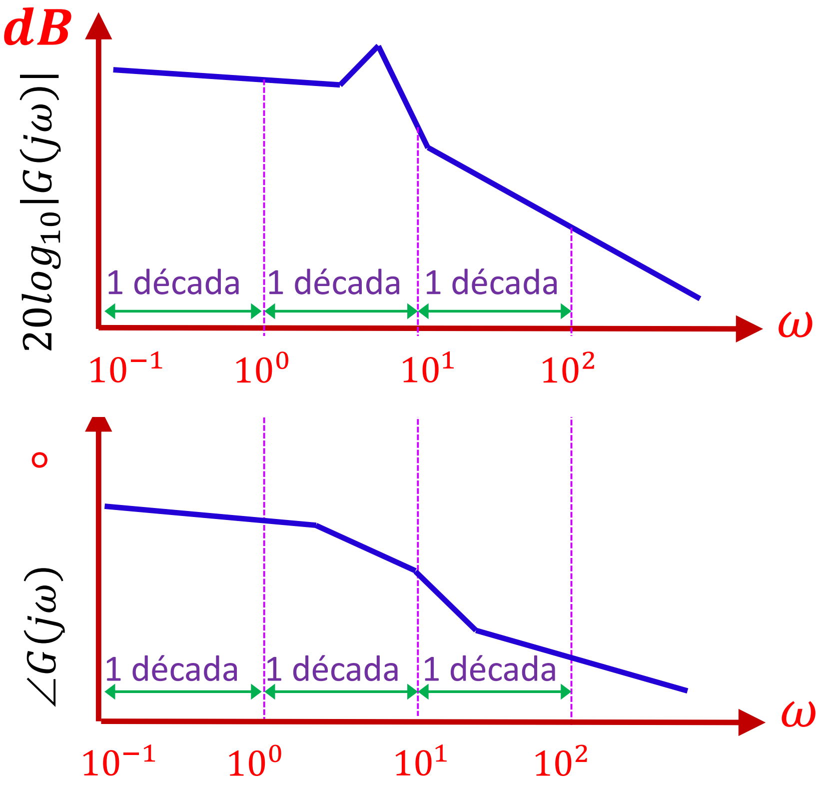
Respuesta en Frecuencia

Ing. Eddie Sobrado

Introducción

- Son los diagramas del modulo y de la fase de la respuesta en frecuencia de un sistema dinámico en el cual el modulo se expresa en dB (decibeles) y el eje de las frecuencias esta en escala logarítmica.



Diagramas de Bode

- Para poder dibujar el diagrama de bode de cualquier sistema, es recomendable descomponer la función $G(j\omega)$ del sistema en funciones conocidas. Por ejemplo, si:

$$G(j\omega) = G_1(j\omega).G_2(j\omega)$$

El modulo: $|G(j\omega)| = |G_1(j\omega)||G_2(j\omega)|$

Modulo (dB): $20log_{10}|G(j\omega)| = 20log_{10}|G_1(j\omega)| + 20log_{10}|G_2(j\omega)| + \cdots$

Fase $\angle G(j\omega) = \angle G_1(j\omega) + G_2(j\omega)\ldots$

La idea es graficar el diagrama de Bode de cada componente $G_1(j\omega), G_2(j\omega), \ldots$ individualmente. Luego sumar gráficamente los módulos y las fases de cada componente para obtener una única resultante.

Diagramas de Bode: Sistemas 1er. Orden

Sea un sistema de primer orden:

$$G(s) = \frac{1}{\tau s + 1} \quad \Rightarrow \quad G(j\omega) = \frac{1}{\tau j\omega + 1} \quad \Rightarrow \quad |G(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{(\tau\omega)^2 + 1}}$$

Modulo (dB): $20log_{10}|G(j\omega)| = -10log_{10}|(\tau\omega)^2 + 1|$

Fase $\angle G(j\omega) = -tan^{-1}(\tau\omega)$

Aproximación asintótica del Modulo:

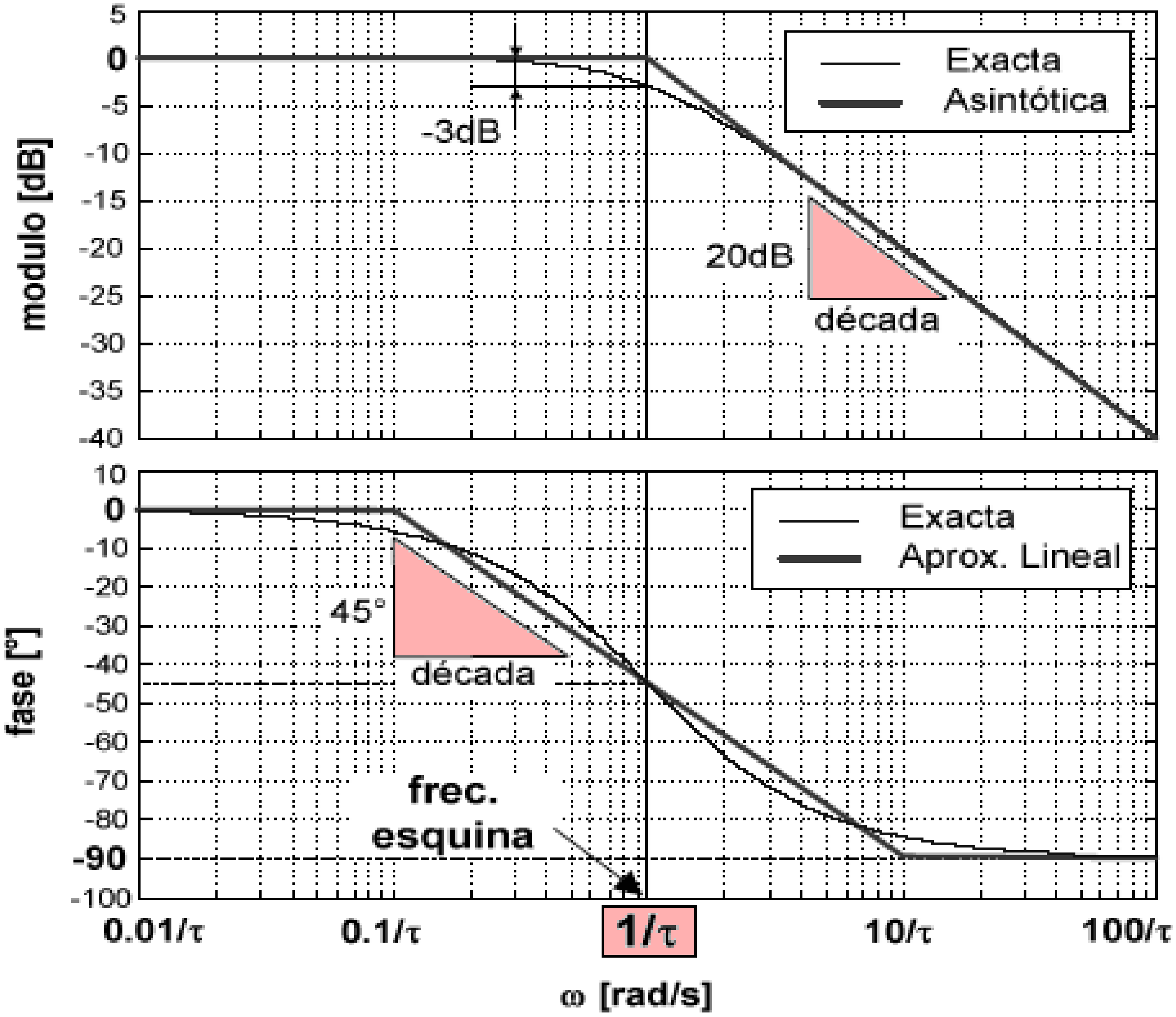
$\tau\omega \ll 1$ $\quad 10log_{10}|1| = 0dB$ ($0dB$ en bajas frecuencia)

$\tau\omega \approx 1$ $\quad 10log_{10}|2| = -3dB$ (frecuencia esquina: $\omega = 1/\tau$)

$\tau\omega \gg 1$ $\quad 10log_{10}|(\tau\omega)^2| = -20log_{10}[\tau\omega]$ (decaimiento de: $20dB/decada$)

Diagramas de Bode: Sistemas 1er. Orden

$$G(j\omega) = \frac{1}{\tau j\omega + 1}$$



Diagramas de Bode: Sistemas 2do. Orden

Sea un sistema de segundo orden:

$$G(s) = \frac{{\omega_n}^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + {\omega_n}^2} \quad \Rightarrow \quad G(j\omega) = \frac{1}{1 + j2\zeta\left[\frac{\omega}{\omega_n}\right] - \left[\frac{\omega}{\omega_n}\right]^2}$$

Modulo (dB):

