Facultad de Ingeniería

Carrera de Ingeniería Electrónica
Carrera de Telecomunicaciones y Redes
Carrera de Ingeniería Mecatrónica

CURSO

Señales y Sistemas

TEMA

Caracterización en tiempo y frecuencia de señales y sistemas

PROFESOR

Ing. Christian del Carpio Damián

REPRESENTACIÓN DE LA MAGNITUD - FASE DE LA TRANSFORMADA DE FOURIER

REPRESENTACIÓN DE LA MAGNITUD-FASE DE LA TRANSFORMADA DE FOURIER

La representación de la magnitud - fase de la transformada continua de Fourier $X(j\omega)$ es:

$$X(j\omega) = |X(j\omega)| e^{\angle X(j\omega)}$$

$|X(j\omega)|$,proporciona información acerca de las magnitudes relativas de las exponenciales complejas que forman a x(t).

$\angle X(j\omega)$,proporciona información concerniente a las fases relativas de las exponenciales complejas que forman a x(t).

REPRESENTACIÓN DE LA MAGNITUD-FASE DE LA TRANSFORMADA DE FOURIER

Ejemplo

Considere la siguiente señal

$$x(t) = 1 + \frac{1}{2}\cos(2\pi t + \theta_1) + \cos(4\pi t + \theta_2) + \frac{2}{3}\cos(6\pi t + \theta_3)$$

La siguiente gráfica presenta distintos valores de fase

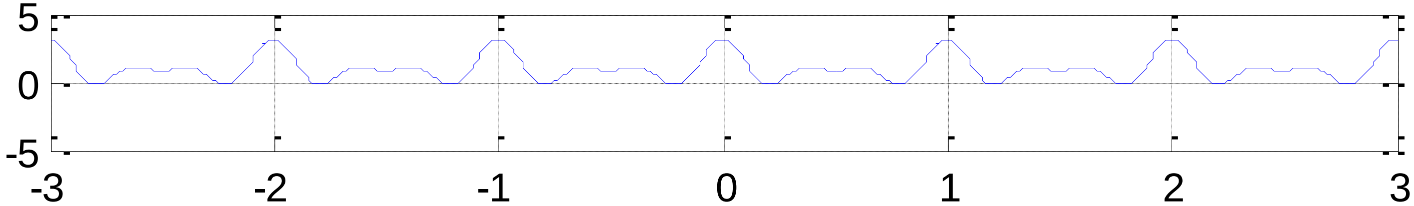
$$a)\ \theta_1 = 0\ rad,\ \theta_2 = 0\ rad,\ \theta_3 = 0\ rad$$

$$b)\ \theta_1 = 4\ rad,\ \theta_2 = 8\ rad,\ \theta_3 = 12\ rad$$

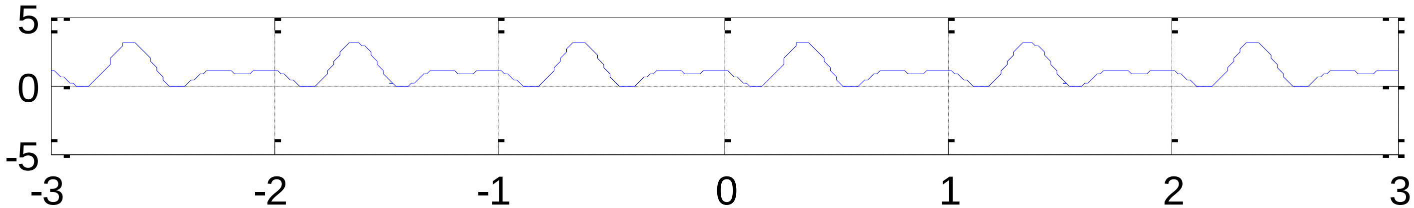
$$c)\ \theta_1 = 6\ rad,\ \theta_2 = -2.7\ rad,\ \theta_3 = 0.93\ rad$$

$$d)\ \theta_1 = 1.2\ rad,\ \theta_2 = 4.1\ rad,\ \theta_3 = -7.02\ rad$$

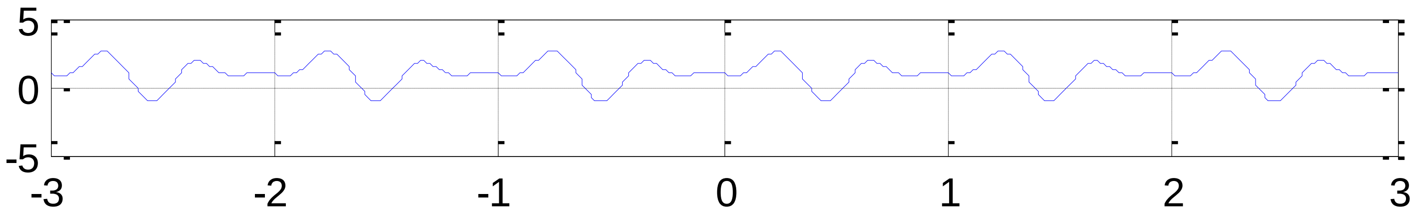
REPRESENTACIÓN DE LA MAGNITUD-FASE DE LA TRANSFORMADA DE FOURIER



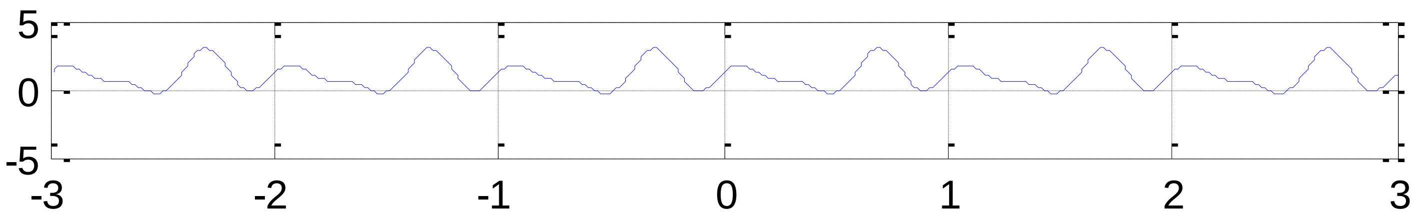
(a)



(b)



(c)



(d)

La señal x(t) para varias selecciones de ángulos de fase θ_1 , θ_2 , θ_3

REPRESENTACIÓN DE LA MAGNITUD-FASE DE LA RESPUESTA EN FRECUENCIA DE SISTEMAS LTI

REPRESENTACIÓN DE LA MAGNITUD-FASE DE LA RESPUESTA EN FRECUENCIA DE SISTEMAS LTI

A partir de la propiedad de convolución de las transformadas continuas de Fourier, la transformada *Y(jw)* de la salida de un sistema LTI esta relacionada con la transformada *X(jw)* de la entrada al sistema mediante la ecuación:

$$\boxed{Y(j\omega) = X(j\omega)H(j\omega)}$$

$$X(j\omega) \longrightarrow \boxed{\begin{array}{c}\textbf{SISTEMA LTI} \\ H(j\omega)\end{array}} \longrightarrow Y(j\omega)$$

REPRESENTACIÓN DE LA MAGNITUD-FASE DE LA RESPUESTA EN FRECUENCIA DE SISTEMAS LTI

Su magnitud

$$\left|Y(j\omega)\right| = \left|X(j\omega)\right|\left|H(j\omega)\right|$$

Su fase

$$\angle Y(j\omega) = \angle X(j\omega) + \angle H(j\omega)$$

REPRESENTACIÓN DE LA MAGNITUD-FASE DE LA RESPUESTA EN FRECUENCIA DE SISTEMAS LTI

Fase lineal y no lineal

Cuando el desplazamiento de fase a la frecuencia *w* es una función lineal de ω , hay una interpretación particularmente directa del efecto en el dominio del tiempo. Si se considera un sistemas LTI con respuesta en frecuencia.

$$H(j\omega) = e^{-j\omega t_0}$$

REPRESENTACIÓN DE LA MAGNITUD-FASE DE LA RESPUESTA EN FRECUENCIA DE SISTEMAS LTI

Fase lineal y no lineal

Por lo tanto se tiene

$$\left|H(j\omega)\right| = 1$$

$$\angle H(j\omega) = -\omega t_0$$

REPRESENTACIÓN DE LA MAGNITUD-FASE DE LA RESPUESTA EN FRECUENCIA DE SISTEMAS LTI

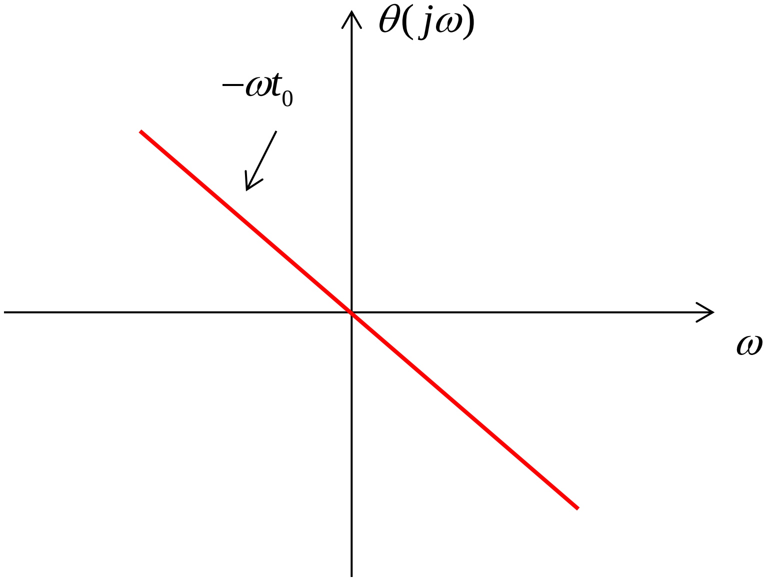
Fase lineal y no lineal

Un sistema con esta característica de respuesta en frecuencia presenta una salida que es simplemente un desplazamiento en el tiempo de la entrada, es decir,

$$\boxed{y(t) = x(t - t_0)}$$

REPRESENTACIÓN DE LA MAGNITUD-FASE DE LA RESPUESTA EN FRECUENCIA DE SISTEMAS LTI

Fase lineal y no lineal



REPRESENTACIÓN DE LA MAGNITUD-FASE DE LA RESPUESTA EN FRECUENCIA DE SISTEMAS LTI

Fase lineal y no lineal

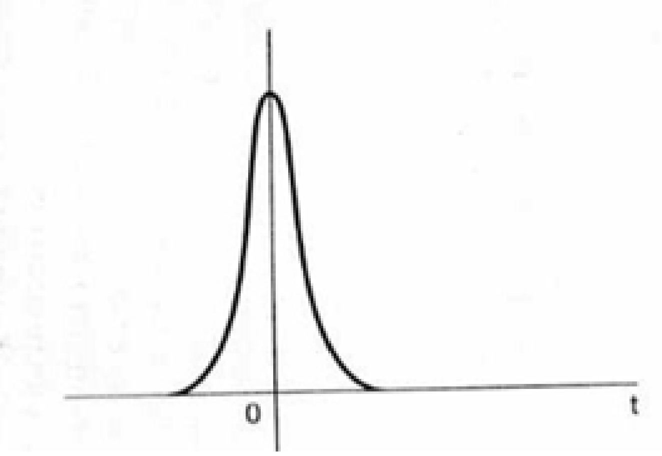
De manera general un sistema de fase lineal es

$$\boxed{\theta(j\omega) = -\omega t_0 + \theta_0}$$

REPRESENTACIÓN DE LA MAGNITUD-FASE DE LA RESPUESTA EN FRECUENCIA DE SISTEMAS LTI

Ejemplo 1

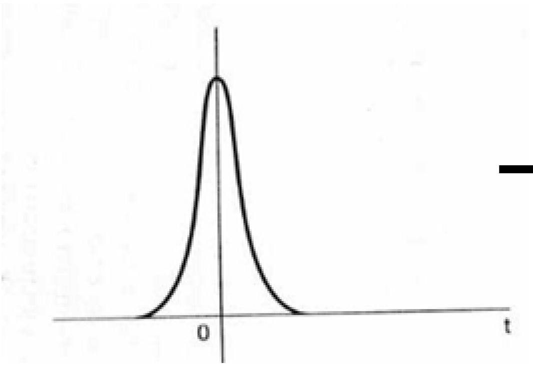
Se tiene una señal continua x(t) que se aplica como entrada a varios sistemas para los cuales la respuesta en frecuencia tiene magnitud unitaria



