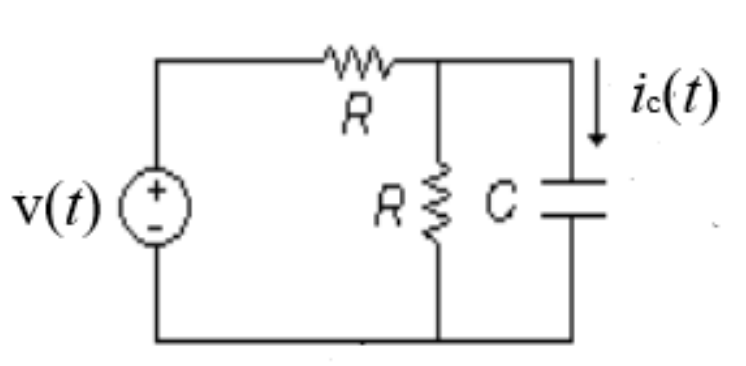
PROBLEMA DE CONTEXTO

Circuito RC en cascada

El siguiente circuito es un sistema LTI, donde la señal de entrada es $\mathbf{v(t)}$ y la salida es la corriente que circula por el condensador $\boldsymbol{i_c(t)}$. Se sabe que $C = 1\text{F}$, $R = 1\Omega$.



a) Halle la función de transferencia del sistema en el dominio de Laplace.
b) Halle la respuesta a un escalón unitario $u(\text{t} - 1)$ y al impulso unitario.

¿Cómo podremos desarrollar este problema?

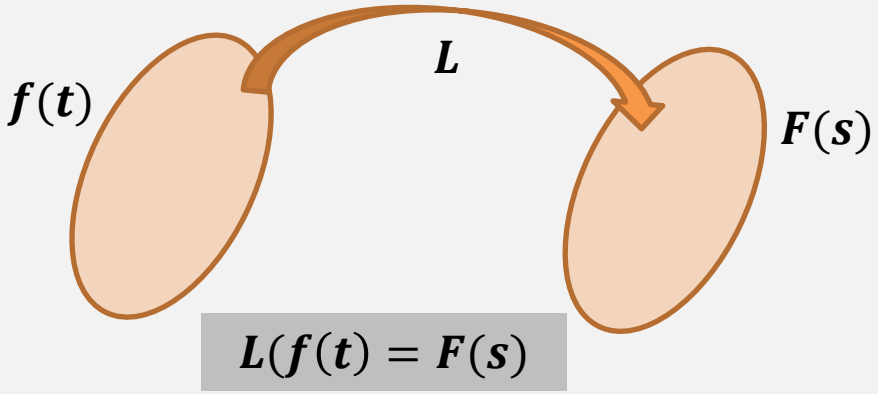
Transformada de Laplace

Definición

Dada una función f definida para $t \geq 0$, en el caso de existir la integral impropia:

$$\boxed{\mathcal{L}\big(f(t)\big) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t)\,dt = F(s)}$$

Se llamará Transformada de Laplace



Transformada de Laplace

Ejemplo. Halle la transformada de Laplace de $f(t) = e^{-t}$

$$F(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)dt = \int_0^\infty e^{-st} e^{-t} dt$$

$$F(s) = \lim_{b\to\infty} \int_0^b e^{-(s+1)t}\, dt = \lim_{b\to\infty} \frac{e^{-(s+1)t}}{-(s+1)}\Bigg|_0^b = \frac{1}{-(s+1)} \lim_{b\to\infty} \left(\frac{1}{e^{(s+1)t}}\right)\Bigg|_0^b$$

$$F(s) = \frac{1}{-(s+1)} \lim_{b\to\infty} \left(\frac{1}{e^{(s+1)b}} - \frac{1}{e^0}\right) \Rightarrow F(s) = \frac{1}{-(s+1)}(0-1) \quad \text{, siempre que } s+1>0$$

$$\boxed{\mathcal{L}(e^{-t}) = F(s) = \frac{1}{s+1}, \qquad s > -1}$$

Solución:

$$L(f(t)) = L(e^{-t}) = \int_0^\infty e^{-st} \cdot e^{-t} \cdot dt$$

$$= \int_0^\infty e^{-(s+1)t} \cdot dt = \frac{e^{-(s+1)t}}{-(s+1)}\Bigg|_0^\infty$$

$$= -\frac{1}{s+1}\left[\underbrace{e^{-(s+1)\cdot\infty}}_{0} - \underbrace{e^0}_{1}\right]$$

$$\Rightarrow \boxed{L(e^{-t}) = \frac{1}{s+1}}$$

$$\boxed{e^{-\infty} = 0}$$

Nota. El uso del signo límite se vuelve un poco tedioso, por lo a veces se suele adoptar la notación $\Big|_0^\infty$ como abreviatura para escribir $\lim_{b\to\infty}(\quad)\Big|_0^b$ tal y como se observa en el texto de consulta Zill.

Transformada de Laplace

Ejemplo:

Halle, por la definición, la transformada de Laplace de $f(t) = t$

$$F(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)dt = \int_0^\infty e^{-st}(t)dt$$

Integrando por partes:

$$F(s) = \frac{1}{s^2}$$

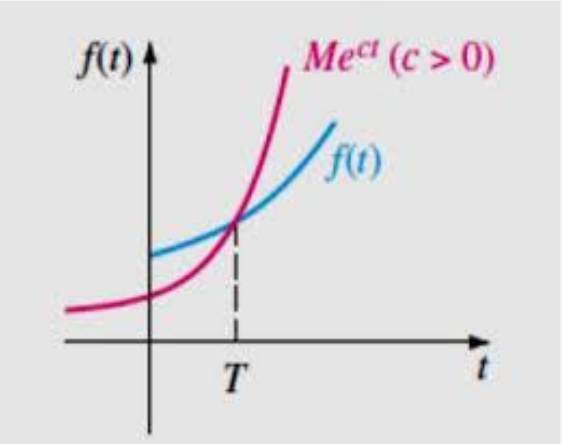
$$\mathcal{L}(t) = F(s) = \frac{1}{s^2} \quad , \qquad s > 0$$

Orden exponencial

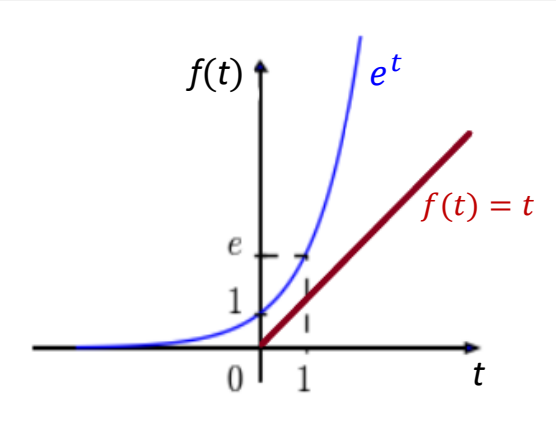
❑ Definición

Una función $f(\mathrm{t})$ es de **orden exponencial "c"** si existen constantes c, $T > 0$ y $M > 0$ de modo que:

$$|f(t)| \leq Me^{ct} \text{ donde } \mathrm{t} > T$$



Ejemplo. La función $f(t) = t$ es de orden exponencial, pues para valores $\mathrm{c} = 1, M = 1$ y $T = 1$, se tiene que $\mathrm{t} > T$.



Condición de existencia

❑ Condición para la existencia de F(s)

Si $f(t)$ es continua por tramos para $t \geq 0$, y de **orden exponencial "c"** entonces existe $\mathrm{F(s)} = \mathcal{L}(f(t))$ para $s > c$

$$\int e^{\alpha t}\,dt = \frac{e^{\alpha t}}{\alpha}$$

Ejemplo. Halle la transformada de Laplace de

$$f(t) = \begin{cases} 0\ , & 0 \leq t < 2 \\ 3\ , & t \geq 2 \end{cases}$$

$$L(f(t)) = \int_0^{\infty} e^{-st} \cdot f(t)\,dt$$

$$L(f(t)) = \underbrace{\int_0^2 e^{-st} \cdot 0\,dt}_{0} + \int_2^{\infty} e^{-st} \cdot 3\,dt = 3 \cdot \frac{e^{-st}}{-s}\Big|_2^{\infty} = -\frac{3}{s}\left(\underbrace{e^{-s\infty}}_{\underbrace{e^{-\infty}}_{0}} - e^{-s \cdot 2}\right) = \frac{3e^{-2s}}{s}.$$

$(+)$

Cuando $\underbrace{s = +}_{s>0}$

$$e^{+\infty} = +\infty; \quad e^{-\infty} = 0$$

Linealidad de la transformada de Laplace

❑ Propiedad.

Sean los números reales α y β y las funciones $f(t)$ y $g(t)$ entonces, se cumple:

$$\boxed{\mathcal{L}\{\alpha f(t) + \beta g(t)\} = \alpha\mathcal{L}\{f(t)\} + \beta\mathcal{L}\{g(t)\}}$$

La transformada de Laplace es una **transformación lineal**

Ejemplo. Halle $\mathcal{L}\{3e^{-t} + 5t\}$

TABLA: • $\mathcal{L}\{t\} = \frac{1}{s^2}$

• $\mathcal{L}\{e^{-t}\} = \frac{1}{s+1}$

Por linealidad.: $\mathcal{L}\{3e^{-t} + 5t\} = 3\mathcal{L}\{e^{-t}\} + 5\mathcal{L}\{t\} = 3 \cdot \frac{1}{s+1} + 5 \cdot \frac{1}{s^2}$

De lo hallado anteriormente en los ejemplos, tenemos:

$$\mathcal{L}\{3e^{-t} + 5t\} = 3\left(\frac{1}{s+1}\right) + 5\left(\frac{1}{s^2}\right)$$

$$\mathcal{L}\{3e^{-t} + 5t\} = \frac{3s^2 + 5s + 1}{s^2(s+1)}$$

Transformada de funciones básicas

A continuación, se muestra algunas trasformadas de Laplace de ciertas funciones.

Transformada de algunas funciones básicas	
$\mathcal{L}\{C\} = \frac{C}{s}$	$\mathcal{L}\{t\} = \frac{1}{s^2}$
$\mathcal{L}\{t^n\} = \frac{n!}{s^{n+1}}$, $n = 1, 2, 3, \ldots$ $\mathcal{L}\{t\} = \frac{1}{s^2}$ $\mathcal{L}\{t^2\} = \frac{2}{s^3}$ $\mathcal{L}\{t^3\} = \frac{6}{s^4}$	$\mathcal{L}\{e^{\pm at}\} = \frac{1}{s \mp a}$
$\mathcal{L}\{\text{sen}(kt)\} = \frac{k}{s^2 + k^2}$	$\mathcal{L}\{\cos(kt)\} = \frac{s}{s^2 + k^2}$
$\mathcal{L}\{\text{senh}(kt)\} = \frac{k}{s^2 - k^2}$	$\mathcal{L}\{\cosh(kt)\} = \frac{s}{s^2 - k^2}$

Funciones hiperbólicas

$* \ \text{Senh}(u) = \frac{e^{u} - e^{-u}}{2}$ $\quad \text{Cosh}(u) = \frac{e^{u} + e^{-u}}{2}$

Transformada de Laplace

Ejemplo.

Halle $\mathcal{L}\{e^{2t} - 3e^{-2t} - 7\cos 3t + 3\,\text{sen}\,2t\}$

$$\mathcal{L}\{e^{at}\} = \frac{1}{s-a}$$

$$\mathcal{L}\{\text{sen}\,kt\} = \frac{k}{s^2+k^2}$$

$$\mathcal{L}\{\cos kt\} = \frac{s}{s^2+k^2}$$

$$= \mathcal{L}\{e^{2t}\} - 3\mathcal{L}\{e^{-2t}\} - 7\mathcal{L}\{\cos 3t\} + 3\mathcal{L}\{\text{sen}\,2t\}$$

$$= \frac{1}{s-2} - 3\cdot\frac{1}{s+2} - 7\cdot\frac{s}{s^2+9} + 3\cdot\frac{2}{s^2+4}$$

Transformada de Laplace

$$\mathcal{L}\{e^{at}\} = \frac{1}{s-a}$$

$$\mathcal{L}\{1\} = \frac{1}{s}$$

$$\mathcal{L}\{t^n\} = \frac{n!}{s^{n+1}} \quad , n = 1, 2, \ldots$$

Ejemplo

Determine $\mathcal{L}\{2e^{3+t} - t^3 + (t+1)^2\}$

$$= \mathcal{L}\{2e^3 \cdot e^t - t^3 + t^2 + 2t + 1\}$$

$$= 2e^3 \cdot \mathcal{L}\{e^t\} - \mathcal{L}\{t^3\} + \mathcal{L}\{t^2\} + 2\mathcal{L}\{t\} + \mathcal{L}\{1\}$$

$$= 2 \cdot e^3 \cdot \frac{1}{s-1} - \frac{3!}{s^4} + \frac{2!}{s^3} + 2 \cdot \frac{1!}{s^2} - \frac{1}{s}$$

TRIGONOMETRÍA:

$$\operatorname{Sen}^2 u = \frac{1 - \cos 2u}{2} \qquad \cos^2 u = \frac{1 + \cos 2u}{2} \qquad \operatorname{Sen} u \cdot \cos u = \frac{\operatorname{Sen} 2u}{2}$$

$$* \; \mathcal{L}\{\cos^2 u\} = \mathcal{L}\left\{\frac{1 + \cos 2u}{2}\right\} = \frac{1}{2}\mathcal{L}\{1 + \cos 2u\} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s} + \frac{s}{s^2+4}\right)$$

Comportamiento al infinito de F(s)

- Si f es continua por tramos para $t \geq 0$ y de orden exponencial y $F(s) = \mathcal{L}\big(f(t)\big)$, entonces

$$\lim_{s \to \infty} F(s) = 0$$

Ejemplo. La función $F(s) = 2s/(s+1)$NO es la transformada de Laplace de una función continua por tramos de orden exponencial.

Transformada inversa de Laplace

Si F(s) representa la transformada de Laplace de $f(t)$, diremos que la transformada de Laplace inversa es $\boldsymbol{f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}}$

Transformada	Transformada inversa
$\mathcal{L}\{1\} = \frac{1}{s}$	$1 = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\}$
$\mathcal{L}\{t\} = \frac{1}{s^2}$	$t = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\right\}$
$\mathcal{L}\{t^n\} = \frac{n!}{s^{n+1}}, n \in N$	$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^n}\right\}, n \in N$
$\mathcal{L}\{e^{at}\} = \frac{1}{s-a}$	$e^{at} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-a}\right\}$
$\mathcal{L}\{\text{sen}(at)\} = \frac{a}{s^2+a^2}$	$\text{sen}(at) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{a}{s^2+a^2}\right\}$
$\mathcal{L}\{\cos(at)\} = \frac{s}{s^2+a^2}$	$\cos(at) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+a^2}\right\}$
$\mathcal{L}\{\text{senh}(at)\} = \frac{a}{s^2-a^2}$	$\text{senh}(at) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{a}{s^2-a^2}\right\}$
$\mathcal{L}\{\cosh(at)\} = \frac{s}{s^2-a^2}$	$\cosh(at) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+a^2}\right\}$

Transformada inversa de Laplace

Ejemplo.

a) Determine $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^3}\right\}$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^3}\right\} = \frac{t^2}{2!} = \frac{t^2}{2}$$

$$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^n}\right\}, n \in N$$

$$sen(at) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{a}{s^2+a^2}\right\}$$

$$L^{-1}\left\{\frac{1}{s^3}\right\} = f(t) = ???$$

$$\frac{1}{s^3} = L(f(t))$$

Tabla

Pero: $L\{t^2\} = \frac{2!}{s^3} \Rightarrow \frac{1}{2}L\{t^2\} = \frac{1}{s^3}$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\cancel{L}\{t^2\} = \cancel{L}\{f(t)\} \Rightarrow f(t) = \frac{1}{2}.t^2$$

b) Determine $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+3}\right\}$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+3}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+(\sqrt{3})^2}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+(\sqrt{3})^2}\right\}\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+3}\right\} = \frac{1}{\sqrt{3}}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\sqrt{3}}{s^2+(\sqrt{3})^2}\right\} = \frac{1}{\sqrt{3}}\text{sen}(\sqrt{3}t)$$

$$L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+3}\right\} = f(t) = ???$$

$$\frac{1}{s^2+3} = L\{f(t)\} \Rightarrow L\{f(t)\} = \frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{s^2+\sqrt{3}^2}$$

$$\cancel{L}\{f(t)\} = \frac{1}{\sqrt{3}}.\cancel{L}\{\text{Sen}\sqrt{3}t\}$$

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{3}}.\text{Sen}\sqrt{3}t.$$

Propiedad de linealidad de la TI

❑ Propiedad

La transformada inversa de Laplace es una TRANSFORMACIÓN LINEAL.

$$\mathcal{L}^{-1}\{aF(s) + bG(s)\} = a\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} + b\mathcal{L}^{-1}\{G(s)\}$$

Ejemplo. Determine $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{-3s-5}{s^2+4}\right\} = f(t) = ??$

$$\cos(at) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+a^2}\right\}$$

$$sen(at) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{a}{s^2+a^2}\right\}$$

$$\frac{-3s-5}{s^2+4} = \mathcal{L}(\underbrace{f(t)}_{??})$$

$$\mathcal{L}(f(t)) = -3\frac{s}{s^2+4} - \frac{1 \times 2}{s^2+4} \cdot \frac{5}{2}$$

6	$\mathcal{L}(sen(at))$	$=$	$\frac{a}{s^2+a^2}$
5	$\mathcal{L}(\cos(at))$	$=$	$\frac{s}{s^2+a^2}$

$$\mathcal{L}(f(t)) = -3\mathcal{L}(\cos 2t) - \frac{5}{2}\mathcal{L}(sen 2t) \Rightarrow f(t) = -3\cos 2t - \frac{5}{2} sen 2t.$$

Transformada inversa de Laplace

9	$\mathcal{L}(e^{at})$	$=$	$\frac{1}{s-a}$

$$e^{at} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-a}\right\}$$

Ejemplo. Determine

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s-5}{(s+3)(s-2)}\right\} = f(t)$$

$$L(f(t)) = \frac{s-5}{(s+3)(s-2)} = \frac{A}{s+3} + \frac{B}{s-2} \Rightarrow s-5 = A(s-2) + B(s+3)$$

$$s=2 \rightarrow -3 = 0 + 5B \Rightarrow B = -3/5$$

$$s=-3 \rightarrow -8 = -5A \rightarrow A = 8/5$$

$$L(f(t)) = \frac{8}{5}\cdot\frac{1}{s+3} - \frac{3}{5}\cdot\frac{1}{s-2}$$

$$L(f(t)) = \frac{8}{5}\cdot L(e^{-3t}) - \frac{3}{5}\cdot L(e^{2t}) \Rightarrow f(t) = \frac{8}{5}\cdot e^{-3t} - \frac{3}{5}\cdot e^{2t}.$$

Transformada inversa de Laplace

Ejercicio. Determine $A = \mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{s^2 - 2s + 1}{s^3 + 4s^2 + 3s}\right\} = f(t)$

$$e^{at} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-a}\right\}$$

$$L(f(t)) = \frac{s^2 - 2s + 1}{s(\underbrace{s^2 + 4s + 3}_{(s+3)(s+1)})} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+3} + \frac{C}{s+1}$$

$$\rightarrow s^2 - 2s + 1 = A(s+3)(s+1) + B\,s.(s+1) + C\,s.(s+3)$$

$s = -1 \rightarrow 4 = 0 + 0 - 2C \rightarrow C = -2$

$s = -3 \rightarrow 16 = 0 + 6B + 0 \rightarrow B = \frac{8}{3}$

$s = 0 \rightarrow 1 = 3A + 0 + 0 \rightarrow A = \frac{1}{3}$

$$L(f(t)) = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{s} + \frac{8}{3}\cdot\frac{1}{s+3} - 2\cdot\frac{1}{s+1}$$

$$L(f(t)) = \frac{1}{3}\cdot L(1) + \frac{8}{3}\cdot L(e^{-3t}) - 2L(e^{-t})$$

$$f(t) = \frac{1}{3} + \frac{8}{3}e^{-3t} - 2e^{-t}.$$

Respuesta. $A = \dfrac{1}{3} - \dfrac{8}{3}e^{-3t} - 2e^{-t}$

* HALLAR $L^{-1}\left(\dfrac{s^2+s+1}{s(s^2+1)}\right) = f(t)$

$$L(f(t)) = \frac{s^2+s+1}{s(s^2+1)} = \frac{A}{s} + \frac{Bs+C}{s^2+1}$$

$$s^2+s+1 = A(s^2+1) + (Bs+C)s$$
$$= As^2 + A + Bs^2 + C.s$$

$$s^2+s+1 = s^2\underbrace{(A+B)}_{1} + \underbrace{C}_{1}.s + \underbrace{A}_{1} \Rightarrow B=0.$$

$$L(f(t)) = \frac{1}{s} + \frac{0+1}{s^2+1} = \frac{1}{s} + \frac{1}{s^2+1}$$

$$L(f(t)) = L(1) + L(\operatorname{Sen} t)$$

$$f(t) = 1 + \operatorname{Sen} t.$$

Halle: $L\left(\operatorname{Sen}(t-\pi) + (e^{2t} + e^{-3t})^2\right)$

$$L\left(\operatorname{Sen} t \underbrace{\cos\pi}_{-1} - \cancel{\operatorname{Sen}\pi}_{0} \cos t + e^{4t} + e^{-6t} + 2e^{2t}\cdot e^{-3t}\right)$$

$$L\left(-\operatorname{Sen} t + e^{4t} + e^{-6t} + 2e^{-t}\right)$$

$$= -\frac{1}{s^2+1} + \frac{1}{s-4} + \frac{1}{s+6} + 2.\frac{1}{s+1}.$$

Trigonometria:

$sen(U \pm V) = senUCosV \pm senVcosU$

$\cos(U \pm V) = cosUcosV \mp senUsenV$