Error en Estado Estacionario

Ing. Eddie Sobrado

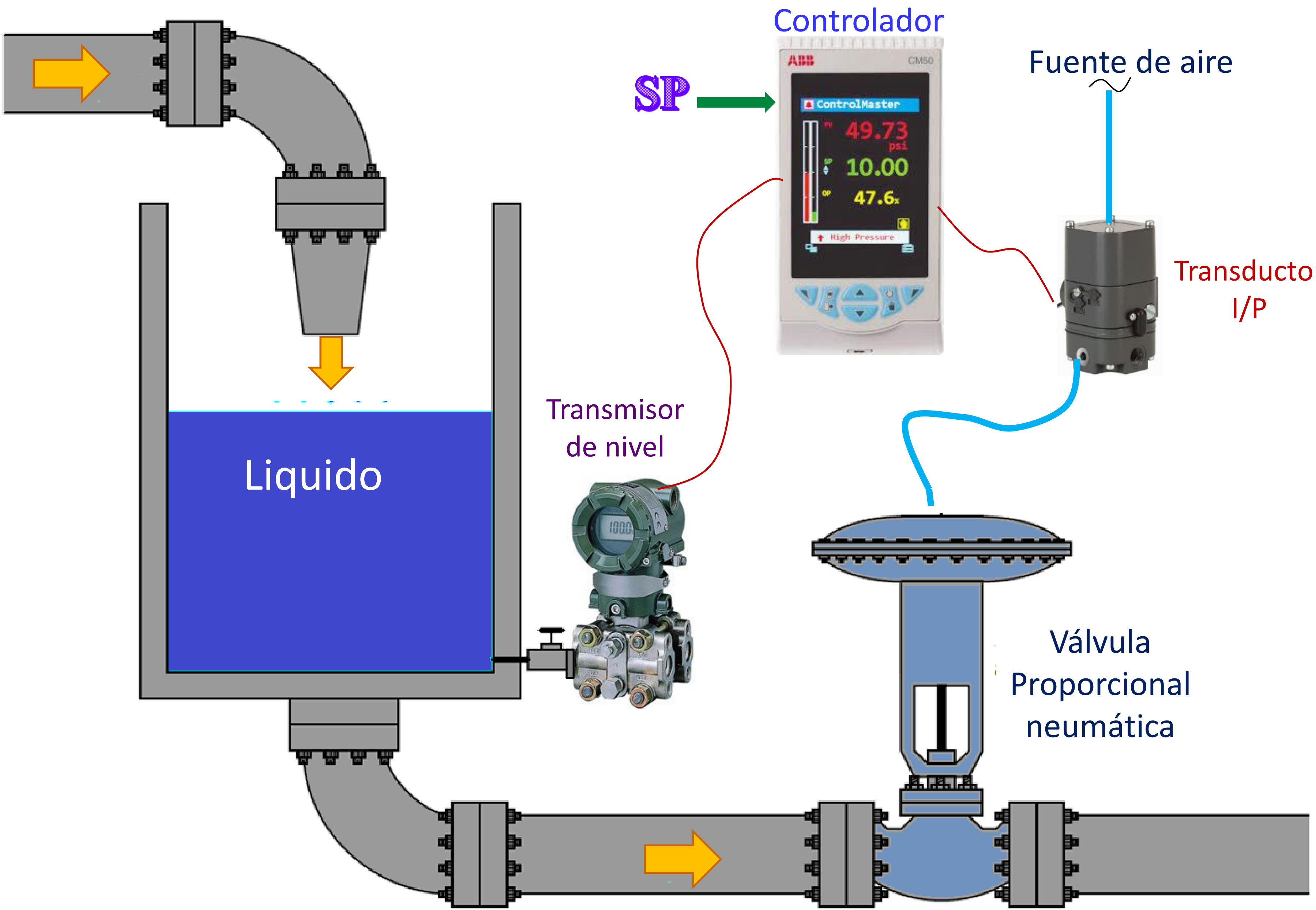
Error en Estado Estacionario (e_{ss})

- **El error en estado estable o en estado estacionario,** es la señal que indica la diferencia entre la señal de entrada de referencia (Set Point) y el resultado obtenido por el sensor a partir de la salida realimentada (salida del proceso)