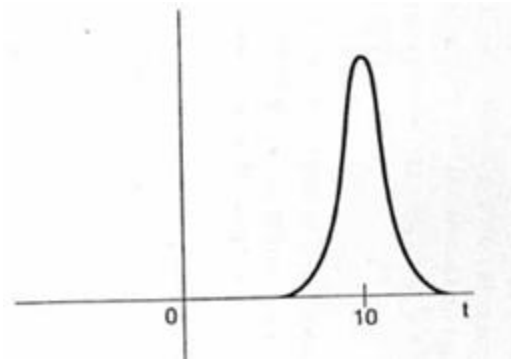
Señal *x(t)*

REPRESENTACIÓN DE LA MAGNITUD-FASE DE LA RESPUESTA EN FRECUENCIA DE SISTEMAS LTI

Ejemplo 1

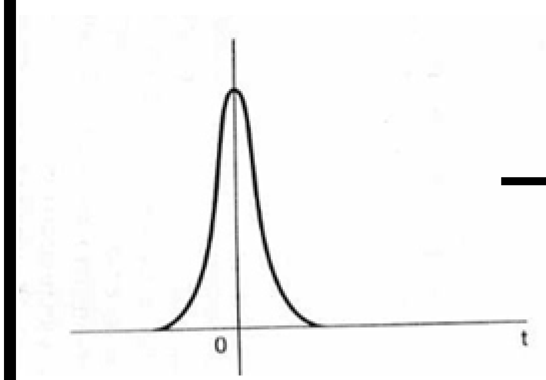


$$H_1(j\omega) = e^{-j\omega t_0}$$

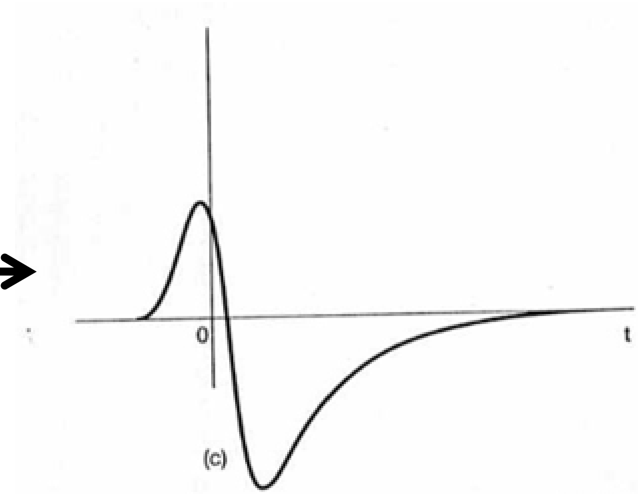


REPRESENTACIÓN DE LA MAGNITUD-FASE DE LA RESPUESTA EN FRECUENCIA DE SISTEMAS LTI

Ejemplo 1

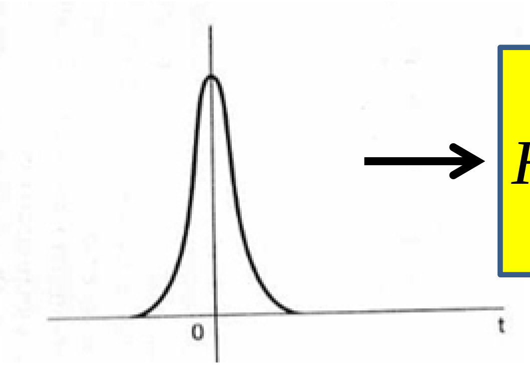


$$H_2(j\omega) = e^{j\angle H2(j\omega)}$$

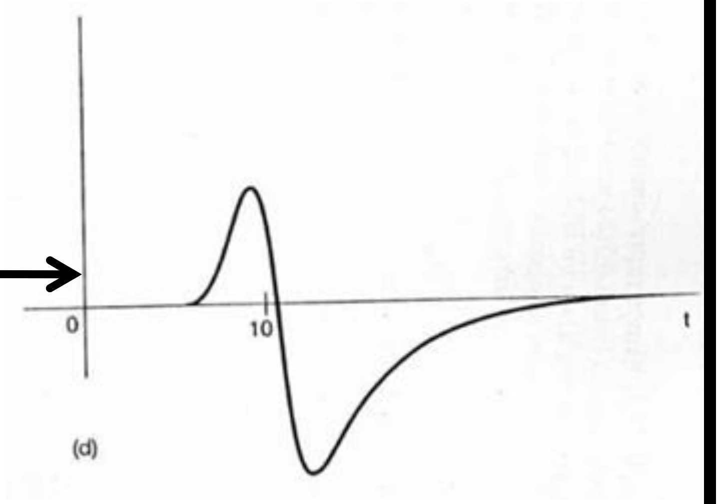


REPRESENTACIÓN DE LA MAGNITUD-FASE DE LA RESPUESTA EN FRECUENCIA DE SISTEMAS LTI

Ejemplo 1



$$H_3(j\omega) = H_2(j\omega)e^{-j\omega t_0}$$



REPRESENTACIÓN DE LA MAGNITUD-FASE DE LA RESPUESTA EN FRECUENCIA DE SISTEMAS LTI

Retardo de grupo

Si

$$\angle H(j\omega) = -\omega t_0$$

Entonces el sistema imparte un desplazamiento de tiempo de $-t_0$ o, de manera equivalente un retardo de t_0 .

El concepto de retardo se puede extender de manera simple y natural a las características de fase no lineales

REPRESENTACIÓN DE LA MAGNITUD-FASE DE LA RESPUESTA EN FRECUENCIA DE SISTEMAS LTI

Retardo de grupo

El retardo de grupo a cada frecuencia es el negativo de la pendiente de la fase a dicha frecuencia; es decir el retardo de grupo se define como

$$\tau(\omega) = -\frac{d}{d\omega}\left\{\angle H(j\omega)\right\}$$

REPRESENTACIÓN DE LA MAGNITUD-FASE DE LA RESPUESTA EN FRECUENCIA DE SISTEMAS LTI

Ejemplo

Considere la respuesta al impulso de un sistema pasa todo con retardo grupo que varia con la frecuencia. La respuesta en frecuencia H(jw) para este ejemplo es el producto de tres factores, es decir

$$H(j\omega) = \prod_{i=1}^{3} H_i(j\omega)$$

donde

$$H_i(j\omega) = \frac{1 + (j\omega/\omega_i)^2 - 2j\zeta_i(\omega/\omega_i)}{1 + (j\omega/\omega_i)^2 + 2j\zeta_i(\omega/\omega_i)}$$

REPRESENTACIÓN DE LA MAGNITUD-FASE DE LA RESPUESTA EN FRECUENCIA DE SISTEMAS LTI

Ejemplo

Así mismo se tiene

$$\omega_1 = 315 rad/seg \text{ y } \zeta_1 = 0.066$$

$$\omega_2 = 943 rad/seg \text{ y } \zeta_2 = 0.033$$

$$\omega_3 = 1888 rad/seg \text{ y } \zeta_3 = 0.058$$

REPRESENTACIÓN DE LA MAGNITUD-FASE DE LA RESPUESTA EN FRECUENCIA DE SISTEMAS LTI

Magnitud logarítmica y diagrama de Bode

Si

$$\left|Y(j\omega)\right| = \left|X(j\omega)\right|\left|H(j\omega)\right|$$

Entonces, en escala logarítmica se tiene

$$\boxed{\log\left|Y(j\omega)\right| = \log\left|X(j\omega)\right| + \log\left|H(j\omega)\right|}$$

REPRESENTACIÓN DE LA MAGNITUD-FASE DE LA RESPUESTA EN FRECUENCIA DE SISTEMAS LTI

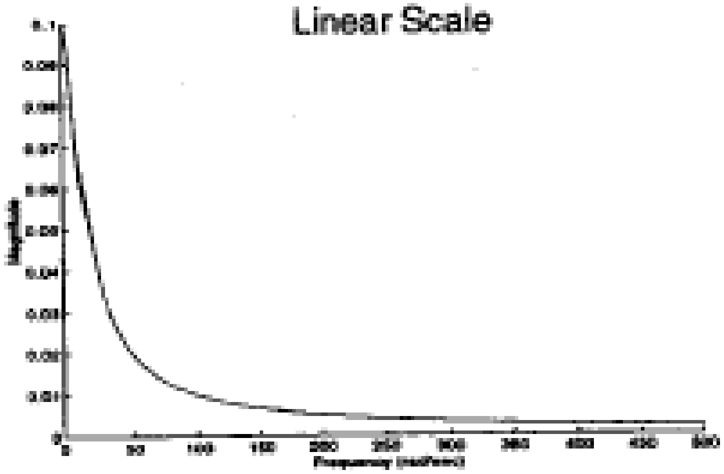
Magnitud logarítmica y diagrama de Bode

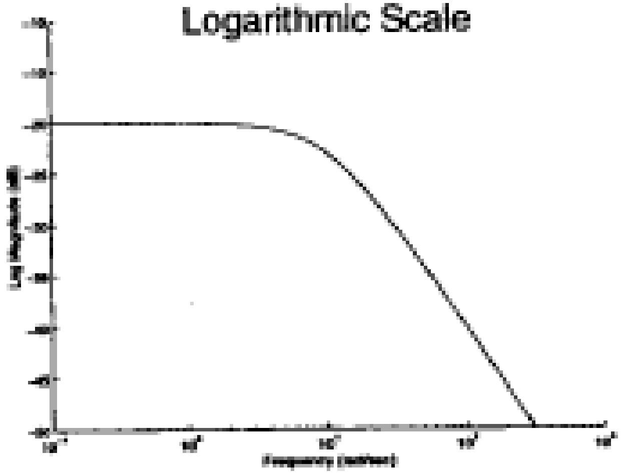
Si se tiene una gráfica de la magnitud logarítmica y la fase de la transformada de Fourier de la entrada y la respuesta en frecuencia de un sistema LTI, la transformada de Fourier de la salida se obtiene sumando las gráficas de magnitud logarítmica y sumando las gráficas de fase.

REPRESENTACIÓN DE LA MAGNITUD-FASE DE LA RESPUESTA EN FRECUENCIA DE SISTEMAS LTI

Magnitud logarítmica y diagrama de Bode

Así mismo, graficar la magnitud de la transformada de Fourier a escala logarítmica permite que los detalles se puedan presentar sobre un intervalo dinámico más amplio.





REPRESENTACIÓN DE LA MAGNITUD-FASE DE LA RESPUESTA EN FRECUENCIA DE SISTEMAS LTI

Magnitud logarítmica y diagrama de Bode

En general, la escala de amplitud logarítmica específica que se utiliza se mide en unidades de

$$\boxed{20\log_{10}}$$

conocida como decibeles (dB).

REPRESENTACIÓN DE LA MAGNITUD-FASE DE LA RESPUESTA EN FRECUENCIA DE SISTEMAS LTI

Magnitud logarítmica y diagrama de Bode

De esta manera, 0dB corresponde a una respuesta en frecuencia con magnitud igual a 1, 20dB equivale a una ganancia de 10, -20dB corresponde a una atenuación de 0.1 y así sucesivamente. Además se puede observar que 6dB corresponde aproximadamente a una ganancia de 2.

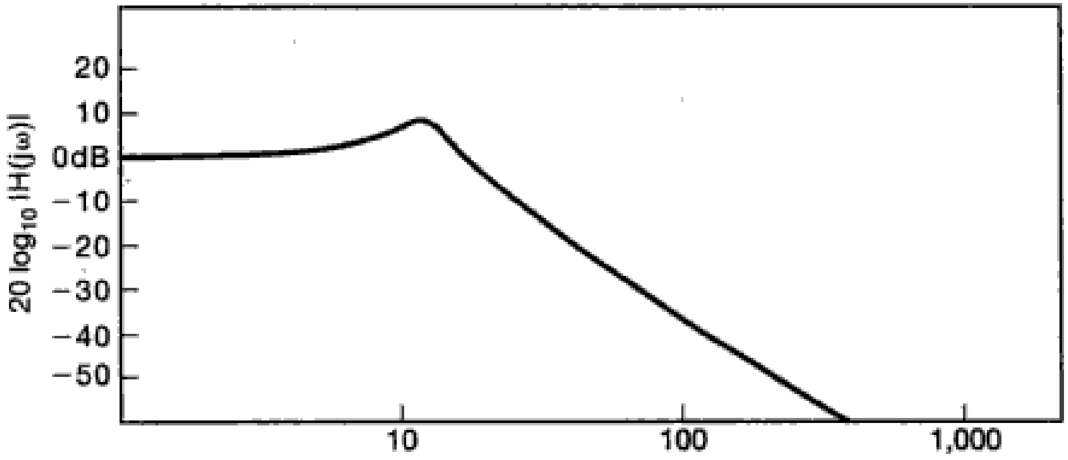
REPRESENTACIÓN DE LA MAGNITUD-FASE DE LA RESPUESTA EN FRECUENCIA DE SISTEMAS LTI

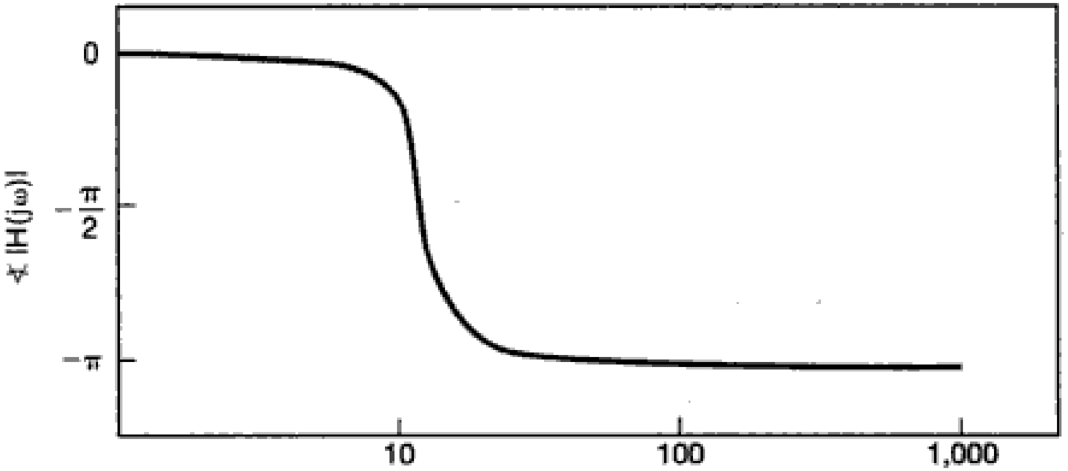
Magnitud logarítmica y diagrama de Bode

Para sistemas continuos, también es común y útil usar una escala de frecuencia logarítmica. Las gráficas de $20\log_{10}|H(j\omega)|$ y $\angle|H(j\omega)|$ fase en función de $\log_{10}(\omega)$ se conocen como diagrama de Bode.

REPRESENTACIÓN DE LA MAGNITUD-FASE DE LA RESPUESTA EN FRECUENCIA DE SISTEMAS LTI

Magnitud logarítmica y diagrama de Bode





PROPIEDADES EN EL DOMINIO DEL TIEMPO DE FILTROS IDEALES SELECTIVOS EN FRECUENCIA

PROPIEDADES EN EL DOMINIO DEL TIEMPO DE FILTROS IDEALES SELECTIVOS EN FRECUENCIA

Un filtro ideal pasa bajas continuo tiene una respuesta en frecuencia de forma

$$H(j\omega) = \begin{cases} 1, & -\omega_c \leq \omega \leq \omega_c \\ 0, & \text{para el resto} \end{cases}$$

PROPIEDADES EN EL DOMINIO DEL TIEMPO DE FILTROS IDEALES SELECTIVOS EN FRECUENCIA

Un filtro ideal con fase lineal en la banda de paso, introduce solo un simple desplazamiento de tiempo en relación con la respuesta del filtro pasa bajas ideal con característica de fase cero.

