. $\langle 4; 1 \rangle$ (puede haber más de una respuesta correcta)

   g. $\langle \frac{-34}{29}; \frac{85}{29} \rangle$

2. a. $n = 2$ b. $m = -0{,}75$ c. $n = 4 \pm \sqrt{21}$