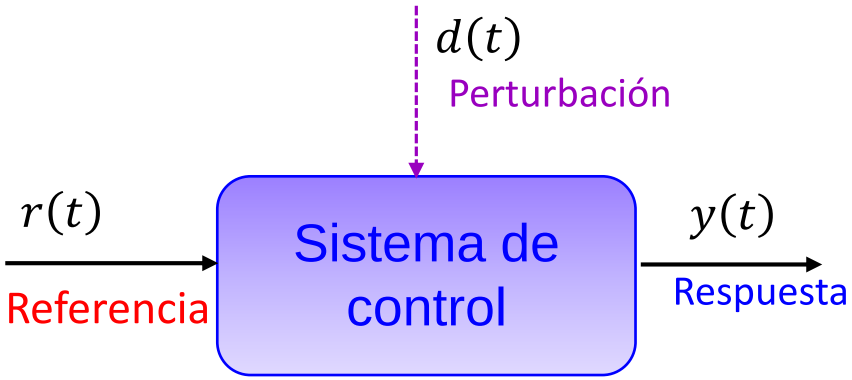
Régimen permanente o **estado estacionario**, se entiende la zona de la respuesta del **sistema** en la que, tras haber transcurrido tiempo suficiente, todas las señales del **sistema** se han estabilizado y permanecen a un valor constante

El error depende de la Función de transferencia de Lazo Abierto del sistema.

Error en Estado Estacionario (e_{ss})



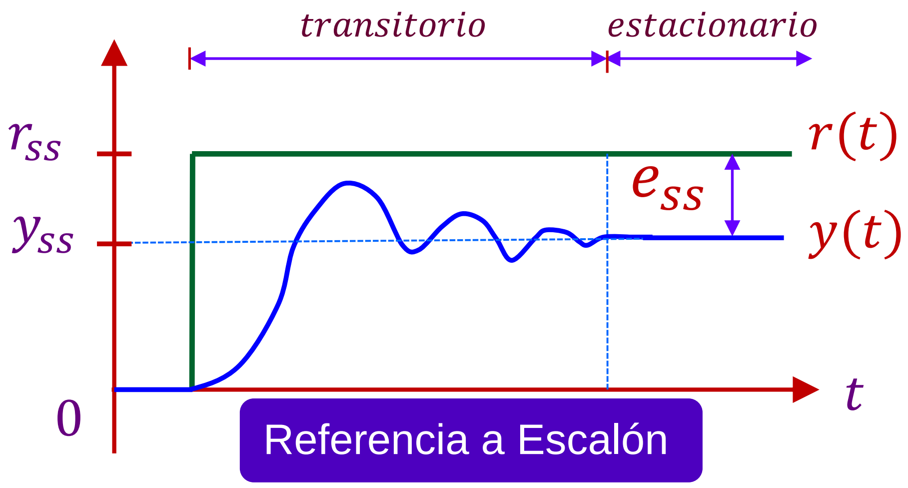
Error en Estado Estacionario (e_{ss})

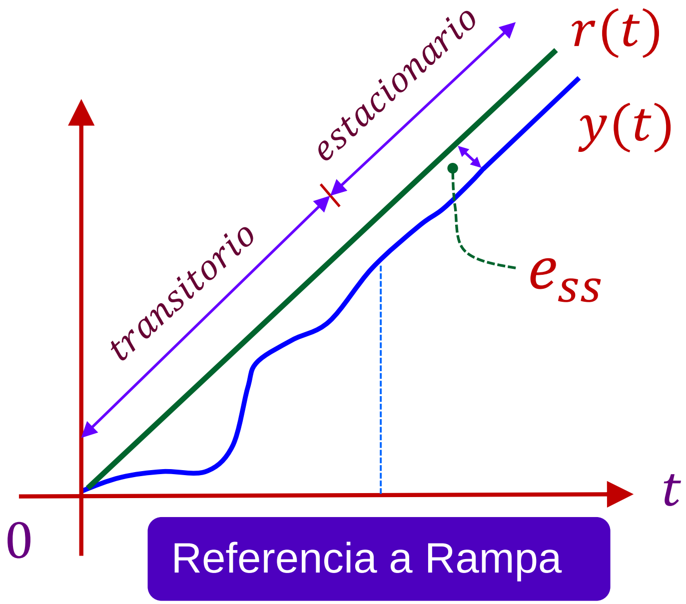


Error $e(t) \equiv r(t) - y(t)$

Error en Estado Estacionario:

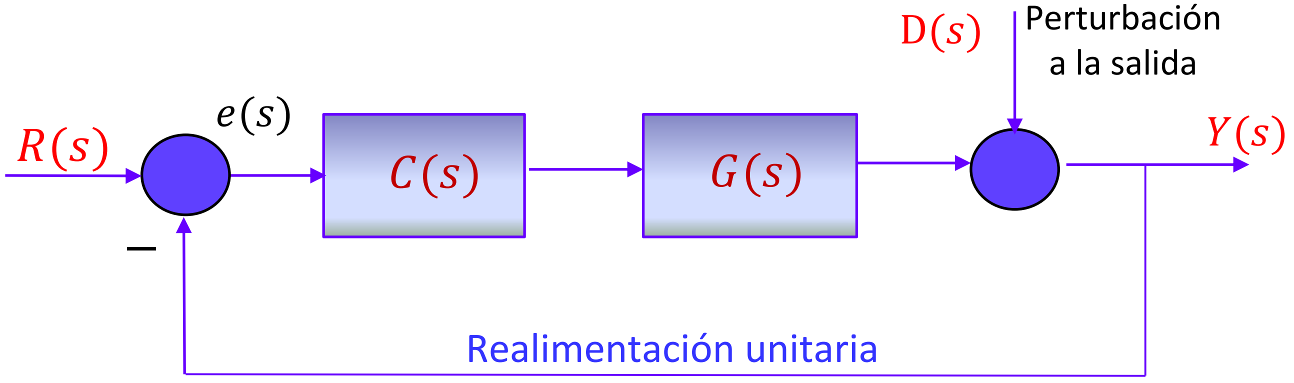
$$e_{ss} \equiv lim_{t\to\infty} e(t)$$





Error en Estado Estacionario:
Realimentación unitaria

e_{ss} para realimentación unitaria



$$e(s) = R(s) - Y(s)$$

$$Y(s) = C(s)G(s)E(s) + D(s)$$

$$E(s) = R(s) - C(s)G(s)E(s) - D(s)$$

$$[1 + C(s)G(s)]E(s) = R(s) - D(s)$$

$$E(s) = \frac{R(s) - D(s)}{1 + C(s)G(s)}$$

e_{ss} para realimentación unitaria

- Aplicando el TVF obtendremos una expresión para el error en estado estacionario:

$$e_{ss} = lim_{t\to in} e(t) = lim_{s\to 0} sE(s) = lim_{s\to 0} \frac{s[R(s) - D(s)]}{1 + C(s)G(s)}$$

$$= lim_{s\to 0} \frac{s[R(s)]}{1 + C(s)G(s)} + lim_{s\to 0} \frac{-s[D(s)]}{1 + C(s)G(s)}$$

podemos desagregar esta expresión del e_{ss} total en dos componentes

$$e_{ss} = {e_{ss}}^{r} + {e_{ss}}^{d}$$

$${e_{ss}}^{r} = lim_{s\to 0} \frac{sR(s)}{1 + C(s)G(s)}$$

(Debido a la Referencia)

$${e_{ss}}^{d} = lim_{s\to 0} \frac{-sD(s)}{1 + C(s)G(s)}$$

(Debido a la Perturbación)

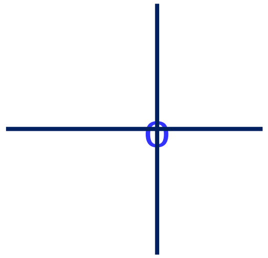
Tipo de un Sistema Dinámico

Un sistema dinámico es de tipo $\boldsymbol{K}$, si tiene $\boldsymbol{K}$ polos iguales a cero (polos en el origen). Es decir términos s^K en el denominador, que representa un polo de multiplicidad K en el origen.

