Derivada de la transformada de Laplace

Teorema

Si $F(s) = \mathcal{L}(f(t))$ y n = 1,2,3, … , entonces

$$\mathcal{L}(t^n f(t)) = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n} F(s)$$

Dada $L(f(t)) = F(s)$

$L(e^{+\alpha t} \cdot f(t)) = F(s-\alpha)$

$L(f'(t)) = s \cdot F(s) - f(0)$

$L(t \cdot f(t)) = -(F(s))'$

$L(t^2 \cdot f(t)) = (F(s))''$

$L(t^3 \cdot f(t)) = -(F(s))'''$

Derivada de la transformada de Laplace

$$\mathcal{L}(t^n f(t)) = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n} F(s)$$

Ejemplo

Halle la transformada de Laplace de:

a. $g(t) = t\mathrm{sen}(2t)$

Se sabe que $L\{\mathrm{sen}2t\} = \dfrac{2}{s^2+4} \Rightarrow L\{t.\mathrm{Sen}2t\} = -\left(\dfrac{2}{s^2+4}\right)'$

$L(t.\mathrm{Sen}2t) = -2\left((s^2+4)^{-1}\right)' = -2(-1)(s^2+4)^{-2}\,2s$

$L(t.\mathrm{Sen}2t) = +\dfrac{4s}{(s^2+4)^2}$ ✓

b. $g(t) = t^2e^{3t} + tu(t-2)$

$L(g(t)) = L(t^2e^{3t}) + L(t.u(t-2))$

$* L(u(t-2)) = \dfrac{e^{-2s}}{s} \Rightarrow L(t.u(t-2)) = -\left(\dfrac{e^{-2s}}{s}\right)' = -\dfrac{-2e^{-2s}.s - e^{-2s}.1}{s^2} \ldots ①$

$* L(t^2e^{3t}) = ??$ $\quad L(t^2) = \dfrac{2!}{s^3} \Rightarrow L(t^2.e^{3t}) = \dfrac{2}{(s-3)^3} \ldots ②$

Rpta: ① + ②

Convolución

Convolución

Si $f(t)$ y $g(t)$ son funciones continuas por tramos para $t \geq 0$, entonces la convolución de f y g denotada por $f * g$, se define por:

$$\underbrace{f * g}_{\text{Convolución}} = \int_0^t f(z)g(t-z)dz$$

z: nueva variable.

Teorema de convolución

Si $f(t)$ y $g(t)$ son funciones continuas por tramos para $t \geq 0$ y de orden exponencial, entonces

$$\mathcal{L}(f * g) = F(s)G(s)$$

$$L(f_{(t)} * g_{(t)}) = L(f_{(t)}) \cdot L(g_{(t)})$$

Nota: $f * g = g * f$

*Ejemplo: $L(t^3 * \operatorname{Sen} 2t)$

$$\Rightarrow L(t^3) \cdot L(\operatorname{Sen} 2t) = \frac{3!}{s^4} \cdot \frac{2}{s^2+4}.$$

Convolución

$$f * g = \int_0^t f(z)g(t-z)dz$$

$$\mathcal{L}(f * g) = F(s)G(s)$$

Ejemplo

a) Evalúe la convolución de $t * \cos t$ con la definición.

$$t * \cos t = \int_0^t z \cos(t-z)\, dz = \int_0^t \cos z . (t-z)\, dz$$

$u = t - z \qquad dv = \cos z\, dz$

$du = -1\, dz \qquad v = \int \cos z\, dz = \operatorname{sen} z$

$$t * \cos t = \left((t-z)\operatorname{sen} z - \int \operatorname{sen} z . (-1\, dz)\right)\Big/_0^t$$

$$= \left((t-z)\operatorname{sen} z + (-\cos z)\right)\Big/_0^t$$

$$= (0 - \cos t) - (0 - \cos 0) = 1 - \cos t.$$

b) A partir de la convolución hallada en a), halle $\mathcal{L}(t * \cos t)$

$$L(t * \cos t) = L(1 - \cos t) = \frac{1}{s} - \frac{s}{s^2+1} = \frac{s^2+1-s^2}{s(s^2+1)} = \boxed{\frac{1}{s(s^2+1)}}$$

c) Halle la transformada de Laplace con la propiedad

$$L(t * \cos t) = L(t) \times L(\cos t) = \frac{1}{s^2} \cdot \frac{s}{s^2+1} = \frac{1}{s(s^2+1)}$$

