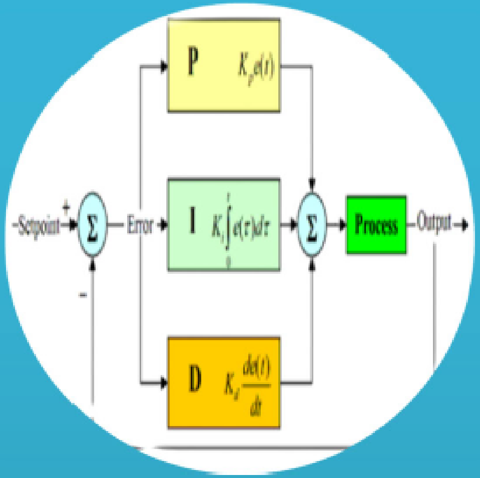
MC71 - Ingeniería de control 2

Unidad N°1: Modelamiento de sistemas mediante espacio de estados y análisis de su respuesta temporal

Semana 1

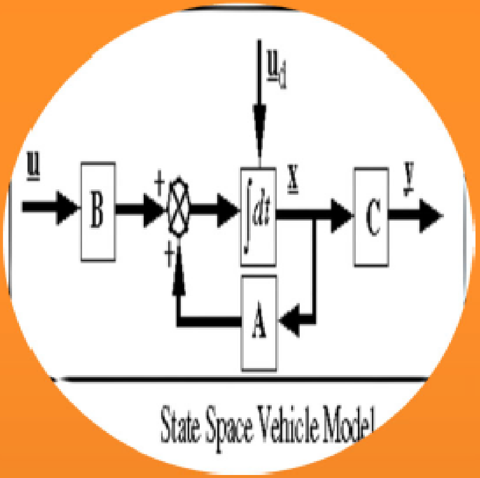
- Modelamiento de sistemas físicos en base a espacio de estado.
- Linealización de sistemas no-lineales representados en espacio de estado.
- Modelos en espacio de estado lineales
- Diagramas de Simulación de la representación en espacio de estado. Solución de la ecuación de estado.
- Función de transferencia a partir del modelo en espacio de estado.

MEng. Carlos H. Inga Espinoza



Control clásico

- Modelamiento de sistemas
  - Función transferencia
  - Diagrama de bloques
- Analisis de sistemas
  - Analisis en el dominio del tiempo
  - Analisis en el dominio de la frecuencia
    - Diagrama de Bode y Nyquist
- Lugar geometrico de las raíces
- Diseño de sistemas
  - Técnicas de compensación
  - Control PID

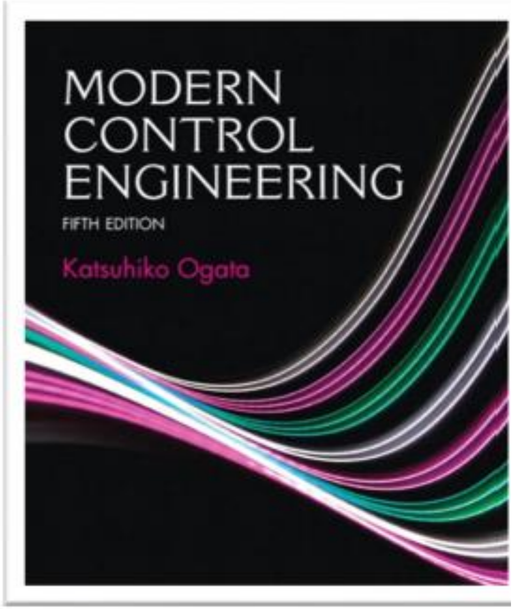


Control moderno

- Modelamiento en espacio estado
- Analisis de eigenvalores
- Observabilidad y controlabilidad
- Solución de ecuaciones de estado
- Espacio estado a función transferencia
- Función trasnferencia a espacio estado
  - Descomposición directa a función transferencia
  - Descomposición cascada a función transferencia
  - Descomposición paralela a función transferencia
- Técnicas de diseño en espacio estado

Libros de texto

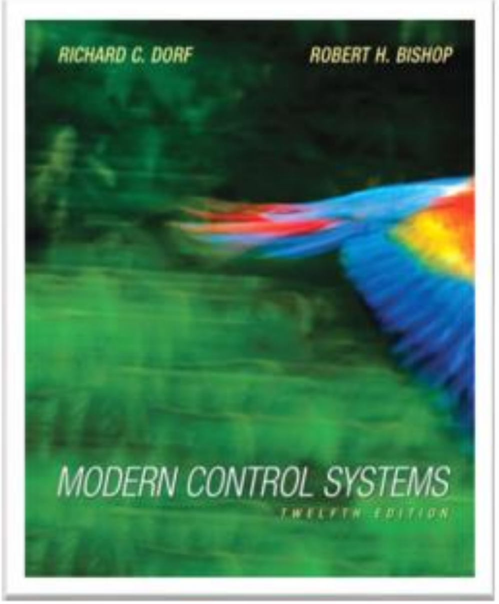
1. Ingeniería de control moderna (5ta edición) por Katsuhiko Ogata