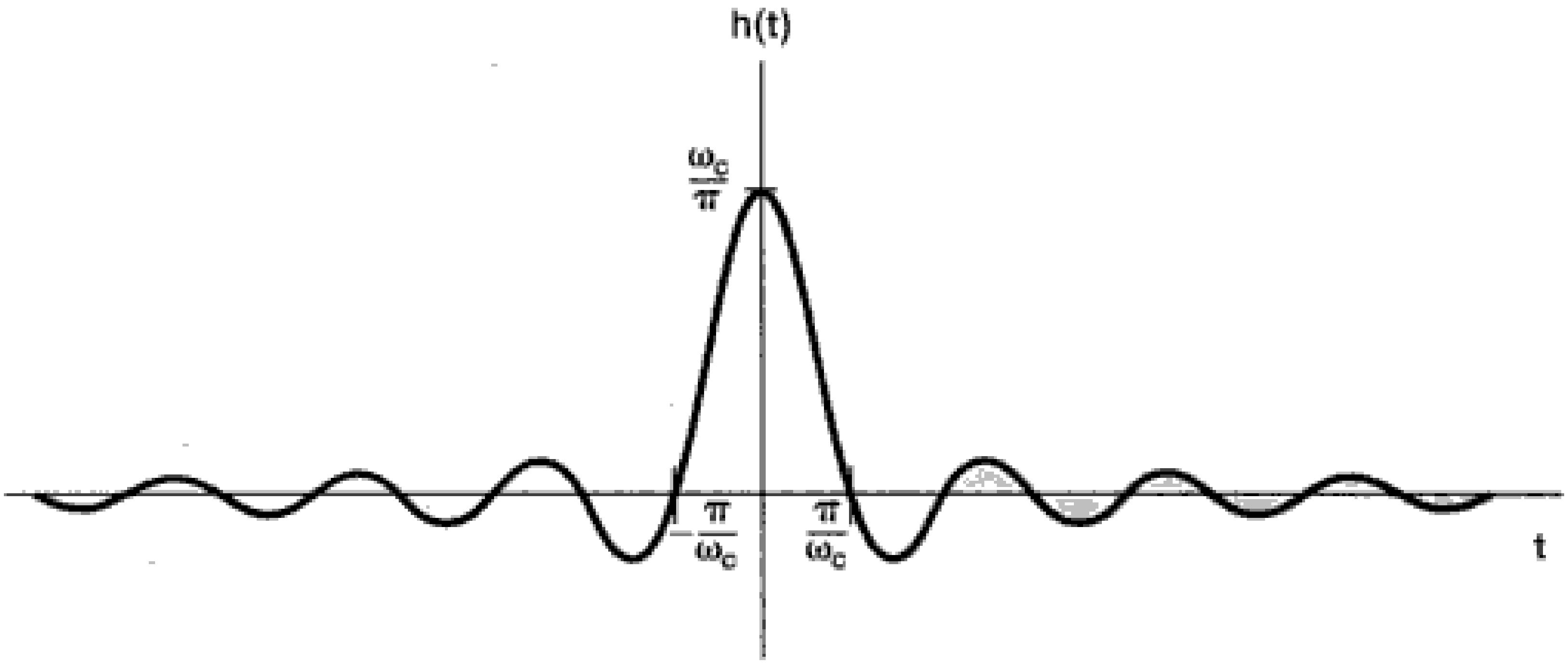
PROPIEDADES EN EL DOMINIO DEL TIEMPO DE FILTROS IDEALES SELECTIVOS EN FRECUENCIA

Su respuesta impulsiva de un filtro ideal pasa bajas de fase cero es

$$\boxed{h(t) = \frac{sen(\omega_c t)}{\pi t}}$$

PROPIEDADES EN EL DOMINIO DEL TIEMPO DE FILTROS IDEALES SELECTIVOS EN FRECUENCIA

Gráfica de la respuesta al impulso de un filtro pasa bajas ideal continuo

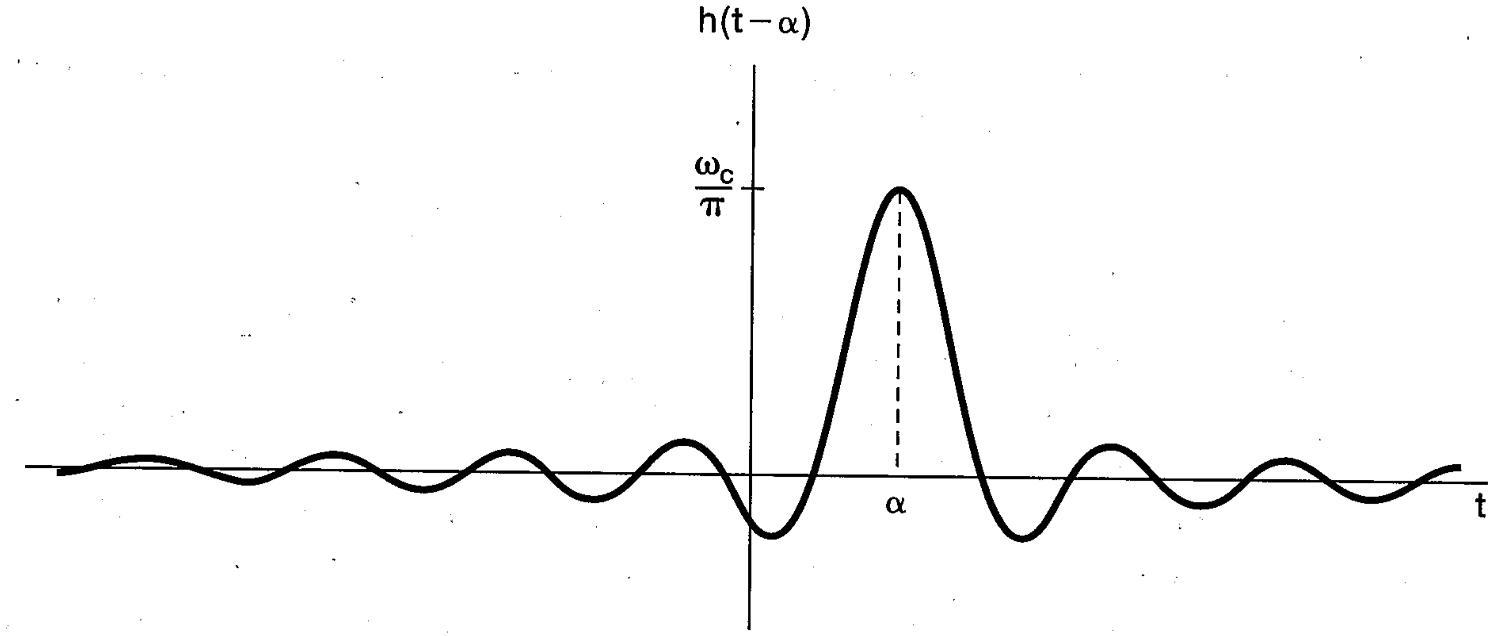


PROPIEDADES EN EL DOMINIO DEL TIEMPO DE FILTROS IDEALES SELECTIVOS EN FRECUENCIA

Si la respuesta ideal en frecuencia de un filtro ideal pasa bajas, se agrega la característica de fase lineal, su respuesta al impulso simplemente se retrasa en una cantidad igual al negativo de la pendiente de esta función de fase.

PROPIEDADES EN EL DOMINIO DEL TIEMPO DE FILTROS IDEALES SELECTIVOS EN FRECUENCIA

Gráfica de la respuesta al impulso de un filtro pasa bajas ideal continuo de fase lineal



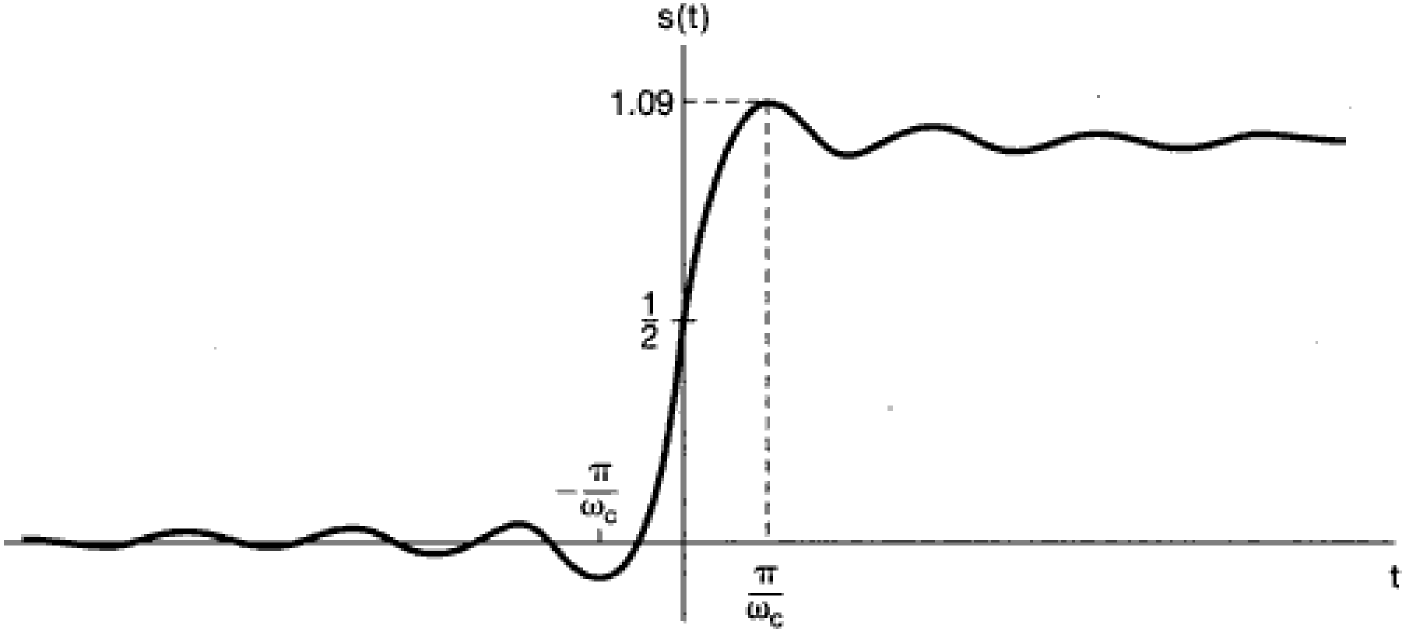
PROPIEDADES EN EL DOMINIO DEL TIEMPO DE FILTROS IDEALES SELECTIVOS EN FRECUENCIA

La respuesta al escalón s(t) del filtro pasa bajas ideal continuo es

$$\boxed{s(t) = \int_{-\infty}^{t} h(\tau)\,d\tau}$$

PROPIEDADES EN EL DOMINIO DEL TIEMPO DE FILTROS IDEALES SELECTIVOS EN FRECUENCIA

Gráfica de la respuesta al escalón de un filtro pasa bajas ideal continuo



ASPECTOS EN EL DOMINIO DEL TIEMPO Y EN DOMINIO DE LA FRECUENCIA DE LOS FILTROS NO IDEALES

ASPECTOS EN EL DOMINIO DEL TIEMPO Y EN DOMINIO DE LA FRECUENCIA DE LOS FILTROS NO IDEALES

Consideraciones

Las característica de los filtros ideales no siempre son deseables en la práctica. Por ejemplo, en muchos contextos de filtrado, las señales que se desea separar no siempre caen en bandas de frecuencia totalmente separadas. Puede ser que los espectros se traslapen.

La respuesta al escalón de un filtro pasa bajos ideal se aproxima en forma asintótica a una constante igual al valor del escalón.

La facilidad de construcción o implementación.

ASPECTOS EN EL DOMINIO DEL TIEMPO Y EN DOMINIO DE LA FRECUENCIA DE LOS FILTROS NO IDEALES

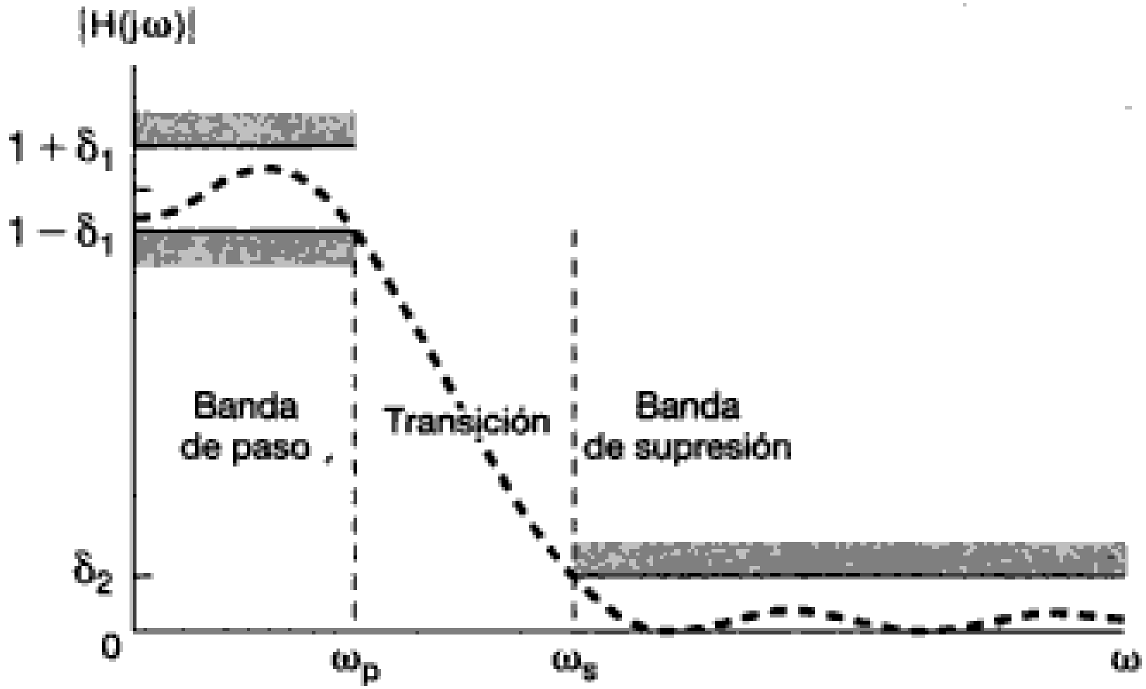
Consideraciones

Las característica de los filtros ideales no siempre son deseables en la práctica.