- El esquema de clasificación se basa en la cantidad de términos 1/s indicadas por la FT en lazo abierto
- Por ejemplo el tipo de los siguientes sistemas:

Tipo 0 $\boldsymbol{K = 0}$

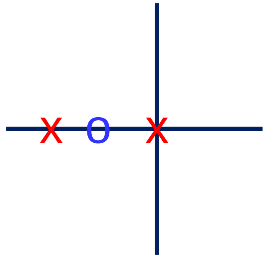
$$C(s)G(s) = \frac{s}{s^2 + 1}$$



No hay polo en el origen

Tipo 1 $\boldsymbol{K = 0}$

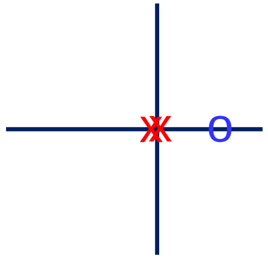
$$C(s)G(s) = \frac{s + 1}{s(s + 2)}$$



Hay 1 polo en el origen

Tipo 2 $\boldsymbol{K = 0}$

$$C(s)G(s) = \frac{s - 1}{s^3 + s^2}$$



Hay 2 polos en el origen

e_{ss} para realimentación unitaria

- Relación entre el Tipo de C(s)G(s) y el e_{ss}

$$\boxed{{e_{ss}}^r = lim_{s\to 0}\frac{sR(s)}{1+C(s)G(s)}}$$

(Debido a la Referencia)

En general: $C(s)G(s) = \dfrac{num(s)}{den(s)}$ $\Rightarrow$ ${e_{ss}}^r = lim_{s\to 0}\dfrac{sR(s)}{1+\dfrac{num(s)}{den(s)}}$

Para $C(s)G(s)$ de tipo K, tenemos: $\Rightarrow$ ${e_{ss}}^r = lim_{s\to 0}\dfrac{sR(s)}{1+\dfrac{num(s)}{\mathbf{s^k}den^*(s)}}$

$${e_{ss}}^r = \frac{lim_{s\to 0}[s^{k+1}R(s)]}{lim_{s\to 0}\left[s^k+\dfrac{num(s)}{den^*(s)}\right]} \Rightarrow \boxed{{e_{ss}}^r = \frac{lim_{s\to 0}[s^{k+1}R(s)]}{lim_{s\to 0}\left[s^k+\dfrac{num(s)}{den^*(s)}\right]}}$$

$den^*(0) \neq 0 \quad num(0) \neq 0$

e_{ss} para sistemas TIPO 0

- Relación entre el Tipo de C(s)G(s) y el e_{ss}

$$e_{ss}{}^{r} = \frac{lim_{s\to 0}[s^{k+1}R(s)]}{lim_{s\to 0}\left[s^{k} + \frac{num(s)}{den^{*}(s)}\right]}$$

$Si\ k = 0$

$$e_{ss}{}^{r} = \frac{lim_{s\to 0}[s^{1}R(s)]}{lim_{s\to 0}[1 + C(s)G(s)]}$$

Se define Constante de error de **POSICIÓN**:

$$K_p = K_0 = lim_{s\to 0}[C(s)G(s)]$$

$$e_{ss}{}^{r} = \frac{lim_{s\to 0}[s^{1}R(s)]}{1 + K_0}$$

Para $\mathrm{R(s)} = \frac{a_0}{s}$ $\quad e_{ss}{}^{r} = \frac{lim_{s\to 0}[s a_0/s]}{1 + K_0} = \frac{a_0}{1 + K_0}$

Para $\mathrm{R(s)} = \frac{a_1}{s^2}$ $\quad e_{ss}{}^{r} = \frac{lim_{s\to 0}[s a_1/s^2]}{1 + K_0}$ No ACOTADO

Para $\mathrm{R(s)} = \frac{2a_2}{s^3}$ $\quad e_{ss}{}^{r} = \frac{lim_{s\to 0}[s 2a_2/s^3]}{1 + K_0}$ No ACOTADO

e_{ss} para sistemas TIPO 1

- Relación entre el Tipo de C(s)G(s) y el e_{ss}

$$e_{ss}{}^{r} = \frac{lim_{s\to 0}[s^{k+1}R(s)]}{lim_{s\to 0}\left[s^{k} + \frac{num(s)}{den^{*}(s)}\right]}$$

