EL249 - Ingeniería de control 2

Unidad N°3: Diseño de observadores de estados, integración de controladores y observadores

Semana 10

- Observador de orden reducido
- Diseño del regulador con observador

MEng. Carlos H. Inga Espinoza

OBSERVADOR DE ORDEN REDUCIDO

Introducción

- Los observadores de estado estudiados fueron diseñados para estimar <u>todas</u> las variables de estado.

- En la práctica, sin embargo, algunas variables de estado pueden ser medidas de forma precisa.

- Por lo tanto, dichas variables de estado no necesitan ser estimadas por un observador.

- *En ese caso, un observador de estados reducido debe diseñarse para estimar solamente las variables de estado que no pueden medirse directamente.*

Introducción

- Suponga que el vector de estados **x** es un *n*-vector y el vector de salida **y** es un *m*-vector que puede ser medido.

- Ya que m variables de salida son combinaciones lineales de las variables de estado, m variables de estado no necesitan ser estimadas.

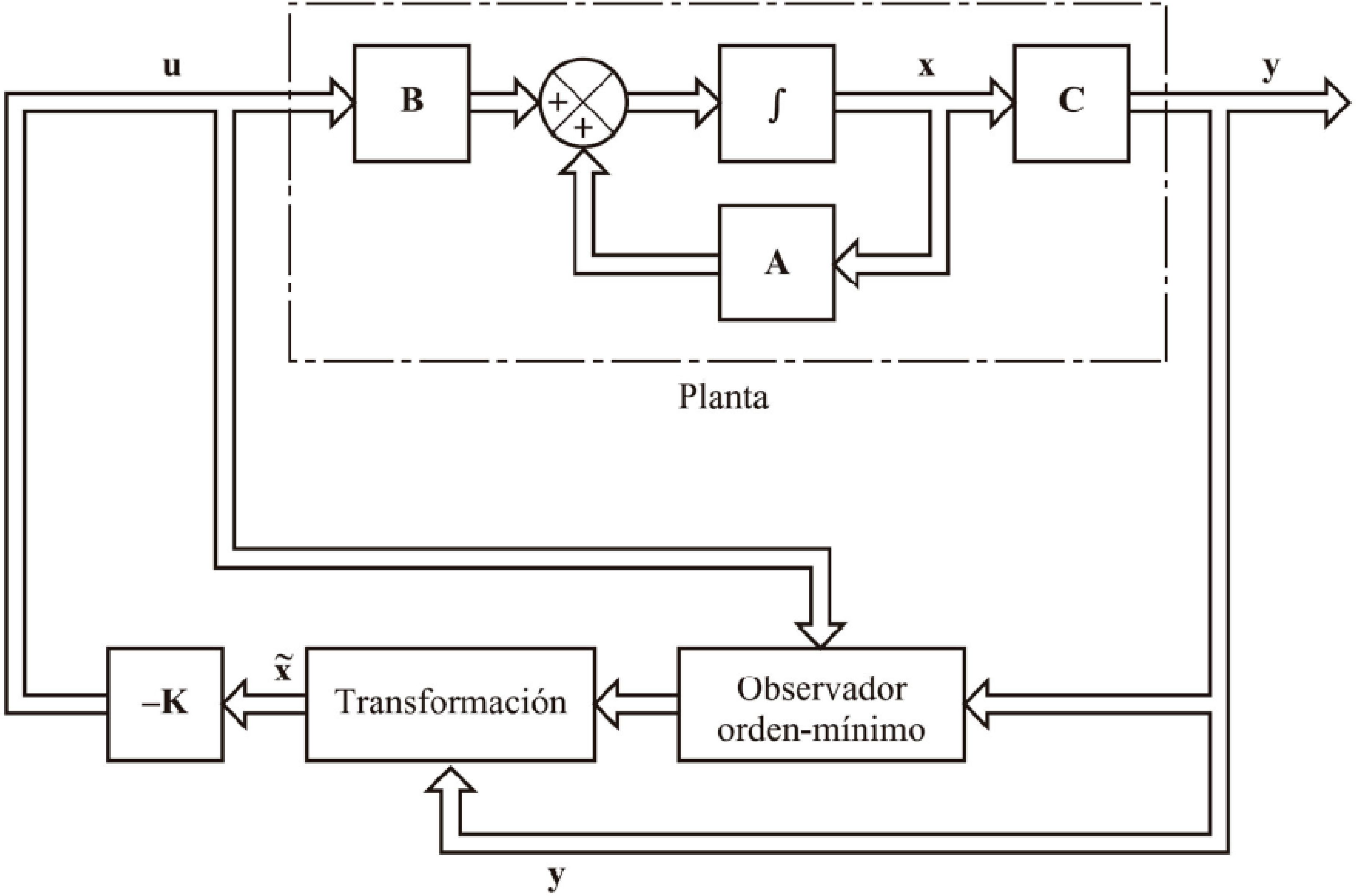
- Solo necesitamos estimar *n-m* variables de estado.

- Entonces el observador de orden reducido se vuelve un observador de orden *(n-m).*

- A este observador de orden *(n-m)* se le llama observador de orden mínimo (OOM).

Introducción

- La siguiente figura muestra el diagrama de bloques del sistema con un observador de orden reducido.



Observador de orden reducido

- Para presentar la idea básica del observador de orden mínimo consideraremos una salida escalar. (i.e. m=1).
- Considere el sistema:

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{B}u$$
$$y = \boldsymbol{C}\boldsymbol{x}$$

- Donde el vector de estados **x** puede ser partido en dos partes x_a (un escalar) y $\mathbf{x}_b$ [un (n-1)-vector].

- Aquí la variable de estado x_a es igual a la salida y por lo que se puede medir directamente, y $\mathbf{x}_b$ es la porción no medible del vector de estados.

Observador de orden reducido

- Luego el estado particionado y la salida quedarían así:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_a \\ \hdashline \dot{\mathbf{x}}_b \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c:c} A_{aa} & \mathbf{A}_{ab} \\ \hdashline \mathbf{A}_{ba} & \mathbf{A}_{bb} \end{array}\right] \begin{bmatrix} x_a \\ \hdashline \mathbf{x}_b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_a \\ \hdashline \mathbf{B}_b \end{bmatrix} u$$

$$y = \left[\begin{array}{c:c} 1 & \mathbf{0} \end{array}\right] \begin{bmatrix} x_a \\ \hdashline \mathbf{x}_b \end{bmatrix}$$

donde A_{aa} = escalar

$\mathbf{A}_{ab}$ = matriz de $1 \times (n-1)$

$\mathbf{A}_{ba}$ = matriz de $(n-1) \times 1$

$\mathbf{A}_{bb}$ = matriz de $(n-1) \times (n-1)$

B_a = escalar

$\mathbf{B}_b$ = matriz de $(n-1) \times 1$

Observador de orden reducido

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_a \\ \hdashline \dot{\mathbf{x}}_b \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c:c} A_{aa} & \mathbf{A}_{ab} \\ \hdashline \mathbf{A}_{ba} & \mathbf{A}_{bb} \end{array}\right] \begin{bmatrix} x_a \\ \hdashline \mathbf{x}_b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_a \\ \hdashline \mathbf{B}_b \end{bmatrix} u$$

$$y = \left[\begin{array}{c:c} 1 & \mathbf{0} \end{array}\right] \begin{bmatrix} x_a \\ \hdashline \mathbf{x}_b \end{bmatrix}$$

- La ecuación de la parte medida esta dada por:

$$\dot{x}_a = A_{aa}x_a + \mathbf{A}_{ab}\mathbf{x}_b + B_a u$$

- O

$$\dot{x}_a - A_{aa}x_a - B_a u = \mathbf{A}_{ab}\mathbf{x}_b$$

- Los términos del lado izquierdo de la ecuación de arriba pueden ser medidos (contiene cantidades conocidas). Esta ecuación servirá como ecuación de salida.
- El lado izquierdo puede verse como el “y” medido o real y el lado derecho como el “y” estimado

Observador de orden reducido

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_a \\ \hdashline \dot{\mathbf{x}}_b \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c:c} A_{aa} & \mathbf{A}_{ab} \\ \hdashline \mathbf{A}_{ba} & \mathbf{A}_{bb} \end{array}\right] \begin{bmatrix} x_a \\ \hdashline \mathbf{x}_b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_a \\ \hdashline \mathbf{B}_b \end{bmatrix} u$$

$$y = \left[\begin{array}{c:c} 1 & \mathbf{0} \end{array}\right] \begin{bmatrix} x_a \\ \hdashline \mathbf{x}_b \end{bmatrix}$$

- La ecuación de la parte no medida (estimada) esta dada por:

$$\dot{\mathbf{x}}_b = \mathbf{A}_{ba} x_a + \mathbf{A}_{bb} \mathbf{x}_b + \mathbf{B}_b u$$

- Note que los términos $\mathbf{A}_{ba}x_a$ y $\mathbf{B}_b u$ son cantidades conocidas.