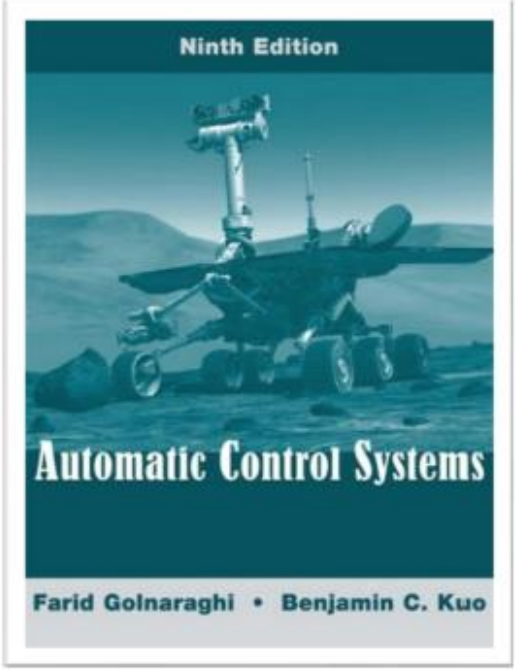
2. Ingeniería de sistemas de control (6ta edición) por Norma S. Nise.

Libros de referencia

1. Sistemas de control moderno (12va edición) por Richard C. Dorf y Robert H. Bishop.



2. Sistemas de control automático (9na edición) por Golnaraghi y B. C. Kuo.



Esquema del curso:

- Unidad N°1: Modelamiento de sistemas mediante espacio de estados y análisis de su respuesta temporal.
- Unidad N°2: Diseño de controladores mediante realimentación de estados.
- Unidad N°3: Diseño de observadores de estados, integración de controladores y observadores.
- Unidad N°4: Diseño de controladores y observadores mediante técnicas optimales.

Control clásico - Historia

- El diseño de sistemas de control durante la Revolución Industrial estaba basado en prueba y error unido con una gran dosis de intuición ingenieril. Por lo tanto era más un arte que una ciencia.
- En la década de 1800 los matemáticos fueron los primeros en analizar la estabilidad de los sistemas de control realimentados. Desde entonces las matemáticas son el lenguaje formal de la teoría de control.
- Aquí se empleaba las ecuaciones diferenciales.

Control Clásico: año 1840

- El Astrónomo Británico G.B. Airy, desarrolló un dispositivo de realimentación para posicionar un telescopio. Era un sistema de control de velocidad que giraba el telescopio de forma automática para compensar la rotación de la tierra con objeto de estudiar una determinada estrella durante un largo periodo de tiempo.
- Airy vio que un mal diseño del bucle de control por realimentación puede introducir grandes oscilaciones en el sistema.
- Fue el primero en estudiar la inestabilidad de los sistemas en bucle cerrado y el primero en usar para ello ecuaciones diferenciales.

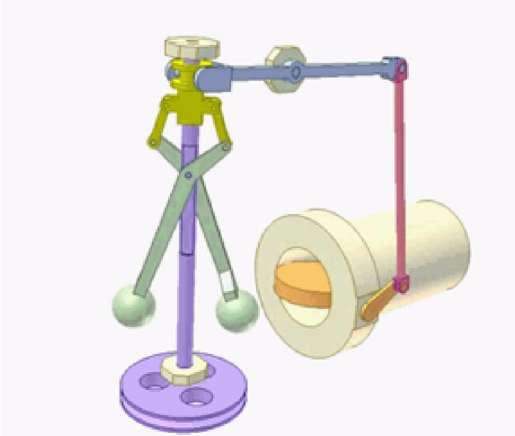
George Biddell Airy

Control Clásico: año 1868

- El nacimiento de la Teoría de Control matemática:
- J.C.Maxwell formuló un teoría matemática relacionada con la teoría de control usando ecuaciones diferenciales para modelar el regulador a bolas de Watt.

- Estudió el efecto de los parámetros del sistema en la estabilidad y mostró que el sistema es estable si las raíces de la ecuación característica tiene parte real negativa.

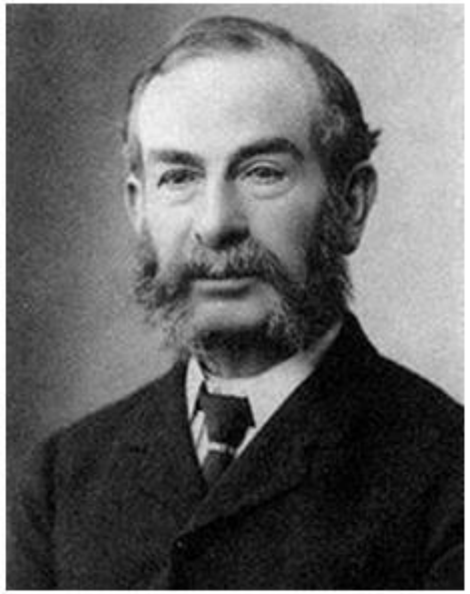
James Clerk Maxwell



Control Clásico

- Routh (1884); Hurwitz (1895), plantean un Criterio de estabilidad algebraico, para determinar cuando una ecuación característica tiene raíces estables.