$Si\ k = 1$

$$e_{ss}{}^{r} = \frac{lim_{s\to 0}[s^{2}R(s)]}{lim_{s\to 0}[s^{1}C(s)G(s)]}$$

Se define Constante de error de **VELOCIDAD**:

$$K_V = K_1 = lim_{s\to 0}[sC(s)G(s)]$$

$$\boxed{e_{ss}{}^{r} = \frac{lim_{s\to 0}[s^{2}R(s)]}{K_1}}$$

Para $R(s) = \frac{a_0}{s}$ $\quad e_{ss}{}^{r} = \frac{lim_{s\to 0}[s^{2}a_0/s]}{K_1} = 0$

Para $R(s) = \frac{a_1}{s^2}$ $\quad e_{ss}{}^{r} = \frac{lim_{s\to 0}[s^{2}a_1/s^2]}{K_1} = \frac{a_1}{K_1}$

Para $R(s) = \frac{2a_2}{s^3}$ $\quad e_{ss}{}^{r} = \frac{lim_{s\to 0}[s^{2}2a_2/s^3]}{K_1}$ No ACOTADO

e_{ss} para sistemas TIPO 2

- Relación entre el Tipo de C(s)G(s) y el e_{ss}

$$e_{ss}{}^{r} = \frac{lim_{s\to 0}[s^{k+1}R(s)]}{lim_{s\to 0}\left[s^{k} + \frac{num(s)}{den^{*}(s)}\right]}$$

$Si\ k = 2$

$$e_{ss}{}^{r} = \frac{lim_{s\to 0}[s^{3}R(s)]}{lim_{s\to 0}[s^{2}C(s)G(s)]}$$

Se define Constante de error de **ACELERACIÓN**:

$$K_A = K_2 = lim_{s\to 0}[s^{2}C(s)G(s)] \Rightarrow$$

$$\boxed{e_{ss}{}^{r} = \frac{lim_{s\to 0}[s^{3}R(s)]}{K_2}}$$

Para $\mathrm{R(s)} = \frac{a_0}{s}$ $\qquad e_{ss}{}^{r} = \frac{lim_{s\to 0}[s^{3}a_0/s]}{K_2} = 0$

Para $\mathrm{R(s)} = \frac{a_1}{s^2}$ $\qquad e_{ss}{}^{r} = \frac{lim_{s\to 0}[s^{3}a_1/s^{2}]}{K_2} = 0$

Para $\mathrm{R(s)} = \frac{2a_2}{s^3}$ $\qquad e_{ss}{}^{r} = \frac{lim_{s\to 0}[s^{3}2a_2/s^{3}]}{K_2} = \frac{2a_2}{K_2}$

e_{ss} para SP ESCALON – RAMPA - PARABOLA

	Señal de Referencia(SP)		
Tipo de C(s)G(s)	*Escalón* $r(t) = a_0$	*Rampa* $r(t) = a_1 t$	*Parábola* $r(t) = a_2 t^2$
0	$\frac{a_0}{1 + K_0}$	NO ACOTADO	NO ACOTADO
1	0	$\frac{a_1}{K_1}$	NO ACOTADO
2	0	0	$\frac{2a_2}{K_2}$