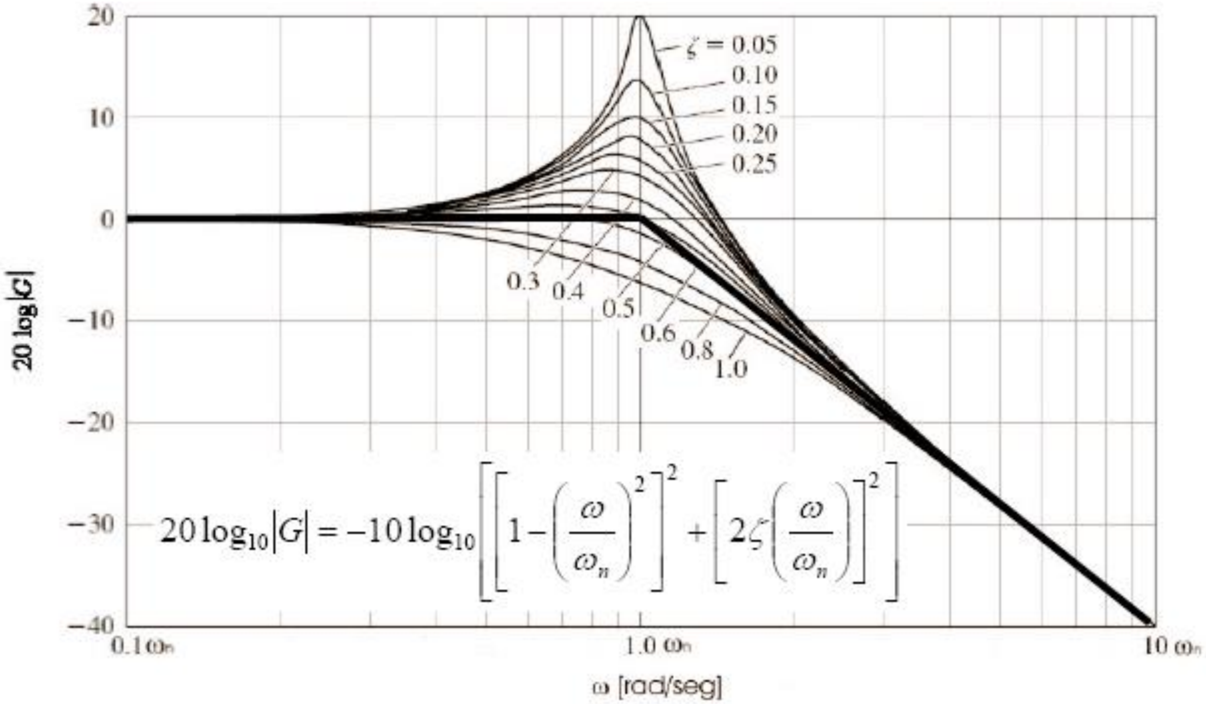
$$20log_{10}|G(j\omega)| = -10log_{10}\left[\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right]^2 + \left[2\zeta\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)\right]^2\right]$$

Fase

$$\angle G(j\omega) = -tan^{-1}\left[\frac{2\zeta\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}\right]$$

Diagramas de Bode: Sistemas 2do. Orden

- Modulo en dB para varios factores de amortiguamiento relativo ζ (curva exacta y curva asintótica)



Diagramas de Bode: Sistemas 2do. Orden

¿Presenta un máximo?

$$20log\left|\frac{1}{1-\frac{\omega^2}{{\omega_n}^2}+j\frac{2\zeta\omega}{\omega_n}}\right| = -20log\sqrt{\left[1-\frac{\omega^2}{{\omega_n}^2}\right]^2+\left[\frac{2\zeta\omega}{\omega_n}\right]^2}$$

Entonces aplicamos derivada a modulo de $G(j\omega)$: $\sqrt{\left[1-\frac{\omega^2}{{\omega_n}^2}\right]^2+\left[\frac{2\zeta\omega}{\omega_n}\right]^2}$

$$\frac{d}{d\omega}\left[\left[1-\frac{\omega^2}{{\omega_n}^2}\right]^2+\left[\frac{2\zeta\omega}{\omega_n}\right]^2\right]=0 \quad \Rightarrow \quad 2\left[1-\frac{\omega^2}{{\omega_n}^2}\right]\left[-\frac{2\omega}{{\omega_n}^2}\right]+\frac{2\zeta^2\omega}{{\omega_n}^2}=0$$

$$-({\omega_n}^2-\omega^2)+2\zeta^2{\omega_n}^2=0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\omega_r=\omega_n\sqrt{1-2\zeta^2}}$$

Si $\zeta \leq 0.707$existira un máximo en $|G(j\omega)|$ conocido como pico de resonancia M_r a la frecuencia $\omega_r \leq \omega_n$

$$\boxed{M_r=|G(j\omega_r)|=\frac{1}{2\zeta\sqrt{1-\zeta^2}}}$$

Resonancia en Sistemas 2do. Orden

- La resonancia se define como el máximo de la amplitud de $G(j\omega)$. En un sistema de segundo orden, tanto el máximo como la frecuencia ω_r para la cual ocurre este máximo dependen del factor de amortiguamiento ζ.

Diagramas de Bode: Sistemas 2do. Orden

Aproximación asintótica del Modulo:

$$\frac{\omega}{\omega_n} \ll 1 \qquad 20log_{10}|G(j\omega)| = 0\ dB$$

($0dB$ en bajas frecuencia)

$$\frac{\omega}{\omega_n} = 1 \qquad 20log_{10}|G(j\omega)| = 20log_{10}\left[\frac{1}{2\zeta}\right]$$

(frecuencia esquina: $\omega = \omega_n$)

$$\frac{\omega}{\omega_n} \gg 1 \qquad 20log_{10}|G(j\omega)| = -40log_{10}\left[\frac{\omega}{\omega_n}\right]$$

(decaimiento de: $40dB/decada$)

Resonancia:

$$\left.\frac{d|G(j\omega)|}{d\omega}\right|_{\omega=\omega_r} = 0 \Rightarrow \omega_r = \omega_n\sqrt{1-2\zeta^2} \qquad \zeta \leq 0.707$$

$$M_r = 20log_{10}\left[\frac{1}{2\zeta\sqrt{1-\zeta^2}}\right] dB$$

Ancho de Banda (frecuencia para -3dB):

$$\omega_{BW} = \omega_n\sqrt{(1-2\zeta^2) + \sqrt{4\zeta^4 - 4\zeta^2 + 2}}$$

Diagramas de Bode: Sistemas 2do. Orden

Aproximación asintótica de las fase:

$$G(s) = \frac{{\omega_n}^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + {\omega_n}^2} = \frac{1}{\left[\frac{j\omega}{\omega_n}\right]^2 + 2\zeta\left[\frac{j\omega}{\omega_n}\right] + 1} = \frac{1}{1 - \frac{\omega}{{\omega_n}^2}^2 + j\frac{2\zeta\omega}{\omega_n}}$$

$$\angle G(j\omega) = -tan^{-1}\left[\frac{2\zeta\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}\right]$$

si: $\omega \rightarrow 0$ $\quad \boldsymbol{\Phi} \rightarrow 0$

si: $\omega \rightarrow \omega_n$ $\quad \boldsymbol{\Phi} \rightarrow -90^\circ$

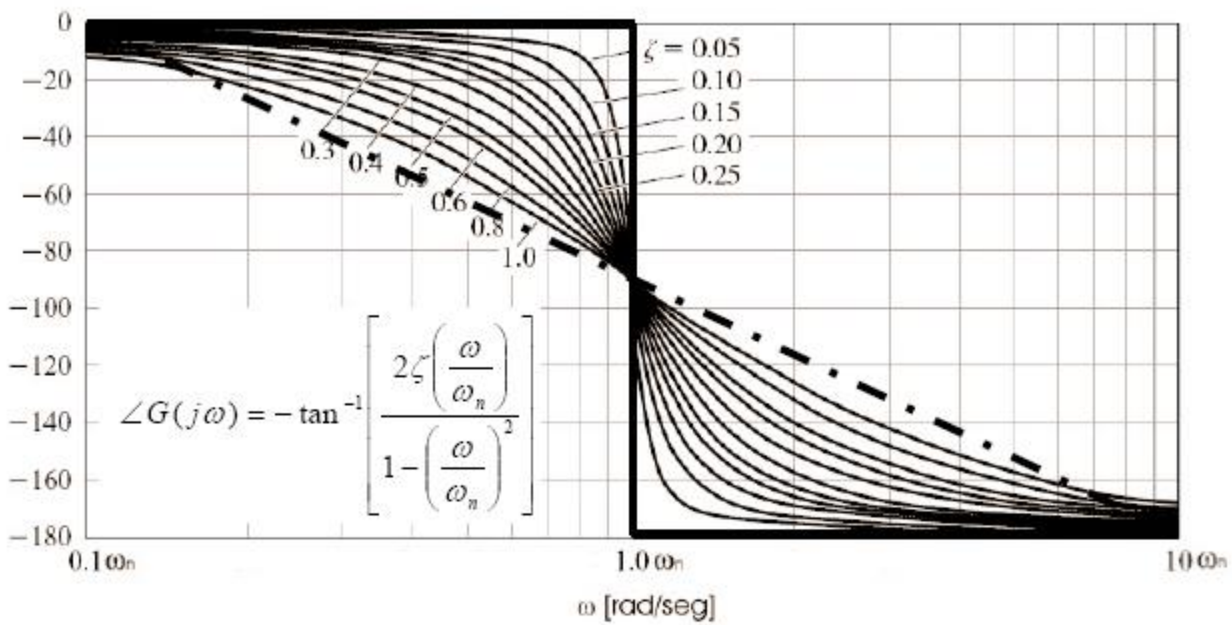
si: $\omega \rightarrow \infty$ $\quad \boldsymbol{\Phi} \rightarrow -180^\circ$

Diagramas de Bode: Sistemas 2do. Orden

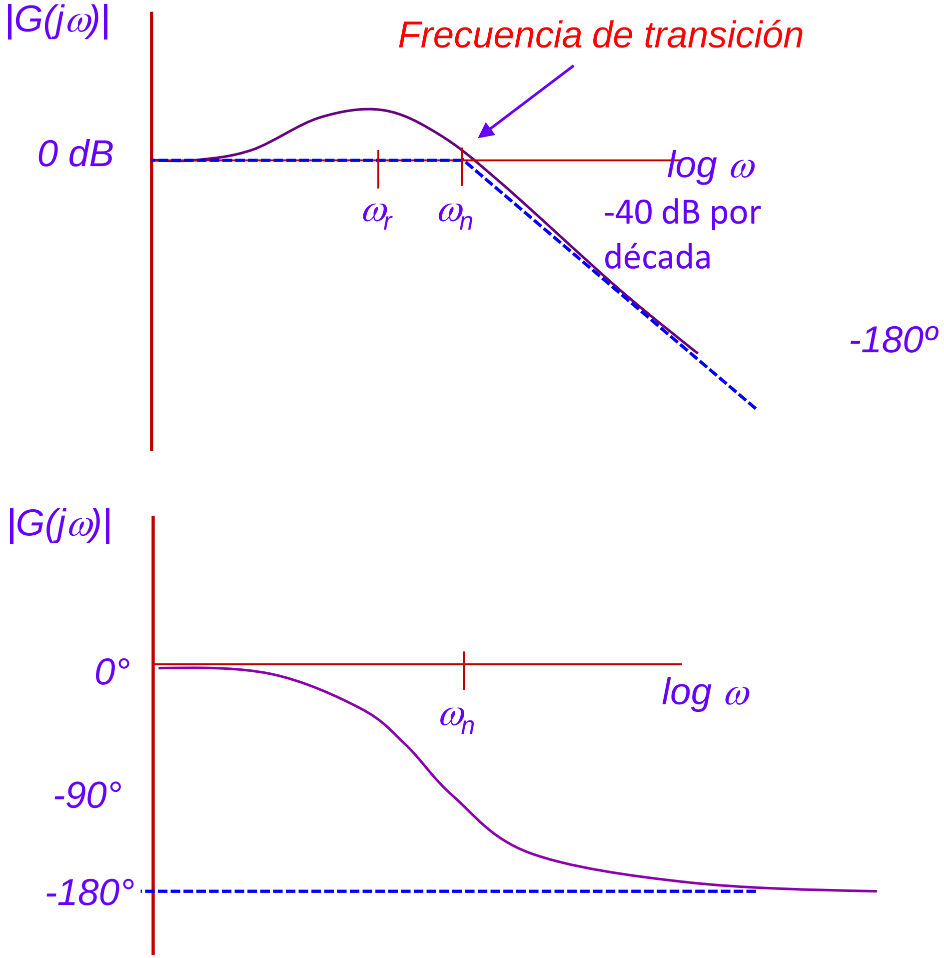
Aproximación asintótica de las fase:

- Fase en grados para varios factores de amortiguamiento realtivo

Fase en Grados para Varios Factores de Amortiguamiento Relativo ζ (curva exacta):



Diagramas de Bode: Sistemas 2do. Orden



Diagramas de Bode: Sistemas 2do. Orden

$$G(j\omega) = \frac{1}{1 + j2\zeta\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right) - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}$$

Para $\omega=\omega_n$:

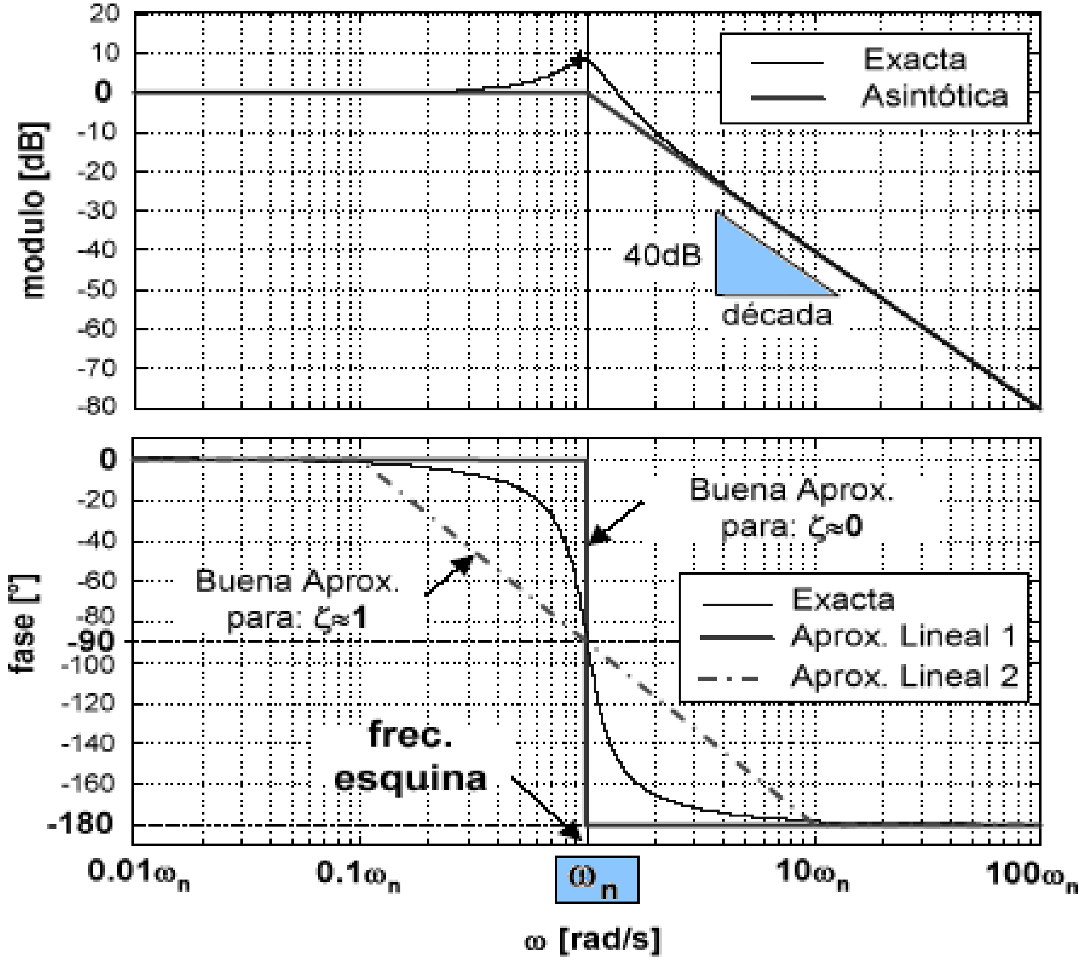
$$20\log_{10}|G(j\omega)| = 20\log_{10}\left[\frac{1}{2\zeta}\right]$$

Resonancia "✚" :

$$Para:\ \zeta \leq 0.707$$

$$\omega_r = \omega_n\sqrt{1-2\zeta^2}$$

$$M_r = 20\log_{10}\left[\frac{1}{2\zeta\sqrt{1-\zeta^2}}\right]\ dB$$



Indicadores de Desempeño en el dominio de la Frecuencia

Especificaciones de desempeño

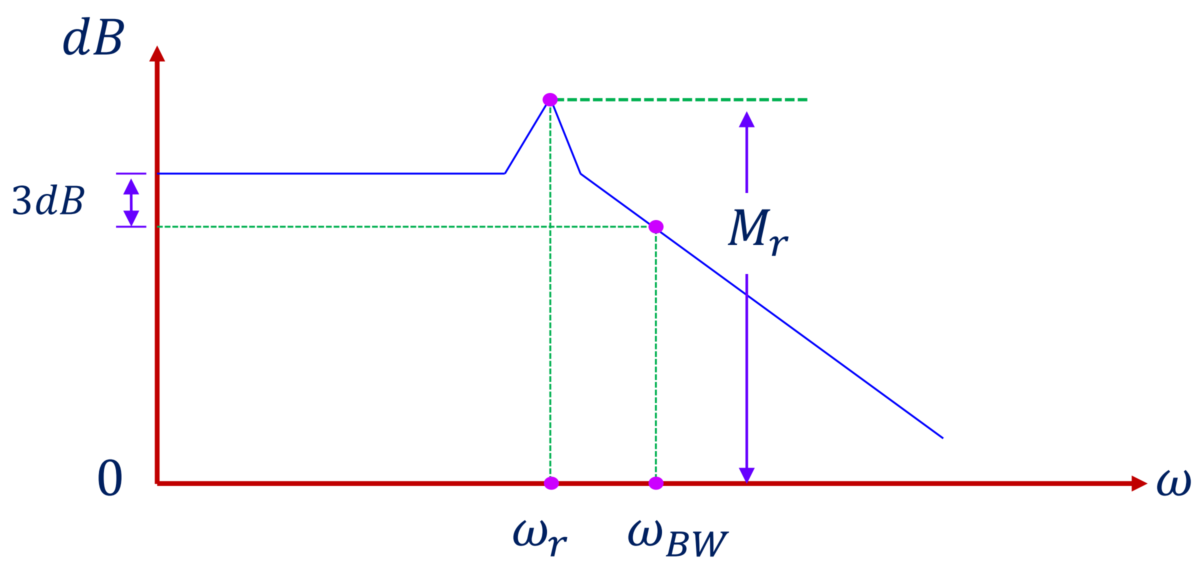
- Las Especificaciones de Desempeño en el Dominio de la Frecuencia son:

M_r: *Pico de Resonancia*

ω_r: *Frecuencia de Resonancia*

ω_{BW}: *Ancho de Banda rad/s (cuando decae 3dB)*

Diagrama de Magnitud



Ancho de Banda

- ω_{Bw} es la frecuencia a la cual la atenuación es de $-3db$.
- Da una medida del rango de velocidades de cambio de la entrada a la que el sistema responde sin atenuación notable.

Ancho de Banda y Resonancia: Sistema 1er Orden

Aproximación asintótica del Modulo:

$$U_0 \sin(\omega t) \rightarrow \boxed{G(s) = \frac{1}{\tau s + 1}} \rightarrow Y_0 \sin(\omega t + \boldsymbol{\Phi})$$

$$20log_{10}|G(j\omega)| = 20log_{10}\left[\frac{1}{\sqrt{\tau^2\omega^2 + 1}}\right] = -10log_{10}(\tau^2\omega^2 + 1)$$

Ancho de Banda (frecuencia para -3dB):

$$20log_{10}|G(j0)| = 0\ dB$$

$$20log_{10}|G(j\omega_{BW})| = 0\ dB - 3dB$$

$$-10log_{10}\left(\tau^2\omega_{BW}{}^2 + 1\right) = 0\ dB - 3dB$$

$$\boxed{\omega_{BW} = \frac{1}{\tau} \quad (rad/s)}$$

Resonancia: NO EXISTE

Ancho de Banda y Resonancia: Sistema 2do Orden

$$U_0 \sin(\omega t) \longrightarrow \boxed{G(s) = \frac{{\omega_n}^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + {\omega_n}^2}} \longrightarrow Y_0 \sin(\omega t + \boldsymbol{\Phi})$$

Ancho de Banda (frecuencia para -3dB):

$$20log_{10}|G(j\omega_{BW})| = -3dB$$

$$\omega_{BW} = \omega_n \sqrt{(1 - 2\zeta^2) + \sqrt{4\zeta^4 - 4\zeta^2 + 2}}$$