- La ecuación de arriba describe la dinámica de la parte no medida de los estados.

Observador de orden reducido

- El procedimiento de diseño puede ser simplificado si utilizamos el método de diseño para el observador de orden completo (OOC).

- Comparemos la ecuación de estado para el OOC con la del observador de orden mínimo. La ecuación de estado del OOC es:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u$$

- La ecuación de estado del OOM es:

$$\dot{\mathbf{x}}_b = \mathbf{A}_{bb}\mathbf{x}_b + \mathbf{A}_{ba}x_a + \mathbf{B}_b u$$

- Las ecuaciones de salida para el OOC y el OOM son respectivamente:

$$y = \mathbf{C}\mathbf{x} \qquad \dot{x}_a - A_{aa}x_a - B_a u = \mathbf{A}_{ab}\mathbf{x}_b$$

Observador de orden reducido

- Lista de sustituciones necesarias para escribir la ecuación del observador para el OOM

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u \qquad \dot{\mathbf{x}}_b = \mathbf{A}_{bb}\mathbf{x}_b + \mathbf{A}_{ba}x_a + \mathbf{B}_b u$$

$$y = \mathbf{C}\mathbf{x} \qquad \dot{x}_a - A_{aa}x_a - B_a u = \mathbf{A}_{ab}\mathbf{x}_b$$

Observador de estado de orden completo	Observador de estado de orden mínimo
$\tilde{\mathbf{x}}$	$\tilde{\mathbf{x}}_b$
$\mathbf{A}$	$\mathbf{A}_{bb}$
$\mathbf{B}u$	$\mathbf{A}_{ba}x_a + \mathbf{B}_b u$
y	$\dot{x}_a - A_{aa}x_a - B_a u$
$\mathbf{C}$	$\mathbf{A}_{ab}$
$\mathbf{K}_e$ (matriz $n \times 1$)	$\mathbf{K}_e$ [matriz $(n-1) \times 1$]

Tabla 1

Observador de orden reducido

- La ecuación del sistema observado para el OOC esta dada por:

$$\tilde{y} = C\tilde{x} \qquad \dot{\tilde{x}} = A\tilde{x} + Bu + K_e(y - \tilde{y})$$

$$\dot{\tilde{\mathbf{x}}} = (\mathbf{A} - \mathbf{K}_e\mathbf{C})\tilde{\mathbf{x}} + \mathbf{B}u + \mathbf{K}_e y$$

- Luego, haciendo sustituciones de la Tabla 1 en la ecuación de arriba, obtendremos:

$$\underline{\dot{\tilde{\mathbf{x}}}_b} = (\mathbf{A}_{bb} - \mathbf{K}_e\mathbf{A}_{ab})\tilde{\mathbf{x}}_b + \underline{\mathbf{A}_{ba}x_a} + \mathbf{B}_b u + \underline{\mathbf{K}_e(\dot{x}_a} - \underline{A_{aa}x_a} - B_a u)$$

- Donde la matriz K_e es una matriz de (n-1)x1
- Observe que para estimar $\dot{\tilde{x_b}}$ se necesita la derivada de x_a. Esto no es deseable pues la derivada amplifica el ruido. Para evitar esto, eliminaremos $\dot{x_a}$ de la siguiente forma:

Observador de orden reducido

- Se reescribe la ecuación anterior de la forma (cambiamos $x_a = y$, movemos $\dot{x}_a$ a la izquierda y factorizamos *u* e *y*):

$$\begin{aligned}\dot{\tilde{\mathbf{x}}}_b - \mathbf{K}_e\dot{x}_a &= (\mathbf{A}_{bb} - \mathbf{K}_e\mathbf{A}_{ab})\tilde{\mathbf{x}}_b + (\mathbf{A}_{ba} - \mathbf{K}_e A_{aa})y + (\mathbf{B}_b - \mathbf{K}_e B_a)u \\ &= (\mathbf{A}_{bb} - \mathbf{K}_e\mathbf{A}_{ab})(\tilde{\mathbf{x}}_b - \mathbf{K}_e y) \\ &\quad + [(\mathbf{A}_{bb} - \mathbf{K}_e\mathbf{A}_{ab})\mathbf{K}_e + \mathbf{A}_{ba} - \mathbf{K}_e A_{aa}]y \\ &\quad (\mathbf{B}_b - \mathbf{K}_e B_a)u\end{aligned}$$

- Definimos:

$$\boxed{\mathbf{x}_b - \mathbf{K}_e y = \mathbf{x}_b - \mathbf{K}_e x_a = \boldsymbol{\eta}} \Rightarrow \tilde{\mathbf{x}}_b - \mathbf{K}_e y = \tilde{\mathbf{x}}_b - \mathbf{K}_e x_a = \tilde{\boldsymbol{\eta}}$$

- Reemplazando:

$$\begin{aligned}\dot{\tilde{\boldsymbol{\eta}}} &= (\mathbf{A}_{bb} - \mathbf{K}_e\mathbf{A}_{ab})\tilde{\boldsymbol{\eta}} + [(\mathbf{A}_{bb} - \mathbf{K}_e\mathbf{A}_{ab})\mathbf{K}_e \\ &\quad + \mathbf{A}_{ba} - \mathbf{K}_e A_{aa}]y + (\mathbf{B}_b - \mathbf{K}_e B_a)u\end{aligned}$$

Donde:

$$\hat{\mathbf{A}} = \mathbf{A}_{bb} - \mathbf{K}_e\mathbf{A}_{ab}$$

$$\hat{\mathbf{B}} = \hat{\mathbf{A}}\mathbf{K}_e + \mathbf{A}_{ba} - \mathbf{K}_e A_{aa}$$

$$\hat{\mathbf{F}} = \mathbf{B}_b - \mathbf{K}_e B_a$$

Observador de orden reducido

- Finalmente la ec. del sist. observado queda:

$$\boxed{\dot{\tilde{\boldsymbol{\eta}}} = \hat{\mathbf{A}}\tilde{\boldsymbol{\eta}} + \hat{\mathbf{B}}y + \hat{\mathbf{F}}u}$$

- Para elaborar la ecuación de salida (la que nos entregará el x estimado), recordamos y damos forma para incluir a η:

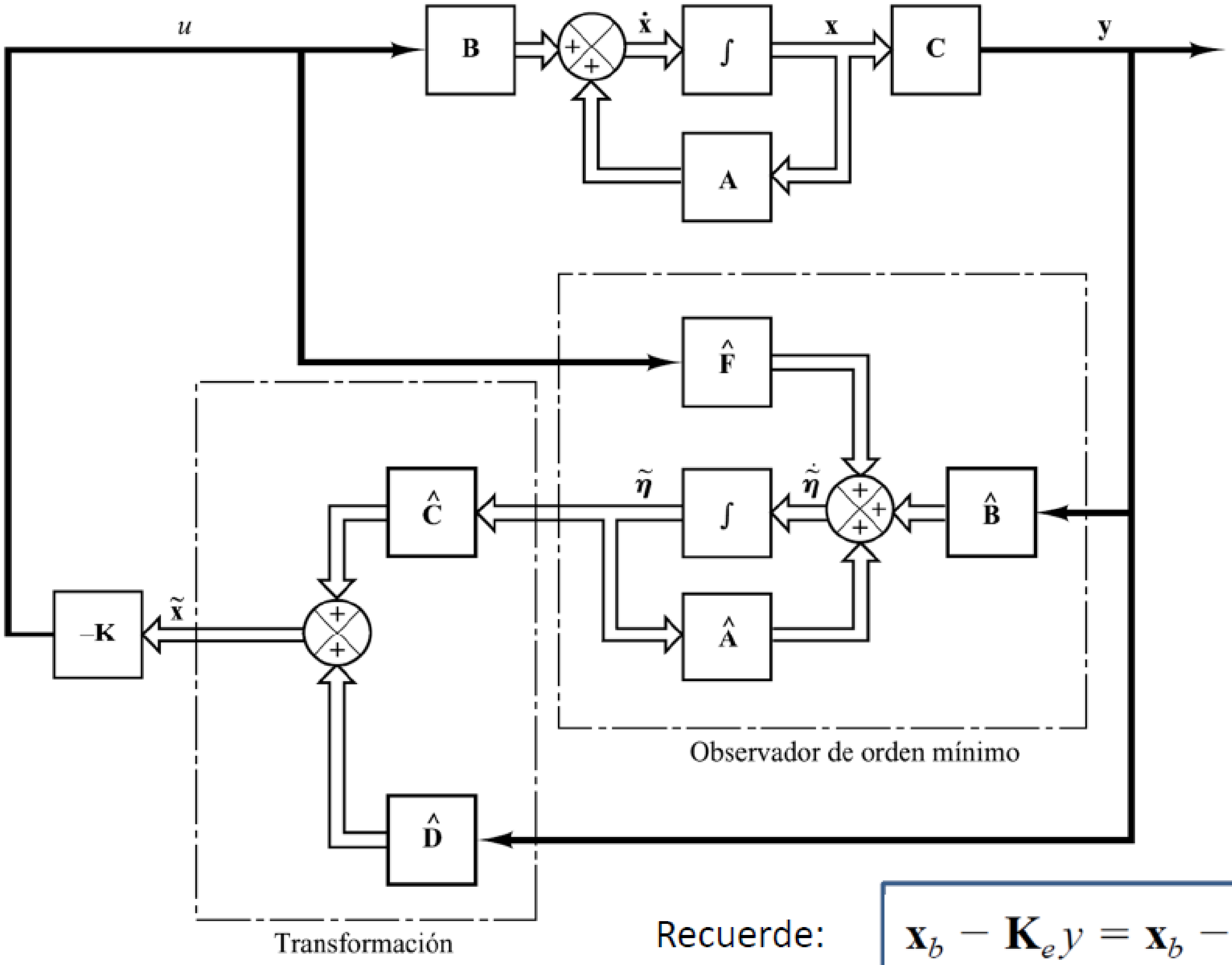
$$y = [1 \ \vdots \ \mathbf{0}]\begin{bmatrix} x_a \\ \hdashline \mathbf{x}_b \end{bmatrix}$$

$$\tilde{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} x_a \\ \hdashline \tilde{\mathbf{x}}_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y \\ \hdashline \tilde{\mathbf{x}}_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \hdashline \mathbf{I}_{n-1} \end{bmatrix}[\tilde{\mathbf{x}}_b - \mathbf{K}_e y] + \begin{bmatrix} 1 \\ \hdashline \mathbf{K}_e \end{bmatrix} y$$

$$\hat{\mathbf{C}} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \hdashline \mathbf{I}_{n-1} \end{bmatrix}, \qquad \hat{\mathbf{D}} = \begin{bmatrix} 1 \\ \hdashline \mathbf{K}_e \end{bmatrix}$$

$$\boxed{\tilde{\mathbf{x}} = \hat{\mathbf{C}}\tilde{\boldsymbol{\eta}} + \hat{\mathbf{D}}y}$$

Observador de orden reducido



Recuerde: $\boxed{\mathbf{x}_b - \mathbf{K}_e y = \mathbf{x}_b - \mathbf{K}_e x_a = \boldsymbol{\eta}}$

Observador de orden reducido

- Ahora para obtener el error del observador recordamos:

$$\dot{\tilde{\mathbf{x}}}_b = (\mathbf{A}_{bb} - \mathbf{K}_e\mathbf{A}_{ab})\tilde{\mathbf{x}}_b + \mathbf{A}_{ba}x_a + \mathbf{B}_b u + \mathbf{K}_e\mathbf{A}_{ab}\mathbf{x}_b$$

$$\dot{\mathbf{x}}_b = \mathbf{A}_{ba}x_a + \mathbf{A}_{bb}\mathbf{x}_b + \mathbf{B}_b u$$

- Si los restamos tendremos:

$$\dot{\mathbf{e}} = (\mathbf{A}_{bb} - \mathbf{K}_e\mathbf{A}_{ab})\mathbf{e}$$

Donde:

$$\mathbf{e} = \mathbf{x}_b - \tilde{\mathbf{x}}_b = \boldsymbol{\eta} - \tilde{\boldsymbol{\eta}}$$

- e tiene dimensión (n-1)
- Al igual que para el caso del OOC, se debe cumplir que el sistema es completamente observable al orden mínimo, es decir que:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}_{ab} \\ \mathbf{A}_{ab}\mathbf{A}_{bb} \\ \vdots \\ \mathbf{A}_{ab}\mathbf{A}_{bb}^{n-2} \end{bmatrix}$$

Sea de orden n-1

Observador de orden reducido

- La ecuación característica para el sistema observado será:

$$\begin{aligned}|s\mathbf{I} - \mathbf{A}_{bb} + \mathbf{K}_e\mathbf{A}_{ab}| &= (s-\mu_1)(s-\mu_2)\cdots(s-\mu_{n-1}) \\ &= \underbrace{s^{n-1} + \hat{\alpha}_1 s^{n-2} + \cdots + \hat{\alpha}_{n-2}s + \hat{\alpha}_{n-1}}_{\text{Ecuación deseada}} = 0\end{aligned}$$

- K_e se determina seleccionando primero los valores propios deseados del OOM y después siguiendo el procedimiento que se hizo para el OOC.
- Al igual que en el OOC, el principio de separación se cumple para el OOM $|s\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{B}\mathbf{K}||s\mathbf{I} - \mathbf{A}_{bb} + \mathbf{K}_e\mathbf{A}_{ab}| = 0$

MÉTODOS PARA CALCULAR LA GANANCIA DEL OBSERVADOR

Observador de orden reducido

- Usando la matriz de transformación

$$\mathbf{K}_e = \hat{\mathbf{Q}} \begin{bmatrix} \hat{\alpha}_{n-1} - \hat{a}_{n-1} \\ \hat{\alpha}_{n-2} - \hat{a}_{n-2} \\ \vdots \\ \hat{\alpha}_1 - \hat{a}_1 \end{bmatrix} = (\hat{\mathbf{W}}\hat{\mathbf{N}}^*)^{-1} \begin{bmatrix} \hat{\alpha}_{n-1} - \hat{a}_{n-1} \\ \hat{\alpha}_{n-2} - \hat{a}_{n-2} \\ \vdots \\ \hat{\alpha}_1 - \hat{a}_1 \end{bmatrix}$$

donde $\mathbf{K}_e$ es una matriz de $(n-1) \times 1$ y

$$\hat{\mathbf{N}} = [\mathbf{A}_{ab}{}^* \mid \mathbf{A}_{bb}{}^*\mathbf{A}_{ab}{}^* \mid \cdots \mid (\mathbf{A}_{bb}{}^*)^{n-2}\mathbf{A}_{ab}{}^*] = (n-1) \times (n-1) \text{ matriz}$$

$$\hat{\mathbf{W}} = \begin{bmatrix} \hat{a}_{n-2} & \hat{a}_{n-3} & \cdots & \hat{a}_1 & 1 \\ \hat{a}_{n-3} & \hat{a}_{n-4} & \cdots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \hat{a}_1 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix} = (n-1) \times (n-1) \text{ matriz}$$

Recuerde: Los coeficientes salen de la ec. de estado del OOM: $|s\mathbf{I} - \mathbf{A}_{bb}| = s^{n-1} + \hat{a}_1 s^{n-2} + \cdots + \hat{a}_{n-2}s + \hat{a}_{n-1} = 0$

Observador de orden reducido

- Usando la fórmula de Ackermann

$$\mathbf{K}_e = \phi(\mathbf{A}_{bb}) \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{ab} \\ \mathbf{A}_{ab}\mathbf{A}_{bb} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \mathbf{A}_{ab}\mathbf{A}_{bb}^{n-3} \\ \mathbf{A}_{ab}\mathbf{A}_{bb}^{n-2} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\phi(\mathbf{A}_{bb}) = \mathbf{A}_{bb}^{n-1} + \hat{\alpha}_1 \mathbf{A}_{bb}^{n-2} + \cdots + \hat{\alpha}_{n-2}\mathbf{A}_{bb} + \hat{\alpha}_{n-1}\mathbf{I}$$

Ejemplo 1

- Considere el sistema

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u$$

$$y = \mathbf{C}\mathbf{x}$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -11 & -6 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = [1 \quad 0 \quad 0]$$

- Asuma que la salida y puede ser medida con precisión de tal forma que la variable x_1 (que es igual a y) no se necesite estimar. Diseñe un OOM. Se desea que los polos del observador estén en:

[Sin título]

$$s = -10, \qquad s = -10$$

- El K del controlador es: K=[90 29 4] y ubica los polos en: $s_1 = -2 + j2\sqrt{3}, s_2 = -2 - j2\sqrt{3}, s_3 = -6$

Ejemplo 1

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -11 & -6 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{\mathbf{x}} = \left[\begin{array}{c} x_a \\ \hdashline \tilde{\mathbf{x}}_b \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} x_1 \\ \hdashline \tilde{x}_2 \\ \tilde{x}_3 \end{array}\right], \qquad \mathbf{A} = \left[\begin{array}{c:cc} 0 & 1 & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & 1 \\ -6 & -11 & -6 \end{array}\right], \qquad \mathbf{B} = \left[\begin{array}{c} 0 \\ \hdashline 0 \\ 1 \end{array}\right]$$

FT DEL SISTEMA CONTROLADOR - OOM

FT del sistema controlador-OOM

- Recordando que:

$$\dot{\tilde{\boldsymbol{\eta}}} = (\mathbf{A}_{bb} - \mathbf{K}_e\mathbf{A}_{ab})\tilde{\boldsymbol{\eta}} + [(\mathbf{A}_{bb} - \mathbf{K}_e\mathbf{A}_{ab})\mathbf{K}_e + \mathbf{A}_{ba} - \mathbf{K}_e\mathbf{A}_{aa}]y + (\mathbf{B}_b - \mathbf{K}_e B_a)u$$

$$\dot{\tilde{\boldsymbol{\eta}}} = \hat{\mathbf{A}}\tilde{\boldsymbol{\eta}} + \hat{\mathbf{B}}y + \hat{\mathbf{F}}u \qquad \hat{\mathbf{A}} = \mathbf{A}_{bb} - \mathbf{K}_e\mathbf{A}_{ab}$$

$$\tilde{\boldsymbol{\eta}} = \tilde{\mathbf{x}}_b - \mathbf{K}_e y \qquad \hat{\mathbf{B}} = \hat{\mathbf{A}}\mathbf{K}_e + \mathbf{A}_{ba} - \mathbf{K}_e A_{aa}$$

$$u = -\mathbf{K}\tilde{\mathbf{x}} \qquad \hat{\mathbf{F}} = \mathbf{B}_b - \mathbf{K}_e B_a$$

- Reemplazando el estimador en la ecuación de u:

$$u = -\mathbf{K}\tilde{\mathbf{x}} = -[K_a \quad \mathbf{K}_b]\begin{bmatrix} y \\ \tilde{\mathbf{x}}_b \end{bmatrix} = -K_a y - \mathbf{K}_b\tilde{\mathbf{x}}_b$$

$$= -\mathbf{K}_b\tilde{\boldsymbol{\eta}} - (K_a + \mathbf{K}_b\mathbf{K}_e)y$$

- Y sustituyendo en la ecuación de estado observado:

$$\dot{\tilde{\boldsymbol{\eta}}} = \hat{\mathbf{A}}\tilde{\boldsymbol{\eta}} + \hat{\mathbf{B}}y + \hat{\mathbf{F}}[-\mathbf{K}_b\tilde{\boldsymbol{\eta}} - (K_a + \mathbf{K}_b\mathbf{K}_e)y]$$

$$= (\hat{\mathbf{A}} - \hat{\mathbf{F}}\mathbf{K}_b)\tilde{\boldsymbol{\eta}} + [\hat{\mathbf{B}} - \hat{\mathbf{F}}(K_a + \mathbf{K}_b\mathbf{K}_e)]y$$

FT del sistema controlador-OOM

$$
\begin{aligned}
\dot{\tilde{\boldsymbol{\eta}}} &= \hat{\mathbf{A}}\tilde{\boldsymbol{\eta}} + \hat{\mathbf{B}}y + \hat{\mathbf{F}}[-\mathbf{K}_b\tilde{\boldsymbol{\eta}} - (K_a + \mathbf{K}_b\mathbf{K}_e)y] \\
&= \underline{(\hat{\mathbf{A}} - \hat{\mathbf{F}}\mathbf{K}_b)}\tilde{\boldsymbol{\eta}} + \underline{[\hat{\mathbf{B}} - \hat{\mathbf{F}}(K_a + \mathbf{K}_b\mathbf{K}_e)]}y
\end{aligned}
$$

- Definimos:

$$
\begin{aligned}
\tilde{\mathbf{A}} &= \hat{\mathbf{A}} - \hat{\mathbf{F}}\mathbf{K}_b \\
\tilde{\mathbf{B}} &= \hat{\mathbf{B}} - \hat{\mathbf{F}}(K_a + \mathbf{K}_b\mathbf{K}_e) \\
\tilde{\mathbf{C}} &= -\mathbf{K}_b \\
\tilde{D} &= -(K_a + \mathbf{K}_b\mathbf{K}_e)
\end{aligned}
$$

- Finalmente tendremos la ec. de estado del sistema controlado y observado

$$
\boxed{
\begin{aligned}
\dot{\tilde{\boldsymbol{\eta}}} &= \tilde{\mathbf{A}}\tilde{\boldsymbol{\eta}} + \tilde{\mathbf{B}}y \\
u &= \tilde{\mathbf{C}}\tilde{\boldsymbol{\eta}} + \tilde{D}y
\end{aligned}
}
$$

FT del sistema controlador-OOM

- Aplicando la transformación a FT que ya conocemos sabiendo que la entrada es -Y:

$$U(s) = [\tilde{\mathbf{C}}(s\mathbf{I} - \tilde{\mathbf{A}})^{-1}\tilde{\mathbf{B}} + \tilde{D}]Y(s)$$
$$= -[\tilde{\mathbf{C}}(s\mathbf{I} - \tilde{\mathbf{A}})^{-1}\tilde{\mathbf{B}} + \tilde{D}][-Y(s)]$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{U(s)}{-Y(s)} = \frac{\text{num}}{\text{den}} = -[\tilde{\mathbf{C}}(s\mathbf{I} - \tilde{\mathbf{A}})^{-1}\tilde{\mathbf{B}} + \tilde{D}]$$

En Matlab $\Rightarrow$ `[num,den] = ss2tf(Atilde, Btilde, -Ctilde, -Dtilde)`

DISEÑO DE REGULADOR CON OBSERVADOR

Diseño de regulador con observador

- Se mostrarán los pasos de diseño con un ejemplo. Sea la planta:

$$G(s) = \frac{10(s+2)}{s(s+4)(s+6)}$$

- Se requiere para la condición inicial que se muestra que el Mo<35% y el Ts = ~4seg. Se usará un OOM (solo la salida y es medible)

$$\mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{e}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