La respuesta al escalón de un filtro pasa bajos ideal se aproxima en forma asintótica a una constante igual al valor del escalón.

La facilidad de construcción o implementación.

ASPECTOS EN EL DOMINIO DEL TIEMPO Y EN DOMINIO DE LA FRECUENCIA DE LOS FILTROS NO IDEALES

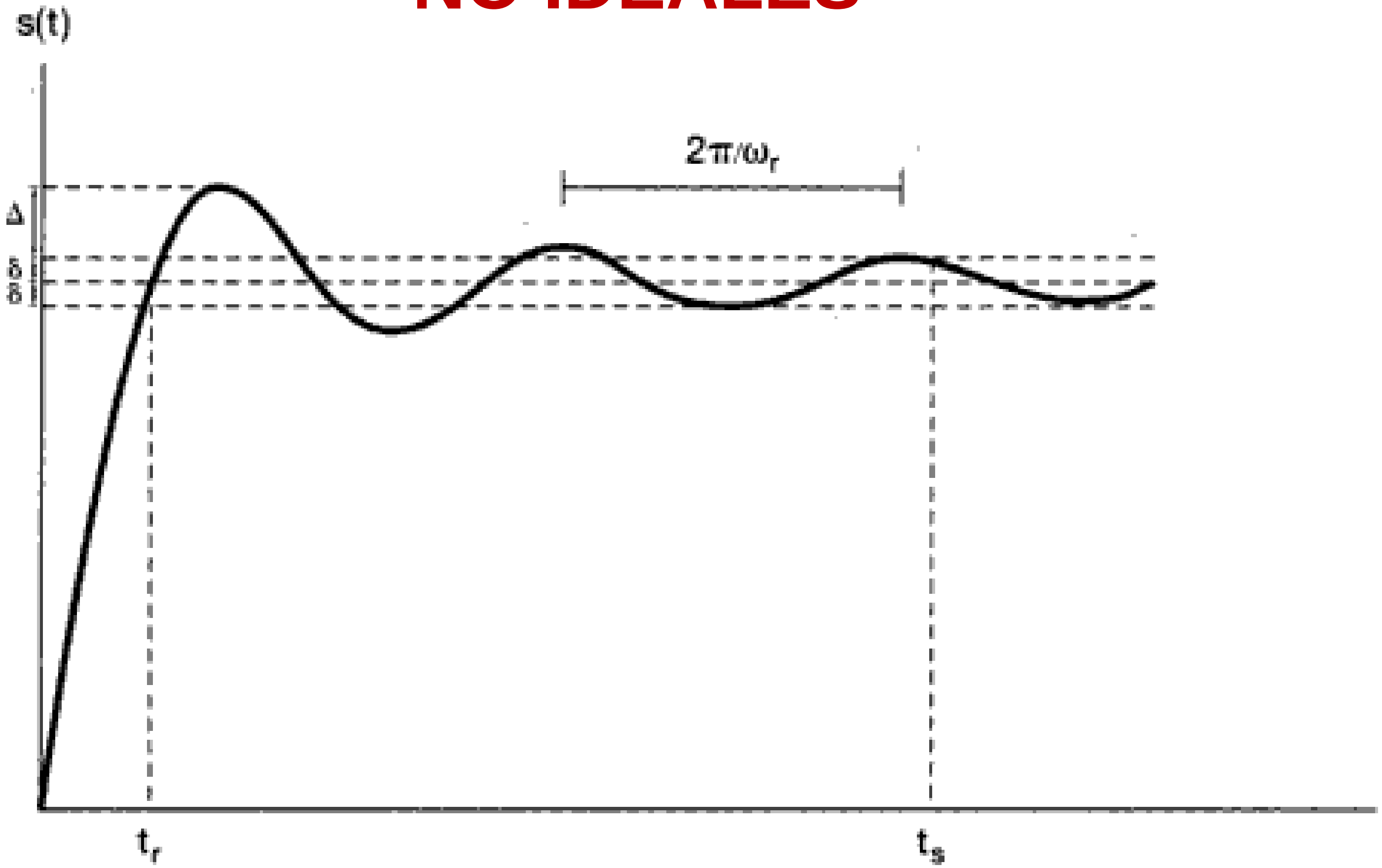


$\delta_1 = rizado\ de\ la\ banda\ de\ paso,$ $\delta_2 = rizado\ de\ la\ banda\ de\ rechazo$

$\omega_c = [\omega_p\ \ \omega_s] = banda\ de\ transición,$ $\omega_c = frecuencia\ de\ corte$

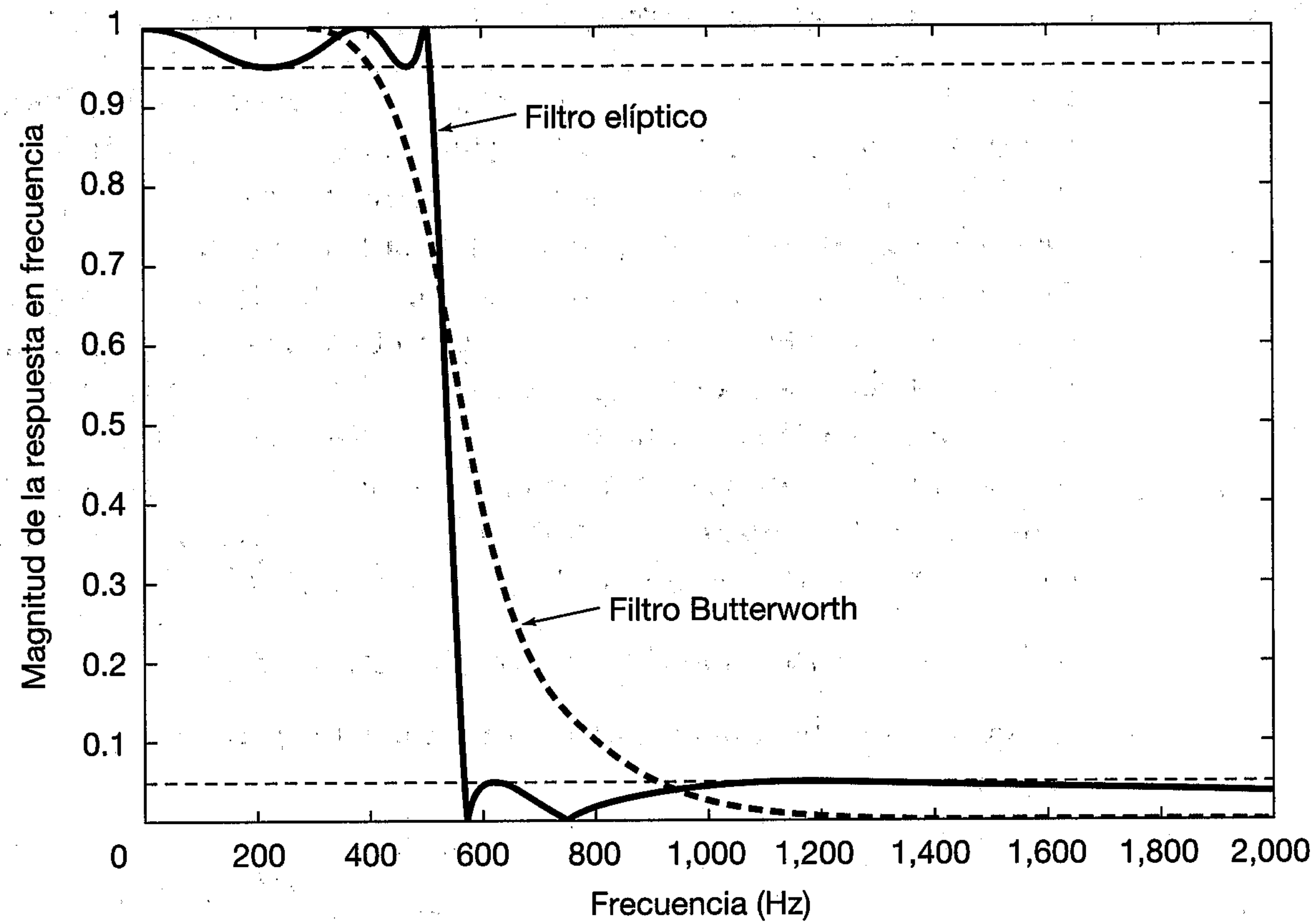
$\omega_p = frecuencia\ de\ paso,$ $\omega_s = frecuencia\ de\ rechazo$

ASPECTOS EN EL DOMINIO DEL TIEMPO Y EN DOMINIO DE LA FRECUENCIA DE LOS FILTROS NO IDEALES



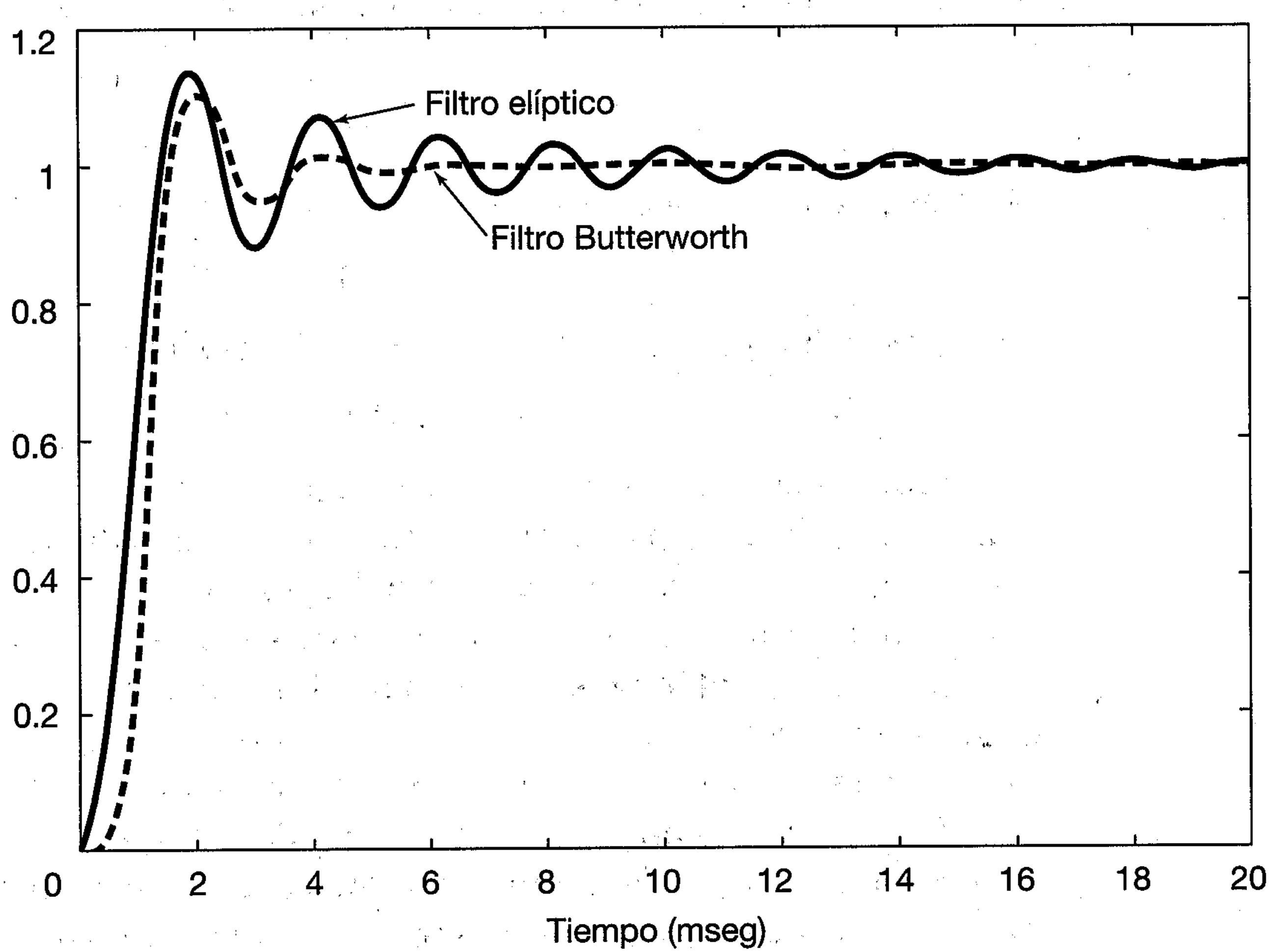
En la gráfica se muestra la respuesta al escalón de un filtro pasa bajas continuo, que indica el tiempo de subida *tr*, el sobrepaso Δ, frecuencia de oscilación ω_r y el tiempo de asentamiento t_s.

ASPECTOS EN EL DOMINIO DEL TIEMPO Y EN DOMINIO DE LA FRECUENCIA DE LOS FILTROS NO IDEALES



Ejemplo de un filtro Butterworth y un filtro elíptico de primer orden diseñados para que tengan el mismo rizo en la banda de paso

ASPECTOS EN EL DOMINIO DEL TIEMPO Y EN DOMINIO DE LA FRECUENCIA DE LOS FILTROS NO IDEALES



Respuesta al escalón del ejemplo anterior

ASPECTOS EN EL DOMINIO DEL TIEMPO Y EN DOMINIO DE LA FRECUENCIA DE LOS FILTROS NO IDEALES

Conclusiones

Zona de transición más angosta, mayor tiempo de asentamiento.

Zona de transición más angosta, menor tiempo de subida.

Zona de transición más angosta, mayor rizado en la banda de paso y de rechazo.

Zona de transición más angosta, menor sobrepaso.

ASPECTOS EN EL DOMINIO DEL TIEMPO Y EN DOMINIO DE LA FRECUENCIA DE LOS FILTROS NO IDEALES

Conclusiones

La selectividad de un filtro tiene relación inversa con el tamaño de su zona de transición: más selectivo, menor zona de transición.