Resonancia:

$$\left.\frac{d|G(j\omega)|}{d\omega}\right|_{\omega=\omega_r} = 0 \Rightarrow \zeta \leq 0.707$$

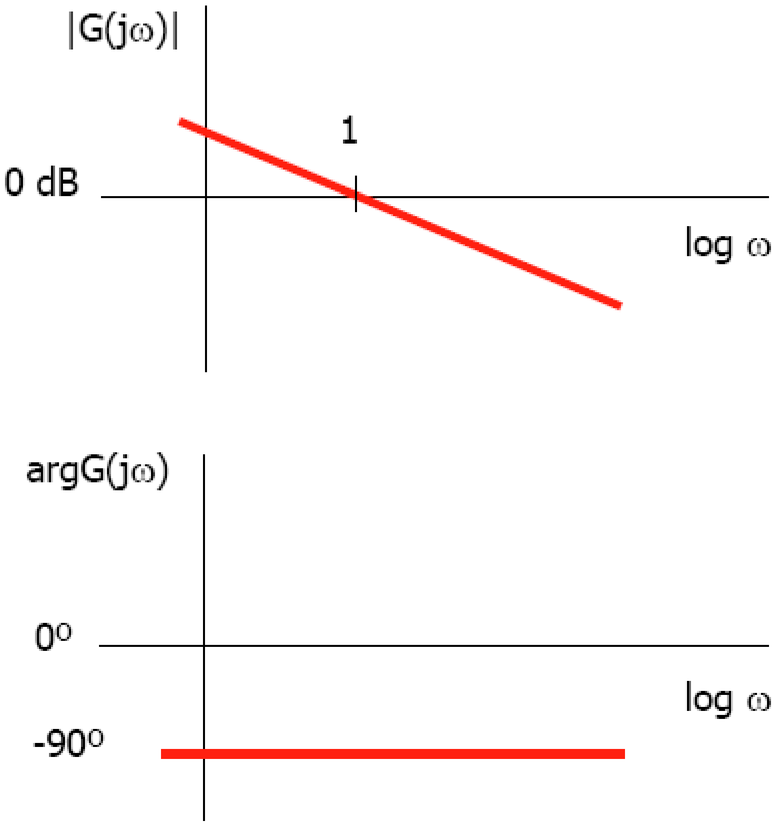
$$\boxed{M_r = \frac{1}{2\zeta\sqrt{1 - \zeta^2}}}$$

$$\boxed{\omega_r = \omega_n \sqrt{1 - 2\zeta^2}}$$

Integrador

$$20\log\left|\frac{1}{j\omega}\right| = -20\log\omega$$

$$\arg\left(\frac{1}{j\omega}\right) = -90^o$$



recta de pendiente -20 dB
que pasa por (ω=1, 0 dB)

Construcción de Diagrama de Bode

Construcción de Diagrama de Bode

- Considere una función $G(j\omega)$ general:

$$G(j\omega) = \boldsymbol{K_o} \frac{\prod_{f=1}^{g}(jt_f\omega + 1)\prod_{h=1}^{i}\left[1 + 2\zeta_h\left(\frac{j\omega}{\omega_{nh}}\right) - \left[\frac{\omega}{\omega_{nh}}\right]^2\right]}{(j\omega)^p\prod_{k=1}^{r}(jt_k\omega + 1)\prod_{l=1}^{q}\left[1 + 2\zeta_l\left(\frac{j\omega}{\omega_{nl}}\right) - \left[\frac{\omega}{\omega_{nl}}\right]^2\right]}$$

- La función $G(j\omega)$ siempre será una combinación de los siguientes términos básicos:

K_o

$[j\tau\omega + 1]^{\pm 1}$

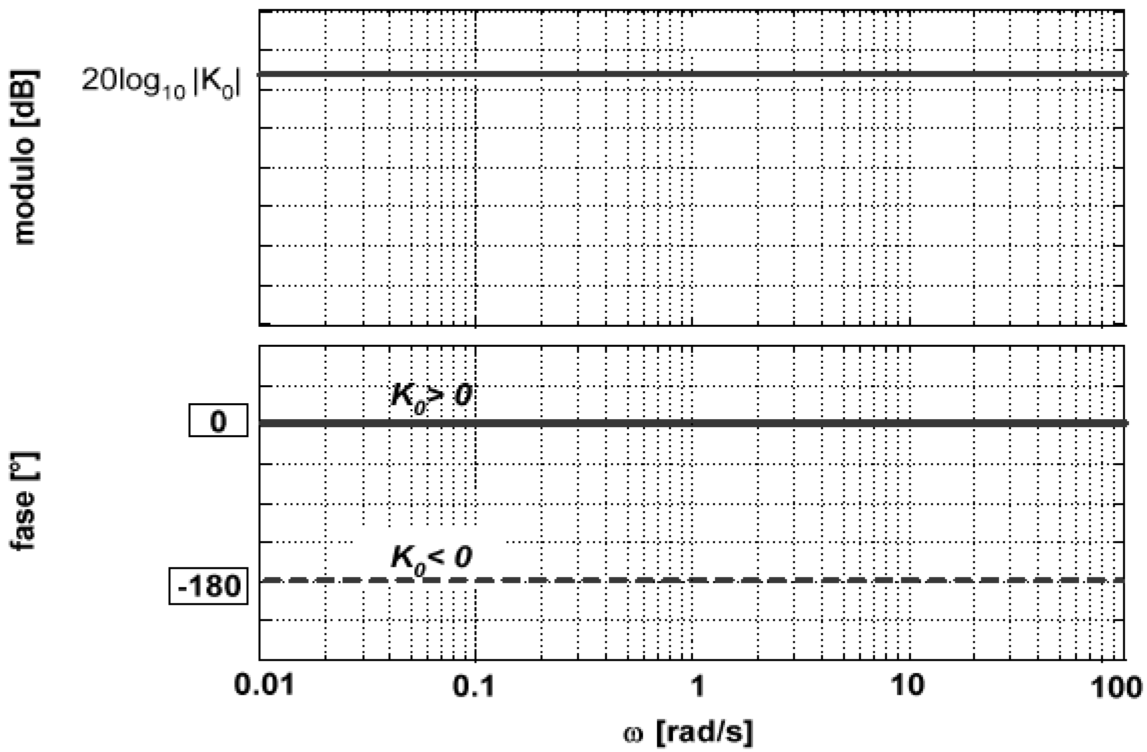
$(j\omega)^{\pm 1}$

$\left[1 + 2\zeta\left(\frac{j\omega}{\omega_n}\right) - \left[\frac{\omega}{\omega_n}\right]^2\right]^{\pm 1}$

- Para dibujar bosquejos a mano alzada utilizaremos las aproximaciones asintóticas del modulo en dB y las aproximaciones lineales de la fas, de cada termino.

