Facultad de Ingeniería

Carrera de Ingeniería Electrónica
Carrera de Telecomunicaciones y Redes
Carrera de Ingeniería Mecatrónica

CURSO

Señales y Sistemas

TEMA

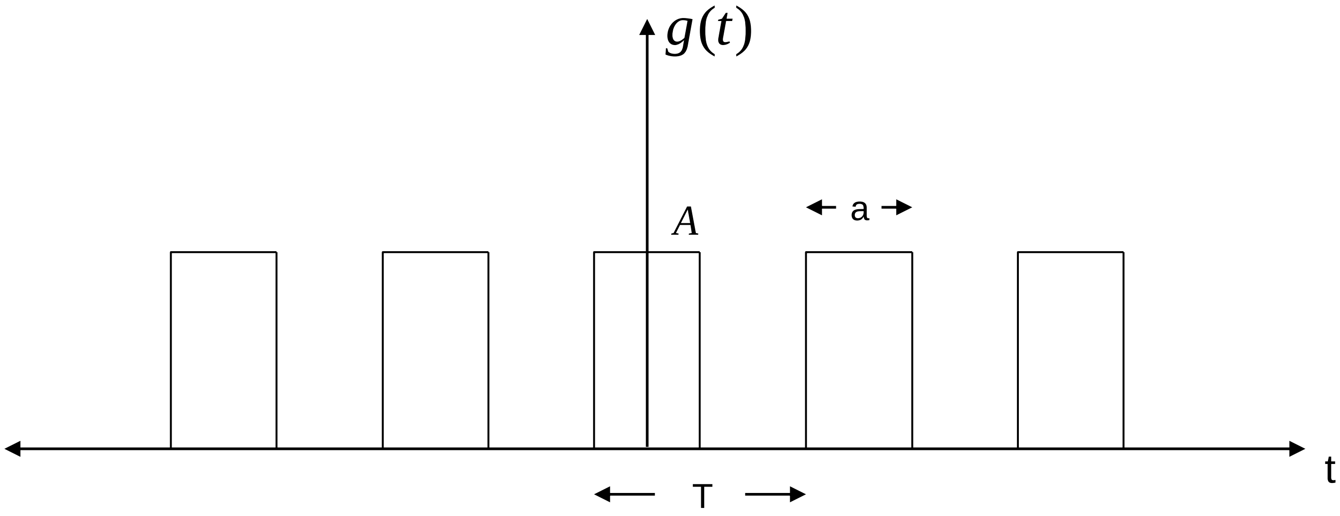
Transformada de Fourier

PROFESOR

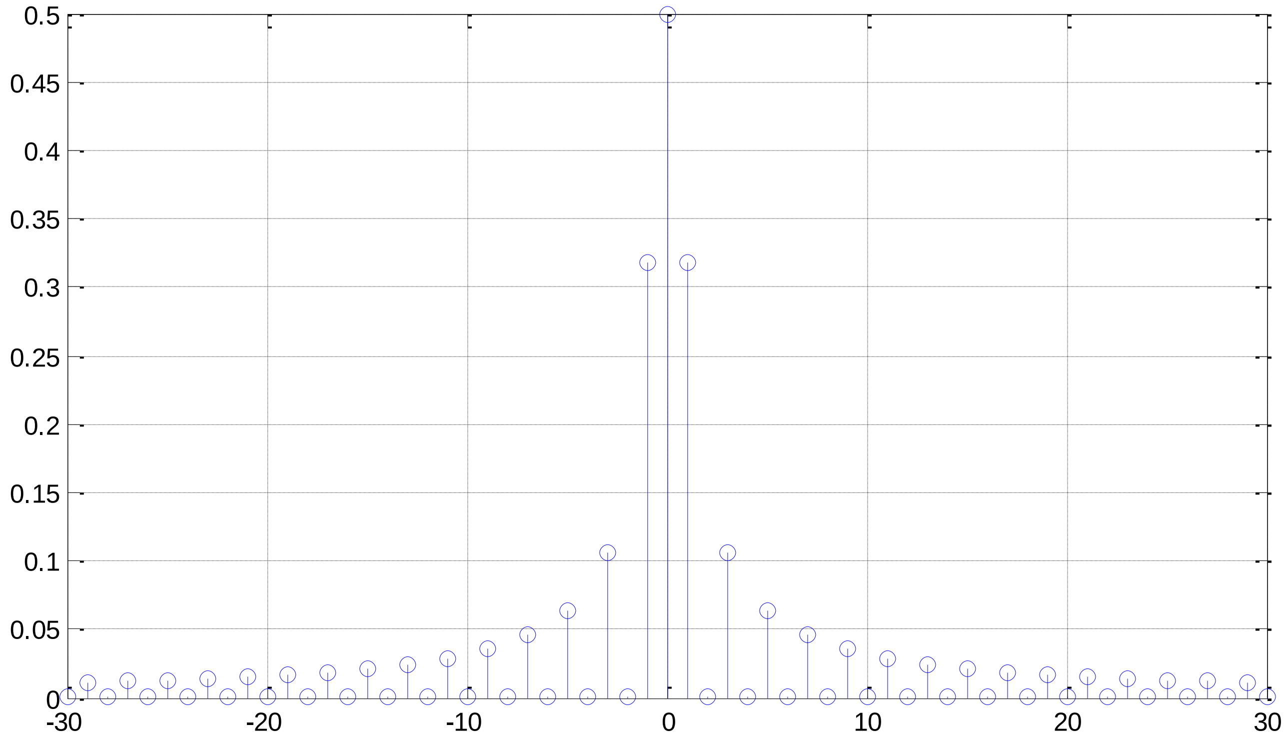
Ing. Christian del Carpio Damián

REPRESENTACIÓN DE SEÑALES APERIODICAS DE LA TRANSFORMADA CONTINUA DE FOURIER

Se tiene la señal g(t)