Constante de error de **POSICION**: $K_p = K_0 = lim_{s \to 0}[C(s)G(s)]$

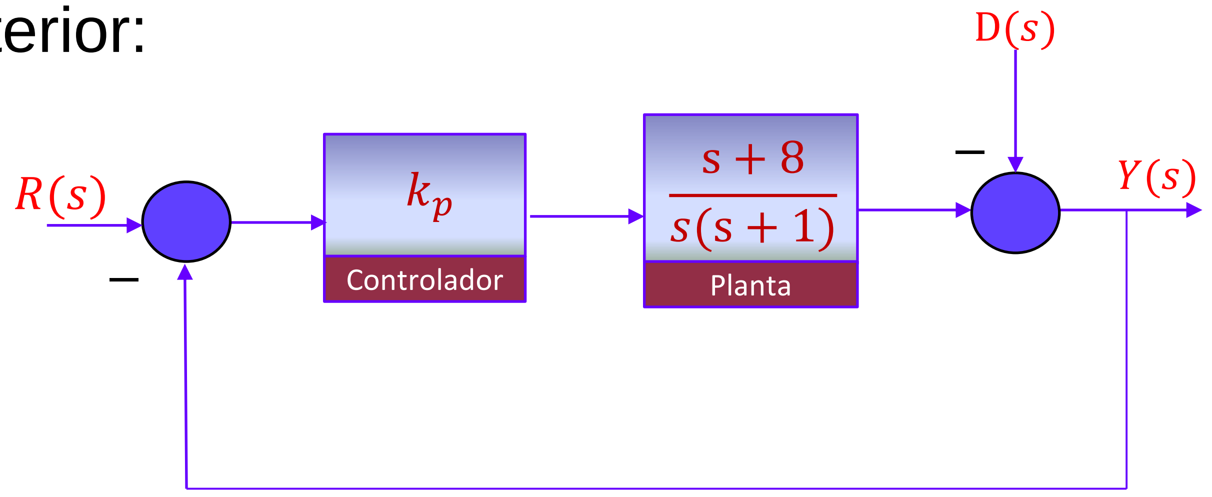
Constante de error de **VELOCIDAD**: $K_V = K_1 = lim_{s \to 0}[sC(s)G(s)]$

Constante de error de **ACELERACION**: $K_A = K_2 = lim_{s \to 0}[s^2 C(s)G(s)]$

¡ Formulas validas, si el sistema es <u>estable en lazo cerrado</u> !

Problema 1

- Determine el error en estado estacionario usando la tabla de la transparencia anterior:



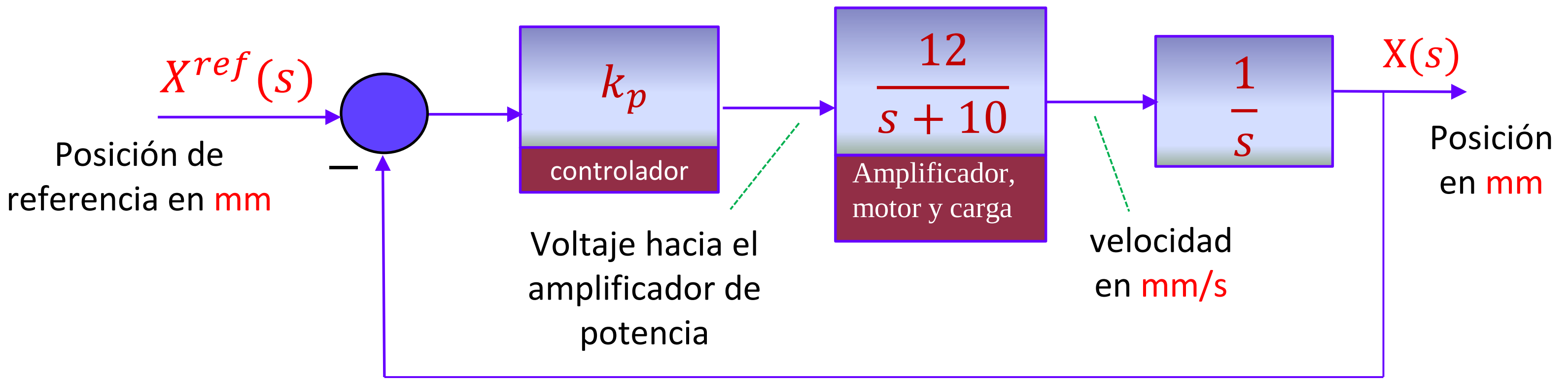
<u>Para:</u>

a.	$r(t) = 10u(t)$	$d(t) = 0$
b.	$r(t) = 5t$	$d(t) = 0$
c.	$r(t) = 10u(t) + 5t$	$d(t) = 0$
d.	$r(t) = 0$	$d(t) = u(t)$
e.	$r(t) = 0$	$d(t) = 1t$
f.	$r(t) = 10u(t) + 5t$	$d(t) = 1t$