SISTEMAS CONTINUOS DE PRIMER Y SEGUNDO ORDEN

SISTEMAS CONTINUOS DE PRIMER ORDEN

SISTEMAS CONTINUOS DE PRIMER ORDEN

La ecuación diferencial para un sistema de primer orden se expresa a menudo de la forma:

$$\boxed{\tau \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = x(t)}$$

SISTEMAS CONTINUOS DE PRIMER ORDEN

La respuesta en frecuencia correspondiente para el sistema de primer orden es

$$\boxed{H(j\omega)=\frac{1}{\tau j\omega+1}=\frac{1/\tau}{j\omega+1/\tau}}$$

SISTEMAS CONTINUOS DE PRIMER ORDEN

La respuesta al impulso es

$$h(t) = \frac{1}{\tau} e^{-t/\tau} u(t)$$

La respuesta al escalón del sistema es

$$s(t) = h(t) * u(t) = \left[1 - e^{-t/\tau}\right] u(t)$$

SISTEMAS CONTINUOS DE PRIMER ORDEN

El parámetro τ es la constante del tiempo del sistema, y controla la **velocidad a la cual responde el sistema.**

Examinando la gráfica de la magnitud logarítmica de la respuesta en frecuencia se tiene

$$20\log_{10}\left(\left|H(j\omega)\right|\right) = -10\log_{10}\left[(\tau\omega)^2 + 1\right]$$

SISTEMAS CONTINUOS DE PRIMER ORDEN

Debido a la ecuación anterior se tiene que, si $\omega\tau << 1$, la magnitud logarítmica se aproxima a cero, mientras que para $\omega\tau >> 1$ la magnitud logarítmica se aproxima a una función lineal de $\log_{10}(\omega)$, esto es:

$$\boxed{20\log_{10}\left(\left|H(j\omega)\right|\right) \approx 0, \qquad \omega << 1/\tau}$$

$$\boxed{\begin{aligned} 20\log_{10}\left(\left|H(j\omega)\right|\right) &\approx -20\log_{10}(\omega\tau) \\ &\approx -20\log_{10}(\omega) - 20\log_{10}(\tau), \qquad \omega >> 1/\tau \end{aligned}}$$

SISTEMAS CONTINUOS DE PRIMER ORDEN

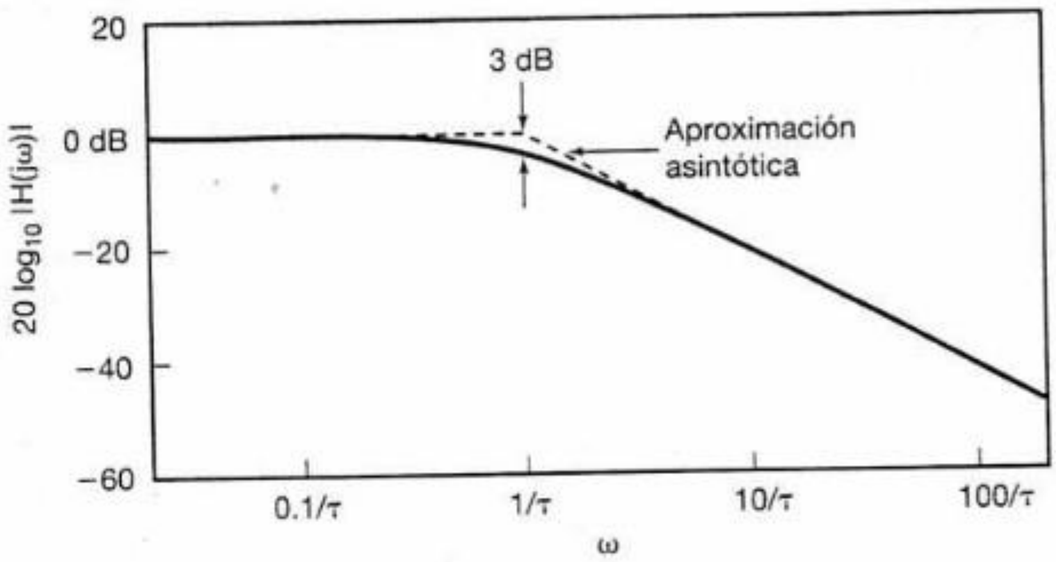


Diagrama de Bode de magnitud para un sistema continuo de primer orden

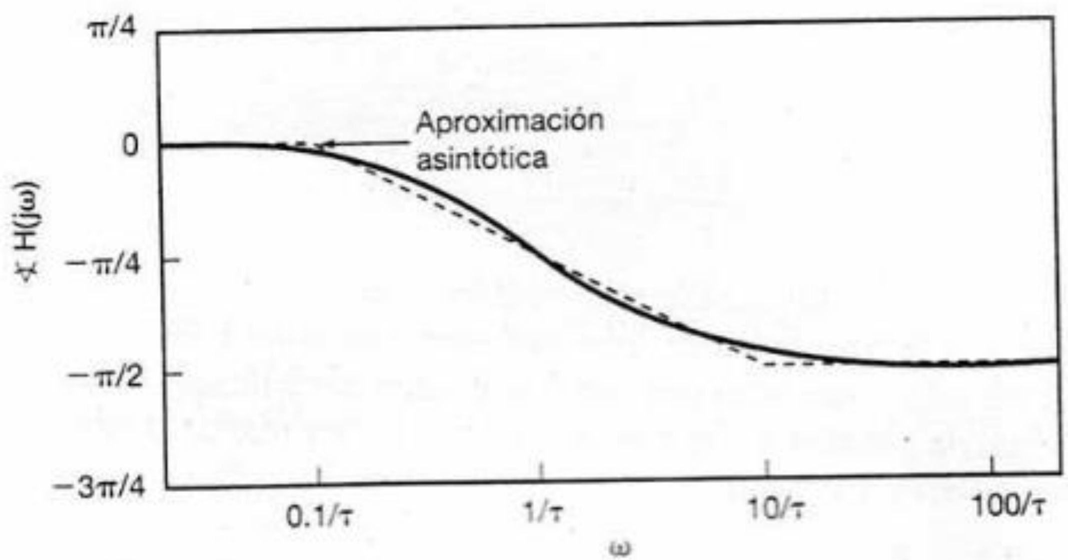


Diagrama de Bode de fase para un sistema continuo de primer orden

SISTEMAS CONTINUOS DE PRIMER ORDEN

Para los sistemas de primer orden las asíntotas de baja y alta frecuencia de la magnitud logarítmica son líneas rectas.

El punto en el que la pendiente de la aproximación cambia es precisamente $\omega = 1/\tau$,

el cual, por esta razón, se conoce como frecuencia de corte o ruptura.

SISTEMAS CONTINUOS DE PRIMER ORDEN

Así mismo se observa que en $\omega = 1/\tau$ los dos términos $\left[(\tau\omega)^2 \; y \; 1 \right]$ en el argumento del logaritmo en la siguiente ecuación son iguales

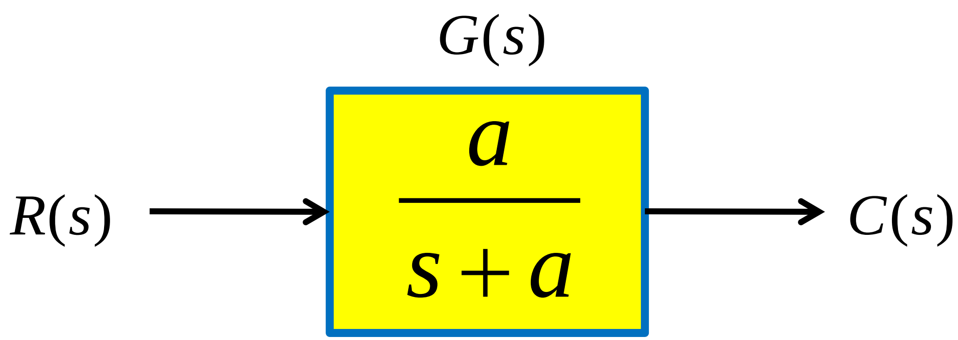
$$20\log_{10}\left(\left|H(j\omega)\right|\right) = -10\log_{10}\left[(\tau\omega)^2 + 1\right]$$

De esta manera, en este punto el valor real de la magnitud es:

$$20\log_{10}\left|H\left(j\frac{1}{\tau}\right)\right| = -10\log_{10}(2) \approx \text{-3dB}$$

SISTEMAS CONTINUOS DE PRIMER ORDEN

Un sistema de primer orden sin ceros, solo polos, puede ser descrito por la función transferencia que se muestra en la siguiente figura



SISTEMAS CONTINUOS DE PRIMER ORDEN

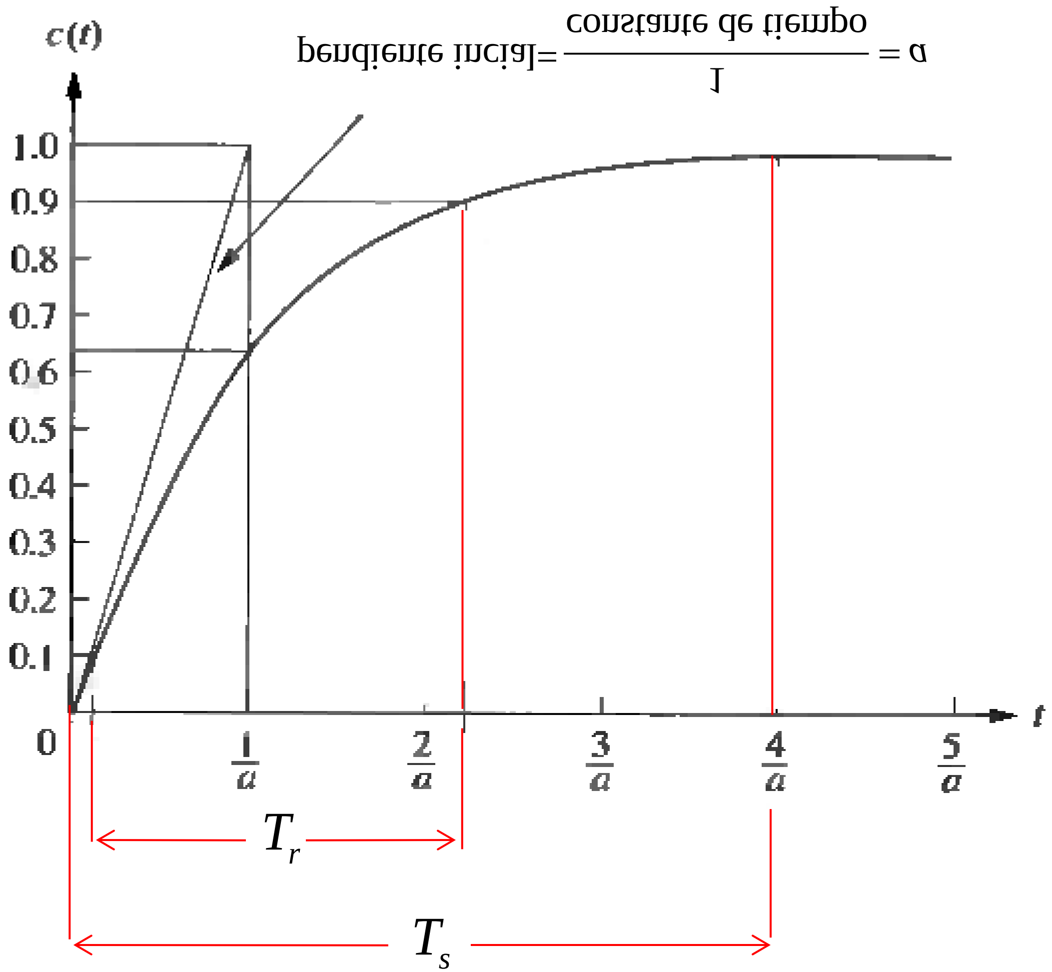
Si la entrada al sistema es un escalón unitario entonces la transformada de Laplace de la respuesta al escalón es C(s)

$$C(s) = \frac{a}{s(s+a)}$$

Su respuesta al escalón seria:

$$c(t) = 1 - e^{-at} \qquad , t > 0$$

SISTEMAS CONTINUOS DE PRIMER ORDEN



Gráfica de la respuesta al escalón unitario

SISTEMAS CONTINUOS DE PRIMER ORDEN

Parámetros

Tiempo de subida, T_r

Es el tiempo que toma la respuesta al escalón en llegar del 10% al 90% del valor final.

Tiempo de asentamiento, T_s

Es el tiempo que toma la respuesta al escalón en estabilizarse dentro del 2% de su valor final.