Transformada de la integral

Transformada de una integral

$$\text{Si: } f * g = \int_0^t f(z)g(t-z)dz \quad \text{y considerando que } g(t) = 1$$

$$\Rightarrow f * 1 = \int_0^t f(z)1dz \qquad \Rightarrow \qquad \mathcal{L}(f * 1) = \mathcal{L}\left(\int_0^t f(z)dz\right)$$

$$\Rightarrow \mathcal{L}(f)\cdot\mathcal{L}(1) = \mathcal{L}\left(\int_0^t f(z)dz\right) \quad \Rightarrow \; F(s)\left(\frac{1}{s}\right) = \mathcal{L}\left(\int_0^t f(z)dz\right)$$

$$\boxed{\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(z)dz\right\} = \frac{F(s)}{s} \quad o \quad \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{F(s)}{s}\right\} = \int_0^t f(z)dz}$$

$si \; L(f(t)) = F(s)$

$\Rightarrow L\left(\int_0^t f(z)dz\right) = \frac{L(f(t))}{s}$

Transformada de la integral

Ejemplo

a) Halle la transformada inversa de Laplace:

$$F(s) = \frac{1}{s(s^2+1)}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{F(s)}{s}\right\} = \int_0^t f(z)dz$$

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(z)dz\right\} = \frac{F(s)}{s}$$

$$\frac{L(f(t))}{s} = L\left(\int_0^t f(z)\,dz\right)$$

$$L^{-1}\left(\frac{1}{s(s^2+1)}\right) = g(t) \Rightarrow \frac{1}{s(s^2+1)} = L(g(t))$$

$$L(g(t)) = \frac{\frac{1}{s^2+1}}{s} = \frac{L(\overbrace{\operatorname{sen} t}^{f(t)})}{s} = L\left(\int_0^t \operatorname{sen} z\,dz\right)$$

$$L(g(t)) = L\left(-\cos z\Big|_0^t\right) \Rightarrow \cancel{L}(g(t)) = \cancel{L}\left(-(\cos t - \cos 0)\right)$$

$$g(t) = 1 - \cos t.$$

Transformada de la integral

Ejercicios

b) Halle $L^{-1}(F(s))$ usando la transformada de una integral

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{F(s)}{s}\right\} = \int_0^t f(z)dz$$

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(z)dz\right\} = \frac{F(s)}{s}$$

$$F(s) = \frac{1}{s(s+2)(s+3)}$$

$$L^{-1}\left(\frac{1}{s(s+2)(s+3)}\right) = g(t) \rightarrow L(g(t)) = \frac{1}{s(s+2)(s+3)}$$

$$L(g(t)) = \frac{\frac{1}{(s+2)(s+3)}}{s} \Rightarrow \frac{1}{(s+2)(s+3)} = \frac{A}{s+2} + \frac{B}{s+3} \Rightarrow 1 = A(s+3) + B(s+2)$$

$s=-3 \rightarrow 1 = -B$

$B = -1$

$s = -2 \rightarrow A = 1$

$$L(g(t)) = \frac{\frac{1}{s+2} - \frac{1}{s+3}}{s} = \frac{L(e^{-2t} - e^{-3t})}{s} = L\left(\int_0^t (e^{-2z} - e^{-3z})dz\right)$$

$$L(g(t)) = L\left(\left(\frac{e^{-2z}}{-2} - \frac{e^{-3z}}{-3}\right)\Big/_0^t\right) = L\left(-\frac{e^{-2t}}{2} + \frac{e^{-3t}}{3} - \left(\frac{1}{-2} - \frac{1}{-3}\right)\right) \Rightarrow g(t) = -\frac{e^{-2t}}{2} + \frac{e^{-3t}}{3} + \frac{1}{6}.$$

Transformada de la integral

Ejemplo

c) Halle la transformada de Laplace de:

$$f(t) = \int_0^t z\cos(z)\, dz$$

$$\mathcal{L}\left(\int_0^t f(z)dz\right) = \frac{F(s)}{s}$$

$\mathcal{L}(f(t))$

$$\mathcal{L}\left(\int_0^t z\cos z\, dz\right) = \frac{\mathcal{L}(t\cos t)}{s} \quad \ldots(*)$$