Adolf Hurwitz



Edward Routh

Control Clásico

- (1932) H. Nyquist. Formuló el criterio de estabilidad de Nyquist basado en la representación polar de una función compleja.

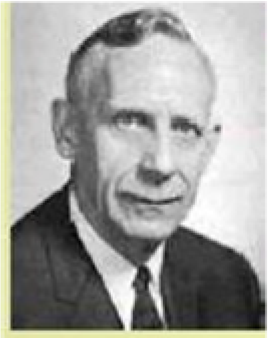
- (1938) H.W. Bode. Usó la representación de la magnitud y la fase de la respuesta frecuencial de una función compleja. Investigó la estabilidad de los sistemas en bucle cerrado usando los conceptos de margen de fase y margen de ganancia.

- (1948) Evans Lugar de las raíces

- En esta época los fundamentos de la teoría del control automático ya estaban bien asentados.

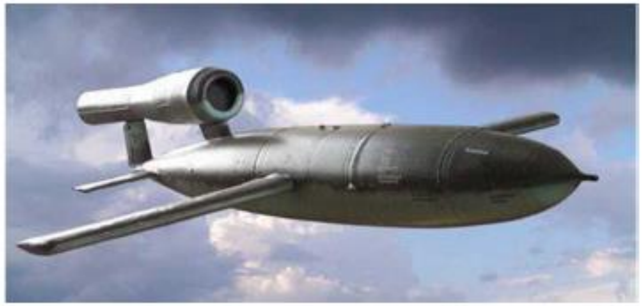
Harry. Nyquist.

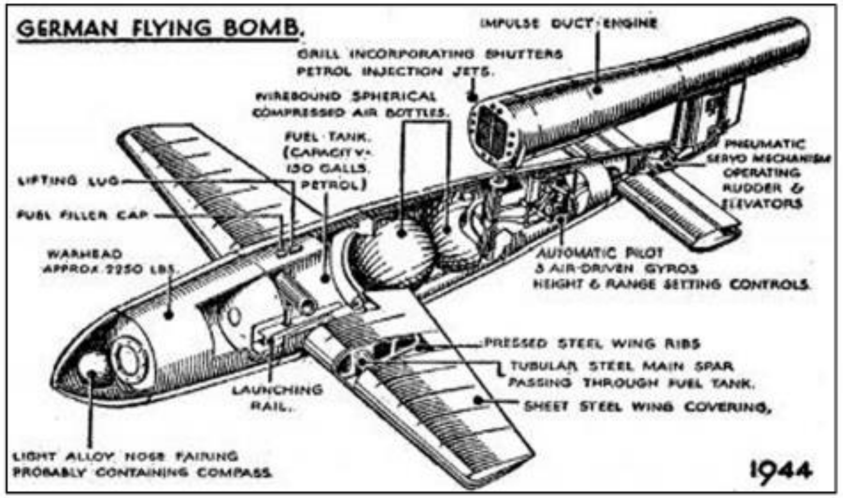
Hendrik Bode



Control Clásico: Misil V1

- El sistema de guía de la V-1 (venganza 1) usaba un control simple para regular la altura y velocidad.
- Un sistema de péndulo con peso daban una medida de la posición horizontal para controlar el ángulo de inclinación
- Un compas Gyromagnético inicializado en el hangar antes de despegar daba una realimentación para controlar el cabeceo y alabeo.
- La distancia al blanco se estimaba de forma aproximada y la determinación de cuando se había alcanzado se hacía mediante un cronómetro.





Control Clásico

- En la segunda guerra mundial el control por realimentación se convirtió en una cuestión de supervivencia:
  - ✓ Control naval
  - ✓ Radar
  - ✓ Sistema de control de armas
  - ✓ Aviones de guerra
- Después de la segunda guerra el conocimiento de control se empieza a usar en aplicaciones civiles
  - ✓ Industria
  - ✓ Aplicaciones domestica
  - ✓ Aviación civil

Teoría de control clásico: Limitaciones

- El dominio frecuencial es apropiado para sistemas lineales invariantes en el tiempo y una entrada/una salida (SISO).
- Limitaciones para tratar no linealidades.
- Se necesitan descripciones mas apropiadas para problemas complejos de control multivariable.
- No se considera condiciones iniciales de la variable a controlar y de las variables internas

La tendencia de control moderna contrasta con la teoría de control convencional en que su formulación es aplicable a sistemas de múltiples-entradas, múltiples-salidas, que pueden ser lineales o no lineales, invariables en el tiempo o variables en el tiempo, mientras que la teoría convencional sólo es aplicable a sistemas de una entrada-una salida invariantes en el tiempo. Además, la teoría de control moderna es esencialmente una aproximación en el dominio temporal, mientras que la teoría de control convencional es una aproximación en el dominio de la frecuencia compleja

Teoría de control Moderno: años 60´s

- (1957) Rusia lanza su primer satélite orbital. Se obtienen avances significativos en control no lineal

- (1893-1960) Lyapunov: caracterización de la estabilidad de sistemas no lineales.
- (1948), Ivachenko: principios del control por relé.
- (1960), Popov – Criterios de estabilidad para sistemas híbridos Lineales-No lineales (criterio del círculo)

Las ecuaciones diferenciales se usan como herramientas matemáticas

Teoría de control Moderno: años 60´s

- Diferentes aproximaciones a la teoría de control
  - ✓ Control óptimo (Bellman, Pontryagin)
  - ✓ Teoría de observadores(Kalman, Bleltram)
- Se introduce la descripción matricial (Espacio de estados)

- Se usa un filtro de Kalman para obtener datos de navegación en el primer aterrizaje en la luna.