SISTEMAS CONTINUOS DE SEGUNDO ORDEN

SISTEMAS CONTINUOS DE SEGUNDO ORDEN

La ecuación diferencial con coeficientes constantes para un sistema de segundo orden es:

$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 2\zeta\omega_n \frac{dy(t)}{dt} + \omega_n^2 y(t) = \omega_n^2 x(t)$$

La respuesta en frecuencia correspondiente para el sistema de segundo orden es

$$H(j\omega) = \frac{\omega_n^2}{(j\omega)^2 + 2\zeta\omega_n (j\omega) + \omega_n^2}$$

SISTEMAS CONTINUOS DE SEGUNDO ORDEN

El denominador se puede factorizar y se tendría

$$H(j\omega) = \frac{\omega_n^2}{(j\omega - c_1)(j\omega - c_2)}$$

Donde

$$c_1 = -\zeta\omega_n + \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1}$$
$$c_2 = -\zeta\omega_n - \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1}$$

Para $\zeta \neq 1$, c1 y c2 son desiguales , y se puede realizar una expansión de fracciones parciales de la forma

SISTEMAS CONTINUOS DE SEGUNDO ORDEN

$$H(j\omega) = \frac{M}{(j\omega - c_1)} - \frac{M}{(j\omega - c_2)}$$

Donde

$$M = \frac{\omega_n}{2\sqrt{\zeta^2 - 1}}$$

SISTEMAS CONTINUOS DE SEGUNDO ORDEN

La respuesta impulsiva seria

$$h(t) = M[e^{c_1 t} - e^{c_2 t}]u(t)$$

Para $\zeta = 1$, entonces $c_1 = c_2 = -\omega_n$, y

$$H(j\omega) = \frac{\omega_n^2}{(j\omega - \omega_n)^2}$$

La respuesta al impulso sería

$$h(t) = \omega_n^2 t e^{-\omega_n t} u(t)$$

SISTEMAS CONTINUOS DE SEGUNDO ORDEN

De la ecuación

$$H(j\omega)=\frac{M}{(j\omega-c_1)}-\frac{M}{(j\omega-c_2)}$$

Para $0<\zeta<1$, entonces c_1 y c_2 son complejos

$$h(t)=\frac{\omega_n e^{-\zeta\omega_n t}}{2j\sqrt{1-\zeta^2}}\left[e^{j\left(\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}\right)t}-e^{-j\left(\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}\right)t}\right]u(t)$$

La respuesta impulsiva seria

$$h(t)=\frac{\omega_n e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}}sen\left(\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}t\right)u(t)$$

SISTEMAS CONTINUOS DE SEGUNDO ORDEN

Su respuesta al escalón sería

$$s(t) = h(t) * u(t) = \left\{ 1 + M \left[\frac{e^{c_1 t}}{c_1} - \frac{e^{c_2 t}}{c_2} \right] \right\} u(t)$$

Para $\zeta = 1$

$$s(t) = \left[1 - e^{-\omega_n t} - \omega_n t e^{-\omega_n t} \right] u(t)$$

SISTEMAS CONTINUOS DE SEGUNDO ORDEN

Examinando la gráfica de la magnitud logarítmica de la respuesta en frecuencia se tiene

$$20\log_{10}|H(j\omega)| = -10\log_{10}\left\{\left[1-\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right]^2 + 4\zeta^2\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right\}$$

A partir de la expresión anterior, las aproximaciones asintóticas para el espectro de magnitud logarítmica será

$$20\log_{10}|H(j\omega)| = \begin{cases} 0, & para\ \omega \ll \omega_n \\ \\ -40\log_{10}\omega + 40\log_{10}\omega_n, & para\ \omega \gg \omega_n \end{cases}$$

SISTEMAS CONTINUOS DE SEGUNDO ORDEN

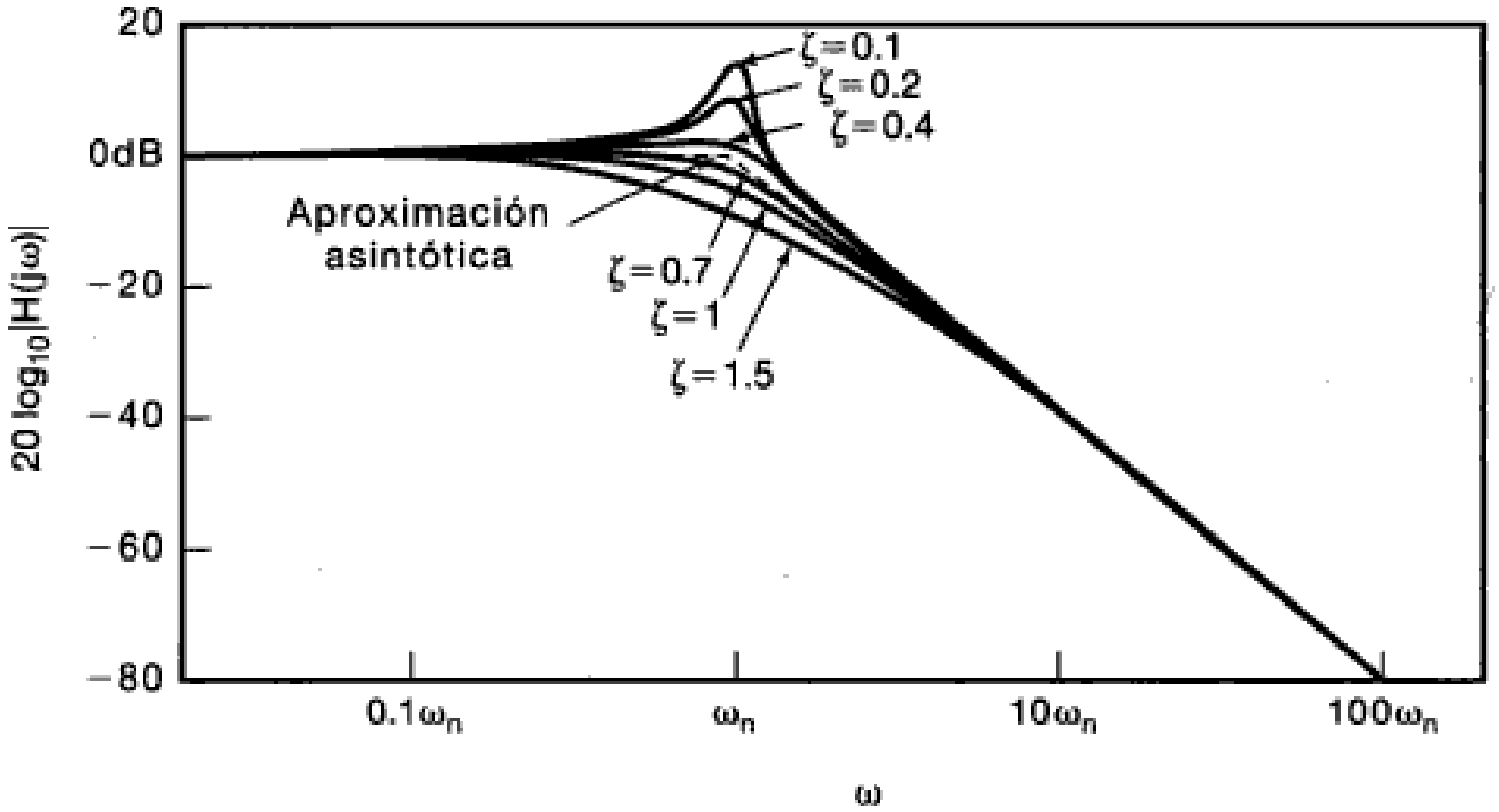


Diagrama de Bode para los sistemas de segundo orden con diferentes valores de la razón de amortiguamiento. Módulo

SISTEMAS CONTINUOS DE SEGUNDO ORDEN

El espectro de fase esta dado por la ecuación

$$\theta(j\omega) = -atan\left(\frac{2\zeta(\omega/\omega_n)}{1-(\omega/\omega_n)^2}\right)$$

La aproximación será

$$\theta(j\omega) = \begin{cases} 0 & \omega \le 0.1\omega_n \\ -\frac{\pi}{2}\left[\log_{10}\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)+1\right] & 0.1\omega_n \le \omega \le 10\omega_n \\ -\pi & \omega \ge 10\omega_n \end{cases}$$

SISTEMAS CONTINUOS DE SEGUNDO ORDEN

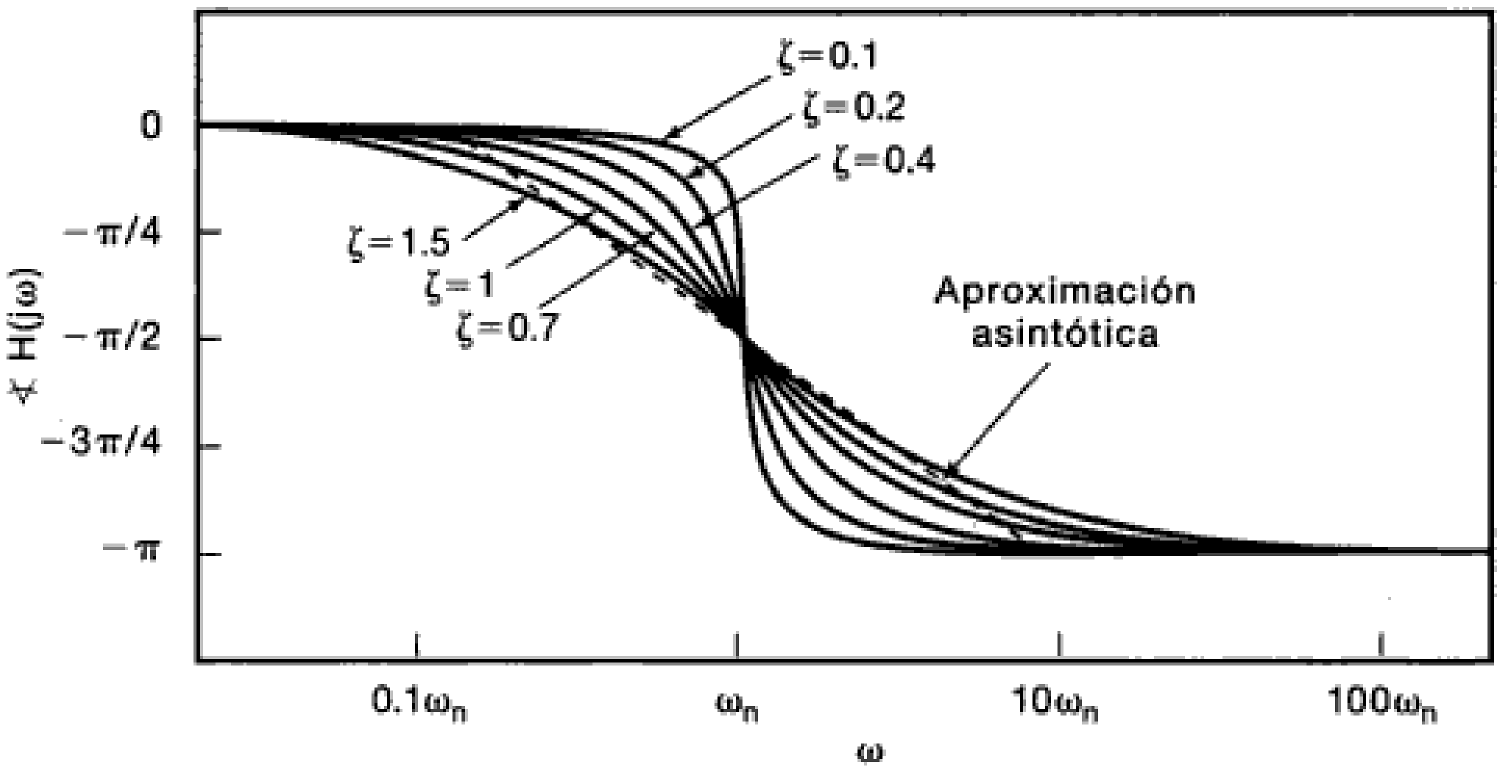


Diagrama de Bode para los sistemas de segundo orden con diferentes valores de la razón de amortiguamiento. Fase

SISTEMAS CONTINUOS DE SEGUNDO ORDEN

La calidad Q de dichos circuitos se define en términos de lo pronunciado del pico. Para un sistema de segundo orden es común considerar la calidad como

$$\boxed{Q = \frac{1}{2\zeta}}$$

SISTEMAS CONTINUOS DE SEGUNDO ORDEN

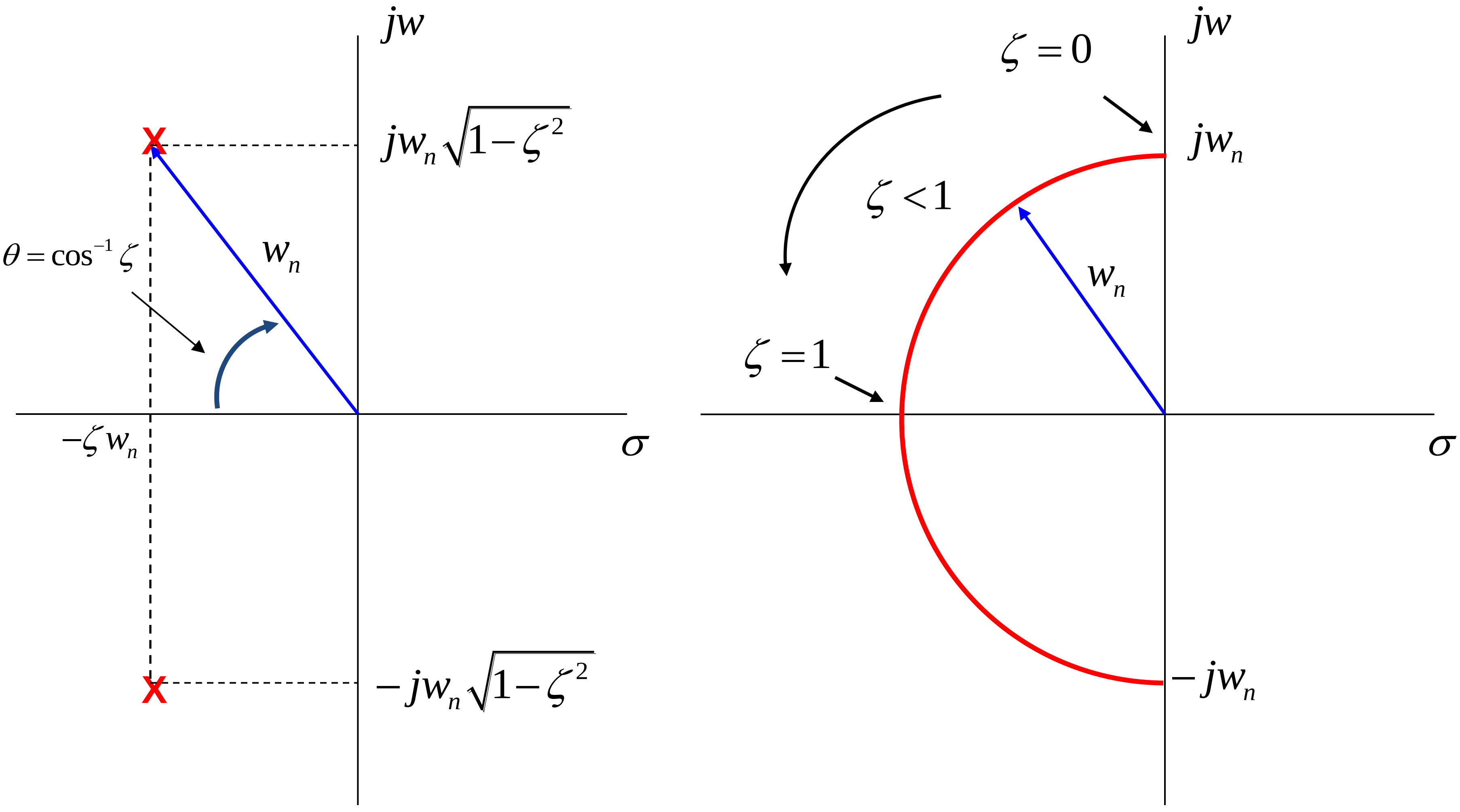
Si $\zeta = 0$, el sistema se conoce como amortiguado