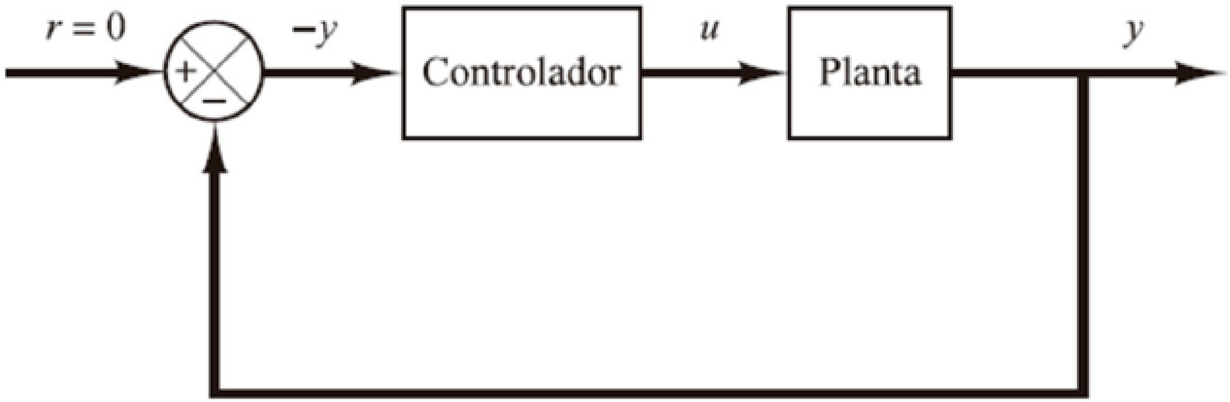
Paso 1. Obtener el espacio de estados

- Sabemos:

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{10(s+2)}{s(s+4)(s+6)}$$

$$\dddot{y} + 10\ddot{y} + 24\dot{y} = 10\dot{u} + 20u \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -24 & -10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 10 \\ -80 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + [0]u$$



Paso 2. Selección de polos

- Primer intento: Se selecciona los polos de LC en:

$$s = -1 + j2, \qquad s = -1 - j2, \qquad s = -5$$

- Y para el OOM:

$$s = -10, \qquad s = -10$$

Paso 3. Calcular las ganancias

- En Matlab:

MATLAB Programa 10-11

```
% Cálculo de la matriz de ganancia de realimentación del estado K
A=[0  1  0;0  0  1;0  -24  -10];
B=[0;10;-80];
C=[1  0  0];
J=[-1+j*2  -1-j*2  -5];
K=acker(A,B,J)
K=
   1.2500  1.2500  0.19375
% Cálculo de la matriz de ganancia del observador Ke
Aaa=0; Aab=[1  0]; Aba=[0;0]; Abb=[0  1;-24  -10];Ba=0; Bb=[10;-80];
L=[-10  -10];
Ke=acker(Abb',Aab',L)'
Ke=
    10
   -24
```

Paso 4. Calcular la FT

MATLAB Programa 10-12

```
% Determinación de la función de transferencia del controlador-observador

A=[0  1  0;0  0  1;0  -24  -10];
B=[0;10;-80];
Aaa=0; Aab=[1  0]; Aba=[0;0]; Abb=[0  1;-24  -10];
Ba=0; Bb=[10;-80];
Ka=1.25; Kb=[1.25  0.19375];
Ke=[10;-24];
Ahat=Abb-Ke*Aab;
Bhat=Ahat*Ke + Aba-Ke*Aaa;
Fhat=Bb-Ke*Ba;
Atilde=Ahat-Fhat*Kb;
Btilde=Bhat-Fhat*(Ka + Kb*Ke);
Ctilde=-Kb;
Dtilde=-(Ka + Kb*Ke);
[num,den]=ss2tf(Atilde, Btilde, -Ctilde, -Dtilde)

num=
   9.1000  73.5000  125.0000

den=

   1.0000  17.0000  -30.0000
```

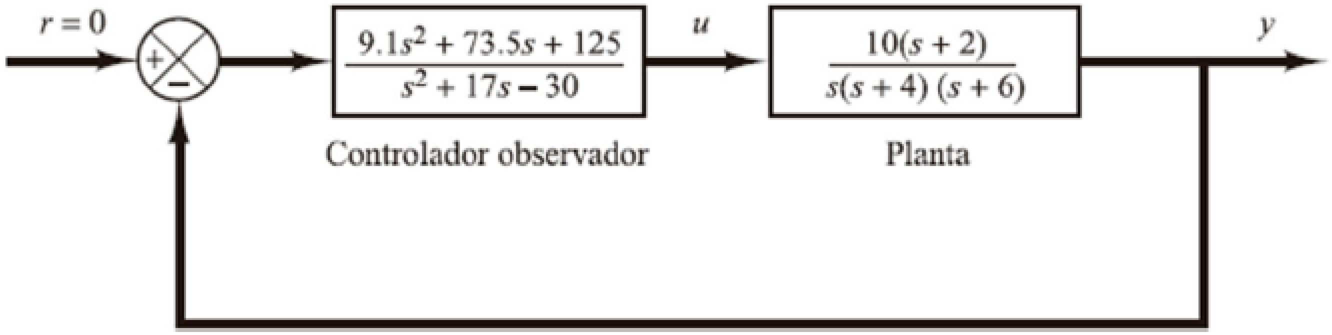
$$G_c(s) = \frac{U(s)}{-Y(s)} = \frac{\text{num}}{\text{den}} = -[\tilde{\mathbf{C}}(s\mathbf{I} - \tilde{\mathbf{A}})^{-1}\tilde{\mathbf{B}} + \tilde{D}]$$

$$G_c(s) = \frac{9.1s^2 + 73.5s + 125}{s^2 + 17s - 30}$$

$$= \frac{9.1(s + 5.6425)(s + 2.4344)}{(s + 18.6119)\boxed{(s - 1.6119)}}$$

Conclusión

- El controlador-observador tiene un polo en el semiplano derecho.
- No es aceptable un controlador inestable.
- Debe hacerse otro intento con raíces distintas.



Paso 2. Selección de polos (2^{da} prueba)

- Se modifican los polos del observador:

$$s = -4.5, \qquad s = -4.5$$

- Paso 3: Recalculando: $\mathbf{K}_e = \begin{bmatrix} -1 \\ 6.25 \end{bmatrix}$

- Paso 4: Recalculando: $$G_c(s) = \frac{1.2109s^2 + 11.2125s + 25.3125}{s^2 + 6s + 2.1406}$$
$$= \frac{1.2109(s + 5.3582)(s + 3.9012)}{(s + 5.619)(s + 0.381)}$$

- Diseño aceptable

Conclusión

- Se obtendrá la respuesta a la condición inicial:

$$\mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{e}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

- Usando la matriz extendida:

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}} \\ \dot{\mathbf{e}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} - \mathbf{BK} & \mathbf{BK}_b \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_{bb} - \mathbf{K}_e\mathbf{A}_{ab} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{e} \end{bmatrix}$$

Esto resulta de reemplazar $u = -K\tilde{x}$ en la ec. de estado. Entonces:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax} - \mathbf{BK}\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax} - \mathbf{BK}\begin{bmatrix} x_a \\ \tilde{\mathbf{x}}_b \end{bmatrix} = \mathbf{Ax} - \mathbf{BK}\begin{bmatrix} x_a \\ \mathbf{x}_b - \mathbf{e} \end{bmatrix}$$

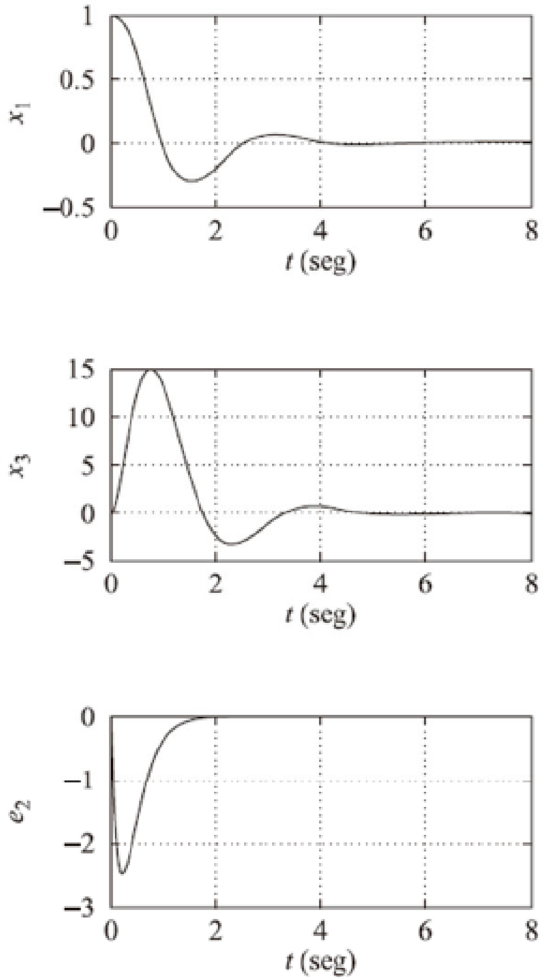
$$= \mathbf{Ax} - \mathbf{BK}\left\{\mathbf{x} - \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{e} \end{bmatrix}\right\} = \mathbf{Ax} - \mathbf{BKx} + \mathbf{B}[K_a \quad \mathbf{K}_b]\begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{e} \end{bmatrix}$$

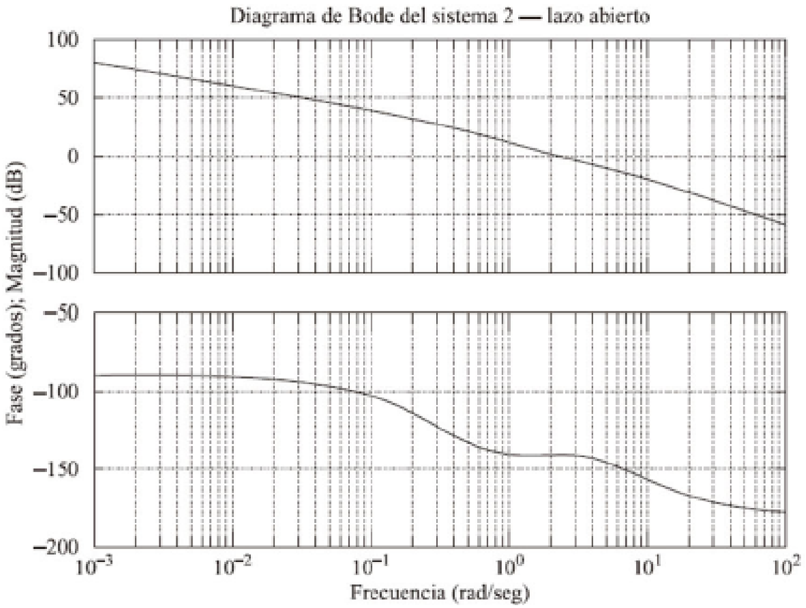
$$\dot{\mathbf{e}} = (\mathbf{A}_{bb} - \mathbf{K}_e\mathbf{A}_{ab})\mathbf{e}$$

MATLAB Programa 10-15

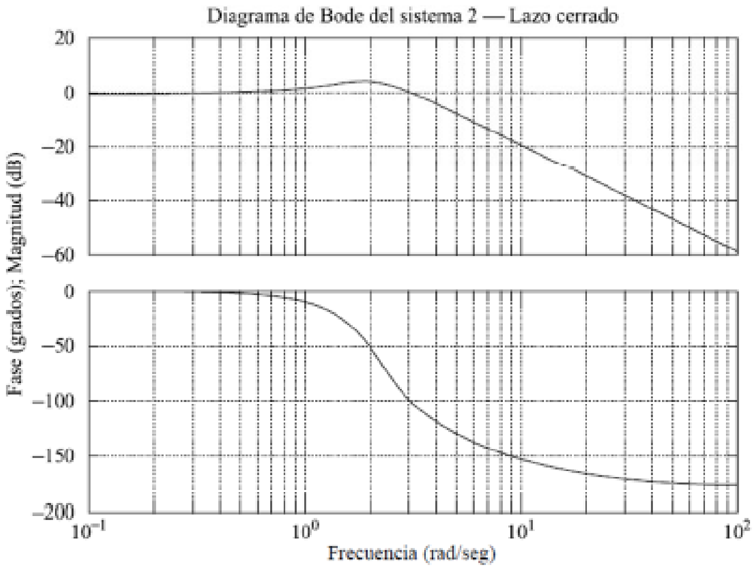
```
% Respuesta a condición inicial.

A=[0  1  0;0  0  1;0  -24  -10];
B=[0;10;-80];
K=[1.25  1.25  0.19375];
Kb=[1.25  0.19375];
Ke=[-1;6.25];
Aab=[1  0]; Abb=[0  1;-24  -10];
AA=[A-B*K  B*Kb; zeros(2,3)  Abb-Ke*Aab];
sys=ss(AA,eye(5),eye(5),eye(5));
t=0:0.01:8;
x=initial(sys,[1;0;0;1;0],t);
x1=[1  0  0  0  0]*x';
x2=[0  1  0  0  0]*x';
x3=[0  0  1  0  0]*x';
e1=[0  0  0  1  0]*x';
e2=[0  0  0  0  1]*x';

subplot(3,2,1); plot(t,x1); grid
xlabel ('t (seg)'); ylabel('x1')

subplot(3,2,2); plot(t,x2); grid
xlabel ('t (seg)'); ylabel('x2')

subplot(3,2,3); plot(t,x3); grid
xlabel ('t (seg)'); ylabel('x3')

subplot(3,2,4); plot(t,e1); grid
xlabel('t (seg)'); ylabel('e1')

subplot(3,2,5); plot(t,e2); grid
xlabel('t (seg)'); ylabel('e2')
```

Conclusión



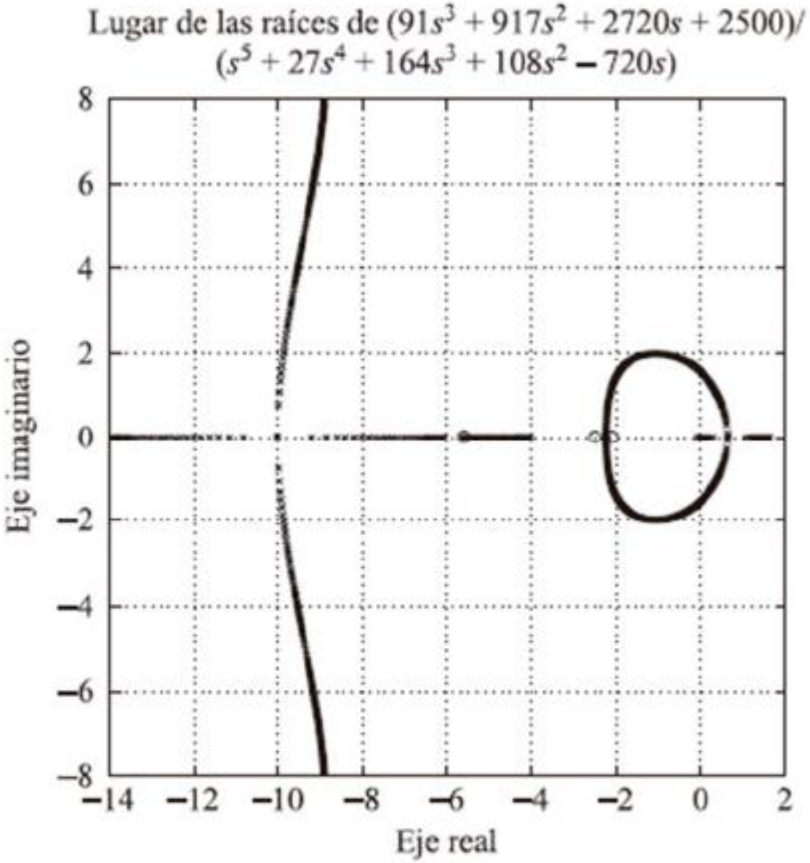


En LA:
Mf=40°
Mg=infinito
En LC:
BW=3.8rad/s



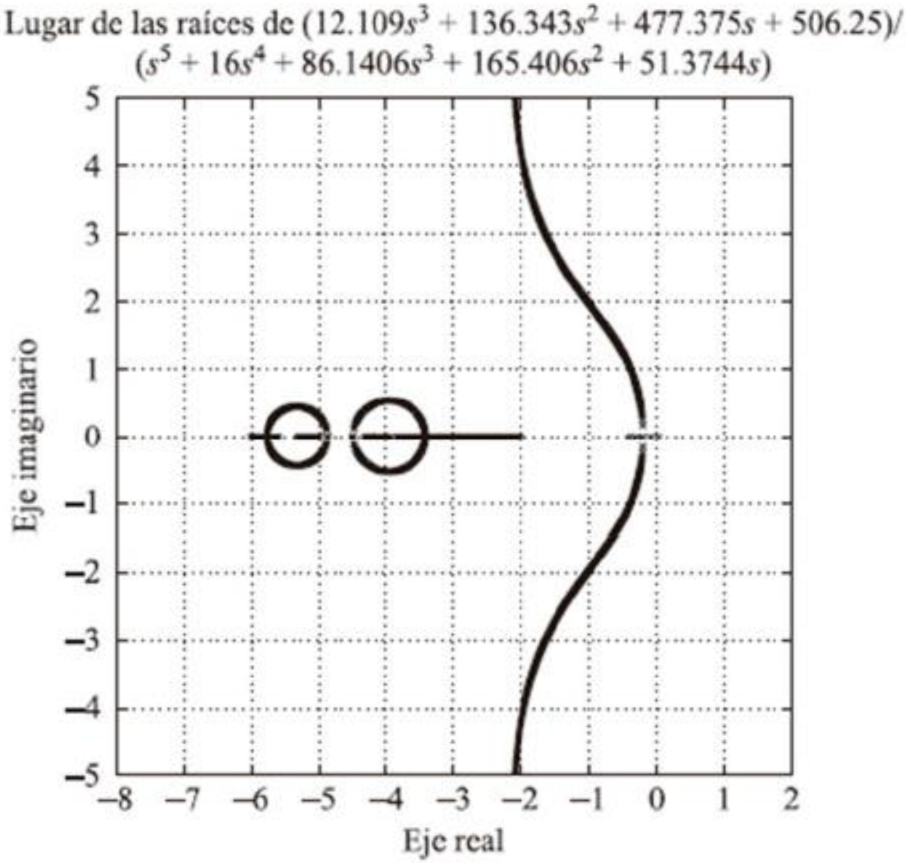
Conclusión

$K_e = [-10 \ \ -10]$



(a)

$K_e = [-4.5 \ \ -4.5]$



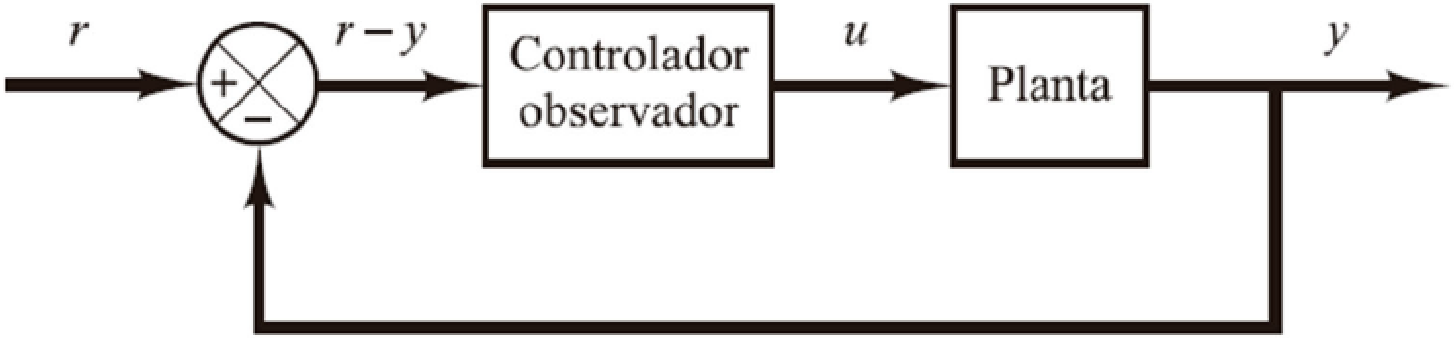
(b)

El controlador-observador es estable para cualquier K. Diseño aceptable.

SISTEMAS DE SEGUIMIENTO CON OBSERVADORES

Configuración 1. En serie

- El controlador-observador en línea con la planta



- Si diseñamos un control en esta configuración para la siguiente planta: $\dfrac{Y(s)}{U(s)} = \dfrac{1}{s(s^2+1)}$

- Obtendremos:

$$G_c(s) = \frac{302s^2 + 303s + 256}{s^2 + 18s + 113}$$

$$= \frac{302(s + 0.5017 + j0.772)(s + 0.5017 - j0.772)}{(s + 9 + j5.6569)(s + 9 - j5.6569)}$$

Configuración 1. En serie

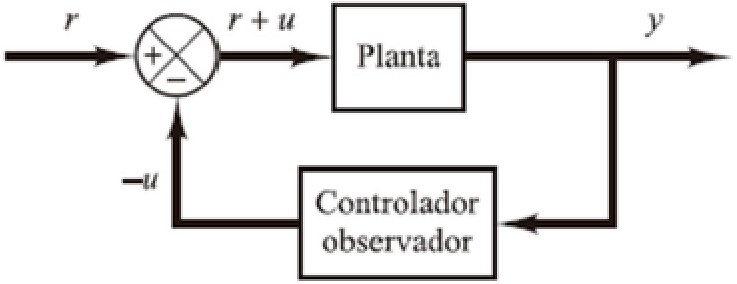
MATLAB Programa 10-17

```
% Determinación de la función de transferencia del controlador-observador

A=[0  1  0;0  0  1;0  -1  0];
B=[0;0;1];
Aaa=0; Aab=[1  0]; Aba=[0;0]; Abb=[0  1;-1  0];
Ba=0; Bb=[0;1];
Ka=16; Kb=[17  10];
Ke=[8;15];
Ahat=Abb-Ke*Aab;
Bhat=Ahat*Ke + Aba-Ke*Aaa;
Fhat=Bb-Ke*Ba;
Atilde=Ahat-Fhat*Kb;
Btilde=Bhat-Fhat*(Ka + Kb*Ke);
Ctilde=-Kb;
Dtilde=-(Ka + Kb*Ke);
[num,den]=ss2tf(Atilde,Btilde,-Ctilde,-Dtilde)

num=

   302.0000  303.0000  256.0000
den=

   1  18  113
```

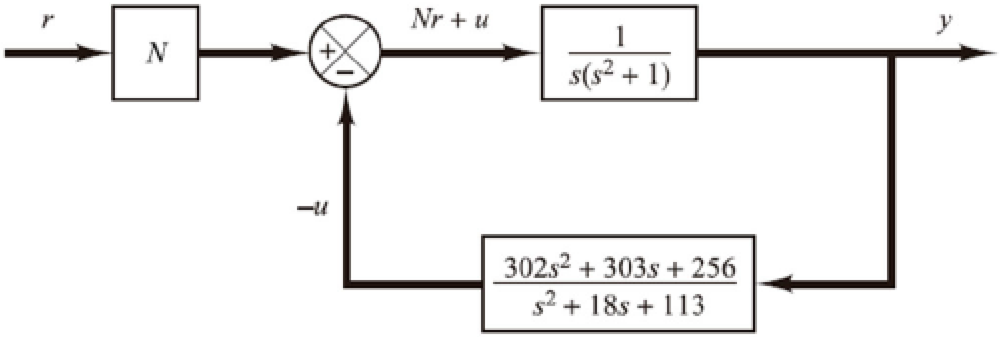
Resultado: Mo=28%, Ts=4.5seg

Configuración 2. En paralelo

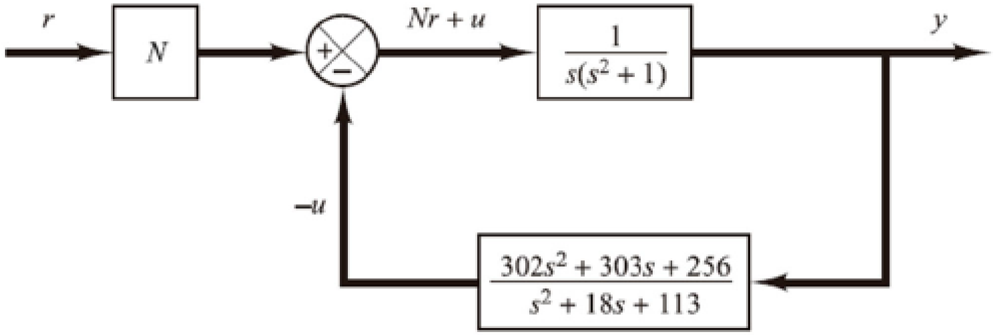
- Para el otro tipo de configuración:



- Siguiendo el ejemplo puede ubicarse el controlador diseñado haciendo:



Configuración 2. En paralelo



- El bloque N es un corrector para que no quede error en estado estable. Si calculamos la FT de LC:

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{N(s^2 + 18s + 113)}{s(s^2 + 1)(s^2 + 18s + 113) + 302s^2 + 303s + 256}$$

- Usando el TVF, es claro ver que el N necesario para obtener un error estable en cero será:

$$N = \frac{256}{113} = 2.2655$$

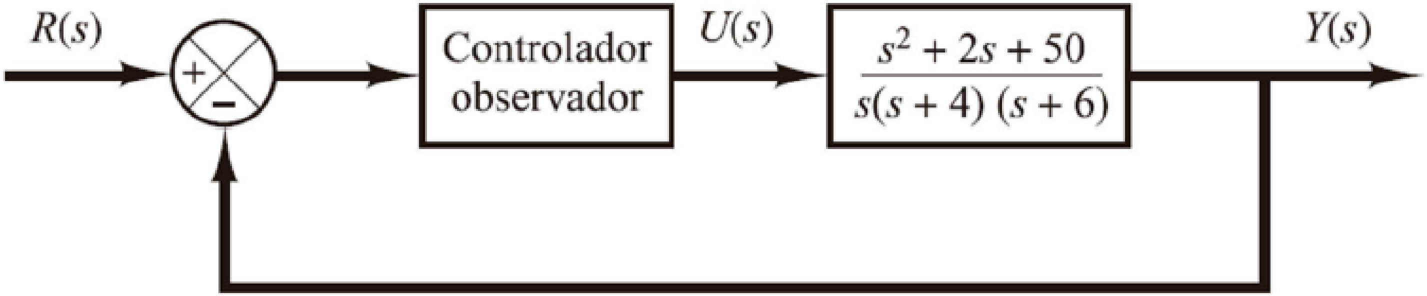
Resultado: Mo=4%, Ts=5seg

Problema 1

- Diseñe un controlador-OOC y un controlador-OOM, para el sistema que se muestra en la figura. Los polos en LC para el controlador están en:

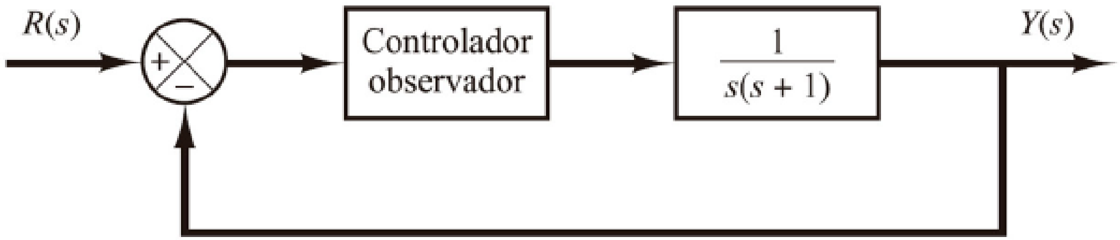
$$s = -1 + j2, \qquad s = -1 - j2, \qquad s = -5$$

- Para el OOC usar: 3 polos en -10
- Para el OOM usar: 2 polos en -10

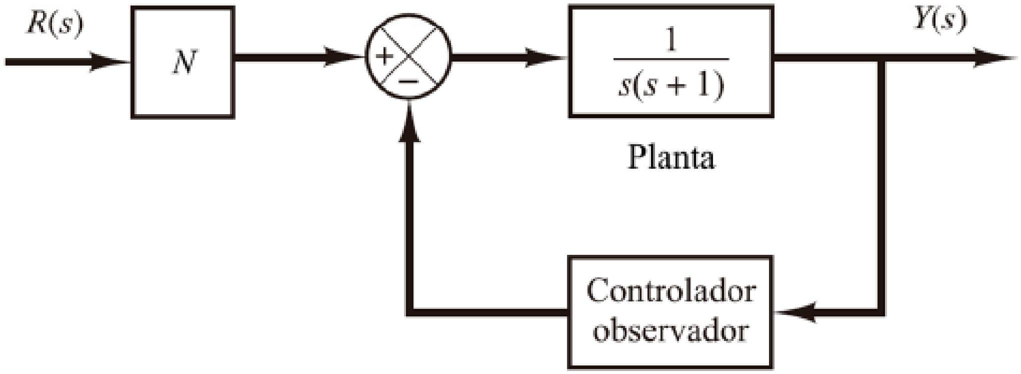


Problema 2

- Diseñe los sistemas de control de las figuras mostradas. Se desea que la ubicación del controlador este en: $s = -2 + j2, s = -2 - j2$ y del observador en: s=-8 y s=-8.



(a)



(b)

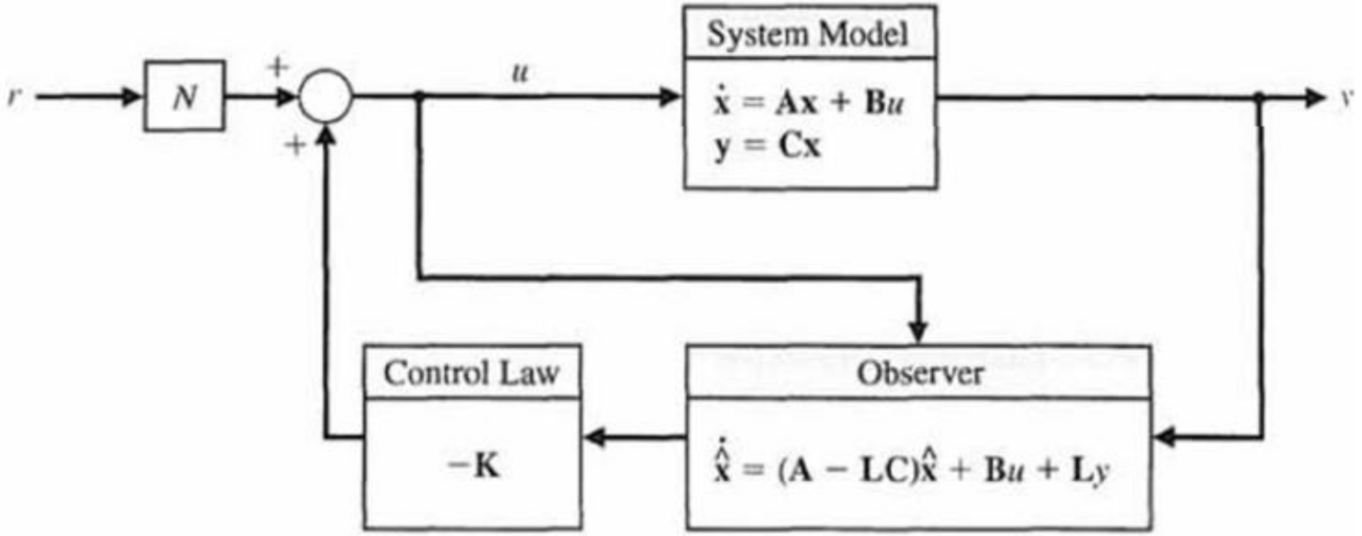
Problema 3

- Un sistema de control por realimentación se debe diseñar para seguir una referencia. El diagrama de bloques deseado se muestra en la figura. El modelo del sistema es:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u$$

$$y = \mathbf{C}\mathbf{x}$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & -5 & -10 \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{C} = [1 \quad 0 \quad 0].$$



Problema 3

Diseñe un observador y una ley de control para cumplir las siguientes especificaciones:

1. El error de estado estable para el sistema de LC a un escalón unitario debe ser cero
2. El margen de ganancia Mg>= 6 dB
3. El ancho de banda del sistema de LC wb>=10rad/s
4. Seleccione condiciones iniciales para x y otras distintas para $\tilde{x}$ y simule la respuesta del sistema de LC a un escalón unitario. Verifique el error estable sea cero.

Gracias por vuestra atención...