Teoría de control Moderno: años 60´s

- Extensiones al control no lineal
- Zames, Narendra, Desoer
  - ✓ Aplicación de estos resultados al estudio de la distorsión no lineal en lazos de control con restricciones, control de procesos no lineales, robótica…
- Finales 60's – 70's Primer microprocesador

Control Moderno

- Teoría de los sistemas muestreados adaptados a los nuevos.
- Desde los 70's hasta ahora, la Teoría del control sigue creciendo. Aparecen nuevos problemas y retos:
  - ✓ Control Robusto
  - ✓ Control Adaptativo
  - ✓ Control Predictivo
- En la actualidad la Tecnología de Control es fundamental

Introducción

- La teoría de control emplea dos técnicas de modelamiento de sistemas físicos, los cuales son:

1. Técnica basada en la Función de Transferencia (FT):

   Aquí se emplea una descripción de entrada-salida del sistema.

- En estos casos, se emplean métodos de análisis y diseño como: diagrama de bode, LGR, Routh-Hurwitz, etc.

Introducción

- La descripción de sistemas mediante la función de transferencia tiene las siguientes limitaciones:
  - ✓ No proporciona información sobre la estructura física del sistema.
  - ✓ Solo es válida para sistemas lineales con una entrada y una salida e invariantes en el tiempo.
  - ✓ No proporciona información de lo que pasa dentro del sistema.
  - ✓ Se necesita que las condiciones iniciales del sistema sean nulas.

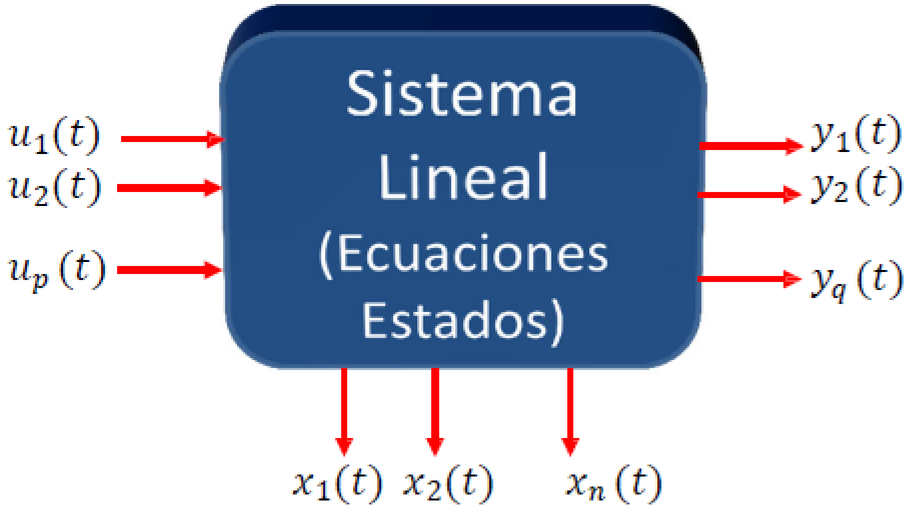
Introducción

- Aunque en muchos sistemas es posible aceptar esas limitaciones, se puede trabajar sobre un punto de operación, linealizando y utilizando las ventajas de la transformada de Laplace.
- Sin embargo otros sistemas son tan complejos que no es posible utilizar este enfoque. Para este tipo de sistemas se utiliza la representación en espacio de estado.
- Existen sistemas, los cuales: presentan no linealidades, pueden tener más de una entrada o salida, sus parámetros cambian en el tiempo y sus condiciones iniciales no siempre tienen un valor de cero.

Introducción

2. Técnica basada en Ecuaciones de Estado

Aquí se emplea una descripción de los estados internos del sistema, la cual incluye la relación de entrada-salida



- En estos casos, se emplean métodos de análisis y diseño como: ubicación de polos