Si $0 < \zeta < 1$, el sistema se conoce como subamortiguado

Si $\zeta > 1$, el sistema se conoce como sobreamortiguado

Si $\zeta = 1$, el sistema se conoce como críticamente amortiguado

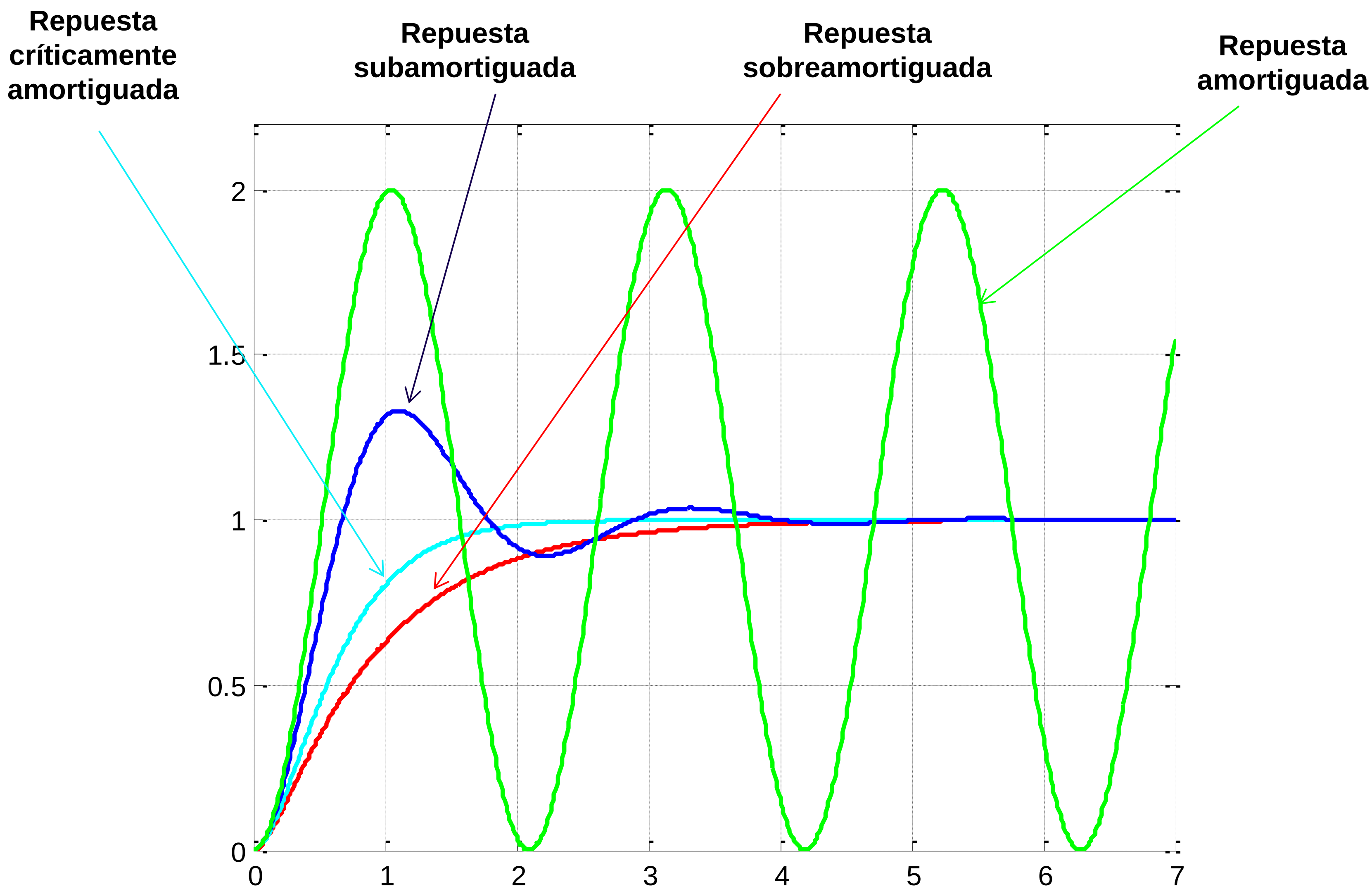
SISTEMAS CONTINUOS DE SEGUNDO ORDEN



Polos en respuesta de segundo orden

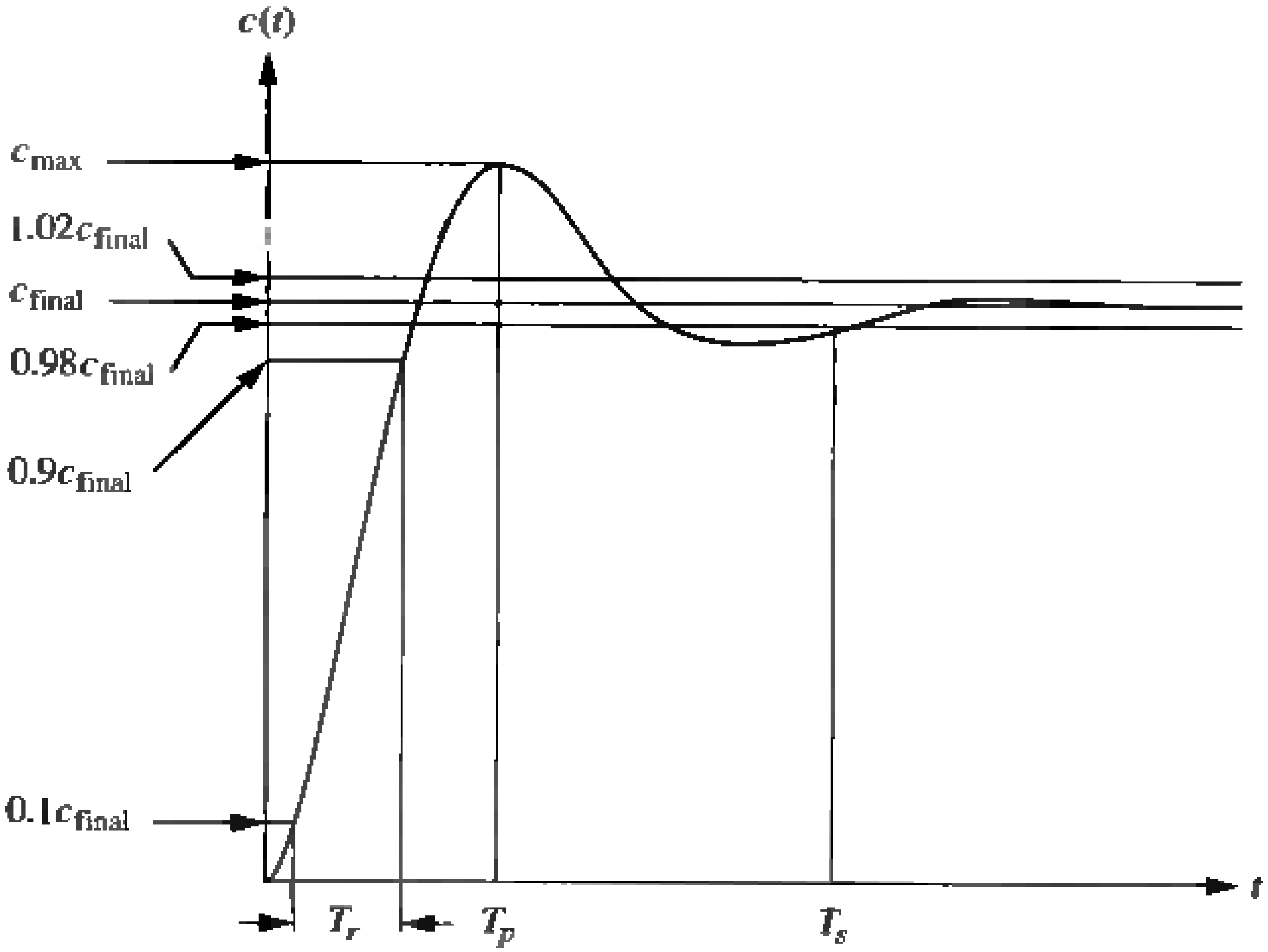
Variación de los polos con el factor de amortiguamiento

SISTEMAS CONTINUOS DE SEGUNDO ORDEN



Respuesta al escalón con distintos valores de ζ

SISTEMAS CONTINUOS DE SEGUNDO ORDEN



Respuesta al escalón subamortiguada - Sistema de segundo orden

SISTEMAS CONTINUOS DE SEGUNDO ORDEN

Parámetros

Frecuencia natural, ω_n

Es la frecuencia de oscilación del sistema sin amortiguación.

Coeficiente de amortiguamiento, ζ

$$\zeta = \frac{\text{Frecuencia de caida exponencial}}{\text{Frecuencia natutal(rad/seg)}}$$

SISTEMAS CONTINUOS DE SEGUNDO ORDEN

Parámetros

Tiempo de subida, T_r

Es el tiempo que toma la respuesta al escalón en llegar del 10% al 90% del valor final.

Tiempo pico, T_p

Es el tiempo que toma la respuesta al escalón en llegar al pico máximo.

$$T_p = \frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1-\zeta^2}}$$

SISTEMAS CONTINUOS DE SEGUNDO ORDEN

Parámetros

Porcentaje de sobrepaso, $\%OS$

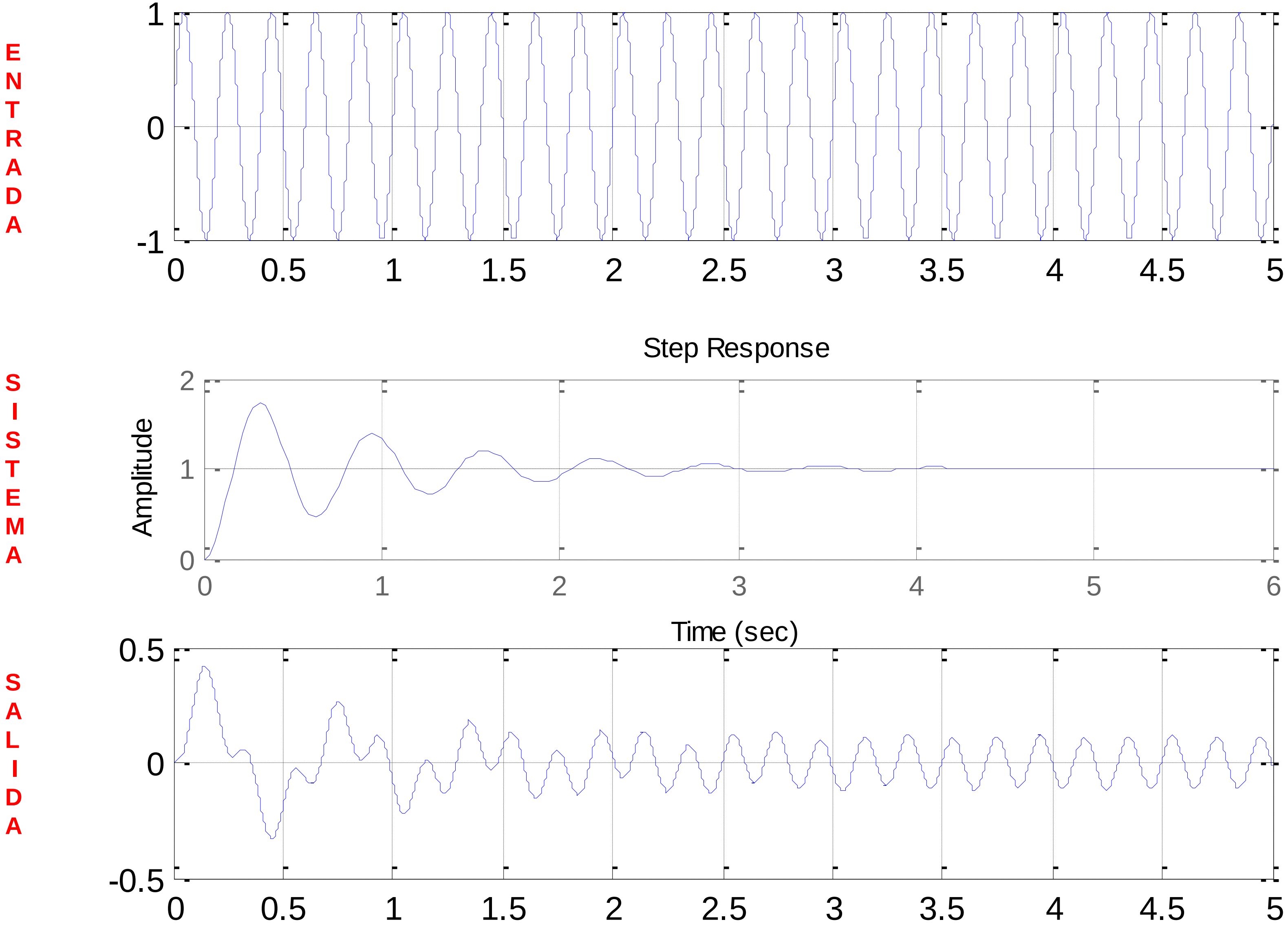
Es la cantidad que sobrepasa la respuesta al escalón al valor de asentamiento .