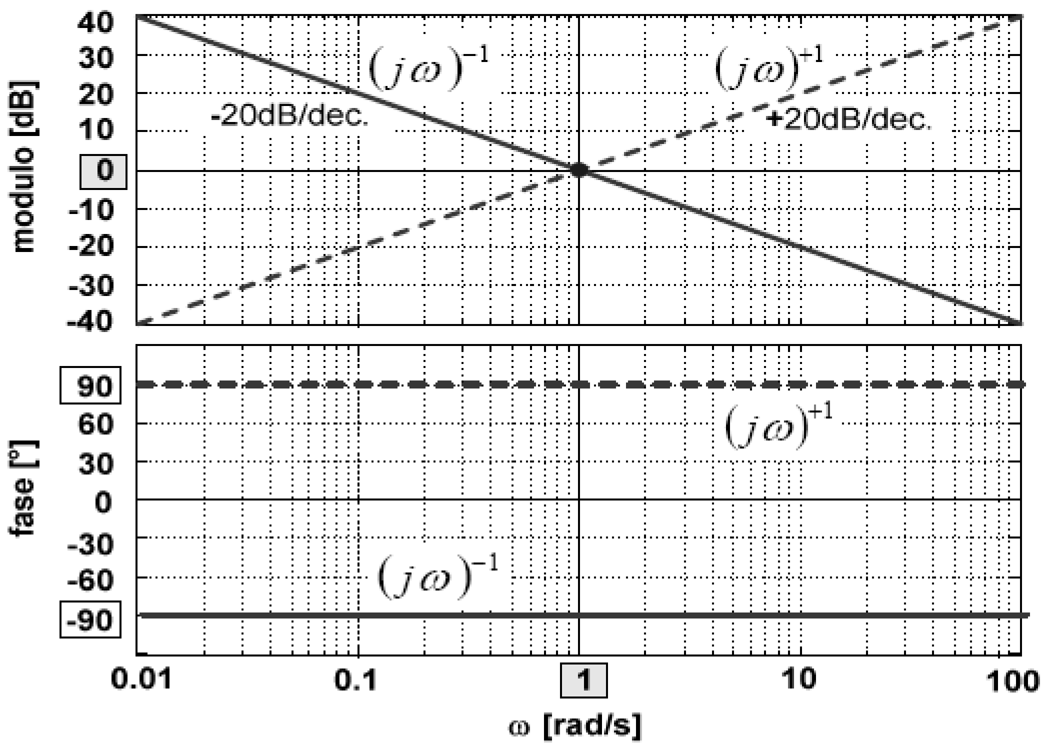
Construcción de Diagrama de Bode

Termino: K_o



Construcción de Diagrama de Bode

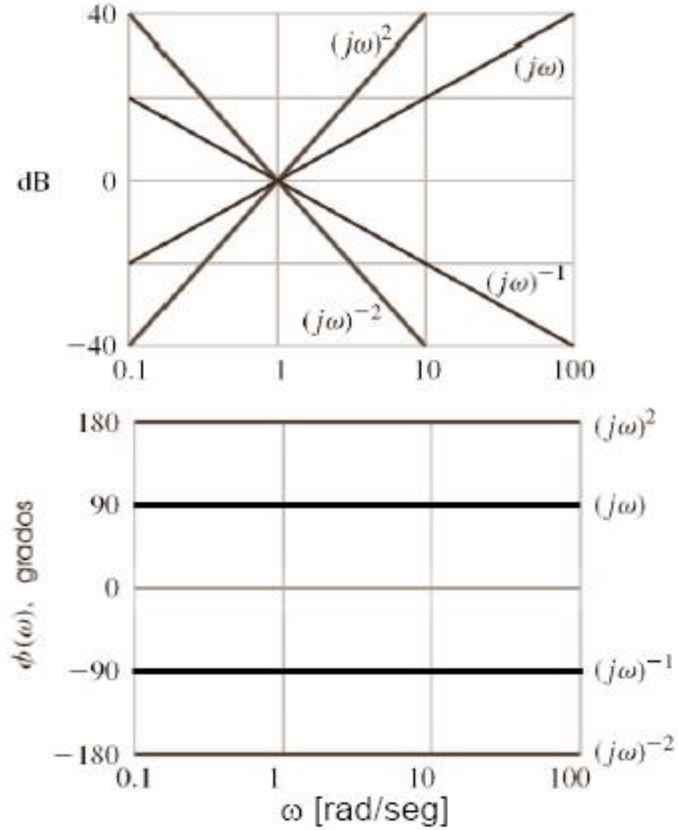
Termino: $[j\omega]^{\pm 1}$



Construcción de Diagrama de Bode

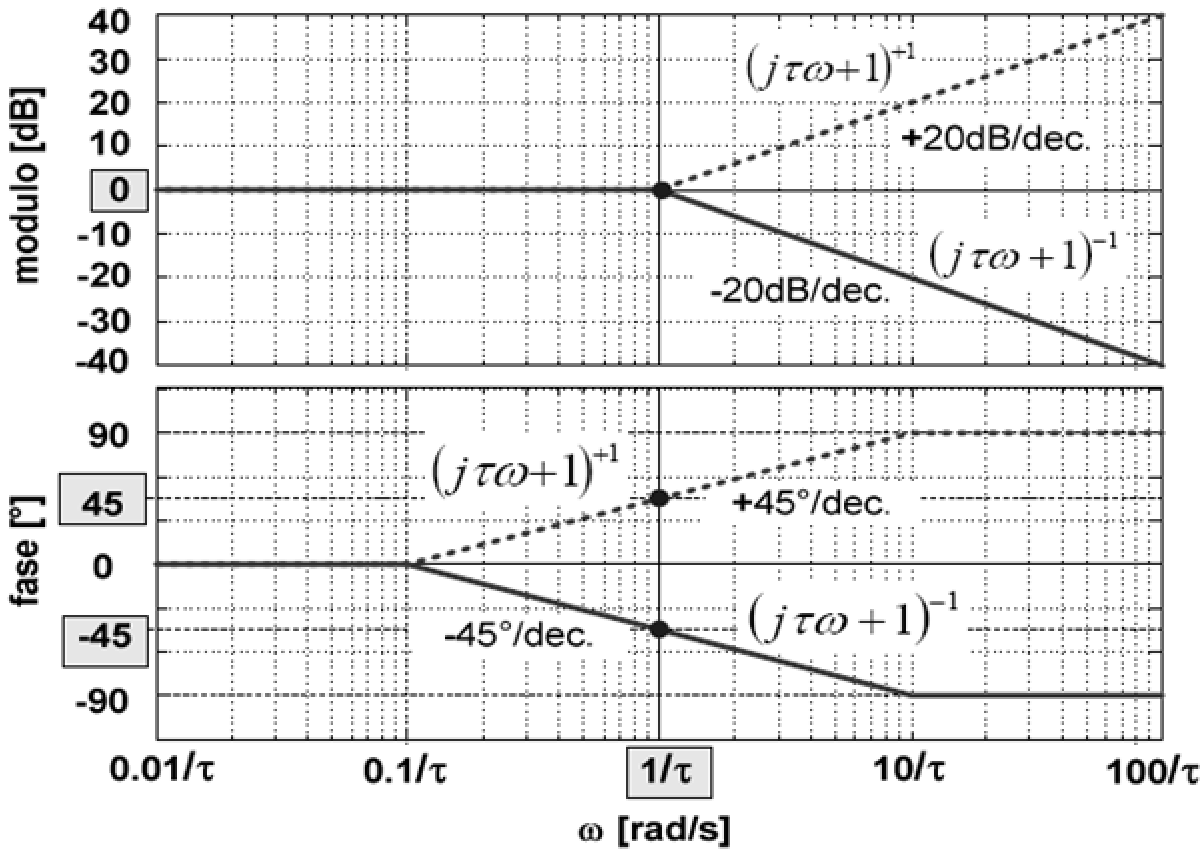
Termino: $[j\omega]^{\pm p}$

p : es la multiplicidad del polo



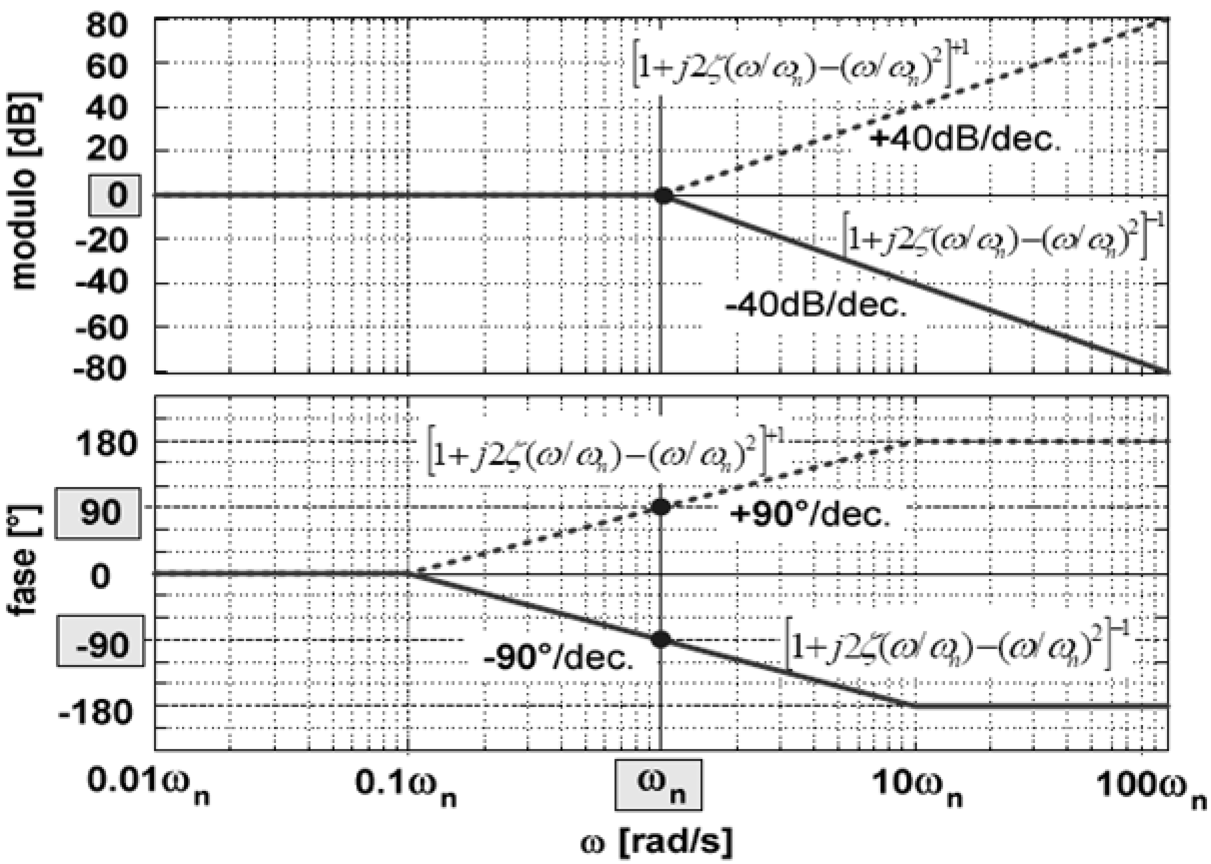
Construcción de Diagrama de Bode

Termino: $[j\tau\omega + 1]^{\pm 1}$



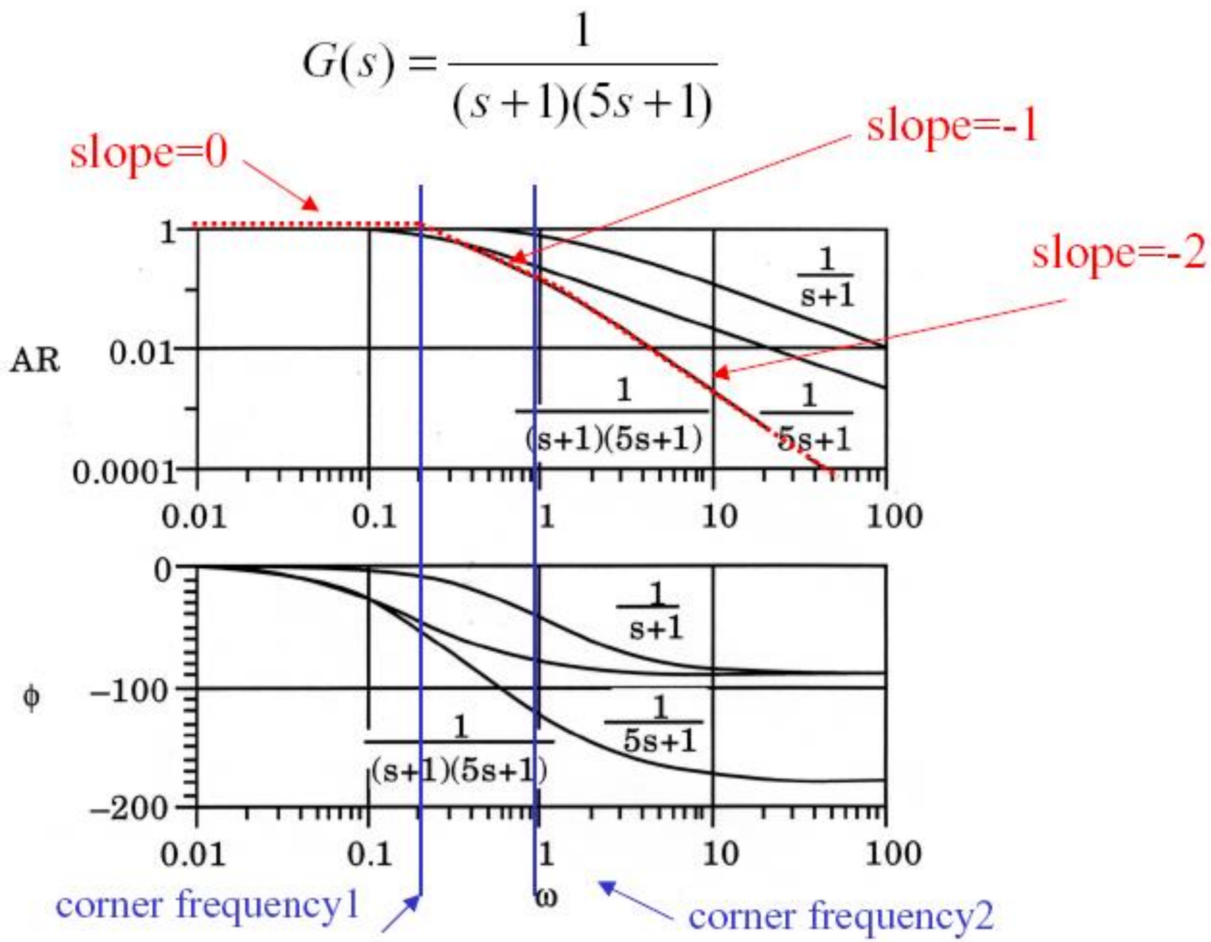
Construcción de Diagrama de Bode

Termino: $$\left[1 + j2\varepsilon\left[\frac{\omega}{\omega_n}\right] - \left[\frac{\omega}{\omega_n}\right]^2\right]^{\pm 1}$$



Ejemplo 1

$$G(s) = \frac{1}{(s+1)(5s+1)}$$



Ejemplo 2

- Construya el diagrama de bode del siguiente sistema:

$$G(s) = \frac{1250(s + 10)}{s(0.5s + 1)(s^2 + 30s + 2500)}$$