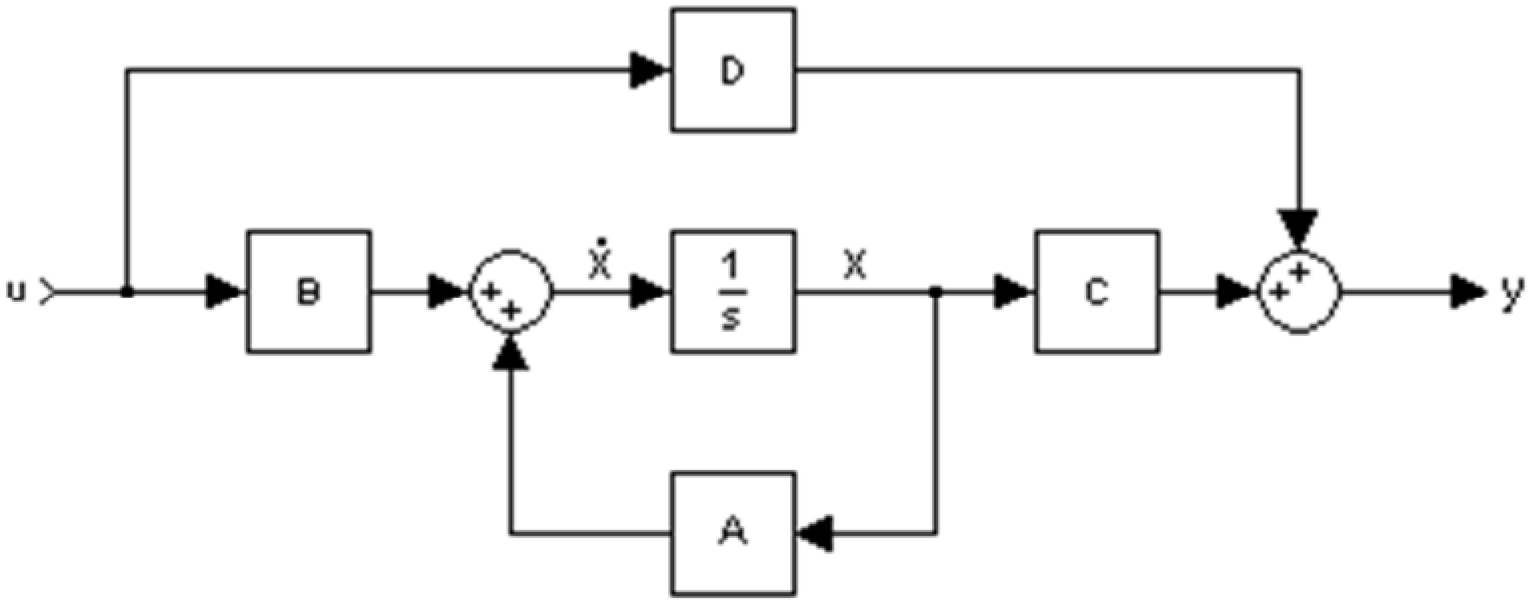
Introducción

- La representación es espacio de estado presenta las siguientes ventajas:
  - ✓ Aplicable a sistemas lineales y no lineales.
  - ✓ Permite analizar sistemas de más de una entrada o más de una salida.
  - ✓ Pueden ser sistemas variantes o invariantes en el tiempo.
  - ✓ Las condiciones iniciales pueden ser diferentes de cero.
  - ✓ Proporciona información de lo que pasa dentro del sistema.