$u(t)$: *escalon unitario*

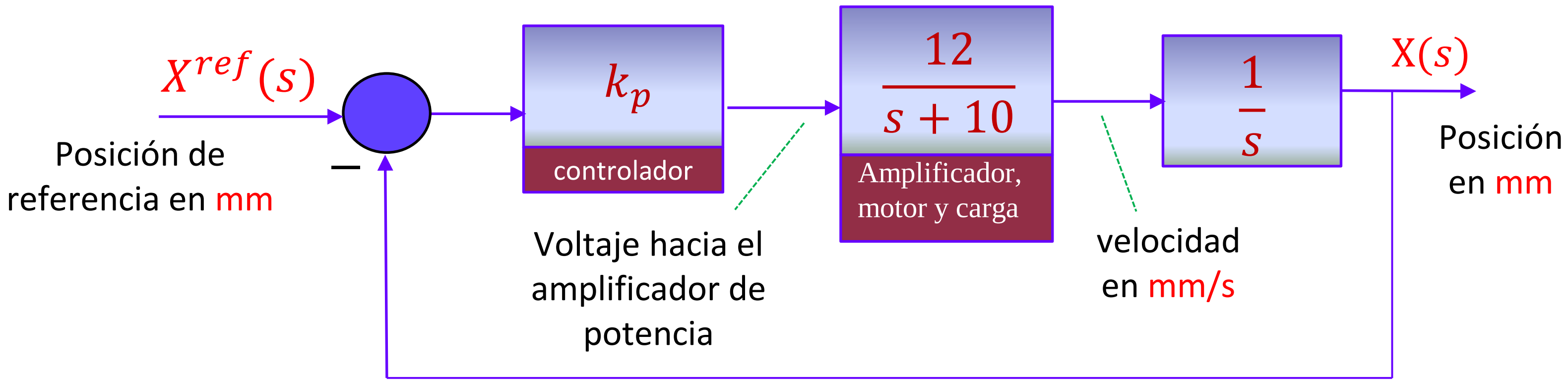
Problema 2

- La figura muestra el sistema el control de uno de los ejes de un sistema de seguimiento óptico:



- El seguimiento adecuado se obtiene sólo si el error de posición en estado estacionario es nulo para referencias tipo escalón, y menor o igual que 1mm para una señal de referencia que cambia con una velocidad constante de 5mm/s.

