MC71 - Ingeniería de control 2

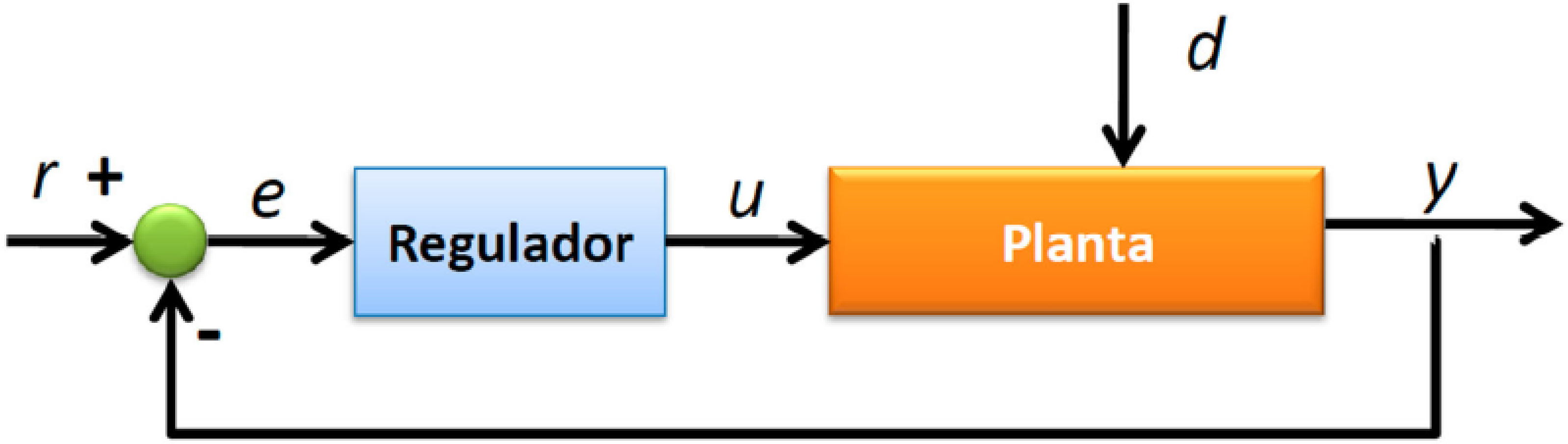
Unidad N°2: Diseño de controladores mediante realimentación de estados

Semana 5

- Controlabilidad de sistemas.
- Deducción de la condición de controlabilidad. Prueba de controlabilidad de sistemas.

MEng. Carlos H. Inga Espinoza

Diseño por realimentación de estados



En el control clásico la salida es retroalimentada al punto de suma. El controlador sólo responde cuando la perturbación en la salida y es perceptible

Modelo de Variable de estado - Lineal

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}\mathbf{u}$$

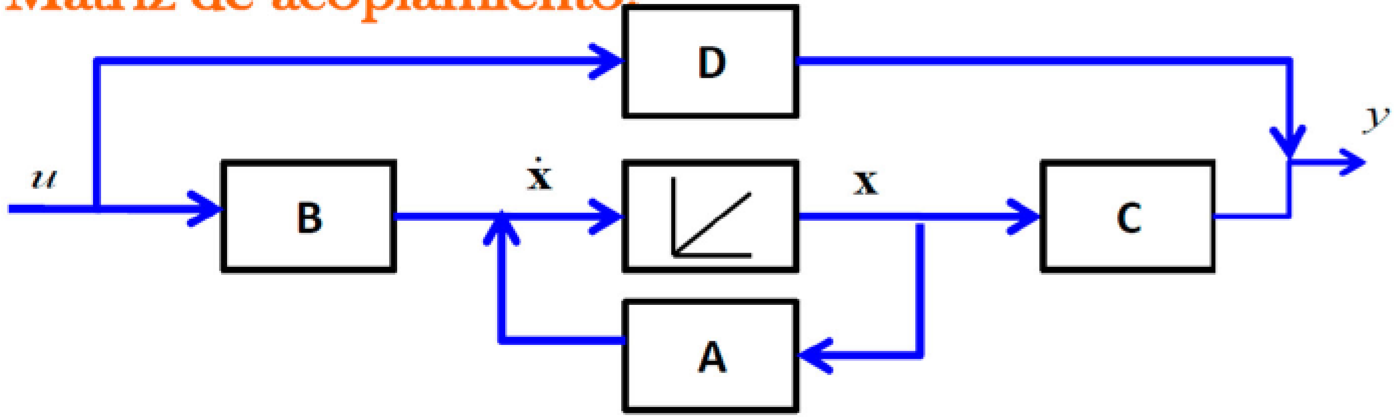
A,B,C y D son matrices, vectores y variables escalares con coeficientes constantes.

A:= Matriz del sistema

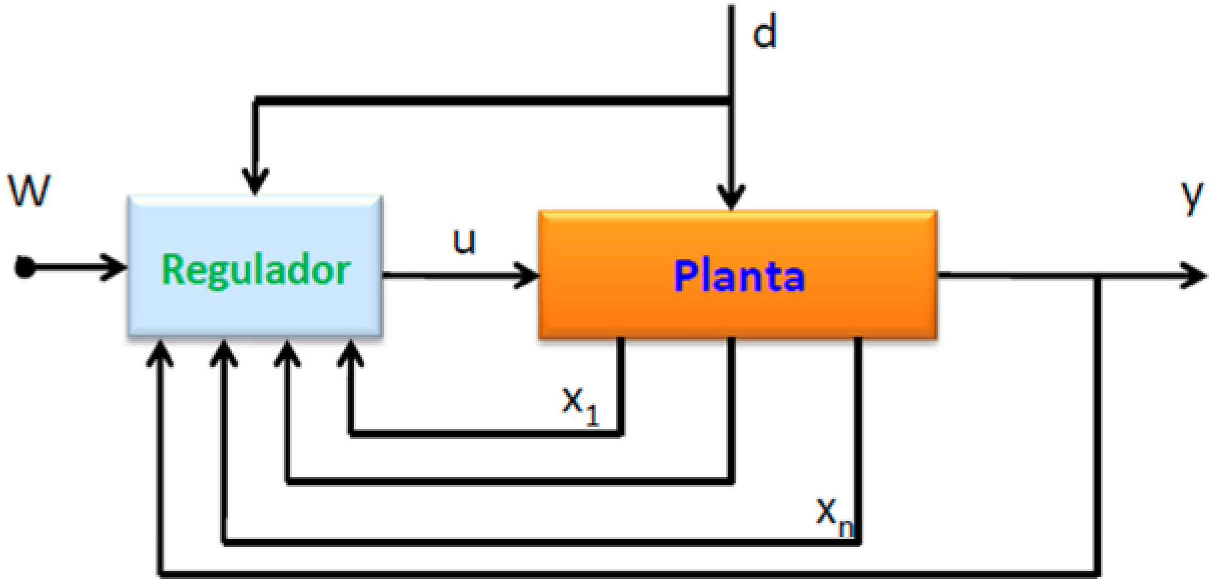
B:= Matriz de entradas

C:= Matriz de salidas

D:= Matriz de acoplamiento.



Sistema de control por retroalimentación

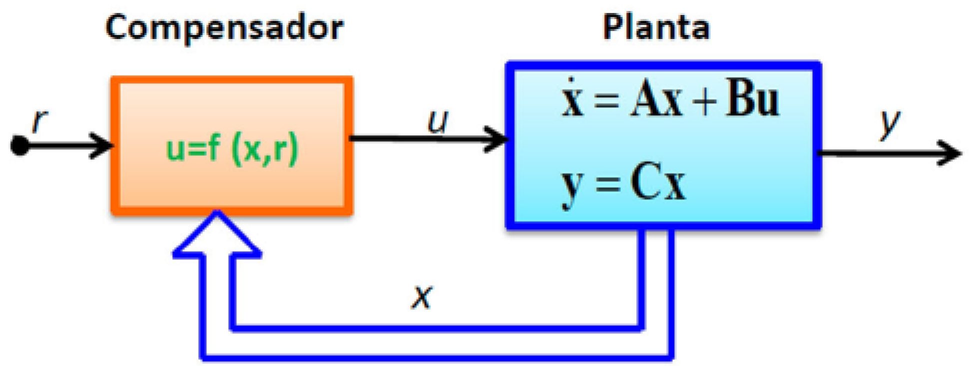


- Retroalimentación a la salida - Lugar de raíces
  - Ubicación de polos dominantes.

Control Clásico

- Retroalimentación de estados
  - Retorno de todas las variables de estado.
  - Ubicación arbitraria de todos los polos en lazo cerrado
  - Regulador estático : $u = -Kx$

Lazo de control de estado para una planta lineal



- **Control estático** (sin memoria)

  El valor de la variable de control *u* es función de las variables de estado actuales x_i .

- **Controlador lineal** -retroalimentación de estados

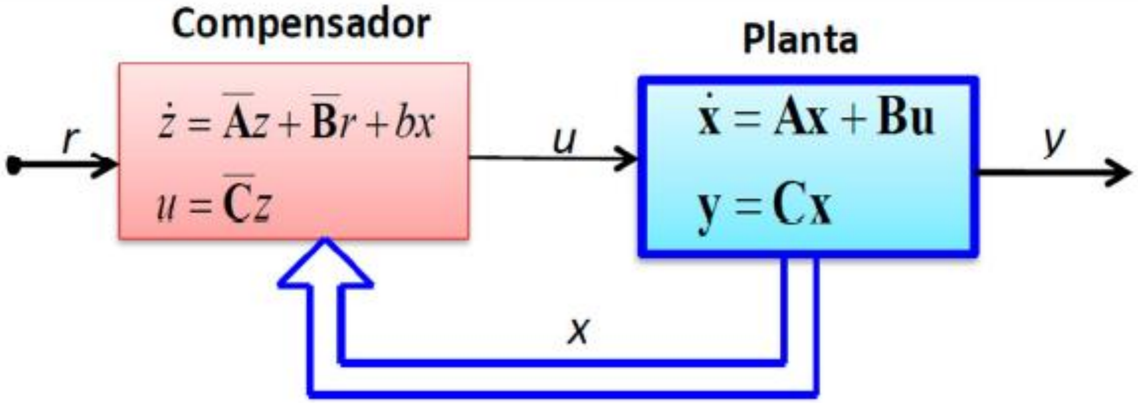
$$\mathbf{u} = \underbrace{-\mathbf{k}_1\mathbf{x}_1 - \mathbf{k}_2\mathbf{x}_2 \ldots - \mathbf{k}_n\mathbf{x}_n}_{} + \mathbf{r}$$

$$\mathbf{u} = -\mathbf{K}\mathbf{x} + \mathbf{r}$$

- **Controlador no lineal** - retroalimentación de estados

$$\mathbf{u} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{r})$$

Dinámica del controlador de estados-lineal



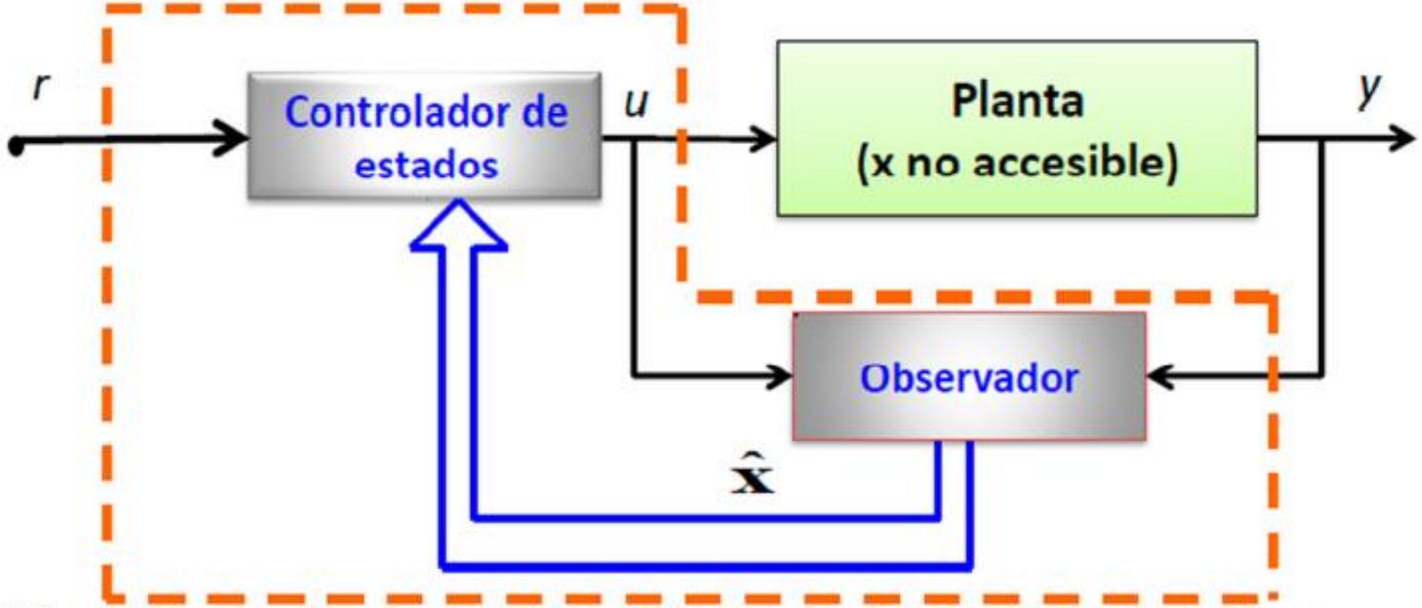
$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B\bar{C} \\ b & \bar{A} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \bar{B} \end{bmatrix} r$$

$$y = \begin{bmatrix} C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix}$$

Ecuación de estado y de salida del sistema de lazo cerrado

El **orden del sistema controlado** es aumentado comparado con el orden de la planta.

Observador de estados



- Ventajas y desventajas del controlador de estados
  - Mejora el control
  - Necesita múltiples mediciones
- Determinación de las variables de estado
  - Medición directa es a menudo caro o imposible.
  - Reconstrucción de variables de estado por un observador.

Definición de Completamente Controlable

En un sistema:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x}$$

•Se dice **Completamente Controlable** , cuando en un tiempo finito Te, se puede conducir cualquier **estado inicial x_0** con una **señal de entrada** seleccionada **u(t)**, t$\in$ [0 Te] hasta cualquier posición arbitraria x(Te).

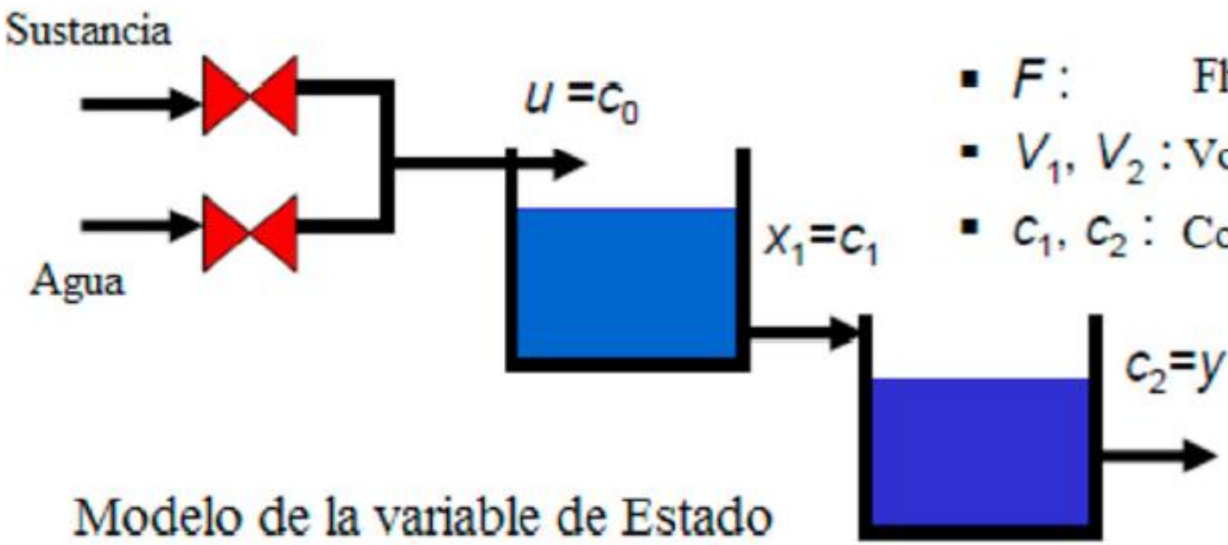
Criterio de controlabilidad de Kalman

El sistema (A, b) es completamente controlable cuando la **matriz de controlabilidad** tiene rango n.

$$Co = [B \quad AB \cdots A^{n-1}B]$$

$$rango(Co) = n$$

Retroalimentación de estados – reactores agitados



- F : Flujo
- V_1, V_2 : Volumenes de los tanques
- c_1, c_2 : Concentración de la sustancia

Modelo de la variable de Estado

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{F}{V_1} & 0 \\ \frac{F}{V_2} & -\frac{F}{V_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{F}{V_1} \\ 0 \end{pmatrix} u$$

$$y = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

Matriz de Controlabilidad

$$\mathrm{Co} = \begin{pmatrix} \underline{b} & \underline{A}\underline{b} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{F}{V_1} & -\frac{F^2}{V_1^2} \\ 0 & \frac{F^2}{V_1 V_2} \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Controlable}$$

Definición de Completamente Observable

En un sistema:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x}$$

- Se dice **Completamente Observable ,** si el estado inicial xo , en un intervalo finito [0 Te], con señal de entrada conocida u(t), con $t \in [0\ Te]$, y variable de salida y(t), con $t \in [0\ Te]$, pueda ser estimada.

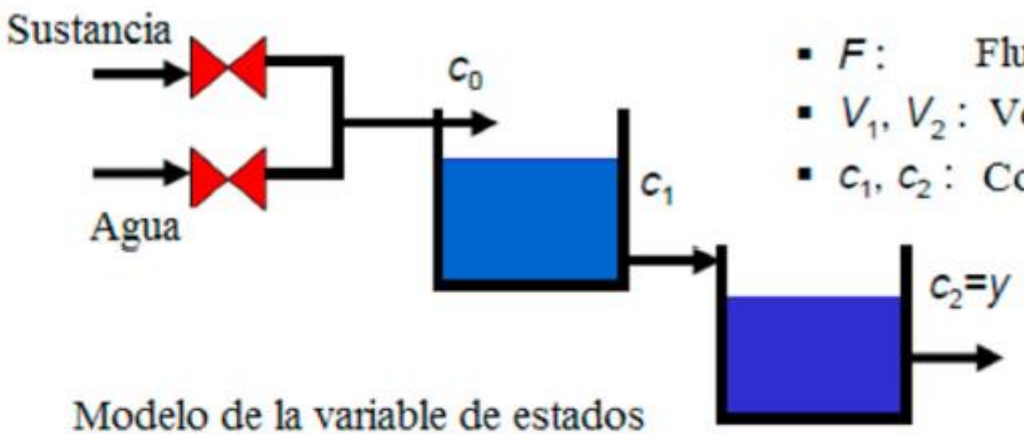
Criterio de Observabilidad - Kalman

El sistema (A, c) es completamente observable si la matriz de observabilidad tiene rango n.

$$ob = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}$$

$$Rango(Ob) = n$$

Observabilidad – reactores agitados



- F: Flujo
- V_1, V_2: Volumenes de los tanques
- c_1, c_2: Concentración de la sust.

Modelo de la variable de estados

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{F}{V_1} & 0 \\ \frac{F}{V_2} & -\frac{F}{V_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{F}{V_1} \\ 0 \end{pmatrix} u$$

$$y = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

Matriz de Observabiliad

$$\underline{S}_B = \begin{pmatrix} \underline{c} & \underline{cA} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{F}{V_2} & -\frac{F}{V_2} \end{pmatrix} \Rightarrow \text{observable}$$

Forma Canónica Controlable

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1} \\ \dot{x}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} u$$

$$y = (c_0, c_1, \ldots, c_n) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Polinomio característico

$$p(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + a_1\lambda + a_0$$

Matriz de transformación -Forma Canónica Controlable

Dado el sistema:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} \quad , \quad \mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x}$$

T es la matriz de transformación a la forma canónica existe si y solo si la matriz de controlabilidad es no singular.

$$Co = [B \quad AB \cdots A^{n-1}B]$$

Matriz de transformación -Forma Canónica Controlable

La matriz T se encuentra usando la fórmula:

$$|sI - A| = s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1 s \ \ + a_0$$

$$w = \begin{bmatrix} a_1 & \cdots & a_{n-1} & 1 \\ \vdots & \cdots & \iddots & 0 \\ a_{n-1} & 1 & & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

$$T = Co * w$$

La transformación canónica controlable:

$$\dot{x} = T^{-1}ATx + T^{-1}Bu$$

$$y = CTx$$

Introducción

- Estos problemas se resuelven mediante un apropiado diseño de:
  - ✓ Sistemas de control de regulación y
  - ✓ Sistemas de control de seguimiento

- La Teoría de Control Automático, permite resolver problemas de regulación y de seguimiento de las variables en las plantas.

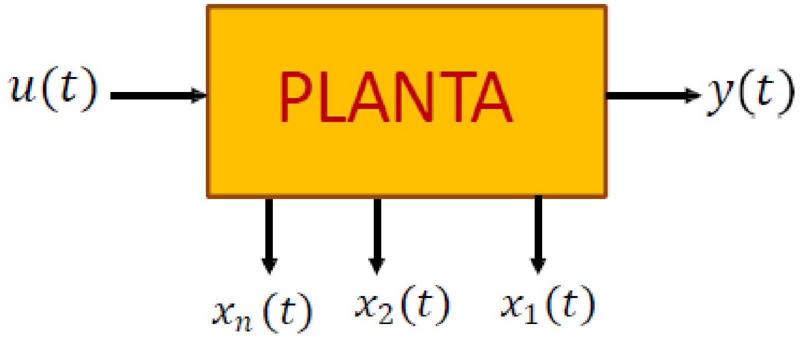
Introducción

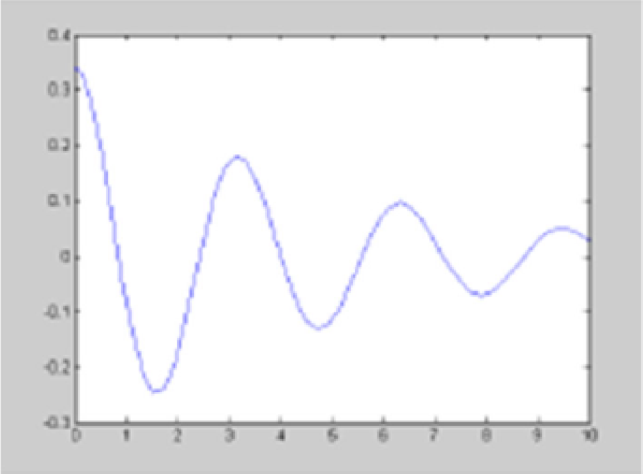
- En el diseño por ubicación de polos, se busca que todas las raíces de la *Ecuación característica* de un sistema sean ubicadas en posiciones deseadas.
- Las posiciones deseadas de las raíces son dadas (ó seleccionadas) de acuerdo a requerimientos de la respuesta del sistema.
- La tarea de ubicar todos las raíces en las posiciones deseadas requiere que todas las variables de estado del sistema sean medibles (ó estimables)

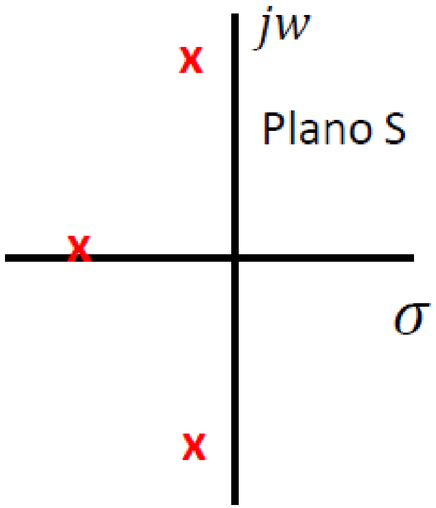
Introducción: Sistemas de Regulación

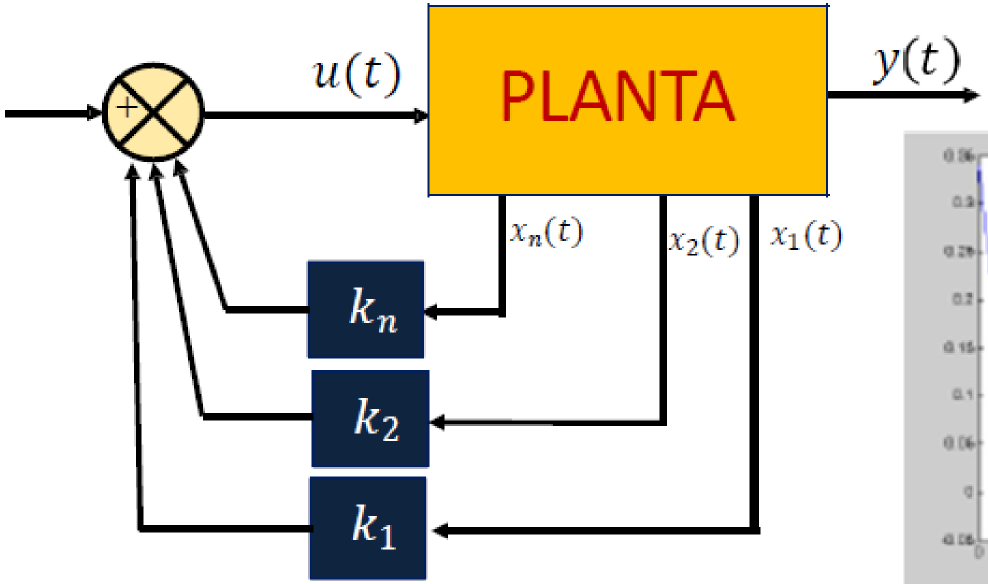
Considere la planta

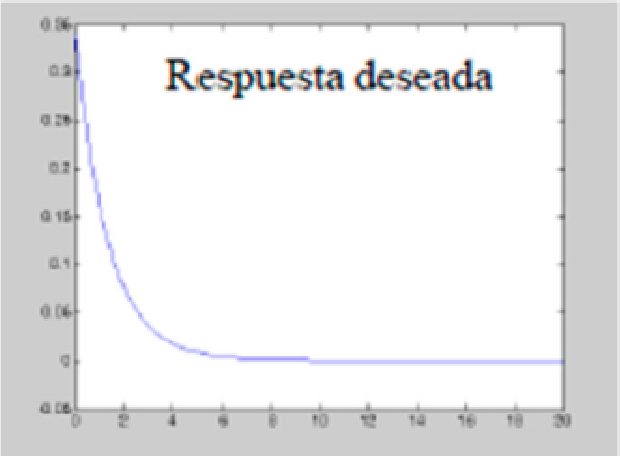
$$x(t) = Ax(t) + Bu(t)$$
$$y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

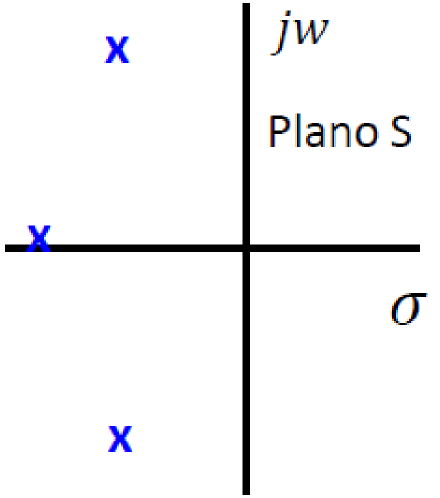












Sistema de **regulación**: diseño del controlador

- Se empleará la técnica de diseño por ubicación de polos para obtener sistemas de control que permiten resolver el problema de regulación.
- El objetivo del sistema de control es mantener la variable de salida en cero, a pesar de las perturbaciones.
- La realimentación de estado hará retornar la variables de salida y las variables de estado del sistema a cero de alguna manera deseada.

Sistema de regulación: Ley de Control

- Considere un SLIT

$$\frac{dx(t)}{dt} = Ax(t) + Bu(t) \qquad (1)$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t) \qquad (2)$$

- En el diseño por ubicación de polos, la ley de control (que implica realimentación de estados) es especificada como:

$$\boxed{u(t) = -Kx(t)} \qquad (3)$$

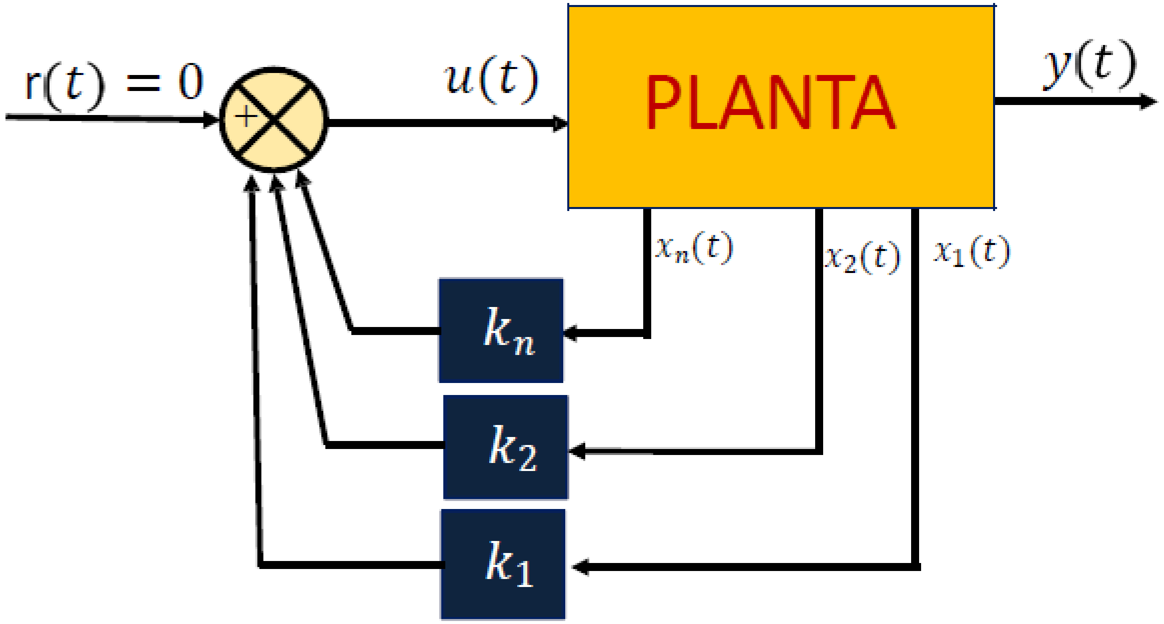
- Donde K es in vector de ganancias constantes

$$k = [k_1 \quad k_2 \quad \quad k_n]$$

Vector de 1xn

Sistema de regulación : Ley de control

- Al aplicar la ley de control en el sistema se obtiene



- Dado que la entrada r(t)=0, a este sistema se le considera como sistema de regulación

Ecuación característica del sistema de lazo cerrado

- La matriz de ganancia de realimentación se expresa como:

$$K = [K_1 \quad K_2 \quad \dots \quad K_n]$$

- Donde n es el orden de la planta. Reemplazando la ley de control en (1) obtenemos:

$$x(t) = Ax(t) - BKx(t)$$

$$\boxed{x(t) = (A - BK)x(t)} \qquad (4)$$

$$x(t) = A_c x(t)$$

- La ecuación característica en lazo cerrado es:

$$\Delta_c(s) = |sI - A_c| = |sI - A + BK| = 0$$

$$\boxed{\Delta_c(s) = |sI - A + BK|} \qquad (5)$$

Polos del sistema de lazo cerrado

- Si la respuesta del sistema requiere que las raíces de $\Delta_c(s)$ (polos del sistema en lazo cerrado) se ubiquen en $-\lambda_1, -\lambda_n, \ldots\ -\lambda_n$ entonces la ecuación característica deseada será:

$$\Delta_d(s) = (s + \lambda_1)(s + \lambda_2) \ldots (s + \lambda_n) = 0$$

expandiendo esta ecuación se tiene:

$$\boxed{\Delta_d(s) = s^n + \alpha_{n-1}s^{n-1} + \cdots \alpha_1 s + \alpha_0 = 0} \qquad (6)$$

- Así, para que los polos se ubiquen en las posiciones deseadas 's' requiere que las ecuaciones (5) y (6) sean iguales:

$$\boxed{|sI - A + BK| = s^n + \alpha_{n-1}s^{n-1} + \cdots \alpha_1 s + \alpha_0} \qquad (7)$$

Polos del sistema de lazo cerrado

- La solución de la ecuación (7), implica obtener el vector de ganancias **K.** Así, al igualar los coeficientes en ambos lados, se obtendrán *n* ecuaciones con *n* incógnitas: $k_1, k_2, \ldots k_n$.
- La solución de estas ecuaciones no es práctica para sistema de alto orden, pero puede ser empleado.

Diseño de Controlador: Teorema

- Si un SLI-t es completamente controlable, existe un vector **K** que permite que las *n* raíces del sistema se puedan ubicar en las posiciones deseadas.
- **Demostración.**
- Si en un SLI-t las matrices **A**, **B** se puede transformar a la FCC: **A***, **B***.

$$A^* = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_n \end{bmatrix} \qquad B^* = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$K^* = KP \qquad K = K^* P^{-1}$$

Diseño de Controlador: Teorema

- Para este caso se obtiene la matriz del sistema en lazo cerrado

$$A^* - B^*K^* = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_0 - {K_1}^* & -a_1 - {K_2}^* & -a_2 - {K_3}^* & \cdots & -a_{n-1} - {K_n}^* \end{bmatrix}$$

- Y la ecuación característica respectiva será:

$$\Delta_c(s) = |sI - A^* + B^*K^*| = s^n + (a_{n-1} + {K_n}^*)s^{n-1} + \cdots + (a_1 + {K_2}^*)s + (a_0 + {K_1}^*) = 0$$

(8)

Diseño de Controlador: Teorema

- Dado que las ganancias $K_1{}^*,\ K_2{}^*, \ldots K_n{}^*$ están aisladas en cada coeficiente, entonces las raíces de la ecuación característica se podrán asignar en forma arbitraria.
- Así, teniendo en cuenta la ecuación característica deseada, de (5)= (7), al igualar coeficientes se tiene:

$$a_{i-1} + K_i{}^* = \alpha_{i-1} \qquad ()$$

- De donde se obtiene las ganancias

$$K_i{}^* = \alpha_{i-1} - a_{i-1} \qquad i = 1,2, \ldots \ldots n$$

- Para el sistema original se calcula el vector K empleando la transformación

$$\boxed{K = K^* \times P^{-1}}$$

Ubicación de polos

- Existe 3 enfoques que se pueden usar para determinar la matriz de ganancias K que ubicará los polos al lugar deseado.

  - Usando la matriz de transformación P
  - Método de sustitución directa
  - Formula de Ackerman

- Los 3 métodos entregan el mismo resultado.

Método 1:

Usando la matriz de transformación P

Ubicación de polos (Usando la matriz de transformación P)

1. Verificar la controlabilidad del sistema.

$$C = [B \quad AB \quad A^2B \ \cdots \quad A^{n-1}B]$$

2. Transformar el sistema a la FCC

$$P = C \times W$$

$$W = \begin{bmatrix} a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_1 & 1 \\ a_{n-2} & a_{n-3} & \cdots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_1 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$|sI - A| = s^n + a_1 s^{n-1} + a_2 s^{n-2} + \cdots + a_{n-1}s + a_n$$

$$\overline{A} = P^{-1}AP \qquad \overline{B} = P^{-1}B \qquad \overline{C} = CP$$

Ubicación de polos (Usando la matriz de transformación P)

3. Obtenga la ecuación característica deseada con los valores propios deseados.
   - Si los valores propios deseados son $\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_n$

$$(s-\mu_1)(s-\mu_2)\cdots(s-\mu_n) = s^n + \alpha_1 s^{n-1} + \alpha_2 s^{n-2} + \cdots + \alpha_{n-1}s + \alpha_n$$

4. Calcula la matriz de ganancias K

$$\boldsymbol{K} = [\alpha_n - a_n \quad \alpha_{n-1} - a_{n-1} \quad \cdots \quad \alpha_2 - a_2 \quad \alpha_1 - a_1]$$

Ubicación de polos (Usando la matriz de transformación P) (otra forma)

- Considere la planta: $x(t) = Ax(t) + Bu(t)$

  con señal de control: $u(t) = -Kx(t)$

- La ecuación característica deseada:

$$\Delta_d(s) = (s+\lambda_1)(s+\lambda_2)\ldots(s+\lambda_n)$$

- Analizar la controlabilidad de la planta: rango(S)=n
- Determinar : $\Delta(s) = s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots a_1 s + a_0$ Polinomio en LA
- Expandir : $\Delta_d(s) = s^n + \alpha_{n-1}s^{n-1} + \cdots + \alpha_1 s + \alpha_0$ Polinomio en LC
- Hallar $K_i^* = \alpha_{i-1} - a_{i-1}$ $i = 1,2,\ldots..n$
- Determinar para la planta original :

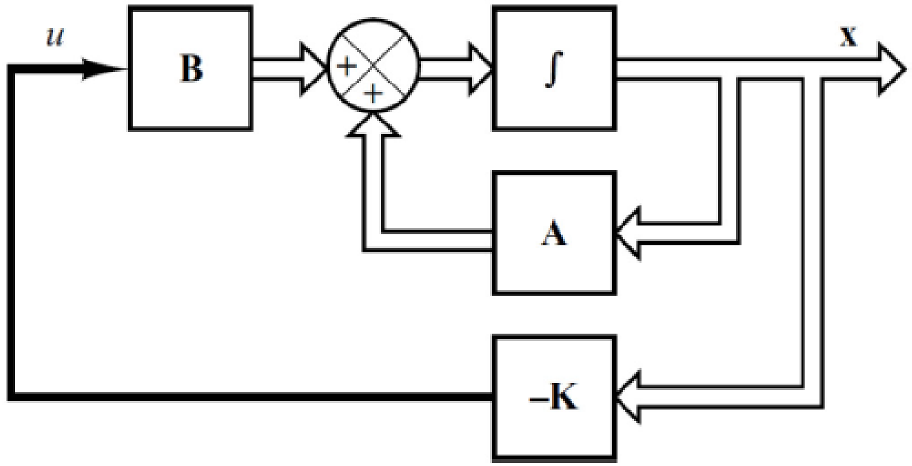
$$K = K^* \times P^{-1}$$

$$K = [\alpha_0 - a_0 \quad \alpha_1 - a_1 \quad \cdots\cdots \quad \alpha_{n-1} - a_{n-1}]P^{-1}$$

Ubicación de polos (Usando la matriz de transformación P)

- Ejemplo-1: Considere el sistema de regulación mostrado en la figura. La planta es:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -5 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$



- El sistema usa un control de retroalimentación de estados u=-**K**x. Los autovalores deseados son $\mu_1 = -2 + j4$, $\mu_2 = -2 - j4$,$\mu_3 = -1$. Determine la matriz ganancia de retroalimentación de estados **K**.

Ubicación de polos (Usando la matriz de transformación P)

- Ejemplo 1: 1er paso

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -5 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

- Primero, debemos evaluar la matriz de controlabilidad. La matriz P = C*M es:

$$CM = [B \quad AB \quad A^2B] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -6 \\ 1 & -6 & 31 \end{bmatrix}$$

- Encontramos que el rango es rank(**CM**)=3. Entonces, el sistema es completamente controlable y la ubicación arbitraria de polos es posible.

Ubicación de polos (Usando la matriz de transformación P)

- Ejemplo 1: 2do paso (Transformación a FCC)

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -5 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

- El sistema ya se encuentra en la FCC

Ubicación de polos (Usando la matriz de transformación P)

- Exjemplo 1: 3er paso

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -5 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

- Determine la ecuación característica

$$|sI - A| = s^3 + 6s^2 + 5s + 1 = 0$$

$$|sI - A| = s^3 + a_1 s^2 + a_2 s + a_3$$

- Entonces

$$a_1 = 6, \qquad a_2 = 5, \qquad a_3 = 1$$

Ubicación de polos (Usando la matriz de transformación P)

- Ejemplo 1: 4to paso

- La ecuación característica deseada se puede calcular con los valores propios deseados:

$$\mu_1 = -2 + j4 \qquad \mu_2 = -2 - j4 \qquad \mu_3 = -1$$

$$(s - \mu_1)(s - \mu_2) \cdots (s - \mu_n) = (s + 2 - 4j)(s + 2 + 4j)\,(s + 10)$$

$$\begin{aligned}(s + 2 - 4j)(s + 2 + 4j)\,(s + 10) &= s^3 + 14s^2 + 60s + 200 \\ &= s^3 + \alpha_1 s^2 + \alpha_2 s + \alpha_3\end{aligned}$$

- Hence

$$\alpha_1 = 14, \qquad \alpha_2 = 60, \qquad \alpha_3 = 200$$

Ubicación de polos (Usando la matriz de transformación P)

- Ejemplo 1: 4to paso

- La matriz de ganancia de estados retroalimentados K se calcula entonces así:

$$a_1 = 6, \qquad a_2 = 5, \qquad a_3 = 1$$

$$\alpha_1 = 14, \qquad \alpha_2 = 60, \qquad \alpha_3 = 200$$

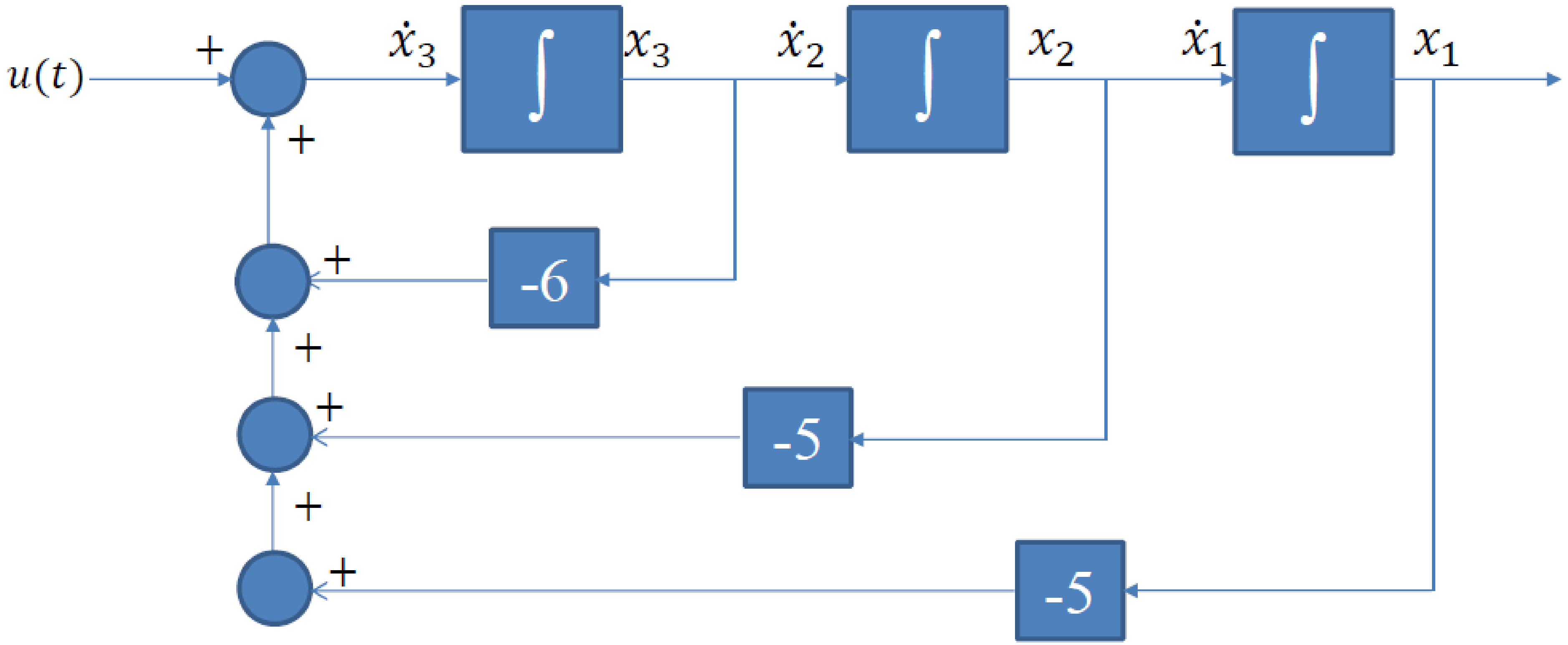
$$\boldsymbol{K} = [\alpha_3 - a_3 \quad \alpha_2 - a_2 \quad \alpha_1 - a_1]$$

$$\boldsymbol{K} = [199 \quad 55 \quad 8]$$

Ubicación de polos (Usando la matriz de transformación P)

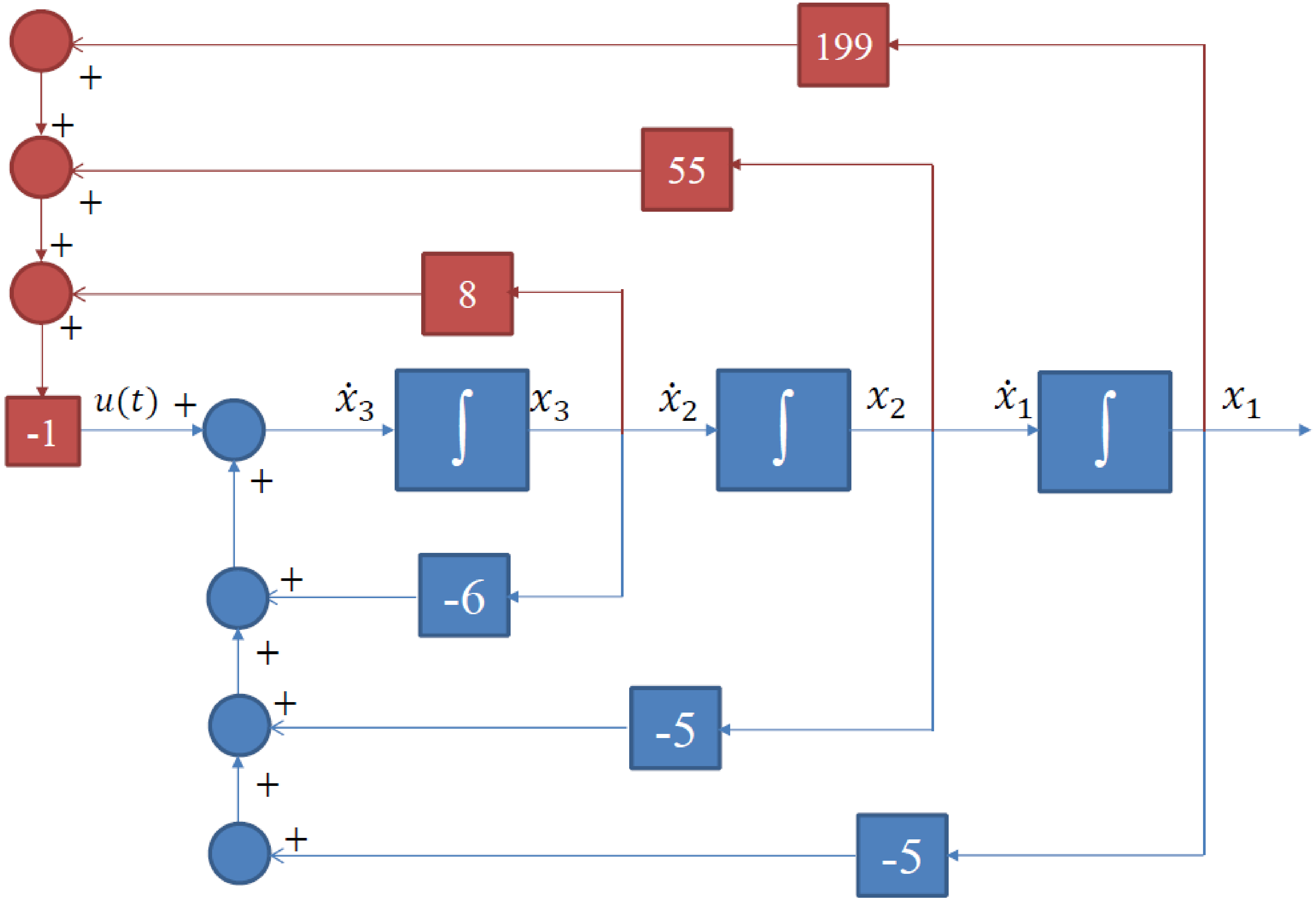
$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -5 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

- Diagrama de simulación del sistema dado:

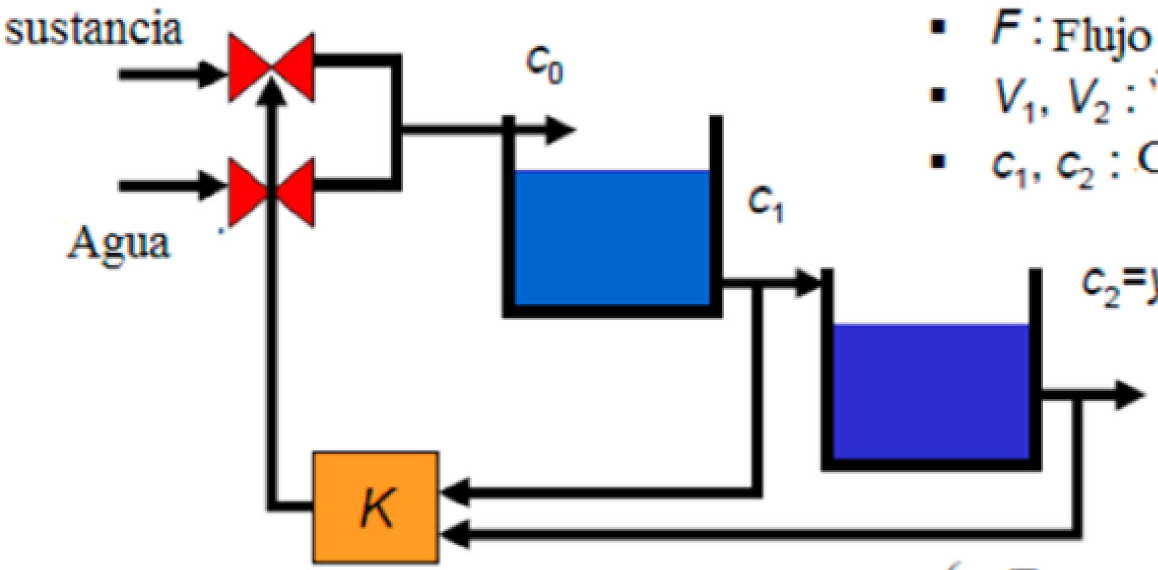


$\boxed{u = -\boldsymbol{K}x}$ $\quad \boldsymbol{K} = [199 \quad 55 \quad 8]$

$$u = -[199 \quad 55 \quad 8]\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$



Ejercicio: Retroalimentación de un par de reactores agitados



- F : Flujo
- V_1, V_2 : Volumenes de los tanques
- c_1, c_2 : Concent. de la sust.

Retroalimentación de Estados

Modelo de espacio estado

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{F}{V_1} & 0 \\ \frac{F}{V_2} & -\frac{F}{V_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{F}{V_1} \\ 0 \end{pmatrix} u$$

$$y = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

V_1=6[m^3] V_2=1[m^3] F=2[m^3/min]

Se desea que los nuevos polos sean -1 y -2

Retroalimentación de un par de reactores agitados

- V_1=6[m^3] V_2=1[m^3] F=2[m^3/min]
- Modelo de Espacio Estado

$$\begin{pmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{3} & 0\\ 2 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\frac{1}{3}\\ 0\end{pmatrix}u \qquad y=\begin{pmatrix}0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}$$

- Polinomio Característico

$$\lambda_1=-\frac{1}{3}\ \lambda_2=-2 \ \Rightarrow p(\lambda)=(\lambda+\frac{1}{3})(\lambda+2)=\lambda^2+\frac{7}{3}\lambda+\frac{2}{3} \ \Rightarrow a_0=\frac{2}{3}\ a_1=\frac{7}{3}$$

$$\underline{A}_R=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -\frac{2}{3} & -\frac{7}{3}\end{pmatrix}$$ Forma Canónica Controlable

- Valores propios deseados $\sigma=\{-1,-2\} \ \Rightarrow \ p(\lambda)=(\lambda+1)(\lambda+2)$

  Ganancia de retroalim. canónica $=\lambda^2+3\lambda+2 \quad \Rightarrow \overline{a}_0=2 \ \ \overline{a}_1=3$

$$\Rightarrow k_{R1}=\overline{a}_0-a_0=\frac{4}{3} \qquad k_{R2}=\overline{a}_1-a_1=\frac{2}{3}$$

Retroalimentación de un par de reactores agitados

Matriz de transformación de la FCC.

$$Co = [b \quad Ab] = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{9} \\ 0 & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

$$\det(sI - A) = s^2 + \frac{7}{3}s + \frac{2}{3}$$

Escriba aquí la ecuación.

$$w = \begin{bmatrix} \frac{7}{3} & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$T = Co * w = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & 0 \end{bmatrix}$$

$$T^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{3}{2} \\ 3 & -3 \end{bmatrix}$$

$$K = K_r * T^{-1} = [2 \;\; 0]$$

Lazo cerrado:

$$\underline{\dot{x}} = (\underline{A} - \underline{bk})\underline{x}$$

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$\underline{bk} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$y = (0 \quad 1) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

Método 2:

Sustitución directa

Ubicación de polos (Método de sustituación directa)

1. Verifique la controlabilidad del sistema

$$CM = [B \quad AB \quad A^2B \ \cdots \quad A^{n-1}B]$$

2. Defina la matriz de ganancias de estados retroalimentados como:

$$\boldsymbol{K} = [k_1 \quad k_2 \quad k_3 \cdots \quad k_n]$$

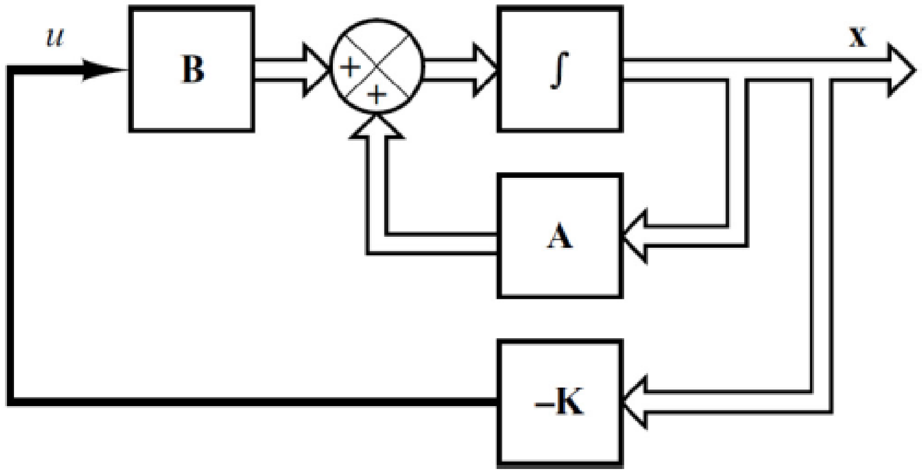
– Igualando $|sI - A + BK|$ con la ecuación característica deseada.

$$(s-\mu_1)(s-\mu_2)\cdots(s-\mu_n) = s^n + \alpha_1 s^{n-1} + \alpha_2 s^{n-2} + \cdots + \alpha_{n-1}s + \alpha_n$$

Ubicación de polos (Método de sustitución directa)

- Ejemplo 1: Considere el sistema de regulación mostrado en la siguiente figura. La planta es:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -5 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$



- El sistema usa un control de retroalimentación de estados **u=-Kx**. Los autovalores deseados son $\mu_1 = -2 + j4$, $\mu_2 = -2 - j4$,$\mu_3 = -1$. Determine la matriz ganancia de retroalimentación de estados **K**.

Ubicación de polos (Método de sustitución directa)

- Ejemplo 1: 1er paso

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -5 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

- Primero, debemos evaluar la matriz de controlabilidad. La matriz P = C*M es:

$$CM = [B \quad AB \quad A^2B] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -6 \\ 1 & -6 & 31 \end{bmatrix}$$

- Encontramos que el rango es rank(**CM**)=3. Entonces, el sistema es completamente controlable y la ubicación arbitraria de polos es posible.

Ubicación de polos (Método de sustitución directa)

- Example-1: 2do paso
- Sea **K:**

$$\boldsymbol{K} = [k_1 \quad k_2 \quad k_3]$$

$$|sI - A + BK| = \left|\begin{bmatrix} s & 0 & 0 \\ 0 & s & 0 \\ 0 & 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -5 & -6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} [k_1 \quad k_2 \quad k_3]\right|$$

$$= s^3 + (6 + k_3)s^2 + (5 + k_2)s + 1 + k_1$$

- Desired characteristic polynomial is obtained as

$$(s + 2 - 4j)(s + 2 + 4j)\ (s + 10) = s^3 + 14s^2 + 60s + 200$$

- Comparing the coefficients of powers of s

$$14 = (6 + k_3) \qquad k_3 = 8$$

$$60 = (5 + k_2) \qquad k_2 = 55$$

$$200 = 1 + k_1 \qquad k_1 = 199$$

Método 3:

Diseño del controlador con la fórmula de Ackerman

Ubicación de polos (Fórmula de Ackerman)

1. Verifique la controlabilidad del sistema.

$$CM = [B \quad AB \quad A^2B \ \cdots \quad A^{n-1}B]$$

2. Use la formula de Ackerman para hallar **K**

$$K = [0 \quad 0 \quad \cdots 0 \quad 1][B \quad AB \quad A^2B \ \cdots \quad A^{n-1}B]^{-1}\emptyset(A)$$

Polinomio característico deseado evaluado en la matriz A:

$$\emptyset(A) = A^n + \alpha_1 A^{n-1} + \cdots + \alpha_{n-1}A + \alpha_n I$$

Ubicación de polos (Fórmula de Ackermann) en Matlab

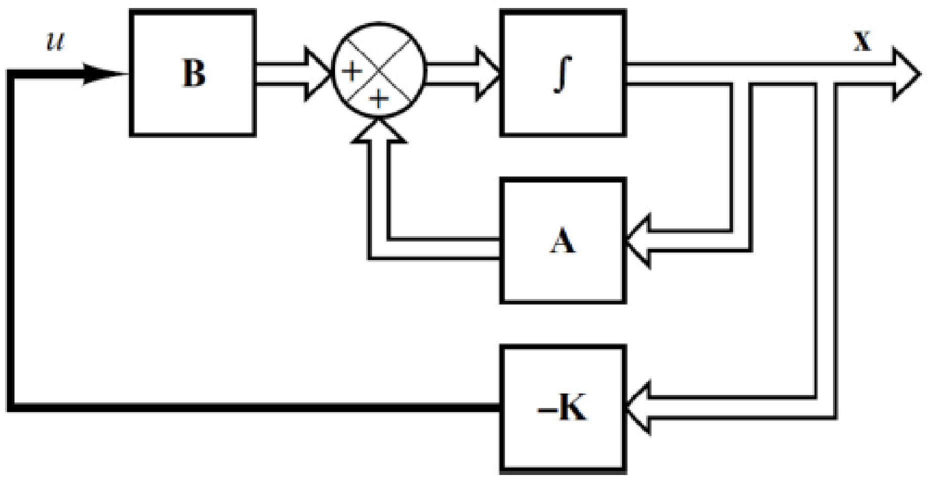
- Características del algoritmo de ackerman (función *acker*()):
  - ✓ Numéricamente no robusto, no funciona para n > 10, o si el sistema es débilmente controlable
  - ✓ Se aplica solamente a sistemas SISO
  - ✓ Sin embargo, maneja polos de lazo cerrado repetidos

- Un algoritmo mas robusto es proporcionado por la función *place*()
  - ✓ se aplica a sistema MIMO
  - ✓ no soporta polos de lazo cerrado repetidos

Ubicación de polos (Fórmula de Ackermann)

- Ejemplo 1: Considere el sistema de regulación mostrado en la siguiente figura. La planta es:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -5 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$



- El sistema usa un control de retroalimentación de estados **u=-Kx**. Los autovalores deseados son $\mu_1 = -2 + j4$, $\mu_2 = -2 - j4$,$\mu_3 = -1$. Determine la matriz ganancia de retroalimentación de estados **K**.

Ubicación de polos (Fórmula de Ackermann)

- Ejemplo 1: 1er paso

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -5 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

- Primero, debemos evaluar la matriz de controlabilidad. La matriz P = C*M es:

$$CM = [B \quad AB \quad A^2B] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -6 \\ 1 & -6 & 31 \end{bmatrix}$$

- Encontramos que el rango es rank(**CM**)=3. Entonces, el sistema es completamente controlable y la ubicación arbitraria de polos es posible.

Ubicación de polos (Fórmula de Ackermann)

2. Usar la fórmulad de Ackermann para hallar **K**

$$K = [0 \quad 0 \quad 1][B \quad AB \quad A^2B]^{-1}\emptyset(A)$$

$$\emptyset(A) = A^3 + \alpha_1 A^2 + \alpha_2 A + \alpha_3 I$$

- α_i are the coefficients of the desired characteristic polynomial.

$$(s + 2 - 4j)(s + 2 + 4j)(s + 10) = s^3 + 14s^2 + 60s + 200$$

$$\alpha_1 = 14, \qquad \alpha_2 = 60, \qquad \alpha_3 = 200$$

Ubicación de polos (Fórmula de Ackermann)

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -5 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

$$\emptyset(A) = A^3 + 14A^2 + 60A + 200I$$

$$\emptyset(A) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -5 & -6 \end{bmatrix}^3 + 14 \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -5 & -6 \end{bmatrix}^2 + 60 \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -5 & -6 \end{bmatrix} + 200 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\emptyset(A) = \begin{bmatrix} 199 & 55 & 8 \\ -8 & 159 & 7 \\ -7 & -34 & 117 \end{bmatrix}$$

Ubicación de polos (Fórmula de Ackermann)

$$[B \quad AB \quad A^2B] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -6 \\ 1 & -6 & 31 \end{bmatrix}$$

$$\emptyset(A) = \begin{bmatrix} 199 & 55 & 8 \\ -8 & 159 & 7 \\ -7 & -34 & 117 \end{bmatrix}$$

$$K = [0 \quad 0 \quad 1][B \quad AB \quad A^2B]^{-1}\emptyset(A)$$

$$K = [0 \quad 0 \quad 1]\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -6 \\ 1 & -6 & 31 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} 199 & 55 & 8 \\ -8 & 159 & 7 \\ -7 & -34 & 117 \end{bmatrix}$$

$$K = [199 \quad 55 \quad 8]$$

Ejemplo. Retroalimentación de estados de un par de reactores agitados

- Valores Propios deseados : $\boxed{\sigma = \{-1.5, -2.5\}}$
- V_1=6 [m^3] V_2=1 [m^3] F =2 [m^3/min]
- Modelo de espacio estado

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & 0 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ 0 \end{pmatrix} u$$

$$y = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

- Matriz de controlabilidad

$$\mathbf{Co} = (\underline{b}, \underline{A}\underline{b}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{9} \\ 0 & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

Ejemplo. Retroalimentación de estados de un par de reactores agitados

Fórmula de Ackermann

Polos deseados $\boxed{\sigma = \{-1.5 \quad -2.5\}}$

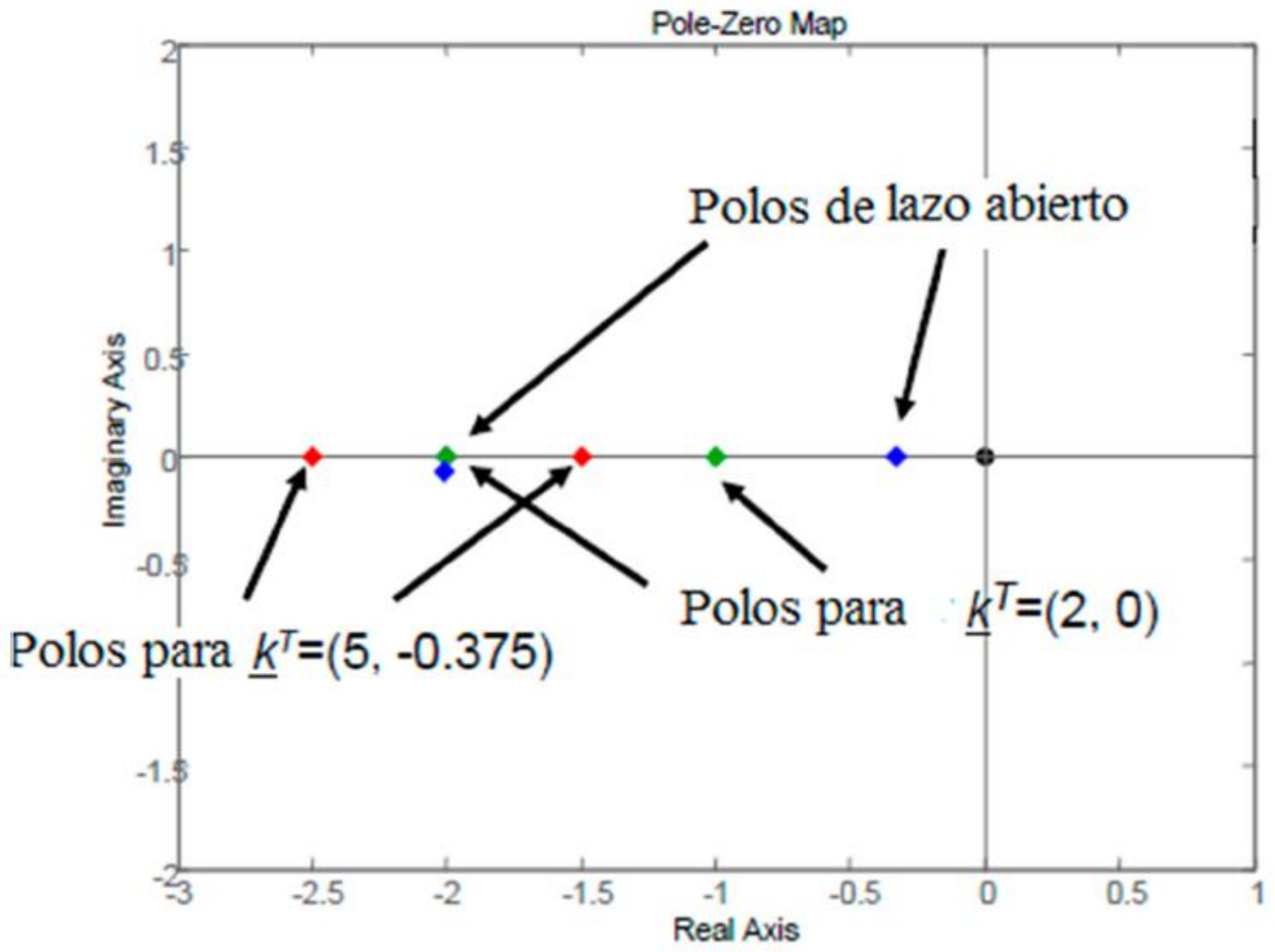
Polinomio deseado $W(s) = (s+1.5)(s+2.5) = s^2 + 4s + \frac{15}{4}$

$$W(A) = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & 0 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}^2 + 4 * \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & 0 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} + \frac{15}{4}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{91}{36} & 0 \\ \frac{10}{3} & -\frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

$$Co = [b \quad Ab] = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{9} \\ 0 & \frac{2}{3} \end{bmatrix} \qquad Co^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{3}{2} \end{bmatrix}$$

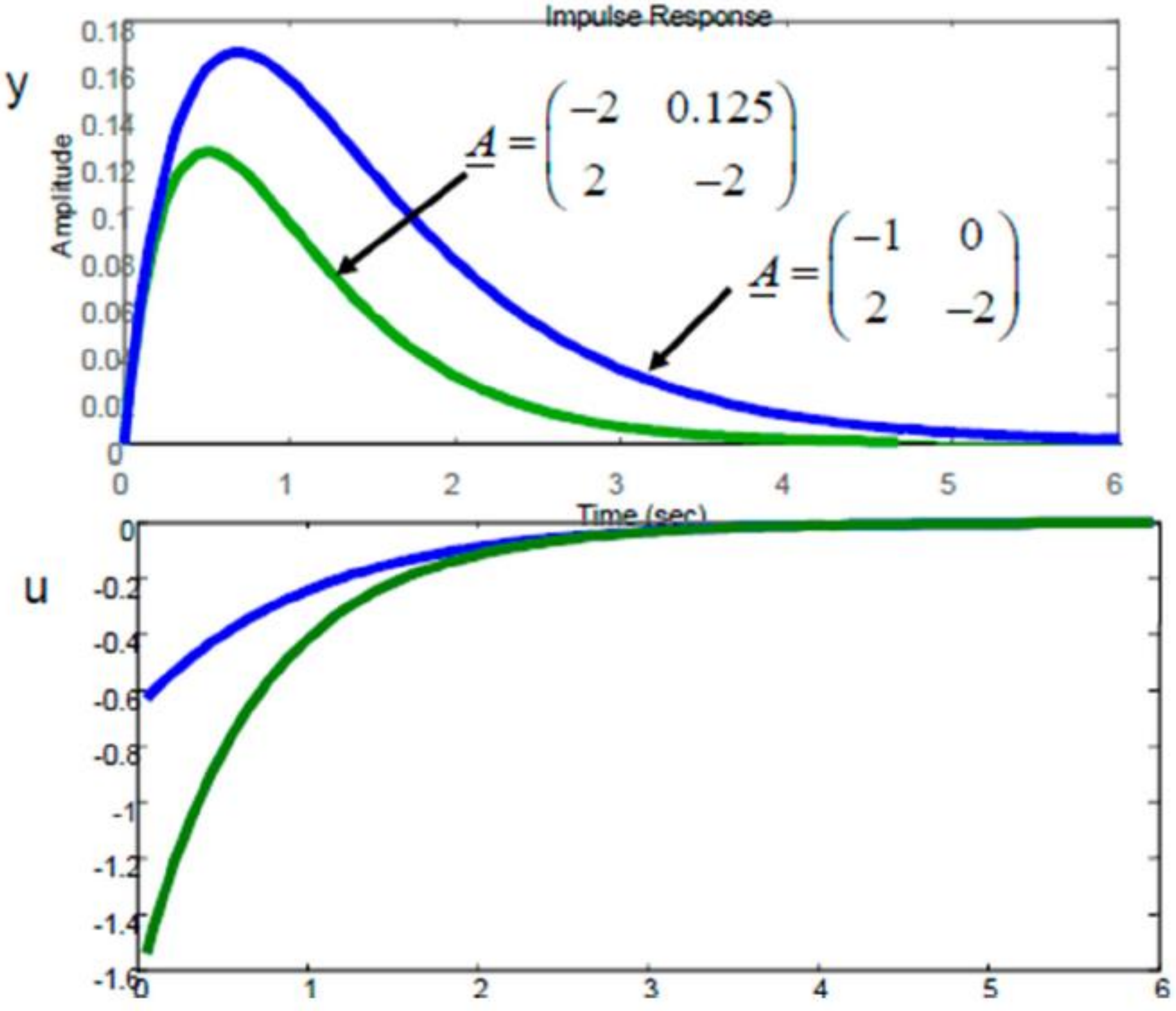
$$K = [0 \quad 1]\begin{bmatrix} 3 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{3}{2} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} \frac{91}{36} & 0 \\ \frac{10}{3} & -\frac{1}{4} \end{bmatrix} = \boxed{[5 \quad -\frac{3}{8}]}$$

Polo-cero



Pole-Zero Map
Polos de lazo abierto
Polos para $\underline{k}^T$=(2, 0)
Polos para $\underline{k}^T$=(5, -0.375)
Imaginary Axis
Real Axis
2
1.5
1
0.5
0
-0.5
-1.5
-2
-3
-2.5
-2
-1.5
-1
-0.5
0
0.5
1

Respuesta al impulso y variable manipulada



Selección de polos

Selección de polos

- El esfuerzo de control requerido esta relacionado a que tan lejos la realimentación mueve los polos en lazo abierto.
- Cuando un cero esta cerca un de polo, el sistema puede volverse incontrolable (esto requerirá una ganancia grande y por lo tanto un esfuerzo grande del controlador)
- Se verán 2 técnicas para una buena selección de los polos, las cuales son:
  - Polos dominantes de 2do orden
  - Diseño de prototipos

Método 1:

Polos dominantes de segundo orden

Método 1. Polos dominantes de 2do orden

- Se puede escoger los polos de lazo cerrado para un sistema de orden alto como un par de polos de un sistema de segundo orden, de tal forma que estos sean dominantes.
- Para ello, el resto de polos se deben ubicar alejados de los dominantes de tal forma que la respuesta final sea parecida a la respuesta de un sistema de segundo orden.
- También se debe procurar alejar los ceros para no cambiar el comportamiento del sistema.

$$p_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm j\omega_n \sqrt{1-\zeta^2}$$

Ejemplo

- Diseñe el servomotor de una casetera descrita por las ecuaciones mostradas, por el método de polos dominantes de segundo orden. Se requiere que la respuesta no tenga más de 5% de sobreimpulso y el tiempo de subida no sea mayor de 4 segundos. Mantenga la tensión pico lo más baja posible.

$$\dot{x} = Fx + Gu$$
$$y = Hx$$

H1: Posición del 2do cabezal

H2: Posición de la cinta en el cabezal

H3: Tensión en la cinta

Donde:

$$F = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ -0.1 & -0.35 & 0.1 & 0.1 & 0.75 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0.4 & 0.4 & -0.4 & -1.4 & 0 \\ 0 & -0.03 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \qquad G = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$H = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0.5 & 0 & 0.5 & 0 & 0 \\ -0.2 & -0.2 & 0.2 & 0.2 & 0.2 \end{bmatrix}$$

Ejemplo

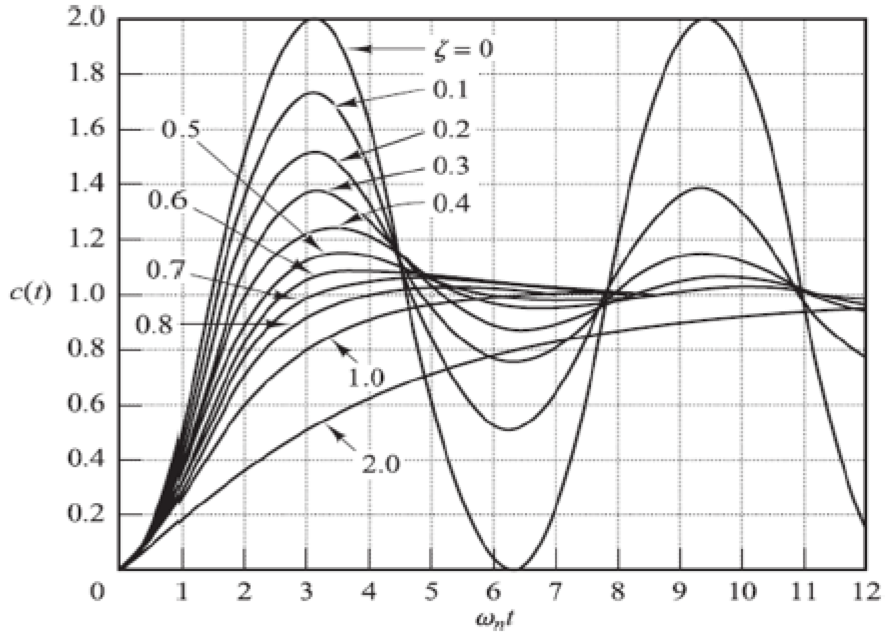
- En la gráfica de respuestas para sistemas de segundo orden un factor de amortiguamiento de 0.7 parece adecuado. Para este factor, un tiempo de subida de 4 segundos implicaría una frecuencia natural de 1/1.5.
- En el sistema deben haber 5 polos. Escogemos polos alejados para los 3 restantes. Tentativamente se escoge -4, por lo que los polos quedarían así:

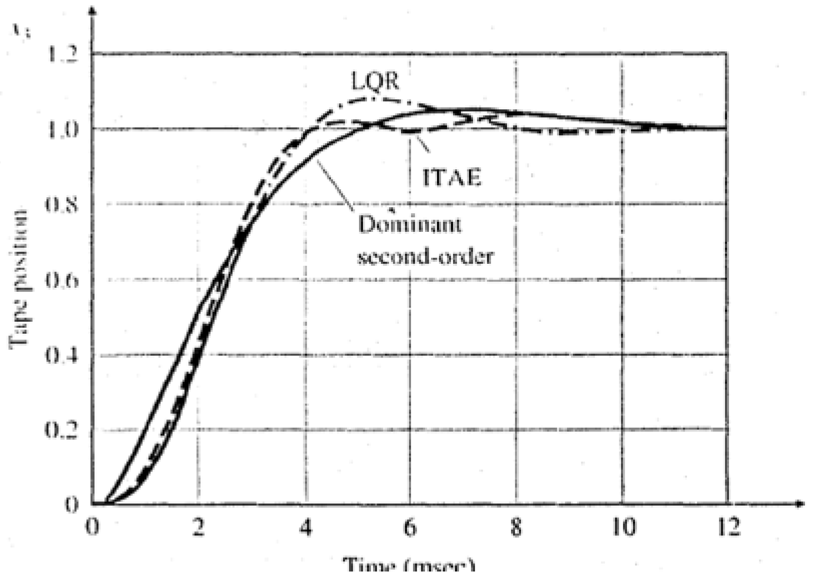
$$p = \frac{-0.707 + 0.707j, \quad -0.707 - 0.707j, -4, -4, -4}{1.5}$$

- Con estos polos podemos invocar la función acker en matlab con F y G y encontrar la ganancia:

$$K = [8.5123 \; 20.3457 \; -1.4911 \; -7.8821 \; 6.1927]$$

- La respuesta a un escalón da una respuesta que cumple las especificaciones. Este procedimiento es iterativo, si no se logrará al primer intento se debe modificar los polos hasta alcanzar el objetivo.





Método 1:

Diseño por prototipo

Método 2. Diseño por prototipo

- Una alternativa para sistemas de orden alto es seleccionar un prototipo de respuesta con una dinámica deseada predefinida. Existen varios prototipos, pero las más relevantes para el control son las llamadas respuestas ITAE y Bessel.
- Graham y Lathrop (1953) estudiaron un conjunto de prototipos de respuestas transitorias que minimizan el tiempo multiplicado por el valor absoluto del error (ITAE). Esto es, minimizar lo siguiente:

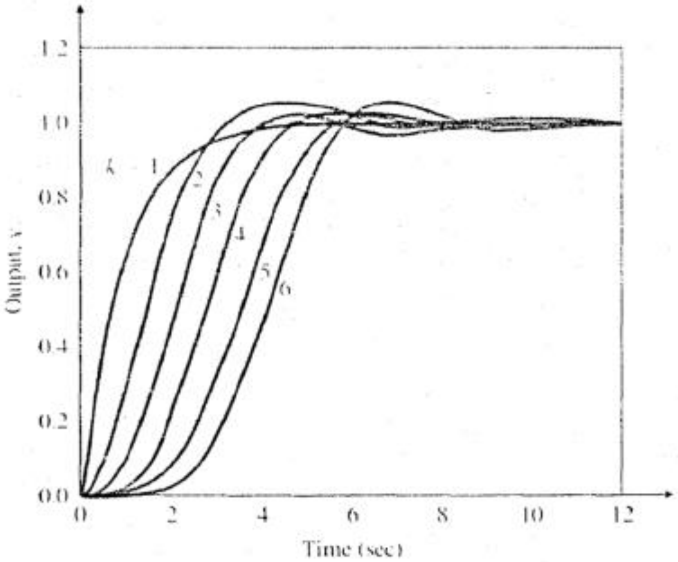
$$\int_0^\infty t|e|dt$$

- Para aquellas aplicaciones donde se quiere evitar el sobreimpulso, se puede considerar el prototipo del filtro de Bessel.
- La ubicación de los polos para ambos prototipos se dan en la siguiente tabla, acompañada de las gráficas de su respuesta a un escalón.

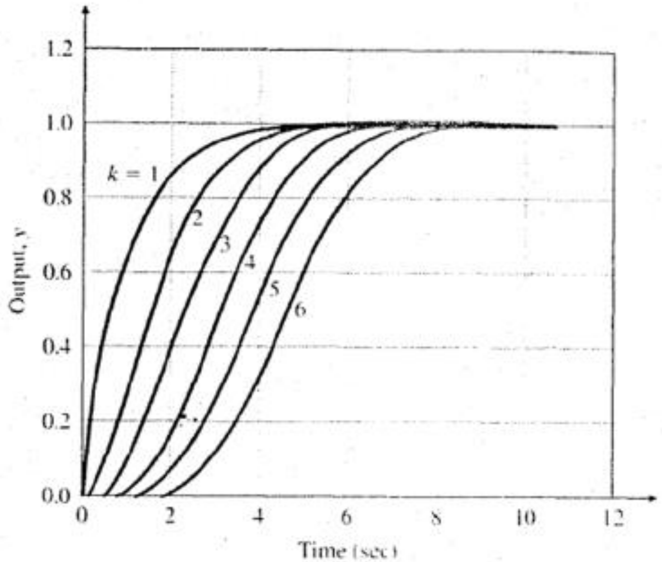
Método 2. Diseño por prototipo

	k	*Pole Locations for* $\omega_0 = 1$ *rad/sec*[a]
(a) ITAE transfer function poles	1	$s+1$
	2	$s+0.7071 \pm 0.7071j$[b]
	3	$(s+0.7081)(s+0.5210 \pm 1.068j)$
	4	$(s+0.4240 \pm 1.2630j)(s+0.6260 \pm 0.4141j)$
	5	$(s+0.8955)(s+0.3764 \pm 1.2920j)(s+0.5758 \pm 0.5339j)$
	6	$(s+0.3099 \pm 1.2634j)(s+0.5805 \pm 0.7828j)(s+0.7346 \pm 0.2873j)$
(b) Bessel transfer function poles	1	$s+1$
	2	$s+0.8660 \pm 0.5000j$[b]
	3	$(s+0.9420)(s+0.7455 \pm 0.7112j)$
	4	$(s+0.6573 \pm 0.8302j)(s+0.9047 \pm 0.2711j)$
	5	$(s+0.9264)(s+0.5906 \pm 0.9072j)(s+0.8516 \pm 0.4427j)$
	6	$(s+0.5385 \pm 0.9617j)(s+0.7998 \pm 0.5622j)(s+0.9093 \pm 0.1856j)$

[a]Pole locations for other values of ω_0 can be obtained by substituting s/ω_0 for s everywhere.
[b]The factors $(s+a+bj)(s+a-bj)$ are written as $(s+a \pm bj)$ to conserve space.



Respuesta a un escaló para prototipos ITAE



Respuesta a un escaló para prototipos Bessel

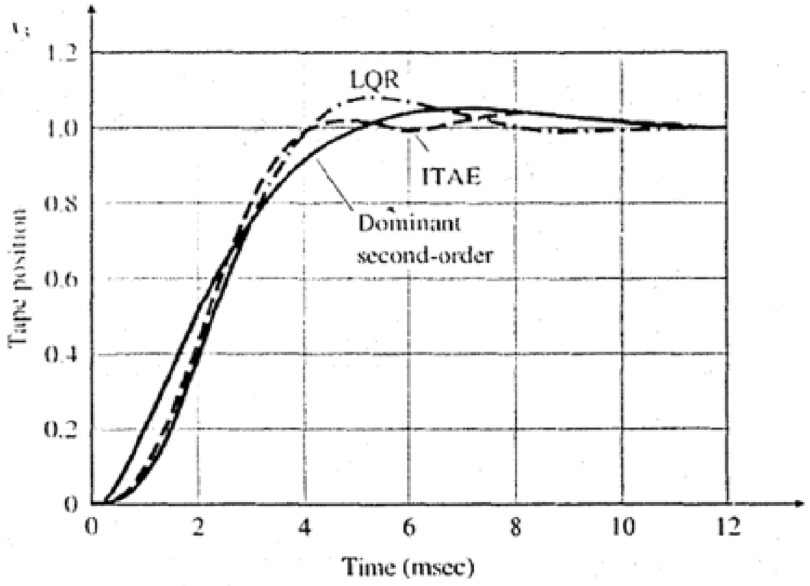
Ejemplo

- Diseñe el servomotor de la casetera del ejemplo anterior con el prototipo ITAE para un tiempo de subida de no más de 4 segundos. Mantenga la tensión en la cinta lo más baja posible.
- Solución:

De las gráficas de respuesta del prototipo ITAE, se nota que la respuesta de 5to orden tiene un tiempo de subida de 5. Sin embargo, la FT de esta planta tiene dos ceros a $\omega_n \approx 1$, y esto tiende a reducir el tiempo de subida, así que tomando estos polos se halla con la función *acker* la ganancia:

$$K_{ITAE} = [0.8333\ 2.2534\ 0.0001\ \ -0.2336\ 0.0499]$$

La respuesta se muestra a la derecha junto con la respuesta del método anterior como comparación



Problema 1

- Demuestre que el sistema mostrado no puede ser estabilizado por el control por realimentación u=-Kx, sea cual sea el K escogido.

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

Problema 2

- Un sistema con regulador tiene la siguiente planta:

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{10}{(s+1)(s+2)(s+3)}$$

- Use como variables de estado:

$$x_1 = y$$
$$x_2 = \dot{x}_1$$
$$x_3 = \dot{x}_2$$

- Usando el control por realimentación de estados u=-Kx, se desea obtener los polos en lazo cerrado $s = -2 \pm 2\sqrt{3}j, s = -10$. Determine K

Problema 3

- La habilidad para balancearse activamente es un factor clave en el movimiento de un dispositivo que realiza saltos en una sola pata como se muestra en la figura. El control de actitud usa un giroscopio y una retroalimentación del tipo u=**Kx** donde:

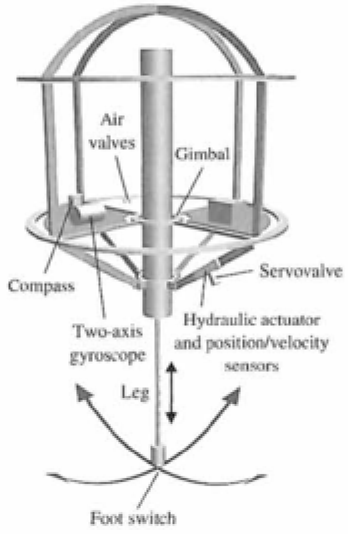
$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} -k & 0 \\ 0 & -2k \end{bmatrix},$$

El sis[Sin título] es:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}u(t)$$

Donde:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \text{and} \quad \mathbf{B} = \mathbf{I}.$$



- Determine el valor de k para que cada salto este criticamente amortiguado

Problema 4

- En la película Jurassic Park se usaron actuadores hidraulicos de potencia para mover a los dinosaurios. Estos actuadores requería una potencia de 1200W. Para el movimiento de una extremidad se hizo la representación siguiente:

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

$$y = [0 \quad 1]\mathbf{x} + [0]u.$$

- Se requiere ubicar los polos de lazo cerrado en $s = -1 \pm 3j$. Determine la retroalimentación de estado requerido usando la formula de Ackermann. Asuma que el vector de estados se puede medir en su totalidad.

Gracias por vuestra atención...