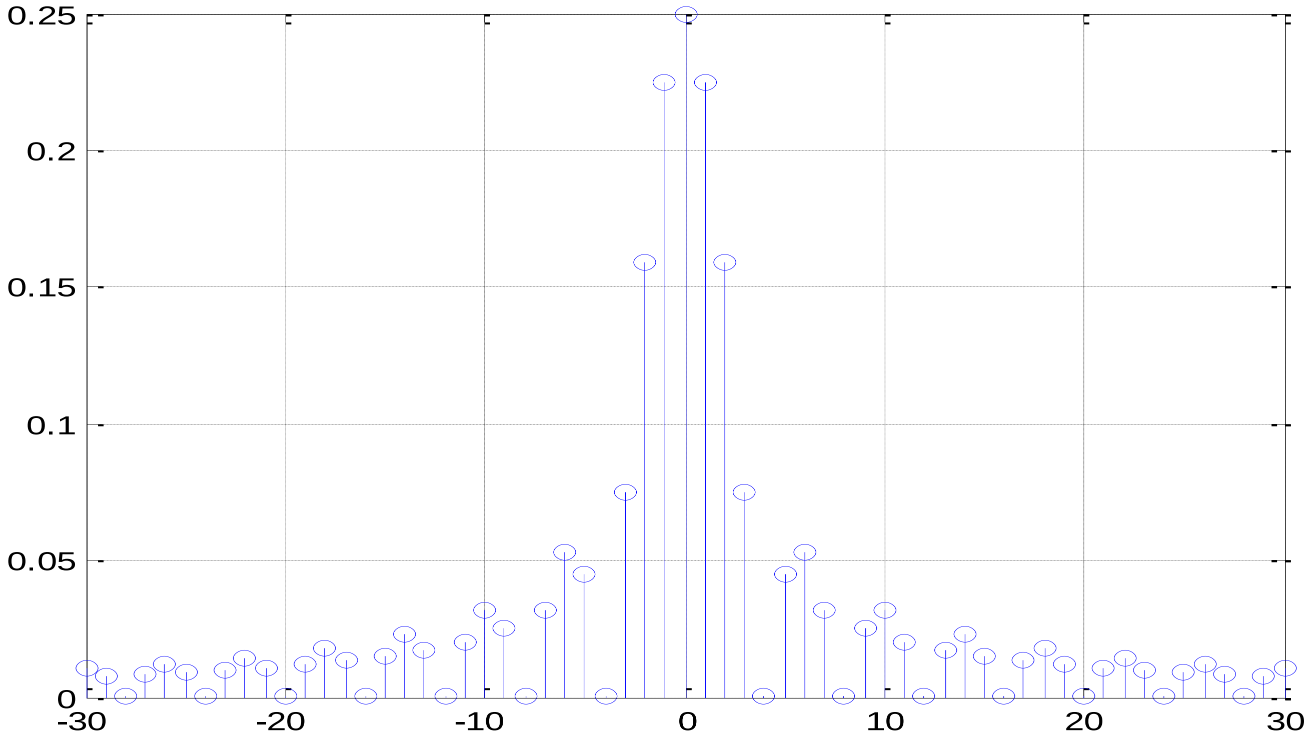


REPRESENTACIÓN DE SEÑALES APERIODICAS DE LA TRANSFORMADA CONTINUA DE FOURIER



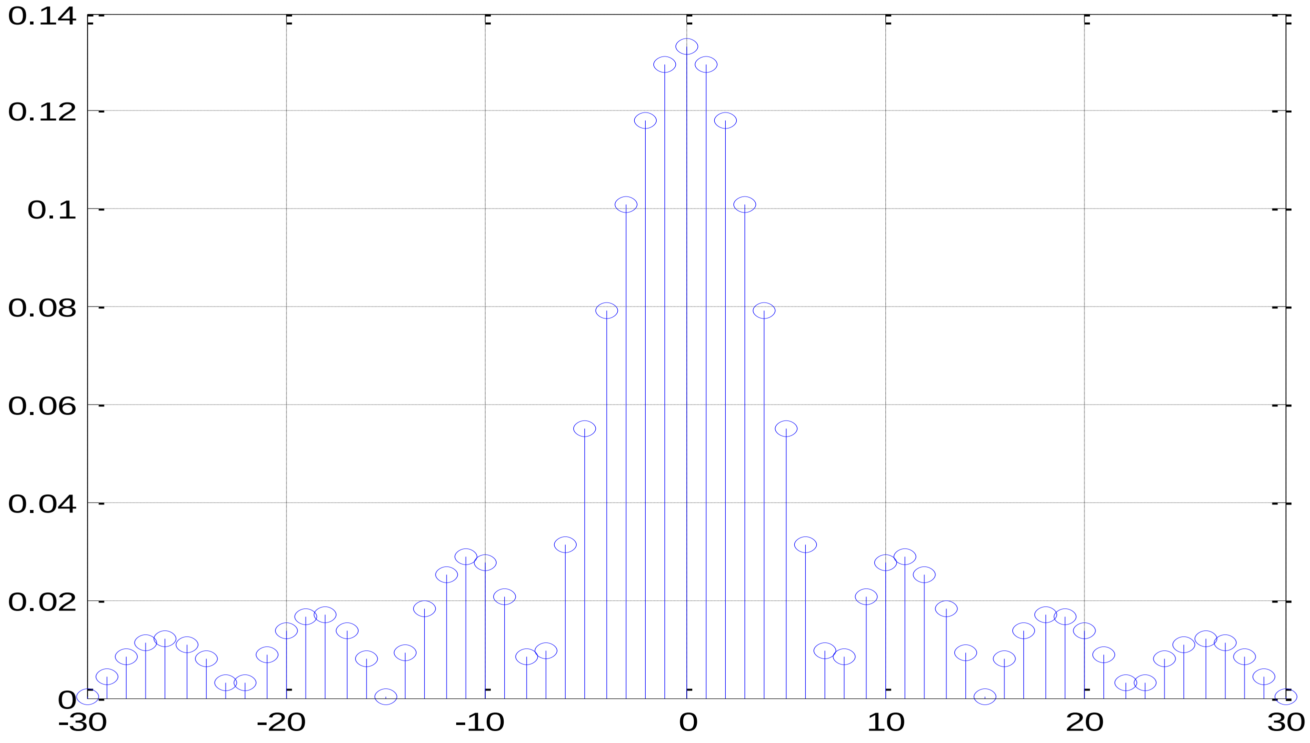
$$a = 2 \quad y \quad T = 4$$

REPRESENTACIÓN DE SEÑALES APERIODICAS DE LA TRANSFORMADA CONTINUA DE FOURIER



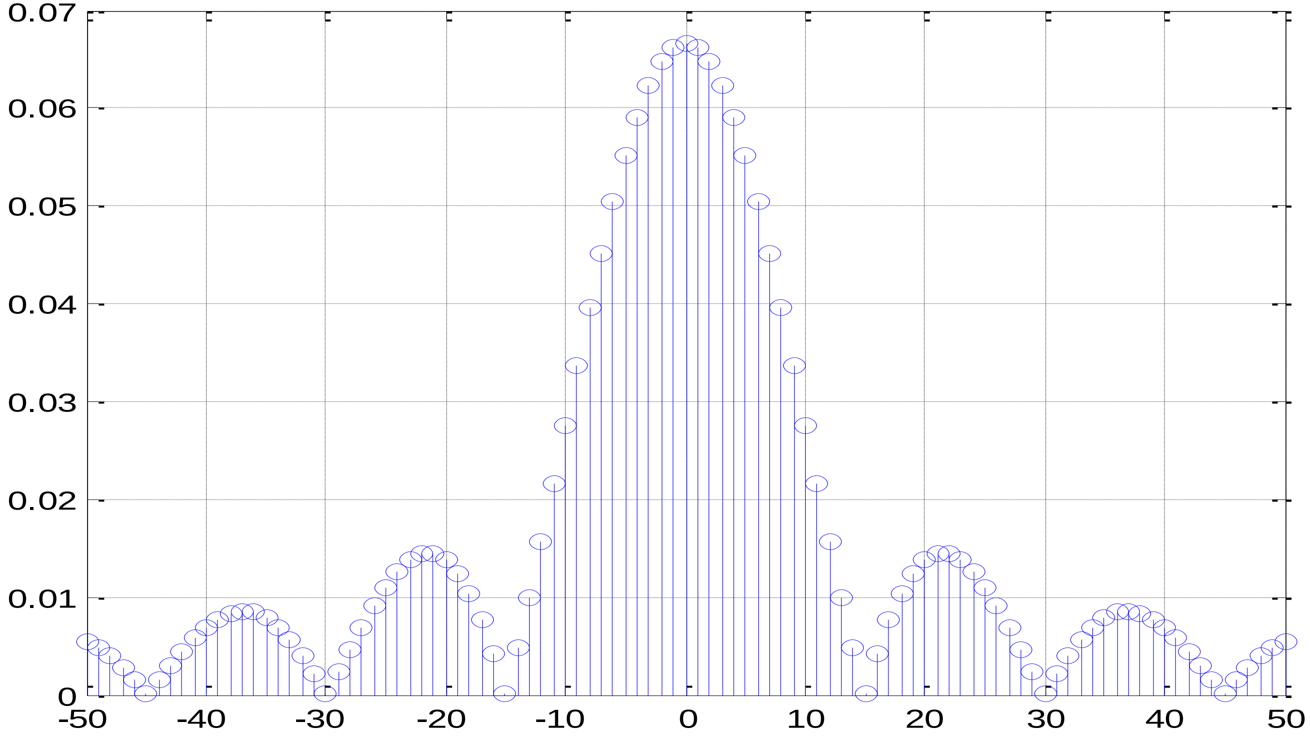
$$a = 2 \quad y \quad T = 8$$

REPRESENTACIÓN DE SEÑALES APERIODICAS DE LA TRANSFORMADA CONTINUA DE FOURIER



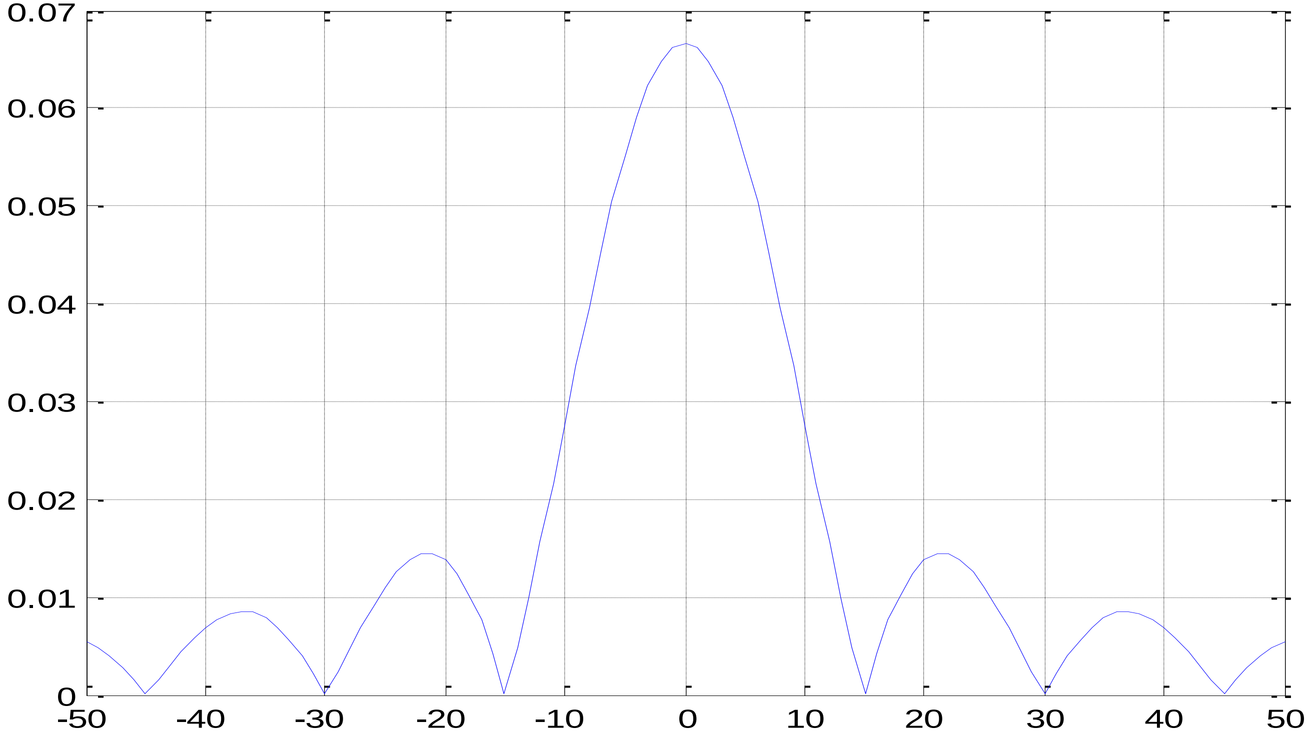
$$a = 2 \quad y \quad T = 15$$

REPRESENTACIÓN DE SEÑALES APERIODICAS DE LA TRANSFORMADA CONTINUA DE FOURIER



$$a = 2 \quad y \quad T = 30$$

REPRESENTACIÓN DE SEÑALES APERIODICAS DE LA TRANSFORMADA CONTINUA DE FOURIER



$$a = 2 \quad y \quad T = \infty$$

REPRESENTACIÓN DE SEÑALES APERIODICAS DE LA TRANSFORMADA CONTINUA DE FOURIER

La transformada de Fourier o integral de Fourier es

$$X(jw) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-jwt}dt$$

La transformada inversa de Fourier es

$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} X(jw)e^{jwt}dw$$

REPRESENTACIÓN DE SEÑALES APERIÓDICAS DE LA TRANSFORMADA CONTINUA DE FOURIER

Convergencia de las transformadas de Fourier

Si *x(t)* tiene energía finita, es decir, si es integrable al cuadrado, de manera que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt < \infty$$

Entonces se tiene la garantía de que $X(jw)$ es finita

REPRESENTACIÓN DE SEÑALES APERIÓDICAS DE LA TRANSFORMADA CONTINUA DE FOURIER

Ejemplo 1

Obtener la transformada de Fourier de

$$x(t) = e^{-at}u(t), \qquad a > 0$$

Ejemplo 2

Obtener la transformada de Fourier de

$$x(t) = e^{-a|t|}, \qquad a > 0$$

REPRESENTACIÓN DE SEÑALES APERIÓDICAS DE LA TRANSFORMADA CONTINUA DE FOURIER

Ejemplo 3

Obtener la transformada de Fourier de

$$x(t) = \delta(t)$$

Ejemplo 4

Obtener la transformada de Fourier de

$$x(t) = u(t + T_1) - u(t - T_1)$$

REPRESENTACIÓN DE SEÑALES APERIÓDICAS DE LA TRANSFORMADA CONTINUA DE FOURIER

Ejemplo 5

Obtener la transformada inversa de Fourier de

$$X(j\omega) = u(\omega + W) - u(\omega - W)$$

LA TRANSFORMADA CONTINUA DE FOURIER PARA SEÑALES PERIÓDICAS

Es posible obtener la serie de Fourier de una señal periódica, a través de su transformada de Fourier de dicha señal.

Si se tiene

$$g(t) \xrightarrow{\text{TF}} G(j\omega)$$

Entonces se reemplaza

$$\omega \rightarrow \omega_0 n$$

LA TRANSFORMADA CONTINUA DE FOURIER PARA SEÑALES PERIÓDICAS

Siendo

$$\omega_0 \quad la\ frecuencia\ fundamental$$

$$T_0 \quad el\ periodo\ fundamental$$

Se obtiene

$$\boxed{G_n = \frac{G(j\omega_0 n)}{T_0}}$$

LA TRANSFORMADA DE FOURIER PARA SEÑALES PERIODICAS

La transformada de Fourier de una señal periódica con coeficientes de la serie de Fourier $\{a_k\}$ se puede interpretar como un tren de impulsos que ocurren a las frecuencias relacionadas armónicamente

$$X(j\omega) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} 2\pi a_k \delta(\omega - k\omega_0)$$

PROPIEDADES DE LA TRANSFORMADA CONTINUA DE FOURIER

Linealidad

Sea

$$x(t) \overset{F}{\leftrightarrow} X(j\omega)$$

$$y(t) \overset{F}{\leftrightarrow} Y(j\omega)$$

entonces

$$ax(t)+by(t) \quad \overset{\mathrm{F}}{\leftrightarrow} \quad aX(j\omega)+bY(j\omega)$$

Desplazamiento en el Tiempo

Sea

$$x(t) \overset{F}{\leftrightarrow} X(j\omega)$$

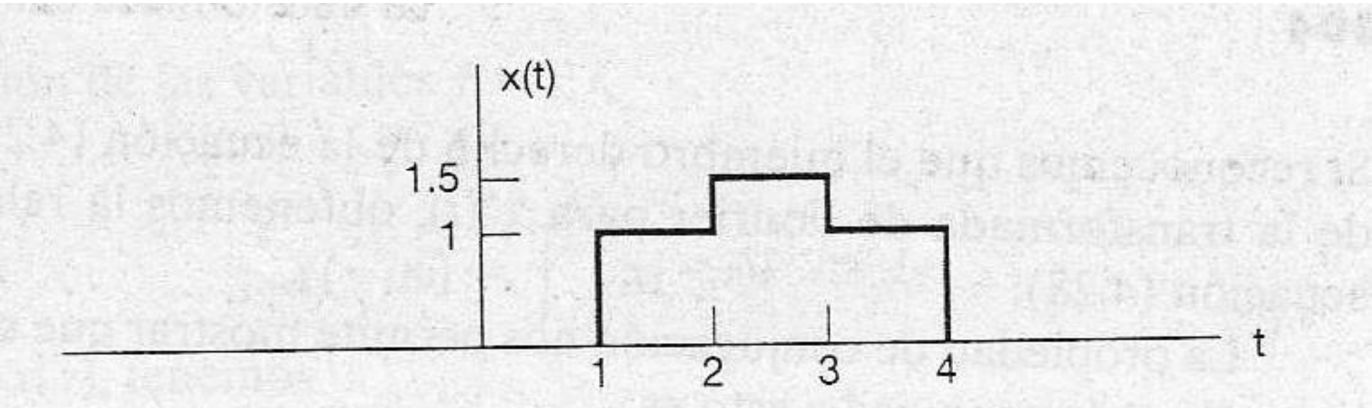
entonces

$$x(t-t_0) \quad \overset{F}{\leftrightarrow} \quad e^{-j\omega t_0} X(j\omega)$$

PROPIEDADES DE LA TRANSFORMADA CONTINUA DE FOURIER

Ejemplo 6

Obtener la transformada de Fourier de



PROPIEDADES DE LA TRANSFORMADA CONTINUA DE FOURIER

Conjugación y simetría conjugada

Sea

$$x(t) \overset{F}{\leftrightarrow} X(j\omega)$$

entonces

$$x^*(t) \quad \overset{F}{\leftrightarrow} \quad X^*(-j\omega)$$

Diferenciación e integración en el tiempo

Sea

$$x(t) \overset{F}{\leftrightarrow} X(j\omega)$$

PROPIEDADES DE LA TRANSFORMADA CONTINUA DE FOURIER

Diferenciación e integración en el tiempo

entonces

$$\frac{dx(t)}{dt} \overset{F}{\leftrightarrow} j\omega X(j\omega)$$

$$\int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau \overset{F}{\leftrightarrow} \frac{1}{\mathrm{j}\omega}X(j\omega)+\pi X(0)\delta(\omega)$$

PROPIEDADES DE LA TRANSFORMADA CONTINUA DE FOURIER

Diferenciación en la frecuencia

Sea

$$x(t) \overset{F}{\leftrightarrow} X(j\omega)$$

entonces

$$tx(t) \overset{F}{\leftrightarrow} j\frac{d}{d\omega}X(j\omega)$$

PROPIEDADES DE LA TRANSFORMADA CONTINUA DE FOURIER

Escalamiento de tiempo y de frecuencia

Sea

$$x(t) \overset{F}{\leftrightarrow} X(j\omega)$$

entonces

$$x(at) \quad \overset{F}{\leftrightarrow} \quad \frac{1}{|a|} X\left(\frac{j\omega}{a}\right)$$

Así mismo, se tiene que

$$x(-t) \quad \overset{F}{\leftrightarrow} \quad X(-j\omega)$$

PROPIEDADES DE LA TRANSFORMADA CONTINUA DE FOURIER

Relación de Parseval

Sea

$$x(t) \overset{F}{\leftrightarrow} X(j\omega)$$

entonces

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 \mathrm{dt} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |X(j\omega)|^2 d\omega$$

Simetría o Dualidad

Sea

$$x(t) \quad \overset{F}{\leftrightarrow} \quad X(j\omega)$$

entonces

$$X(t) \quad \overset{F}{\leftrightarrow} \quad 2\pi x(-j\omega)$$

PROPIEDADES DE LA TRANSFORMADA CONTINUA DE FOURIER

La propiedad de convolución

$$y(t) = h(t) * x(t) \quad \overset{F}{\leftrightarrow} \quad \mathrm{Y}\left(j\omega\right) = H(j\omega) X(j\omega)$$

La propiedad de multiplicación

$$r(t) = s(t)\, p(t) \quad \overset{F}{\leftrightarrow} \quad \mathrm{R}\left(j\omega\right) = \frac{1}{2\pi}[S(j\omega) * P(j\omega)]$$

PARES BÁSICOS DE TRANASFORMADA DE FOURIER

SEÑAL	TRANSFORMADA DE FOURIER
$\delta(t)$	1
$u(t)$	$\frac{1}{j\omega}+\pi\delta(\omega)$
$e^{-at}u(t), \operatorname{Re}\{a\}>0$	$\frac{1}{a+j\omega}$
$te^{-at}u(t), \operatorname{Re}\{a\}>0$	$\frac{1}{(a+j\omega)^2}$
$\frac{sen(Wt)}{\pi t}$	$X(j\omega)=\begin{cases}1, & -W<\omega<W\\ 0, & \text{para el resto}\end{cases}$

PARES BÁSICOS DE TRANASFORMADA DE FOURIER

SEÑAL	TRANSFORMADA DE FOURIER
1	$2\pi\delta(\omega)$
$x(t)=\begin{cases}1, & -T<t<T\\ 0, & \text{para el resto}\end{cases}$	$\dfrac{2sen(\omega T)}{\omega}$
$\cos(\omega_0 t)$	$\pi[\delta(\omega-\omega_0)+\delta(\omega+\omega_0)]$
$\sin(\omega_0 t)$	$\dfrac{\pi}{j}[\delta(\omega-\omega_0)-\delta(\omega+\omega_0)]$

SISTEMAS CARACTERIZADOS POR ECUACIONES DIFERENCIALES CON COEFICIENTES CONSTANTES

En un sistema LTI continuo en que la entrada y la salida satisfacen una ecuación diferencial lineal con coeficientes constantes

$$\sum_{k=0}^{N} a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k} = \sum_{k=0}^{M} b_k \frac{d^k x(t)}{dt^k}$$

SISTEMAS CARACTERIZADOS POR ECUACIONES DIFERENCIALES CON COEFICIENTES CONSTANTES

Considere un sistema LTI caracterizado por la ecuación anterior. Partiendo de la propiedad de convolución

$$\mathrm{Y}(j\omega) = H(j\omega)X(j\omega)$$

o, de manera equivalente,

$$H(j\omega) = \frac{\mathrm{Y}(j\omega)}{X(j\omega)}$$

SISTEMAS CARACTERIZADOS POR ECUACIONES DIFERENCIALES CON COEFICIENTES CONSTANTES

Aplicando la transformada de Fourier a ambos miembros de la ecuación anterior, se obtiene

$$F\left\{\sum_{k=0}^{N} a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k}\right\} = F\left\{\sum_{k=0}^{M} b_k \frac{d^k x(t)}{dt^k}\right\}$$

De la propiedad de linealidad, se obtiene

$$\sum_{k=0}^{N} a_k F\left\{\frac{d^k y(t)}{dt^k}\right\} = \sum_{k=0}^{M} b_k F\left\{\frac{d^k x(t)}{dt^k}\right\}$$

SISTEMAS CARACTERIZADOS POR ECUACIONES DIFERENCIALES CON COEFICIENTES CONSTANTES

De la propiedad de diferenciación, se obtiene

$$\mathrm{Y}(j\omega)\left[\sum_{k=0}^{N} a_k (j\omega)^k\right] = \mathrm{X}(j\omega)\left[\sum_{k=0}^{M} b_k (j\omega)^k\right]$$

De esta manera, se obtiene:

$$\boxed{H(j\omega) = \frac{\mathrm{Y}(j\omega)}{X(j\omega)} = \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k (j\omega)^k}{\sum_{k=0}^{N} a_k (j\omega)^k}}$$

SISTEMAS CARACTERIZADOS POR ECUACIONES DIFERENCIALES LINEALES CON COEFICIENTES CONSTANTES

Ejemplo 7

Considere un sistema LTI caracterizado por la ec. Diferencial. Hallar su respuesta impulsiva

$$\frac{dy(t)}{dt} + ay(t) = x(t)$$

Ejemplo 8

Considere un sistema LTI caracterizado por la ec. Diferencial. Hallar su respuesta impulsiva

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 4\frac{dy(t)}{dt} + 3y(t) = \frac{dx(t)}{dt} + 2x(t)$$

DENSIDAD ESPECTRAL DE ENERGÍA (DEE)

Una señal *x(t)* es definida en energía si su energía media es finita, es decir, $0 < E_x < \infty$ y por tanto, su potencia media es cero.

Otra forma de decir lo mismo es si la integral de su valor absoluto al cuadrado existe y es finita.

La DEE es

$$\boxed{\psi_x(j\omega) = |X(j\omega)|^2 \ \textit{Joule/Hz}}$$

DENSIDAD ESPECTRAL DE ENERGÍA (DEE)

Donde $X(j\omega)$ es la Transformada de Fourier de $x(t)$, la integral de esta función en todo el eje ω es el valor de la energía total de la señal $x(t)$

$$E_x = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |X(j\omega)|^2 d\omega$$

FUENTE:

OPPENHEIM, A.- WILLSKY, A. “Señales y Sistemas” Pearson Education, 2ª ed., 1998