Sabemos que $\mathcal{L}(\cos t) = \dfrac{s}{s^2+4} \Rightarrow \mathcal{L}(t\cos t) = -\left(\dfrac{s}{s^2+4}\right)'$

$$\mathcal{L}(t\cos t) = -\frac{1(s^2+4) - s.(2s)}{(s^2+4)^2} = \frac{s^2-4}{(s^2+4)^2} \Rightarrow \text{en } (*):$$

RPTA: $\dfrac{\frac{s^2-4}{(s^2+4)^2}}{s}$

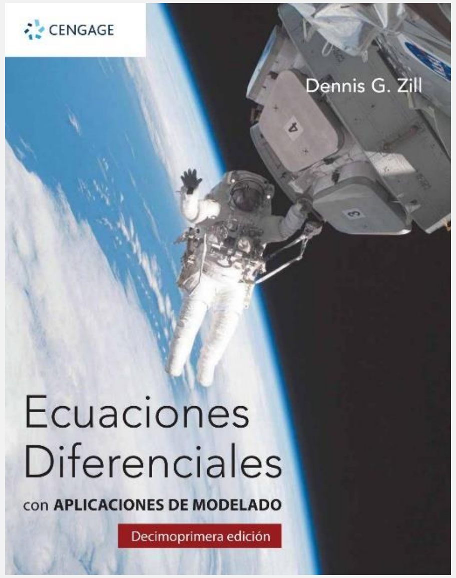
Transformada de una función periódica

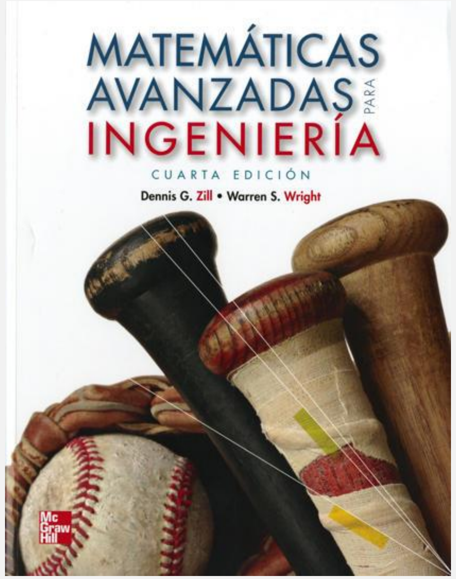
Teorema

Si $f(t)$ es una función por tramos tal que $t \geq 0$, de orden exponencial y periódica con periodo T, entonces

Periodo

$$\mathcal{L}(f(t)) = \frac{1}{1 - e^{-sT}} \int_0^T e^{-st} f(t)dt$$

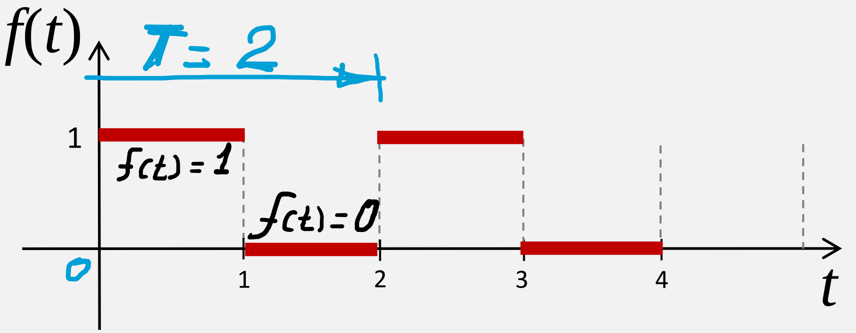




Transformada de una función periódica

Ejemplo

Encuentre la transformada de Laplace de la función periódica, onda cuadrada, que se muestra en la figura



$$\mathcal{L}(f(t)) = \frac{1}{1-e^{-sT}}\int_0^T e^{-st} f(t)dt$$

$$\mathcal{L}(f(t)) = \frac{1}{1-e^{-2s}}\int_0^2 e^{-st}\cdot f(t)\,dt$$

$$\mathcal{L}(f(t)) = \frac{1}{1-e^{-2s}}\cdot\left[\int_0^1 e^{-st}\cdot 1\,dt + \underbrace{\cancel{\int_1^2 e^{-st}\cdot 0\,dt}}_{0}\right] = \frac{1}{1-e^{-2s}}\left[\frac{e^{-st}}{-1}\Big|_0^1\right]$$

$$\mathcal{L}(f(t)) = \frac{1}{1-e^{-2s}}\cdot\left(1-e^{-s}\right) = \frac{1-e^{-s}}{1-e^{-2s}}.$$