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

$$y = Cx + Du$$

Concepto de Estado

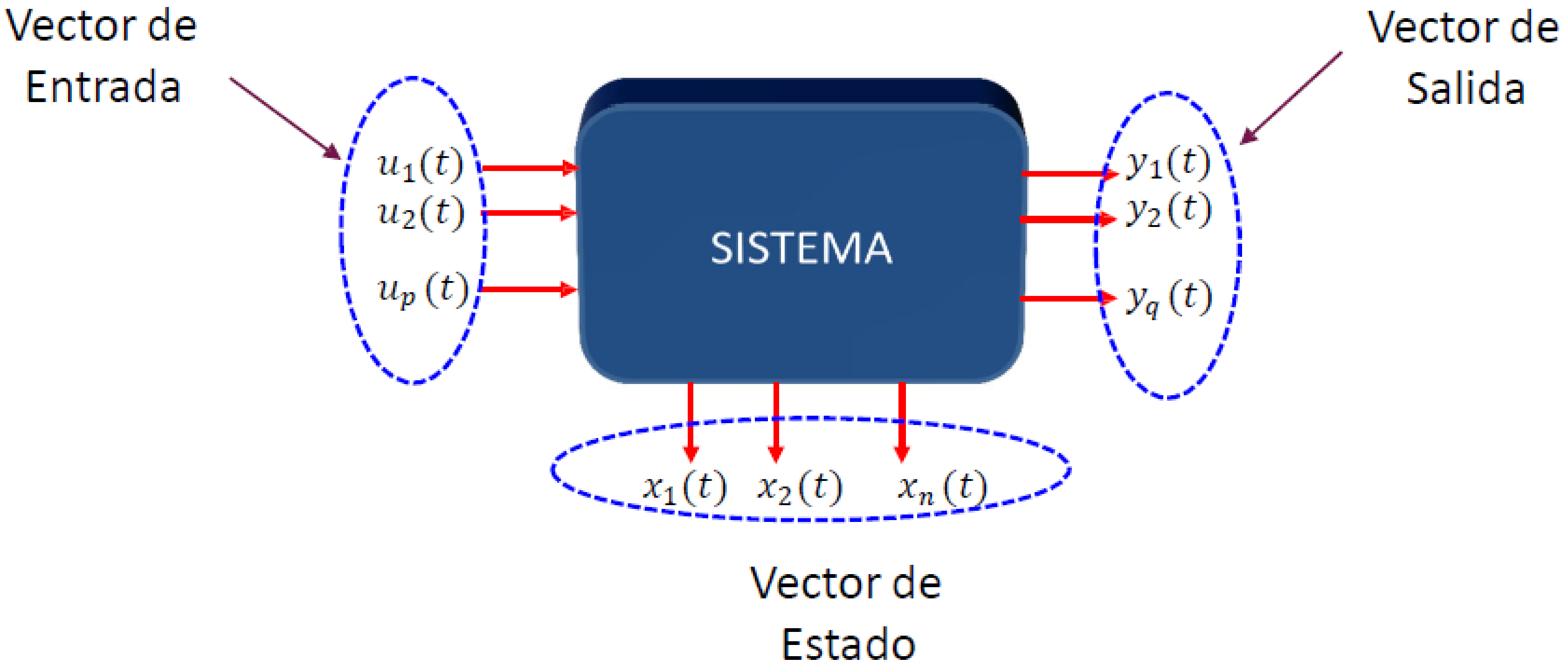


Variables de sistema

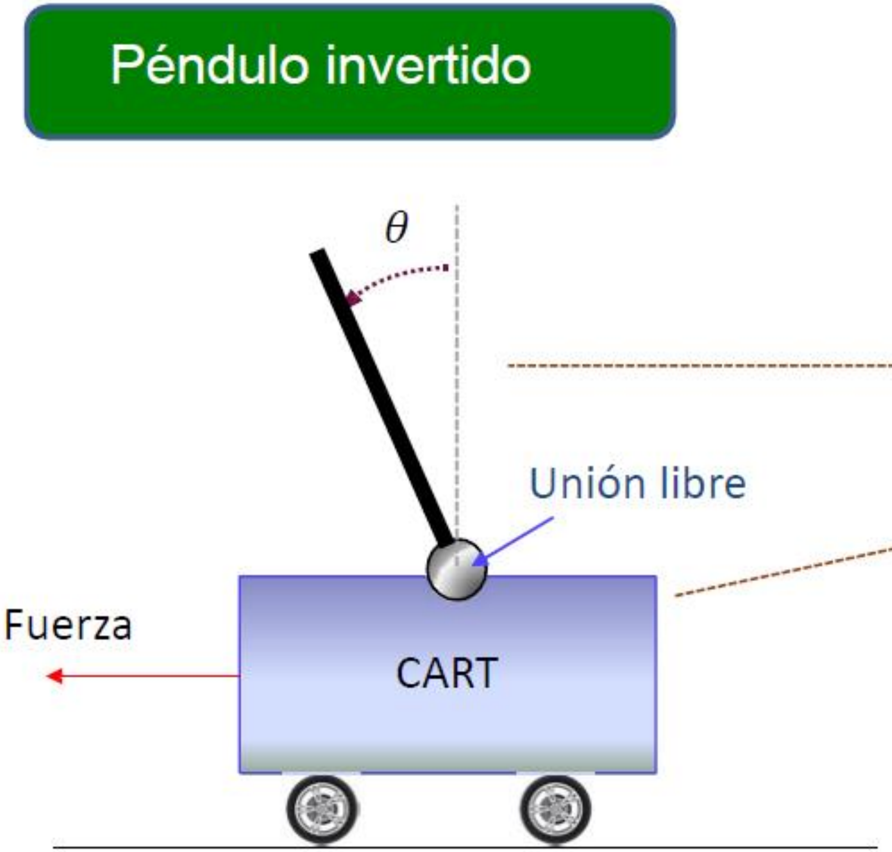
- En un SISTEMA existen tres conjuntos de variables:
  - ✓ Las variables de entrada: $u_1(t), u_2(t) \ldots u_m(t)$ son las entradas al sistema los cuales provienen de fuentes externas.
  - ✓ Las variables de salida: $y_1(t), y_2(t) \ldots y_r(t)$ son las respuestas del sistema (a las entradas ó c.i.), las cuales pueden ser medidas por algún medio físico.

Variables de sistema

✓ Las variables de estado: $x_1(\mathrm{t})$, $x_2(t)$ …. $x_n(t)$ es el conjunto <u>linealmente independiente</u> de variables que se emplean para especificar el **estado** de un sistema.

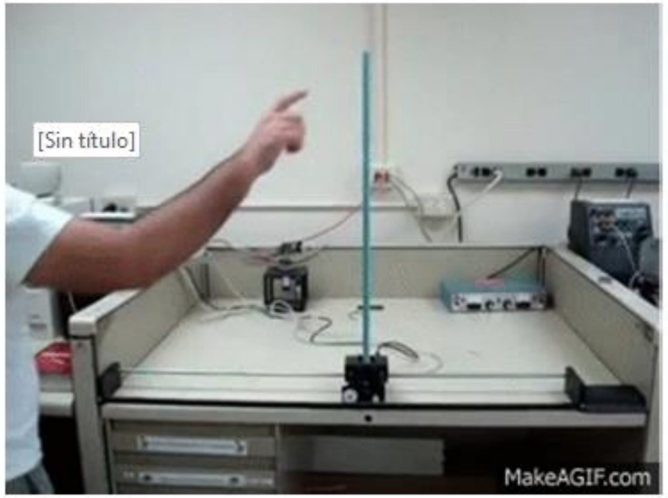


Variables de sistema: Estados



Estado

- ✓ Ángulo del péndulo
- ✓ Velocidad angular del péndulo
- ✓ Posición del carro
- ✓ Velocidad del carro