- Separamos en términos conocidos:

$$G(s) = 5.\frac{1}{s}.\frac{1}{0.5s+1}.\frac{0.1s+1}{1}.\frac{50^2}{s^2+2(0.3)(50)s+50^2}$$

- La respuesta en frecuencia:

$$G(s) = 5.\frac{1}{j\omega}.\frac{1}{j0.5\omega+1}.\frac{j0.1\omega+1}{1}.\frac{1}{\left(\frac{j\omega}{50}\right)^2+\frac{j0.6\omega}{50}+1}$$

'Términos ordenados en orden creciente de sus frecuencias de esquinas'

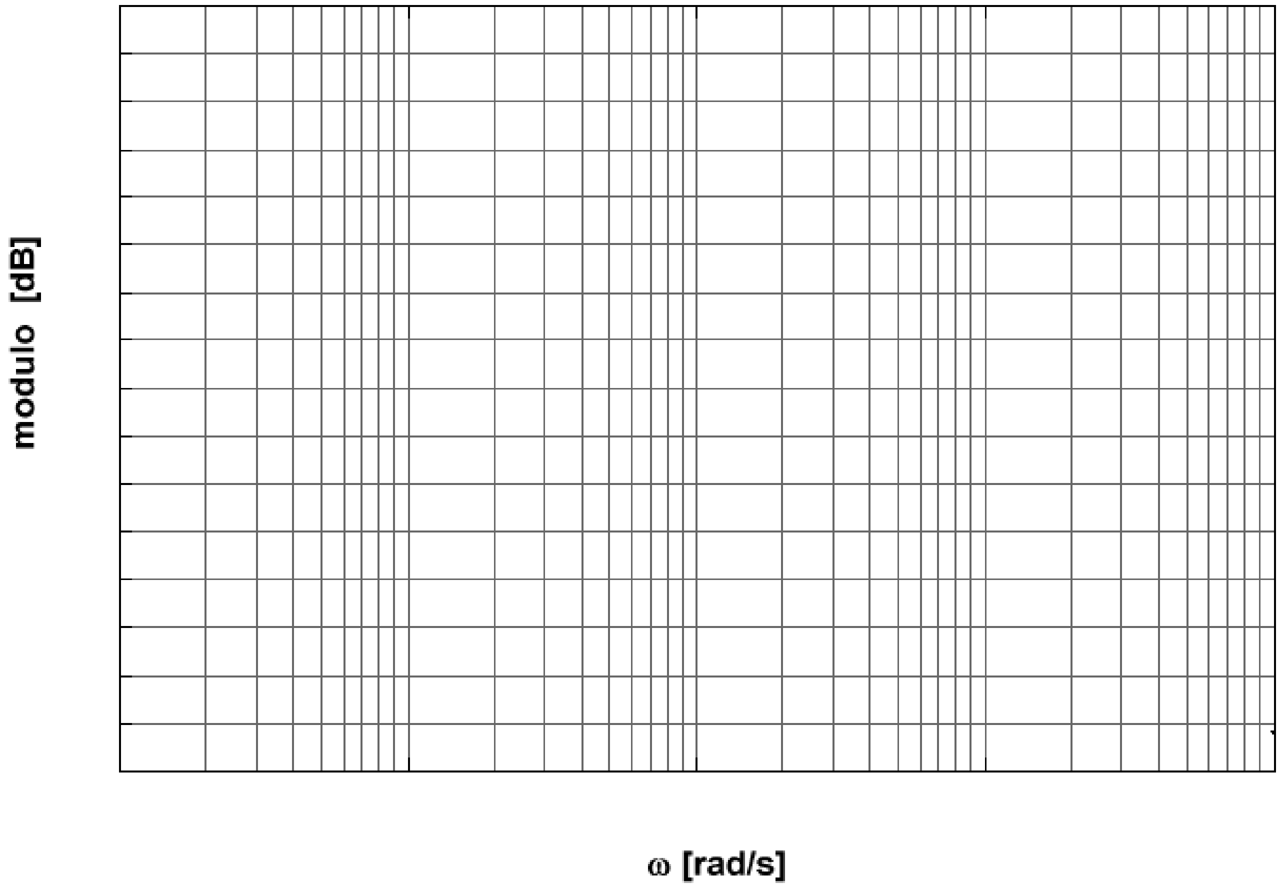
Ejemplo 2

- Tenemos los siguientes términos:

Termino	Frecuencia Esquina
$G_1(j\omega) = 5$	$-$
$G_2(j\omega) = \dfrac{1}{j\omega}$	1
$G_3(j\omega) = \dfrac{1}{j0.5\omega + 1}$	2
$G_4(j\omega) = j0.1\omega + 1$	10
$G_5(j\omega) = \dfrac{1}{(j\omega/50)^2 + j0.6\omega/50 + 1}$	50

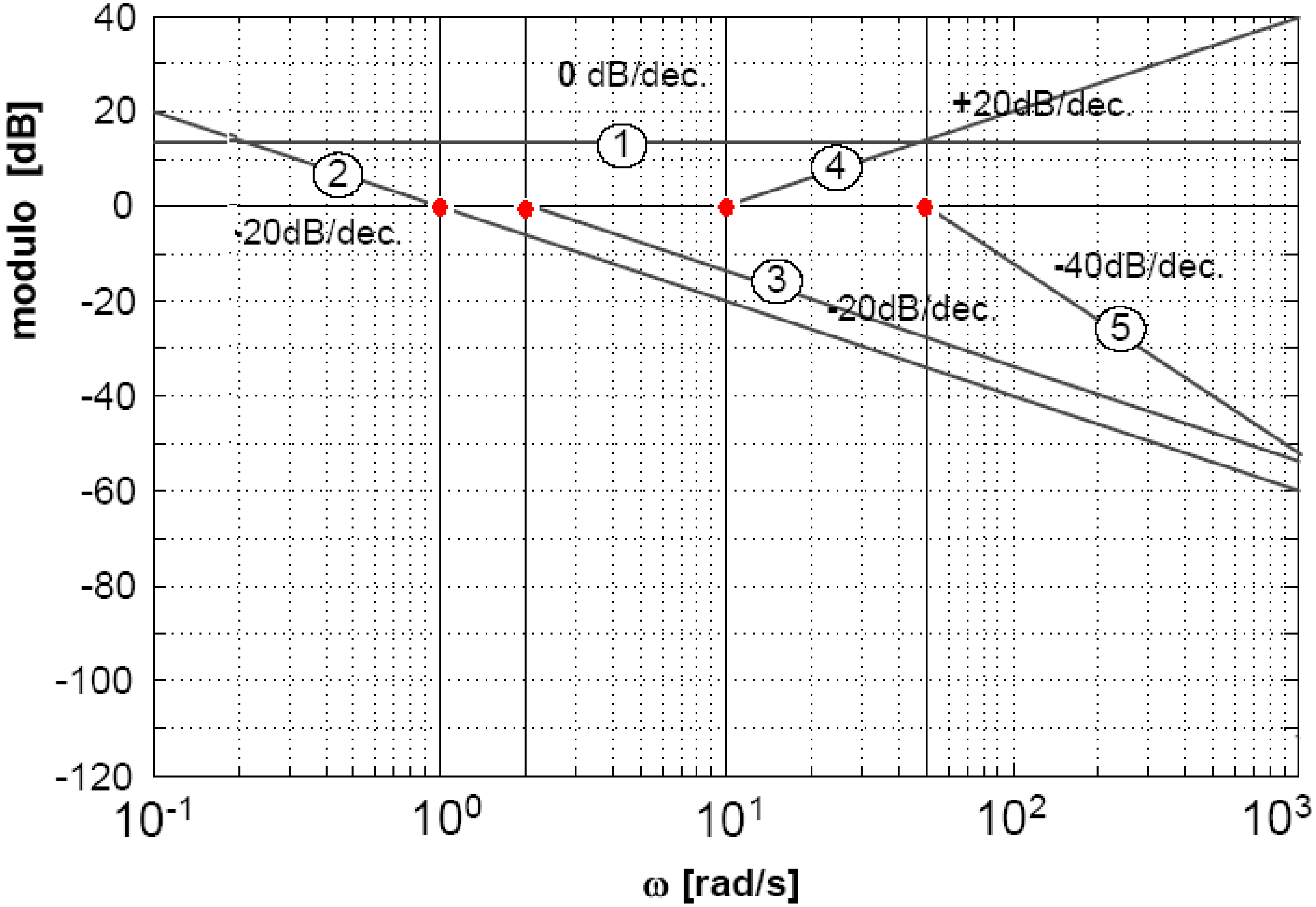
Ejemplo 2

Debemos utilizar **escala semi-logarítmica**:



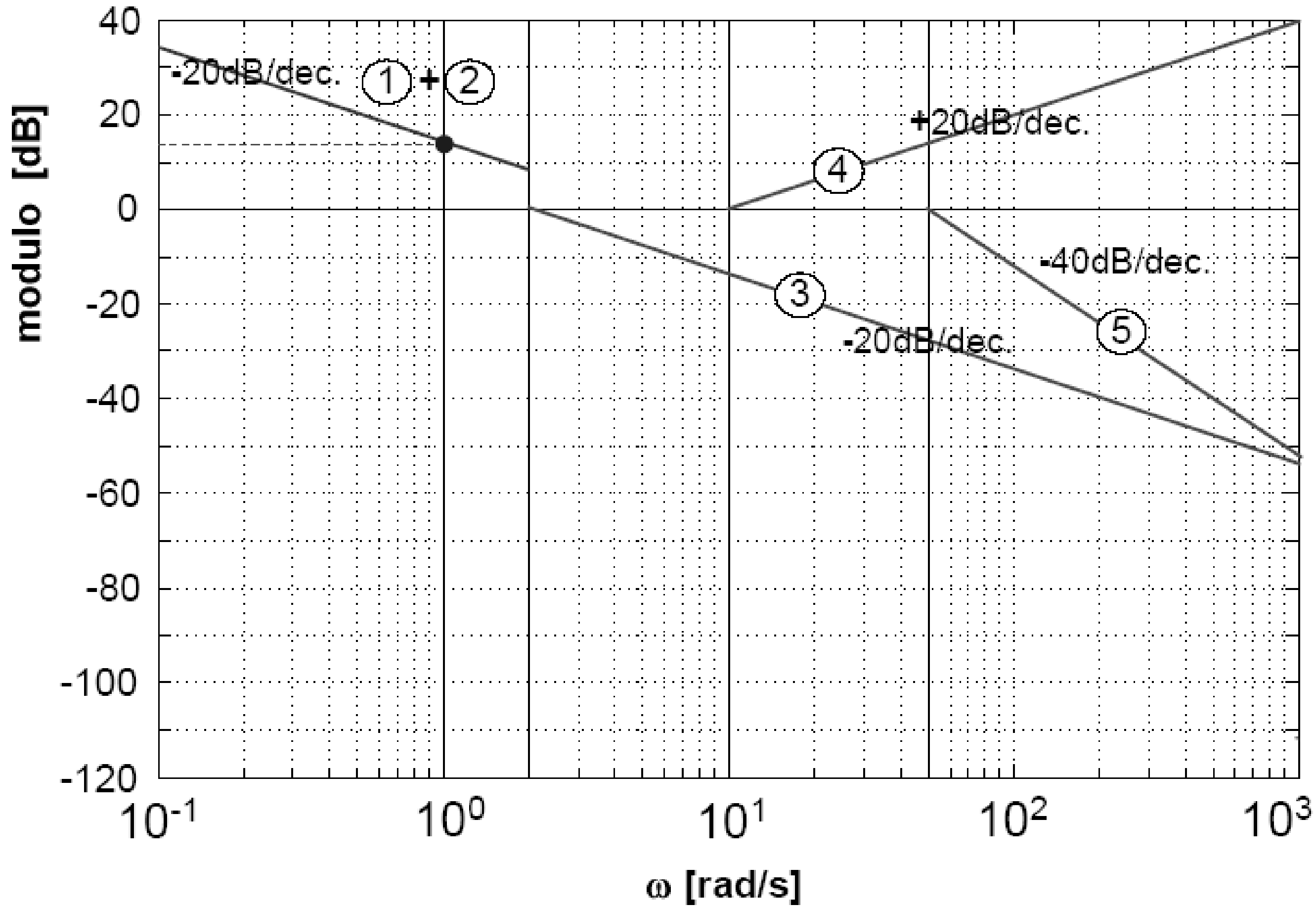
Ejemplo 2

Dibujamos el módulo en dB de cada término:



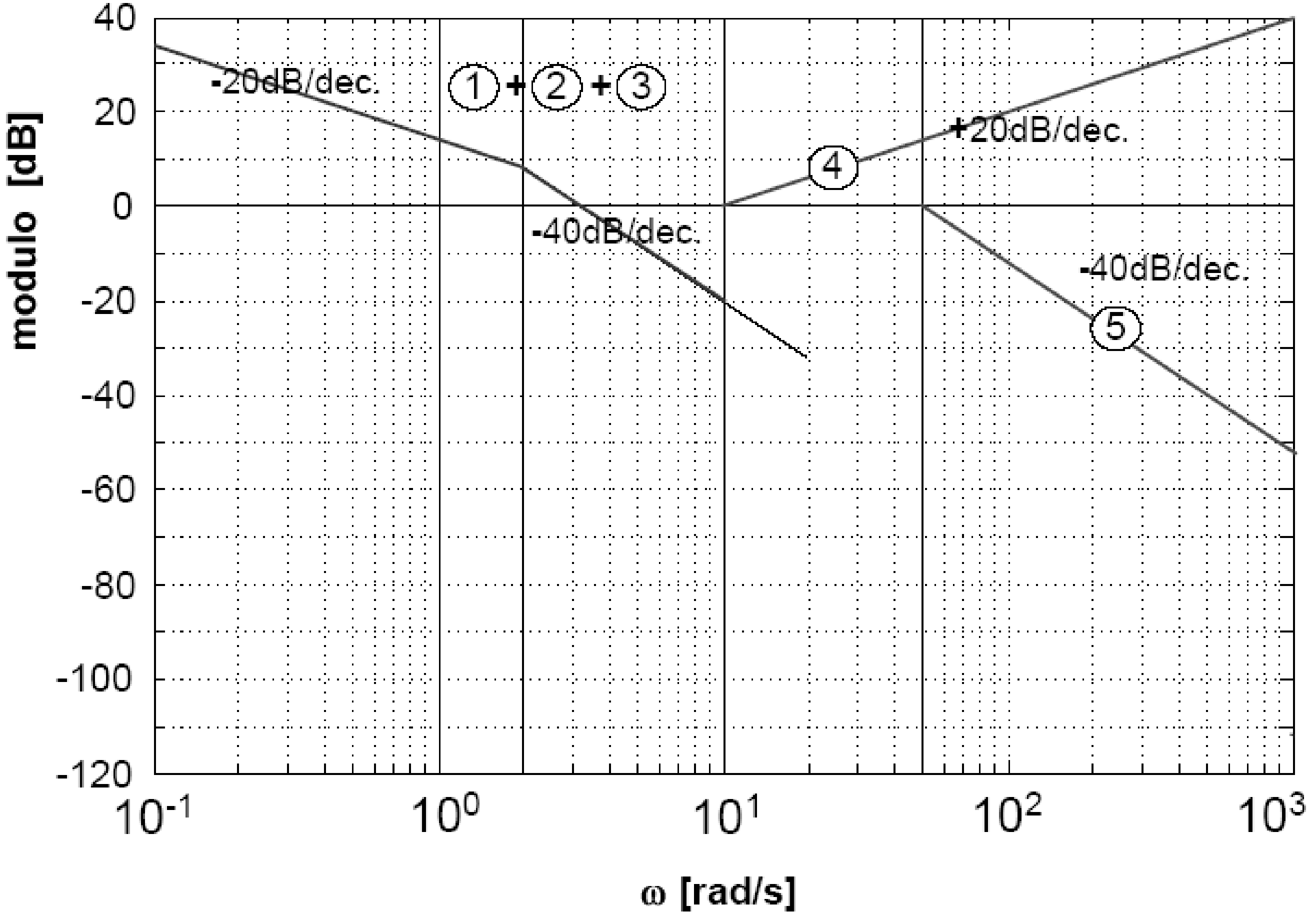
Ejemplo 2

Sumamos gráficamente los módulos de cada término:



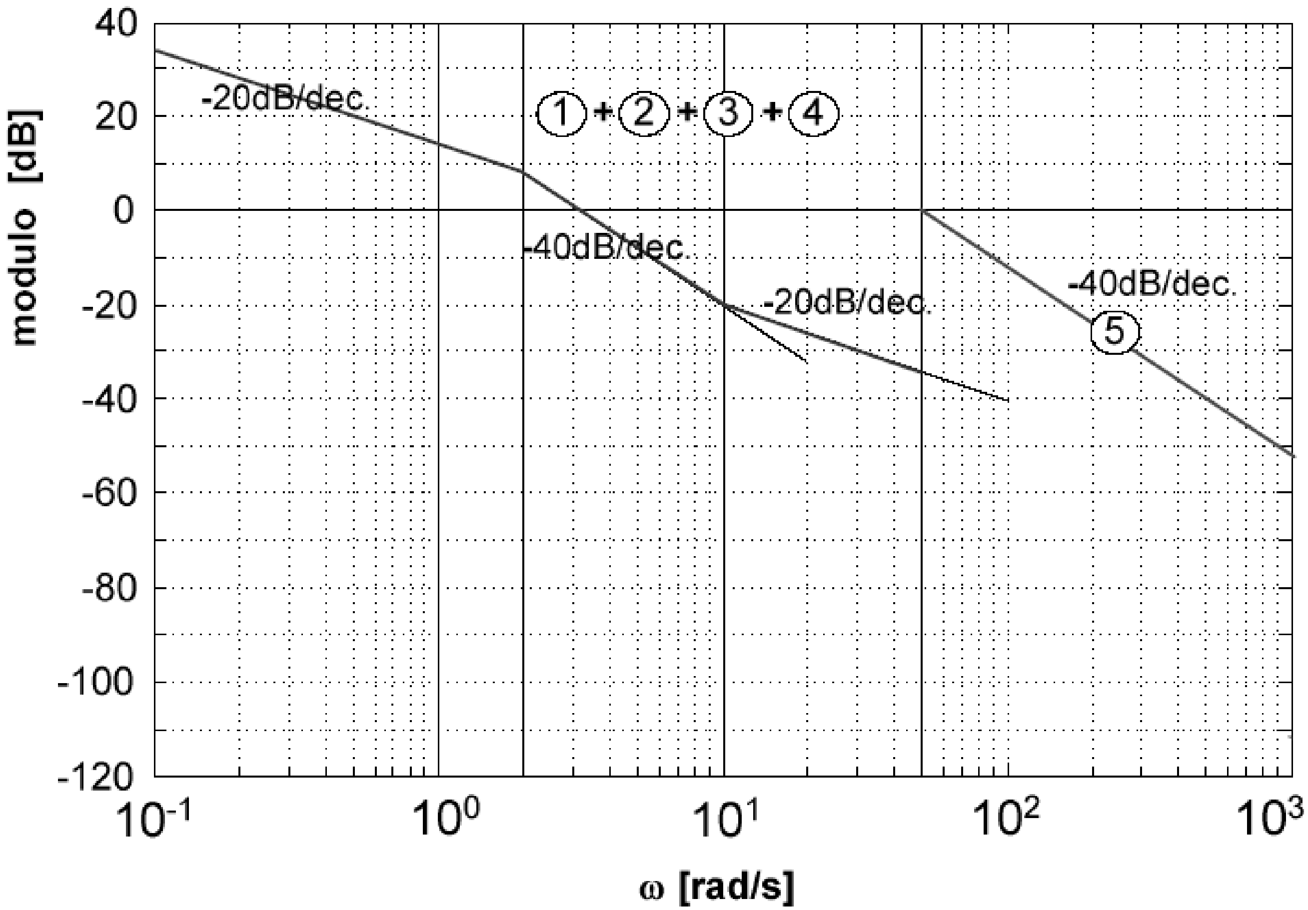
Ejemplo 2

Sumamos gráficamente los módulos de cada término **…**



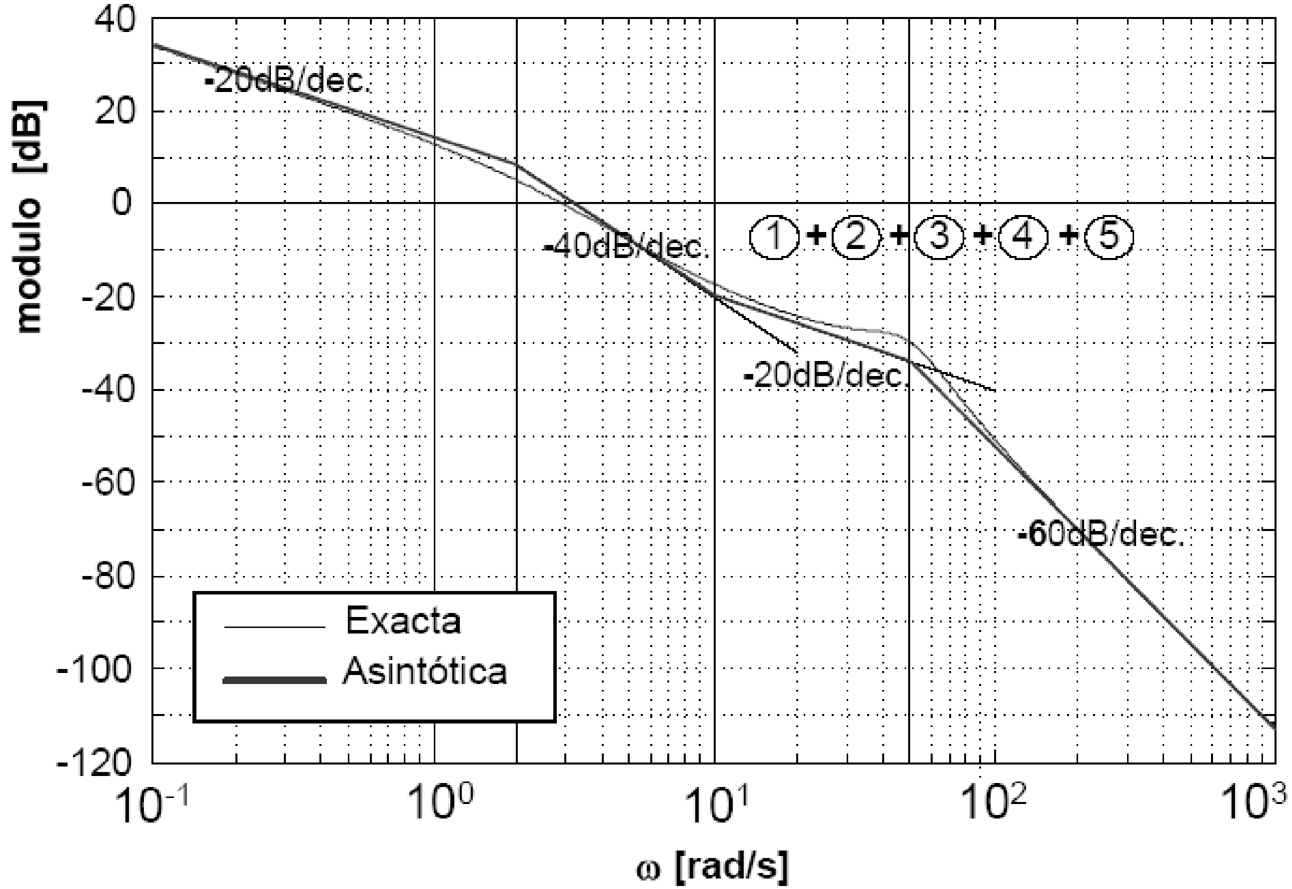
Ejemplo 2

Sumamos gráficamente los módulos de cada término …



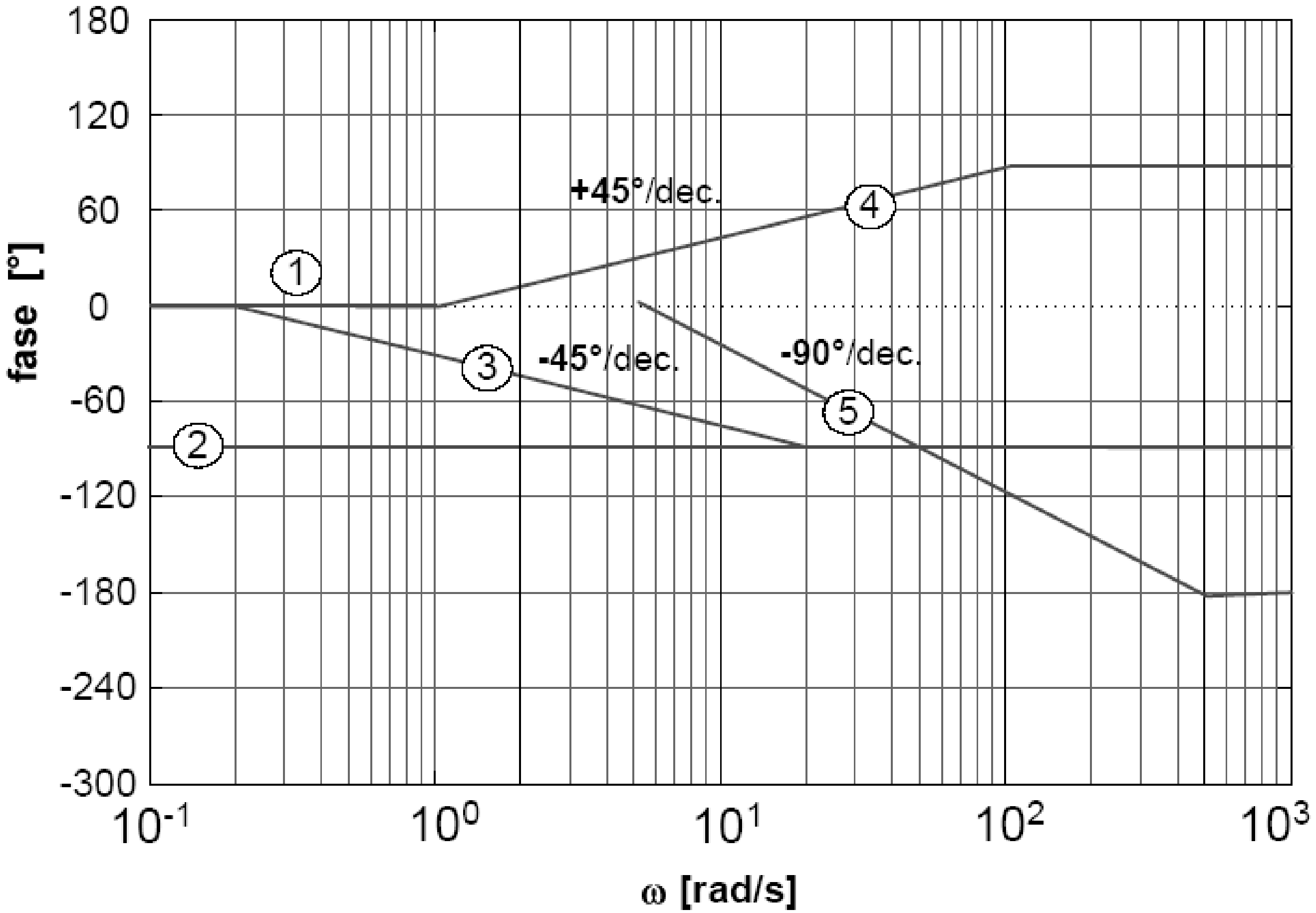
Ejemplo 2

Finalmente obtenemos la curva del módulo:



Ejemplo 2

Dibujamos la fase de cada término:



Ejemplo 2

Sumamos todo para obtener la curva de la fase: