INGENIERÍA DE CONTROL 2

Sesión 4

3.4 DISEÑO POR UBICACIÓN DE POLOS

3.4.0 INTRODUCCIÓN

La Teoría de Control Automático, permite resolver problemas de regulación y de seguimiento de las variables en las plantas.

Estos problemas se resuelven mediante un apropiado diseño de:

- Sistemas de control de regulación y
- Sistemas de control de seguimiento

3.4.0 INTRODUCCIÓN

En el diseño por ubicación de polos, se busca que todas las raíces de la $\Delta(s)$ de un sistema sean ubicadas en posiciones deseadas.

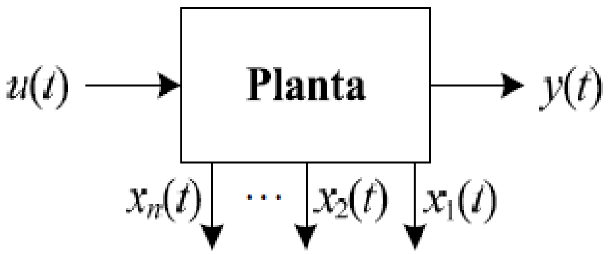
- Las posiciones deseadas de las raíces son dadas (ó seleccionadas) de acuerdo a requerimientos de la respuesta del sistema.

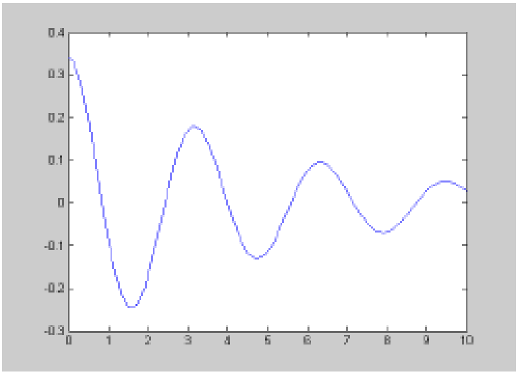
Considere una planta

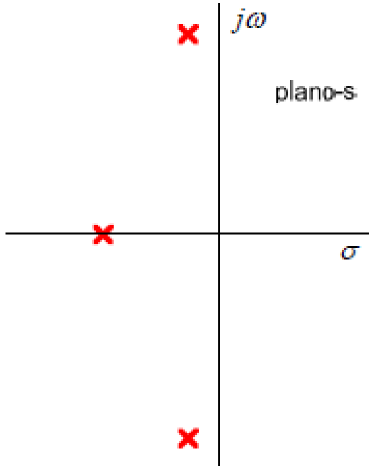
$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}u(t) \qquad (1)$$

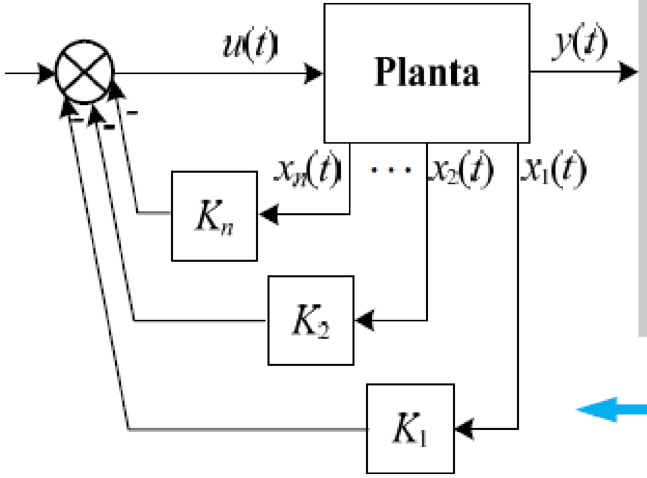
$$y(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}u(t) \qquad (2)$$

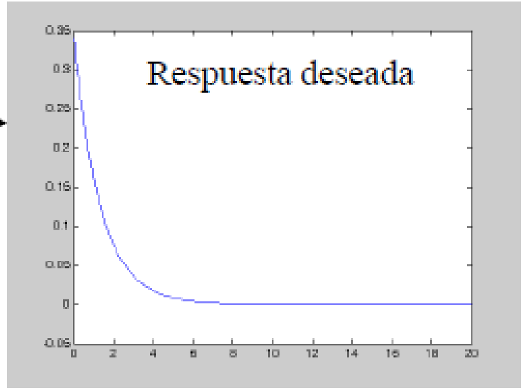
$\Delta(s)$

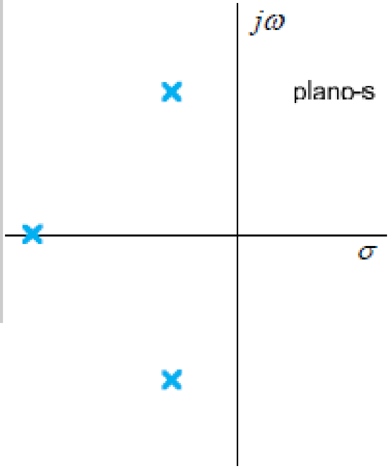












$\Delta_d(s)$

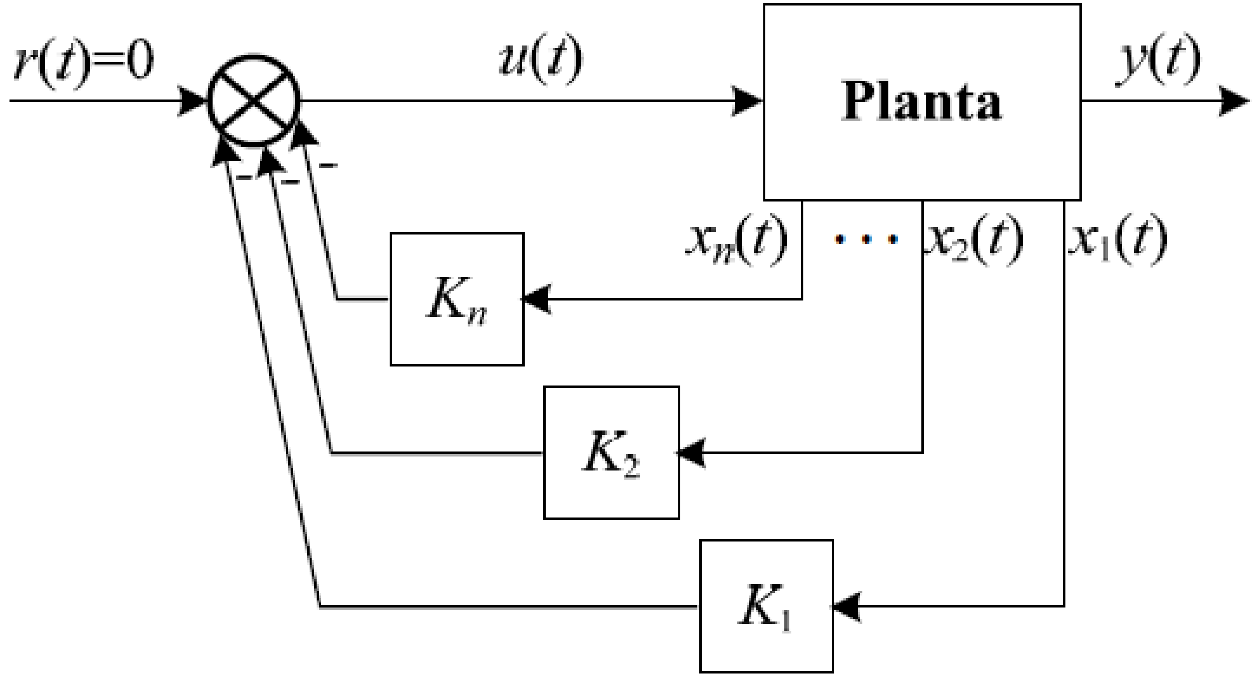
3.4.1 DISEÑO DE SISTEMA DE REGULACIÓN

En 3.4, se empleará la técnica de diseño por ubicación de polos para obtener sistemas de control que permiten resolver el problema de regulación.

- El objetivo del sistema de control es mantener la variable de salida en cero, a pesar de las perturbaciones.
- La realimentación de estado hará retornar la variables de salida y las variables de estado del sistema a cero de alguna manera deseada.

SISTEMA DE LAZO CERRADO

Al aplicar la ley de control en el sistema se obtiene



Dado que la entrada r(t)=0, este es un sistema de regulación.

LEY DE CONTROL

La tarea de ubicar todos las raíces en las posiciones deseadas requiere que todas las variables de estado del sistema sean medibles (ó estimables)

En el diseño por ubicación de polos, la ley de control (que implica realimentación de estado) es especificada como:

$$u(t) = -\mathbf{K}\mathbf{x}(t) \tag{3}$$

donde **K** es un 1 x n vector de ganancias constantes.

3.4.2 ECUACIÓN CARACTERISTICA DEL SISTEMA DE LAZO CERRADO

La matriz de ganancia de realimentación se expresa como:

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} K_1 & K_2 & \ldots & K_n \end{bmatrix}$$

donde "*n*" es el orden de la planta. sust. (3) en (1) obtenemos:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{K}\mathbf{x}(t) \\ &= (\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K})\mathbf{x}(t) \end{aligned}$$

La ec. característica del sistema de lazo cerrado es:

$$\Delta_c(s) = \left| s\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{B}\mathbf{K} \right| = 0 \qquad (4)$$

POLOS DEL SISTEMA DE LAZO CERRADO

Si la respuesta del sistema requiere que las raíces de $\Delta_c(s)$ (polos del sistema de lazo cerrado) se ubiquen en $-\lambda_1$, $-\lambda_2, \ldots,$ $-\lambda_n$; entonces la ecuación característica deseada será:

$$\Delta_d(s) = (s+\lambda_1)(s+\lambda_2)\ldots(s+\lambda_n) = 0$$

expandiendo esta última ecuación se tiene

$$\Delta_d(s) = s^n + \alpha_{n-1}s^{n-1} + \ldots + \alpha_1 s + \alpha_0 = 0 \qquad (5)$$

Así, para que las raíces se ubiquen en las posiciones deseadas se requiere que (4) = (5)

$$|s\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{BK}| = s^n + \alpha_{n-1}s^{n-1} + \ldots + \alpha_1 s + \alpha_0 \qquad (6)$$

POLOS DEL SISTEMA DE LAZO CERRADO

- La solución de la ec. (6), implica obtener el vector de ganancias **K.**

- Así, al igualar los coeficientes en ambos lados de (6), se obtendrán "n" ecuaciones con las "n" incógnitas:(K_1, K_2… K_n).

- La solución de estas ecuaciones no es práctica para sistema de alto orden.

3.4.3 TEOREMA

Si un SLI-t es completamente controlable, existe un vector **K** que permite que las "*n*" raíces de (4) se puedan ubicar en las posiciones deseadas.

Dem.

Si en un SLI-t, [**A**, **B**] se puede transf. a la FCC [**A***, **B***] :

$$\mathbf{A}^* = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{n-1} \end{bmatrix} \qquad \mathbf{B}^* = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

TEOREMA (cont.)

Para este caso se obtiene la matriz del sistema de lazo cerrado

$$\mathbf{A}^*-\mathbf{B}^*\mathbf{K}^*=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_0-K_1^* & -a_1-K_2^* & -a_2-K_3^* & \dots & -a_{n-1}-K_n^* \end{bmatrix}$$

y la ec. característica respectiva será

$$\Delta_c(s)=\left|s\mathbf{I}-\mathbf{A}^*+\mathbf{B}^*\mathbf{K}^*\right|=s^n+\left(a_{n-1}+K_n^*\right)s^{n-1}+\ldots+\left(a_1+K_2^*\right)s+\left(a_0+K_1^*\right)=0 \quad (7)$$

TEOREMA (cont.)

- Dado que las ganancias K^*_1, K^*_2… K^*_n están aisladas en cada coeficiente, entonces las raíces de la ec. característica se podrán asignar en forma arbitraria.

- Así, teniendo en cuenta la ecuación característica deseada, de (5)= (7), al igualar coeficientes se tiene:

$$a_{i-1} + K_i^* = \alpha_{i-1}$$

De donde se obtienen las ganancias:

$$K_i^* = \alpha_{i-1} - a_{i-1}, \qquad i = 1,2,\ldots,n$$

- Para el sistema original se calcula el vector **K** empleando la transformación

$$\mathbf{K} = \mathbf{K}^*\mathbf{P}^{-1}$$

METODOLOGÍA 1

Considere una planta : $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}u(t)$ (1)

y la señal de control : $u(t) = -\mathbf{K}\mathbf{x}(t)$ (3)

La ec. característica deseada:

$$\Delta_d(s) = (s+\lambda_1)(s+\lambda_2)\ldots(s+\lambda_n) = 0 \qquad (5)$$

Solución

- Analizar la controlabilidad de la planta: rango(**S**)=n
- Determinar: $\Delta(\mathrm{s}) = \mathrm{s}^n + a_{n-1}\mathrm{s}^{n-1} + \ldots + a_1\mathrm{s} + a_0 = 0$
- Expandir (5): $\Delta_d(\mathrm{s}) = \mathrm{s}^n + \alpha_{n-1}\mathrm{s}^{n-1} + \ldots + \alpha_1\mathrm{s} + \alpha_0 = 0$
- Hallar: $\mathrm{K}_i^* = \alpha_{i-1} - a_{i-1}, \qquad i = 1, 2, \ldots, n$
- Determinar para la planta original

$$\mathbf{K} = \mathbf{K}^*\mathbf{P}^{-1}$$

METODOLOGÍA 2

Considere una planta : $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}u(t)$ (1)

y la señal de control : $u(t) = -\mathbf{K}\mathbf{x}(t)$ (3)

La ec. característica deseada:

$$\Delta_d(s) = (s + \lambda_1)(s + \lambda_2)\ldots(s + \lambda_n) = 0 \qquad (5)$$

Solución

- Analizar la controlabilidad de la planta: rango($\mathbf{S}$)=n
- Expandir (5): $\Delta_d(s) = s^n + \alpha_{n-1}s^{n-1} + \ldots + \alpha_1 s + \alpha_0 = 0$
- Determinar **K** empleando la **Formula de Ackermman**

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{AB} & \ldots & \mathbf{A}^{n-2}\mathbf{B} & \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B} \end{bmatrix}^{-1} \Delta_d(\mathbf{A})$$

METODOLOGÍA 2 (cont.)

donde $\mathbf{\Delta}_d(\mathbf{A})$, representa la matriz polinomial

$$\mathbf{\Delta}_d(\mathbf{A}) = \mathbf{A}^n + \alpha_{n-1}\mathbf{A}^{n-1} + \ldots + \alpha_1\mathbf{A} + \alpha_0\mathbf{I}$$

3.4.4 SELECCIÓN DE LAS RAÍCES DE LA ECUACIÓN CARACTERÍSTICA DESEADA

Para la selección de las posiciones deseadas, se pueden emplear alguna de las siguientes técnicas:

EN BASE A POLOS DOMINANTES

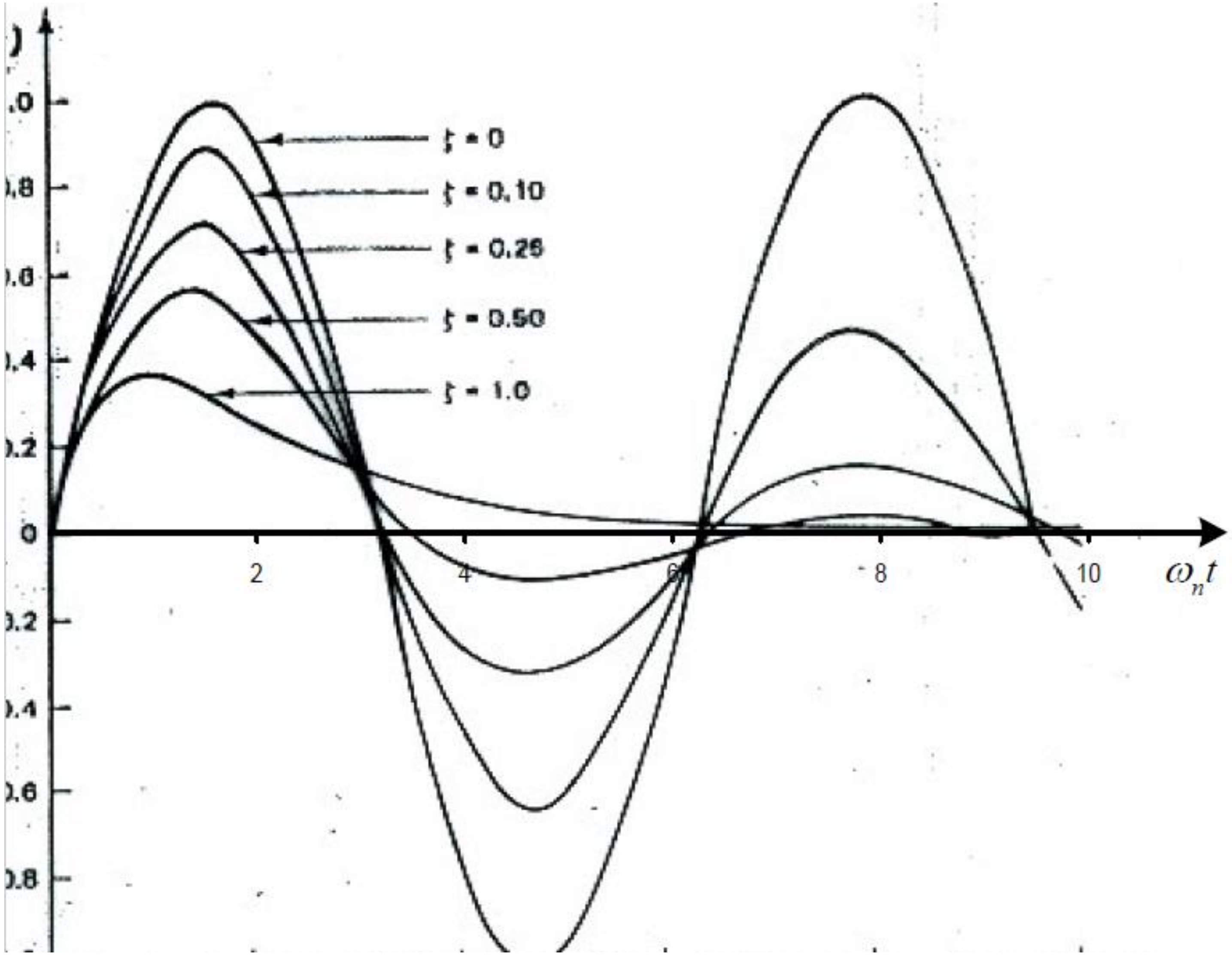
- Se busca que el sistema tenga una respuesta parecida a la de un sistema prototipo de segundo orden.

- Se seleccionan los polos dominantes en base a las conocidas relaciones entre ζ y ω_n.

$$s_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$$

- Se seleccionan los otros polos de tal manera que se obtengan respuestas bien amortiguadas (polos insignificantes).

En la fig. se muestra la respuesta impulsiva de un sistema prototipo de 2do. orden


ζ = 0
ζ = 0,10
ζ = 0,25
ζ = 0,50
ζ = 1,0
0
2
4
6
8
10
ωnt

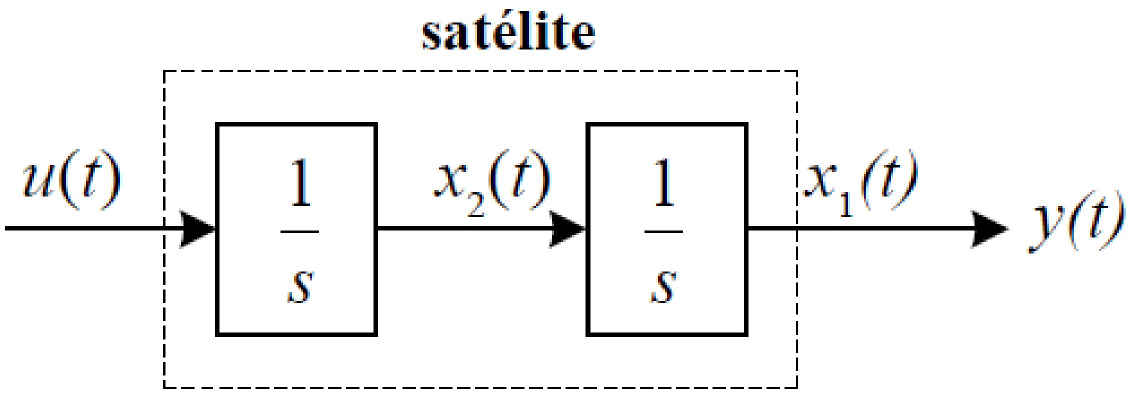
3.4.5 RECOMENDACIÓN PRÁCTICA

Teóricamente, si el sistema es controlable: los polos de lazo cerrado se pueden ubicar en las posiciones deseadas.

En aplicaciones prácticas: un mayor traslado, para que los polos de la planta alcancen las posiciones deseadas del sistema, requiere un mayor esfuerzo de control. Lo anterior implica:

- mayor costo de implementación
- saturación de actuadores
- esfuerzo de los componentes

Ejemplo 1. Se tiene la planta



Diseñar un sistema de control para la planta, realimentando sus variables de estado.

La posición de las raíces que garantizan la respuesta deseada son :

$$s_1 = -4 + j4 \qquad \text{y} \qquad s_2 = -4 - j4$$

Solución

El modelo de estado de la planta viene dado por

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

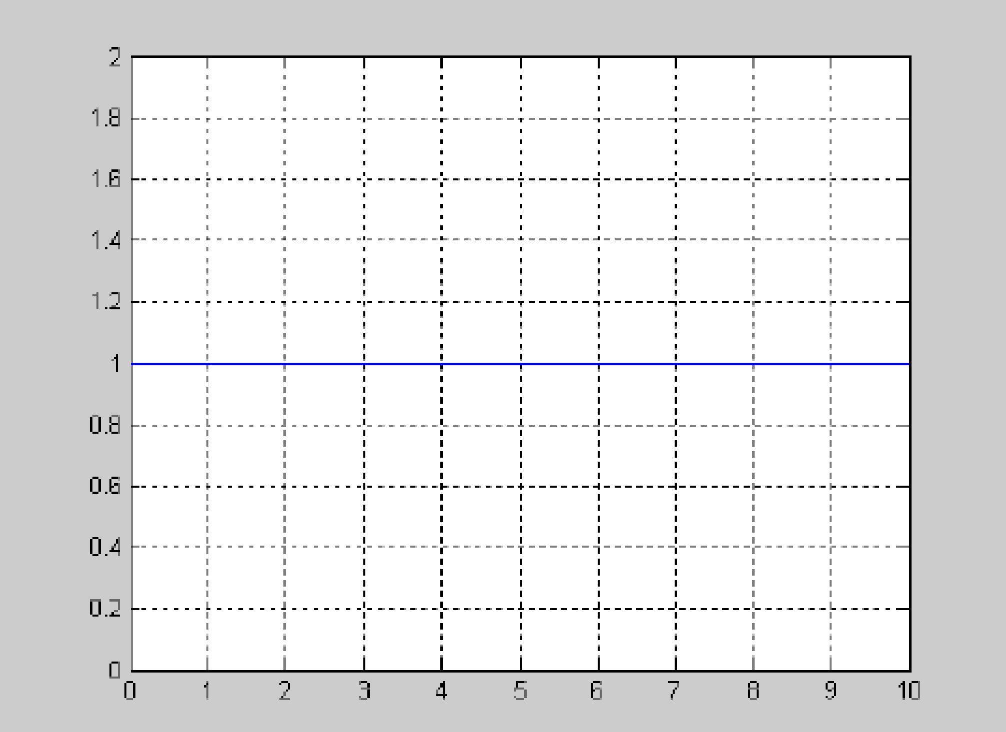
$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t)$$

cont.

La respuesta del sistema en lazo abierto para las condiciones iniciales,

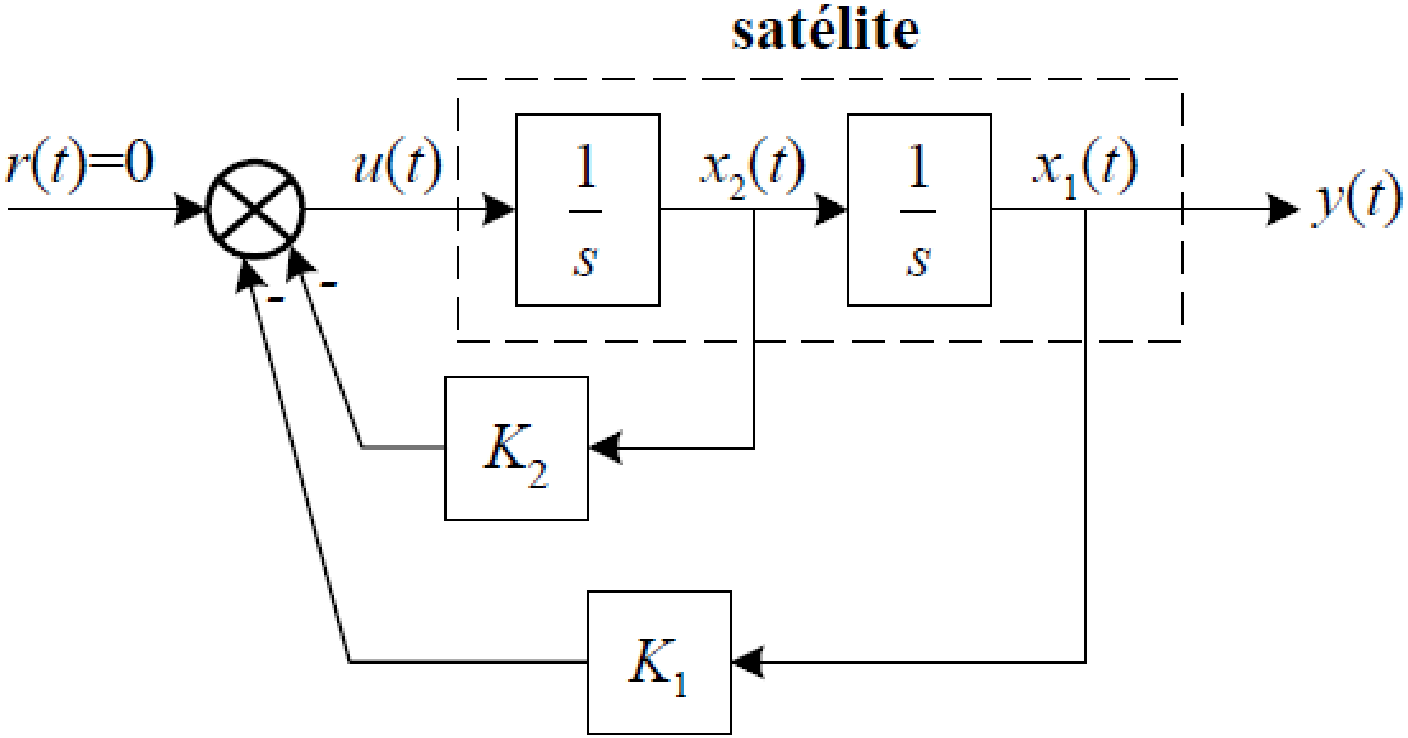
$$\mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

se muestra en la figura,



Solución

Empleando realimentaciones de estado



Solución.

Se analiza la matriz de controlabilidad

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{AB} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$|\mathbf{S}| \neq 0 \quad -\text{no singular} \rightarrow \text{la planta es controlable.}$$

La ec. característica de la planta viene dada por

$$\Delta_0(s) = |s\mathbf{I} - \mathbf{A}| = \begin{vmatrix} s & -1 \\ 0 & s \end{vmatrix} = s^2 \quad ; \qquad \begin{aligned} a_0 &= 0 \\ a_1 &= 0 \end{aligned}$$

La ec. característica deseada será

$$\Delta_d(s) = (s + 4 - j4)(s + 4 + j4) = s^2 + 8s + 32$$

$$\alpha_0 = 32$$
$$\alpha_1 = 8$$

De donde

$$K_1^* = 32 - 0 = 32$$
$$K_2^* = 8 - 0 = 8$$

cont.

Los valores de las ganancias de realimentación que se deben implementar en la planta son:

$$\mathbf{K} = \mathbf{K}^{*}\mathbf{P}^{-1}$$

$$\mathbf{P} = \mathbf{SM} = \left(\begin{bmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{AB} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right)$$

$$\mathbf{P}^{-1} = \left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

de donde

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 32 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 32 & 8 \end{bmatrix}$$

cont.

La respuesta del sistema con realimentación de estados para las condiciones iniciales,

$$\mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

se muestra en la figura,