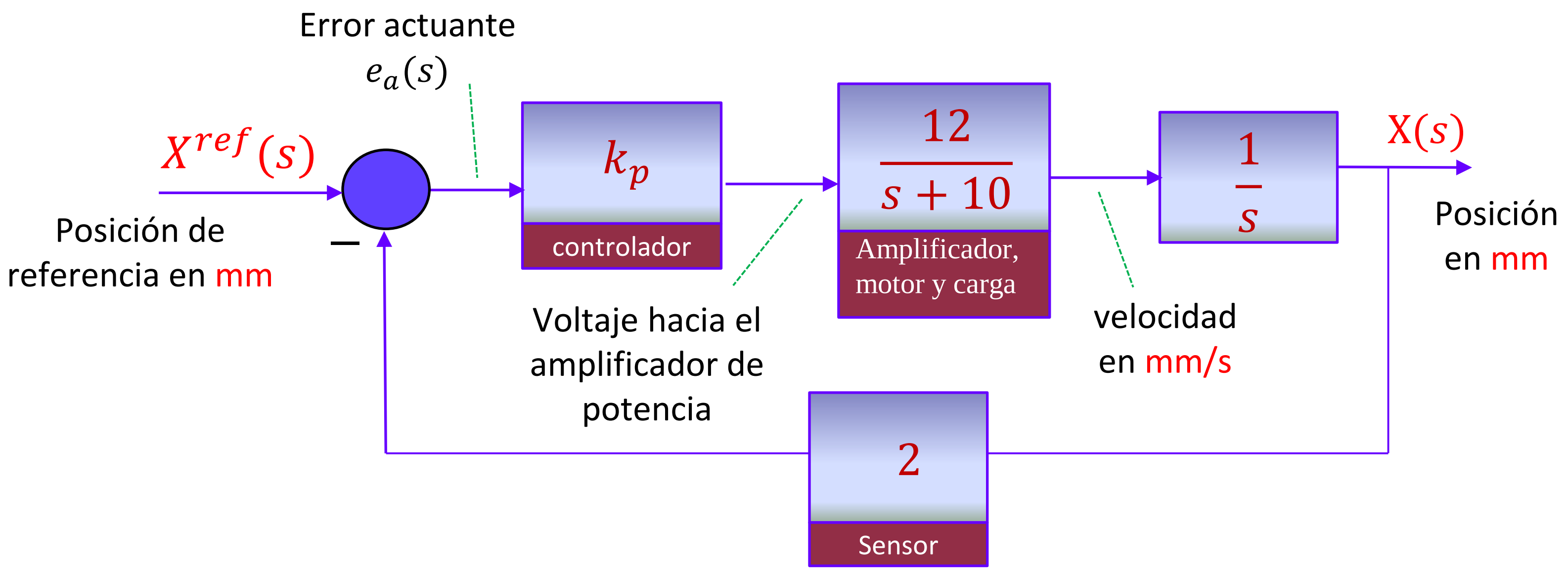
Problema 2



- Para obtener un buen comportamiento transitorio, el sistema de control debe tener como máximo un sobreimpulso de 10%. Determine la ganancia KP de modo que todas las especificaciones sean satisfechas. verifique sus resultados vía simulación.

Problema 1

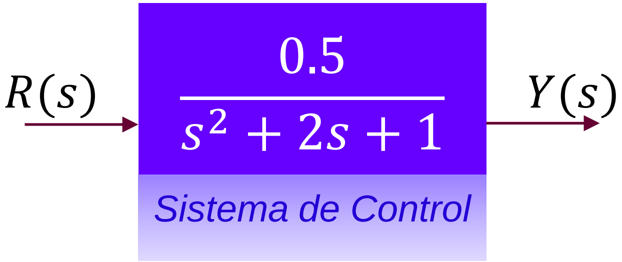
- La figura muestra el sistema el control de uno de los ejes de un sistema de seguimiento óptico con un sensor de ganancia 2.



Determine el error estacionario del sistema para una señal de referencia $x^{ref}(t)=u_s(t)$.

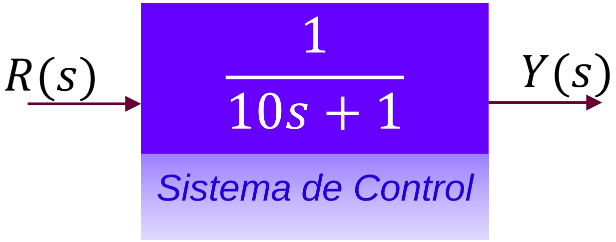
Un método general para determinar el e_{ss}

- Ejemplo: determine el error en estado estacionario de los siguientes sistemas cuando la referencia $R(s)$ es un escalón unitario.



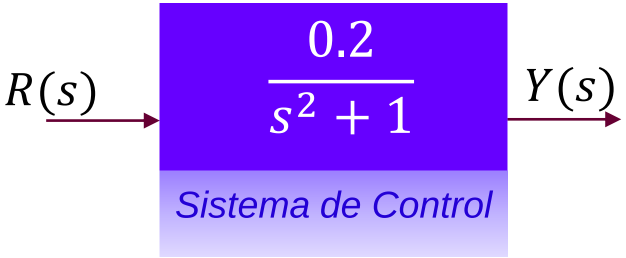
$$e_{ss}{}^{r} = lim_{s\to 0} s\left(1-\frac{0.5}{s^2+2s+1}\right)\frac{1}{s}$$

$$e_{ss}{}^{r} = 0.5$$



$$e_{ss}{}^{r} = lim_{s\to 0} s\left(1-\frac{0.5}{10s+1}\right)\frac{1}{s}$$

$$e_{ss}{}^{r} = 0$$



$$e_{ss}{}^{r} = lim_{s\to 0} s\left(1-\frac{0.2}{s^2+1}\right)\frac{1}{s}$$

¡No cumple el teorema del valor final !!