Variables de sistema: Estados

$$\text{Vector de estado} = [x \;\; \dot{x} \;\; \theta \;\; \dot{\theta}]$$

- El espacio de estado es el conjunto de todos los posibles valores del vector de estado
- El vector de estado es un vector desde el origen del espacio de estados hasta el estado actual del sistema

Definición: Estado

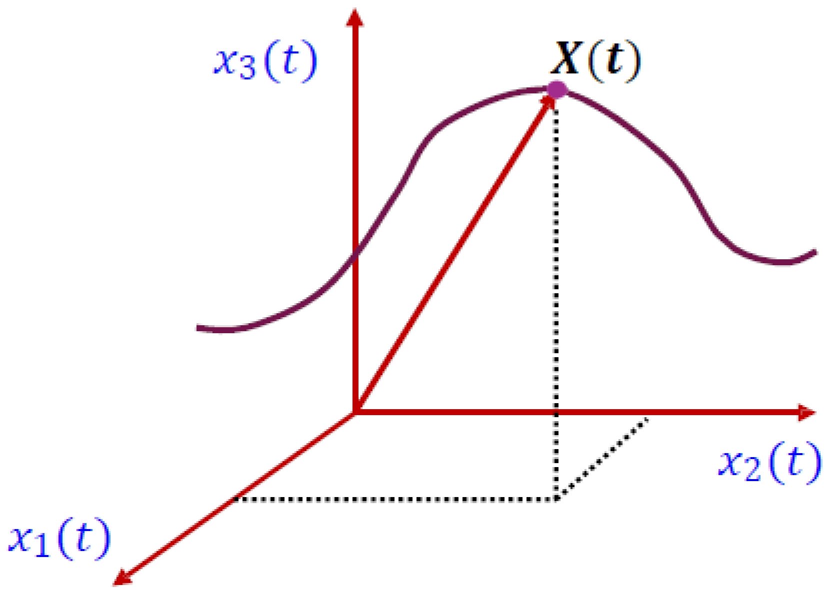
- El estado de un sistema dinámico es el conjunto mínimo de variables (llamadas v*ariables de estado*), de forma que el conocimiento de estas variables en $t= t_0$, junto con el conocimiento de la entrada para $t \geq t_0$, determinan completamente el comportamiento del sistema en cualquier $t \geq t_0$.
- Obsérvese que el concepto de estado no está limitado a sistemas físicos. Es aplicable a sistemas biológicos, sistemas económicos, sistemas sociales y otros.

Definición: Variable de Estado

- El conjunto de variables de estado que define un sistema no es único.
- El número de variables de estado de un sistema es único y determina el orden del sistema.

Definición: Espacio de estados

- Espacio de estados, es el espacio matemático de dimensión ´n´, cuyas coordenadas son las variables de estado.
- Por lo tanto, en cualquier instante, el ESTADO DEL SISTEMA está representado por un ‘punto’ en el espacio de estado.

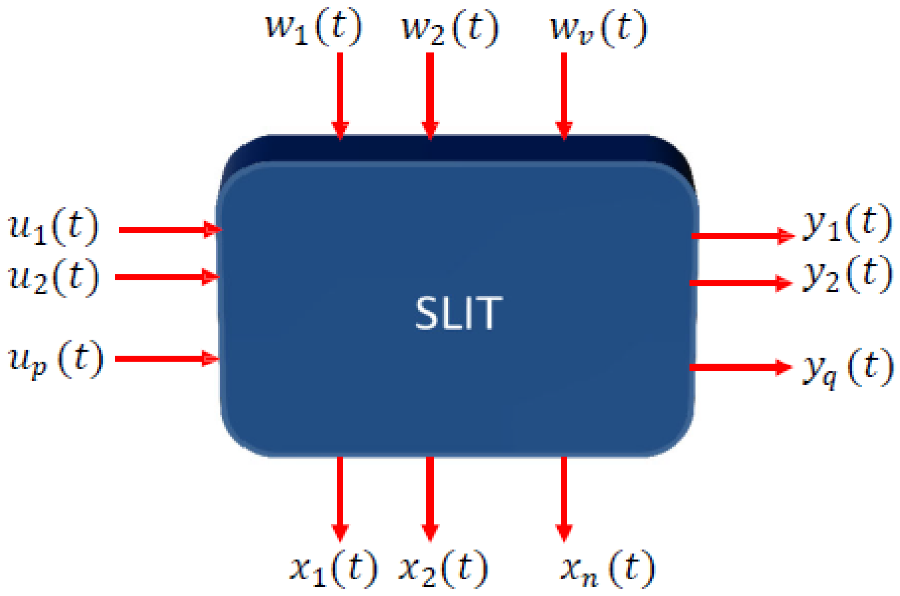


Definición: Modelo de Espacio de Estados

- Es un modelo matemático que representa el comportamiento dinámico de un sistema, en el cual se incluye la evolución de las variables internas.
- Este modelo no solo se aplica a SLIT (sistemas lineales invariantes en el tiempo) sino también a SNL (sistemas no lineales), SVT (sistemas variantes en el tiempo) y otros sistemas complejos de control.