Tiempo de asentamiento, T_s

Es el tiempo que toma la respuesta al escalón en estabilizarse dentro del 2% de su valor final

$$T_s = \frac{-\ln(0.02\sqrt{1-\zeta^2})}{\zeta\omega_n}$$

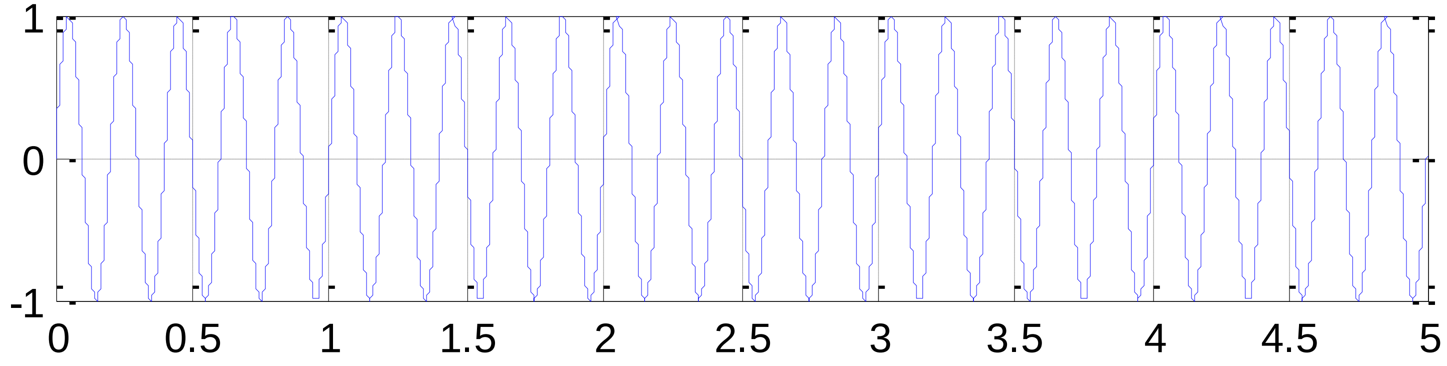
SISTEMAS CONTINUOS DE SEGUNDO ORDEN



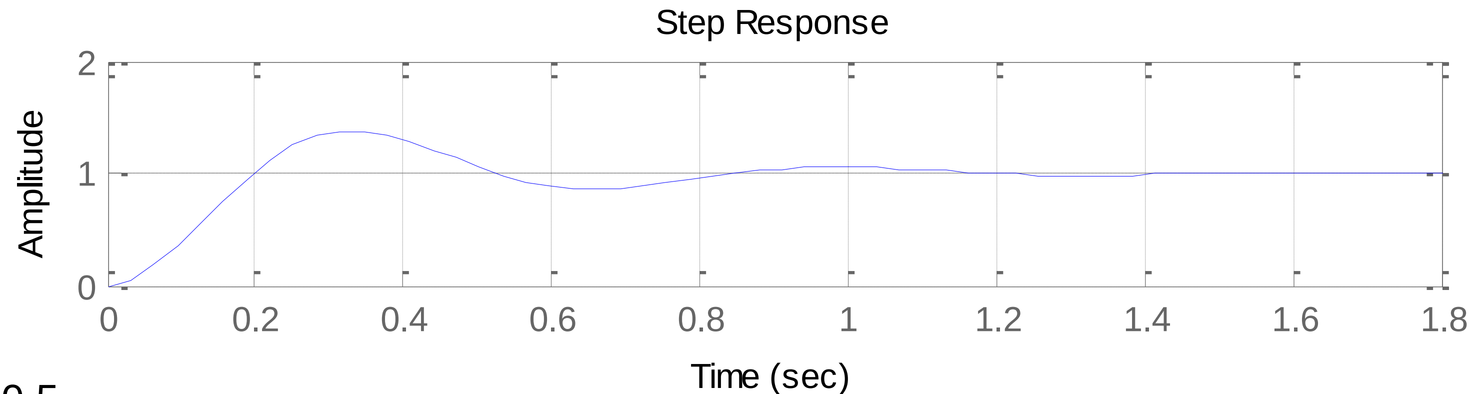
Distintos valores de T_s

SISTEMAS CONTINUOS DE SEGUNDO ORDEN

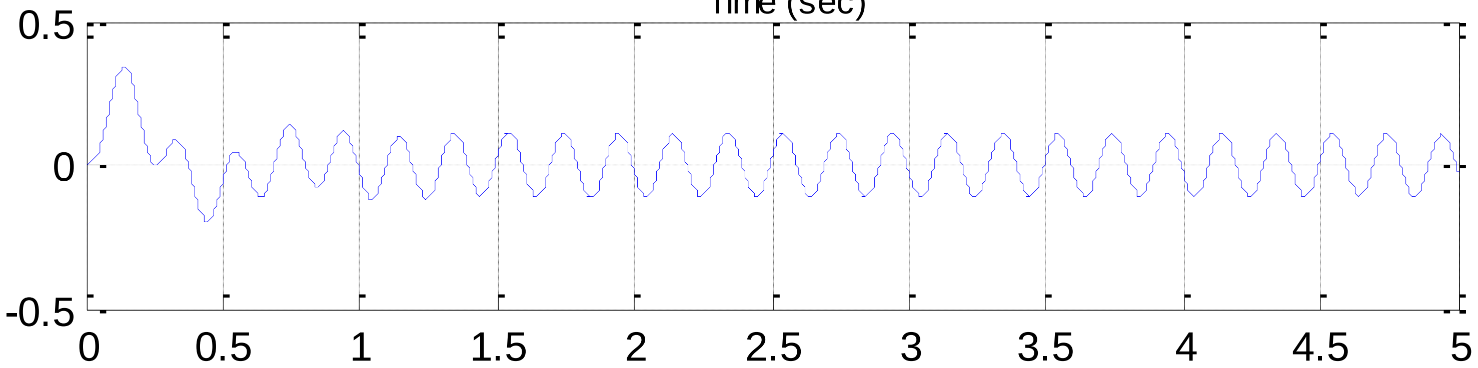
ENTRADA



SISTEMA

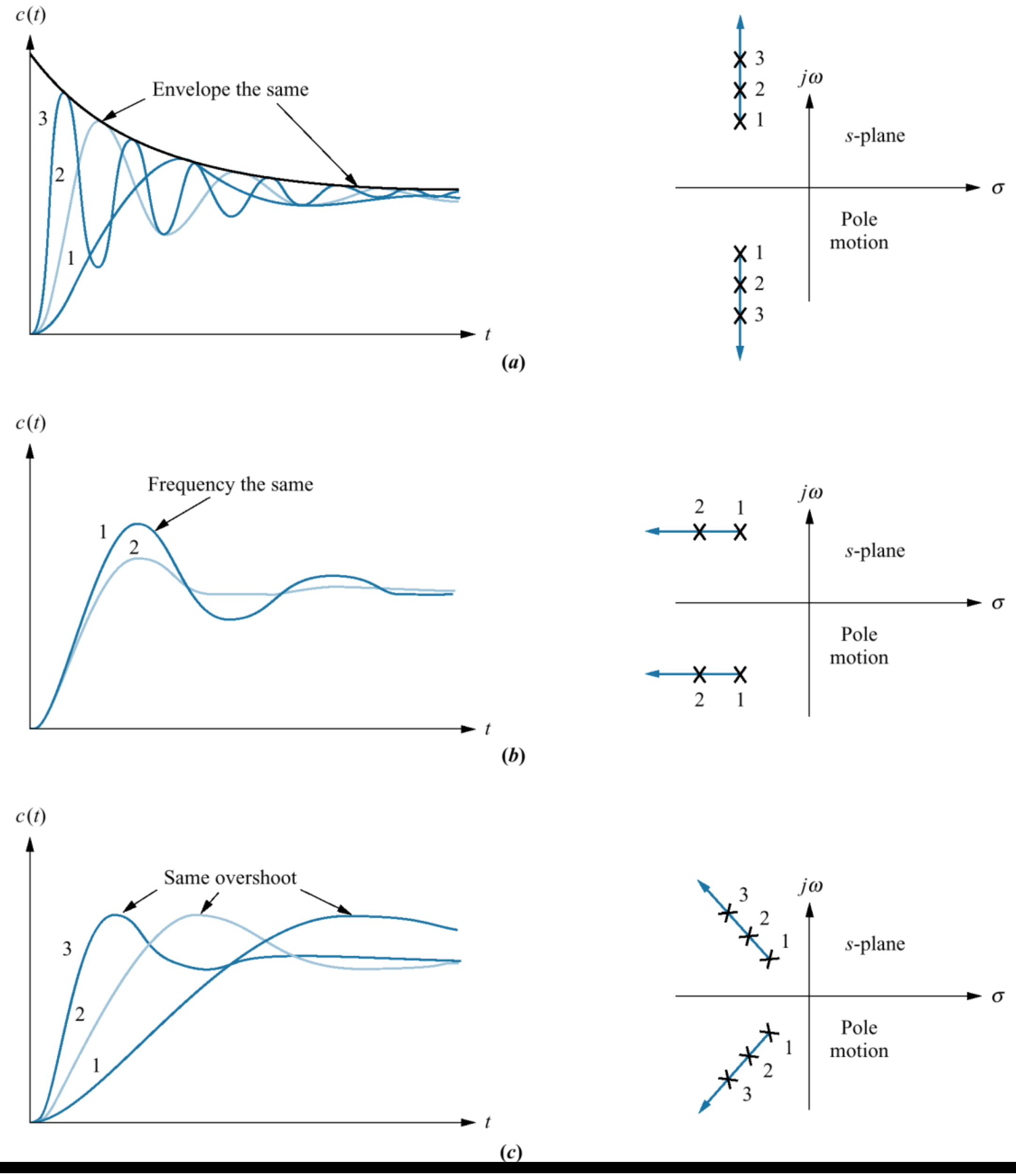


SALIDA



SISTEMAS CONTINUOS DE SEGUNDO ORDEN

Efecto de la localización de los polos en la respuesta al escalón



TABLA

BODE

TABLA – BODE

Sistemas de primer orden

De la forma

$$\boxed{H(j\omega) = \frac{1}{j\omega\tau + 1}}$$

$$\omega_n = \frac{1}{\tau}$$

<u>Asíntotas módulo</u>

$$20\log_{10}\left(\left|H(j\omega)\right|\right) \approx \begin{cases} 0, & \omega \ll \dfrac{1}{\tau} \\ -20\log_{10}(\omega) - 20\log_{10}(\tau), & \omega >> \dfrac{1}{\tau} \end{cases}$$

TABLA – BODE

Sistemas de primer orden

De la forma

$$\boxed{H(j\omega)=\frac{1}{j\omega\tau+1}}$$

$$\omega_n=\frac{1}{\tau}$$

<u>Asíntotas fase</u>

$$\theta(j\omega)=\begin{cases} 0 & \omega\leq 0.1/\tau \\ -\frac{\pi}{4}\left[\log_{10}\left(\omega\tau\right)+1\right] & 0.1/\tau\leq\omega\leq 10/\tau \\ -\pi/2 & \omega\geq 10/\tau \end{cases}$$

TABLA – BODE

Sistemas de primer orden

De la forma

$$H(j\omega) = j\omega\tau + 1$$

$$\omega_n = \frac{1}{\tau}$$

Asíntotas módulo

$$20\log_{10}\left(\left|H(j\omega)\right|\right) \square \begin{cases} 0, & \omega \square \dfrac{1}{\tau} \\ 20\log_{10}(\omega) + 20\log_{10}(\tau), & \omega >> \dfrac{1}{\tau} \end{cases}$$

TABLA – BODE

Sistemas de primer orden

De la forma

$$H(j\omega) = j\omega\tau + 1$$

$$\omega_n = \frac{1}{\tau}$$

Asíntotas fase

$$\theta(j\omega) = \begin{cases} 0 & \omega \le 0.1/\tau \\ \dfrac{\pi}{4}\left[\log_{10}\left(\omega\tau\right)+1\right] & 0.1/\tau \le \omega \le 10/\tau \\ \pi/2 & \omega \ge 10/\tau \end{cases}$$

TABLA – BODE

Sistemas de segundo orden

De la forma

$$H(j\omega) = \frac{{\omega_n}^2}{(j\omega)^2 + 2\zeta\omega_n(j\omega) + {\omega_n}^2}$$

<u>Asíntotas módulo</u>

$$20\log_{10}\left(\left|H(j\omega)\right|\right) \approx \begin{cases} 0, & \omega \ll \omega_n \\ -40\log_{10}(\omega) + 40\log_{10}(\omega_n), & \omega >> \omega_n \end{cases}$$

TABLA – BODE

Sistemas de segundo orden

De la forma

$$H(j\omega)=\frac{\omega_n{}^2}{(j\omega)^2+2\zeta\omega_n(j\omega)+\omega_n{}^2}$$

Asíntotas fase

$$\theta(j\omega)=\begin{cases} 0 & \omega\le 0.1\omega_n \\ -\dfrac{\pi}{2}\left[\log_{10}\left(\dfrac{\omega}{\omega_n}\right)+1\right] & 0.1\omega_n\le\omega\le 10\omega_n \\ -\pi & \omega\ge 10\omega_n \end{cases}$$

TABLA – BODE

Sistemas de primer orden

De la forma

$$H(j\omega) = K$$

<u>Asíntotas módulo</u>

$$20\log_{10}\left(\left|H(j\omega)\right|\right) = 20\log_{10}\left(K\right)$$

TABLA – BODE

Sistemas de primer orden

De la forma

$$H(j\omega) = K$$

<u>Asíntotas fase</u>

$$\theta(j\omega) = \begin{cases} 0, & K > 0 \\ \\ -\pi, & K < 0 \end{cases}$$

BODE

Ejercicio

Considere la siguiente respuesta en frecuencia. Obtener el diagrama de Bode de magnitud y de fase

$$H(j\omega) = \frac{100(1 + j\omega)}{(10 + j\omega)(100 + j\omega)}$$

BODE

Ejercicio

Un sistema LTI presenta la siguiente respuesta en frecuencia

$$x(t) \longrightarrow \boxed{\dfrac{10\,j\omega+1000}{-\omega^2+2\,j\omega+100}} \longrightarrow y(t)$$

De acuerdo a ello se pide obtener

a. Trazar detalladamente el diagrama de Bode de magnitud de H(jw) con aproximación asintótica

b. A partir del diagrama de Bode obtenido indicar que tipo de filtro es. ¿Pasa Altas, Pasa Bajas Pasa banda o Rechaza banda?

BODE

Ejercicio (continuación)

De acuerdo a ello se pide obtener

c. Si la señal de entrada es $x(t)=3\cos(5t)$, ¿la señal de salida en cuanto es atenuada, amplificada o mantiene su misma amplitud?

FUENTE:

OPPENHEIM, A.- WILLSKY, A. “Señales y Sistemas” Pearson Education, 2ª ed., 1998