1. Halle el valor complejo de z, en la forma $z = x + jy$, de:

a. $z = \cos(2 + j)$ b. $z = \tan(\pi - 2j)$

Solución:

Recordemos que : $\boxed{\cos z = \frac{1}{2}\left(e^{jz} + e^{-jz}\right)}$

$$\Rightarrow \cos(2+j) = \frac{1}{2}\left(e^{j(2+j)} + e^{-j(2+j)}\right) = \frac{1}{2}\left(e^{2j-1} + e^{-2j+1}\right) = \left(\tfrac{1}{2}e^{-1}\right)e^{2j} + \left(\tfrac{1}{2}e\right)e^{-2j}$$

$$= \frac{1}{2}e^{-1}\left(\cos 2 + j\,\mathrm{sen}\,2\right) + \frac{1}{2}e\left(\cos(-2) + j\,\mathrm{sen}(-2)\right)$$

$$= \frac{1}{2}e^{-1}\left(\cos 2 + j\,\mathrm{sen}\,2\right) + \frac{1}{2}e\left(\cos(2) - j\,\mathrm{sen}(2)\right)$$

$$\boxed{z = \underbrace{\cos 2 \cdot \left(\frac{e^{-1} + e}{2}\right)}_{x} + j\,\underbrace{\mathrm{sen}\,2 \cdot \left(\frac{e^{-1} - e}{2}\right)}_{y}}$$

2. Dada la función $f(z) = 4z - 3\,\mathrm{Re}(z)$, pruebe que no es derivable:

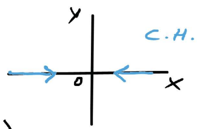
a. usando la definición de la derivada.

b. mostrando que no cumple la condición suficiente de derivabilidad.

Solución:

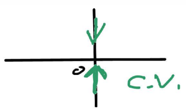
a) Sea $\lim\limits_{h \to 0}\left(\dfrac{4(z+h) - 3\,\mathrm{Re}(z+h) - \left[4z - 3\,\mathrm{Re}(z)\right]}{h}\right) = \lim\limits_{h \to 0}\left(\dfrac{4h - 3\,\mathrm{Re}(h)}{h}\right)$

• Luego si consideramos $\boxed{h = x + 0j}$ (camino horizontal)



$$\Rightarrow \lim_{h \to 0}\left(\frac{4h - 3\,\mathrm{Re}(h)}{h}\right) = \lim_{\substack{h \to 0 \\ x \to 0}}\left(\frac{4x - 3\,\mathrm{Re}(x)}{x}\right) = \lim_{x \to 0}(1) = 1 \quad \ldots (1)$$

• Sea $\boxed{h = 0 + yj}$ (camino vertical)



$$\Rightarrow \lim_{h \to 0}\left(\frac{4h - 3\,\mathrm{Re}(h)}{h}\right) = \lim_{\substack{h \to 0 \\ y \to 0}}\left(\frac{4yj - 3\,\mathrm{Re}(yj)}{yj}\right) = \lim_{\substack{h \to 0 \\ y \to 0}}(4) = 4 \quad \ldots (2)$$

$\therefore$ De (1) y (2) no existe $f'(z)$; $\forall z \in \mathbb{C}$

b) $f(z) = 4z - 3\,\mathrm{Re}(z) = u(x,y) + j\,v(x,y)$; $z \in \mathbb{C}$

$\Rightarrow f(z) = 4(x + jy) - 3\,\mathrm{Re}(x + jy) = x + 4yj$

$\Rightarrow$ Reconocemos : $u(x,y) = x \ \wedge\ v(x,y) = 4y$

$\Rightarrow u_x = 1$ y $v_y = 4 \rightsquigarrow \boxed{u_x \neq v_y} \Rightarrow f$ no es derivable en $\mathbb{C}$.

5. Dada la función:

$$f(z) = \begin{cases} \dfrac{z^3 + z}{z + j} & , \quad z \neq -j \\ -2 & , \quad z = -j \end{cases}$$

a. Describa la parte real e imaginaria de *f*.

b. ¿Es *f* continua en el plano complejo?

c. ¿Es f analítica en $z \in \mathbb{C} - \{-j\}$?

Solución:

a) $\dfrac{z^3+z}{z+j} = \dfrac{z(z^2+1)}{z+j} = \dfrac{z\cancel{(z+j)}(z-j)}{\cancel{z+j}} = z^2 - zj \quad ; z = x+jy \, , z \neq -j$

Luego: $z^2 = (x+jy)^2 = x^2 + 2xyj - y^2 \;\wedge\; zj = (x+yj)j = xj - y$

$\Rightarrow \dfrac{z^3+z}{z+j} = x^2 + 2xyj - y^2 - (xj - y) = x^2 - y^2 + y + j(2xy - x) \quad ; z \neq -j$

$\Rightarrow Re(f) = \begin{cases} x^2 - y^2 + y \; ; & (x,y) \neq (0,-1) \\ -2 \; ; & (x,y) = (0,-1) \end{cases} \quad \wedge \quad Im(f) = \begin{cases} 2xy - x \; ; & (x,y) \neq (0,-1) \\ 0 \; ; & (x,y) = (0,-1) \end{cases}$

$\boxed{z \neq -j} \equiv \boxed{(x,y) \neq (0,1)}$

b) $\lim\limits_{z \to -j} f(z) = \lim\limits_{\substack{z \to -j \\ (z \neq -j)}} (z^2 - zj) = (-j)^2 - (-j)j = -2 = f(-j)$

Es decir: $\lim\limits_{z \to -j} f(z) = f(-j) \Rightarrow$ $\boxed{f \text{ es continua en } -j}$