Definición: Ecuaciones de Estados

- Es el conjunto de ecuaciones diferenciales de 1er orden que representa el modelo de estado de un sistema.
- El número de ecuaciones diferenciales de primer orden en el modelo es igual al orden del sistema modelado.
- Un sistema lineal invariante en el tiempo dinámico puede ser representado por su modelo de estados:

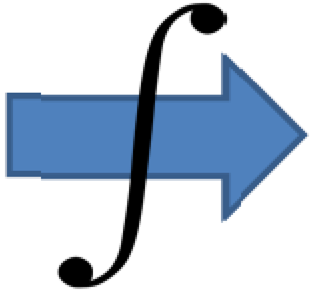


Definición: Ecuaciones de Estados

- ¿Por qué ecuaciones diferenciales de 1er orden?

- El sistema dinámico debe contener elementos que recuerden los valores de la entrada para $t \geq t_1$. Puesto que los integradores en un sistema de control en tiempo continuo sirven como dispositivo de memoria, las salidas de tales integradores se pueden considerar como las variables que describen el estado interno del sistema dinámico.
- Así las salidas de los integradores sirven como variables de estado. El número de variables de estado para definir completamente la dinámica del sistema es igual al número de integradores que aparezcan en el mismo.

$$
\begin{aligned}
\dot{x}_1(t) &= f_1(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n;\ u_1,\ u_2,\ \ldots,\ u_r;\ t) \\
\dot{x}_2(t) &= f_2(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n;\ u_1,\ u_2,\ \ldots,\ u_r;\ t) \\
&\vdots \\
\dot{x}_n(t) &= f_n(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n;\ u_1,\ u_2,\ \ldots,\ u_r;\ t)
\end{aligned}
$$



$$
\begin{aligned}
y_1(t) &= g_1(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n;\ u_1,\ u_2,\ \ldots,\ u_r;\ t) \\
y_2(t) &= g_2(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n;\ u_1,\ u_2,\ \ldots,\ u_r;\ t) \\
&\vdots \\
y_m(t) &= g_m(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n;\ u_1,\ u_2,\ \ldots,\ u_r;\ t)
\end{aligned}
$$

Definición: Modelo de Estados

Modelo Estado

Ecuación de Estado

$$\frac{dx(t)}{dt} = f[x(t)\,, u(t)\,, w(t)] \Rightarrow \frac{d\boldsymbol{x}(t)}{dt} = A\boldsymbol{x}(t) + B\boldsymbol{u}(t) + E\boldsymbol{w}(t)$$

Ecuación de Salida

$$y(t) = g[x(t)\,, u(t)\,, w(t)\ ] \Rightarrow \boldsymbol{y}(t) = C\boldsymbol{x}(t) + D\boldsymbol{u}(t) + H\boldsymbol{w}(t)$$

$x(t)$: Vector de estado *n*x1
$u(\mathrm{t})$: vector de entrada *p*x1
Y(t) : Vector de salida *q*x1
$w(t)$: vector de perturbación *v*x1

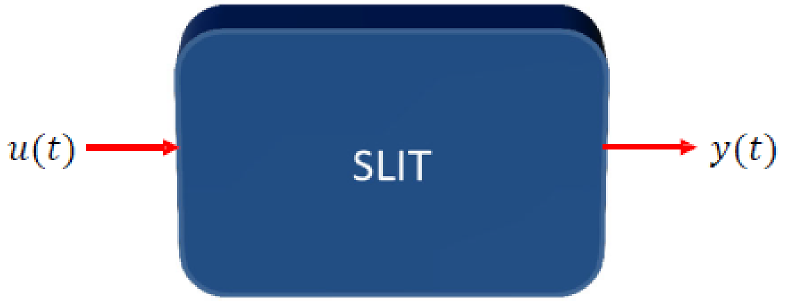
A : matriz del sistema: nxn
B : matriz de entrada: nxp
C : matriz de salida: qxn
D : matriz de acoplamiento: qxp
E : matriz: nxv
H : matriz: qxv

Definición: Modelo de Estados

- Donde A representa la matriz de estado del sistema, en la cual sus eigenvalores determinan su estabilidad y comportamiento dinámico.
- B representa la matriz de entrada la cual relaciona cada una de las entradas con los estados.
- C representa la matriz de salida del sistema, la cual relaciona las salidas con los estados siendo sus dimensiones
- D representa la matriz de entrada-salida la cual relaciona cada una de la r entradas con las m salidas con dimensiones m por r.
- El Vector de Estados $X(t)$ contiene las variables de estado del sistema.

Ejemplo de Ecuación de Estado

- Dada la ecuación diferencial de un sistema:



$$\frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_{n-1}\frac{d^{n-1}y(t)}{dt^{n-1}} + \cdots + a_1\frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t) = u(t) \qquad (1)$$

- Para esta ecuación se define:

$$x_1(t) = y(t)$$

$$x_2(t) = \frac{dy(t)}{dt}$$

$$x_n(t) = \frac{d^{n-1}y(t)}{dt^{n-1}}$$

Ejemplo de Ecuación de Estado

- Así la ecuación (1) de *n-esimo* orden se descompone en:

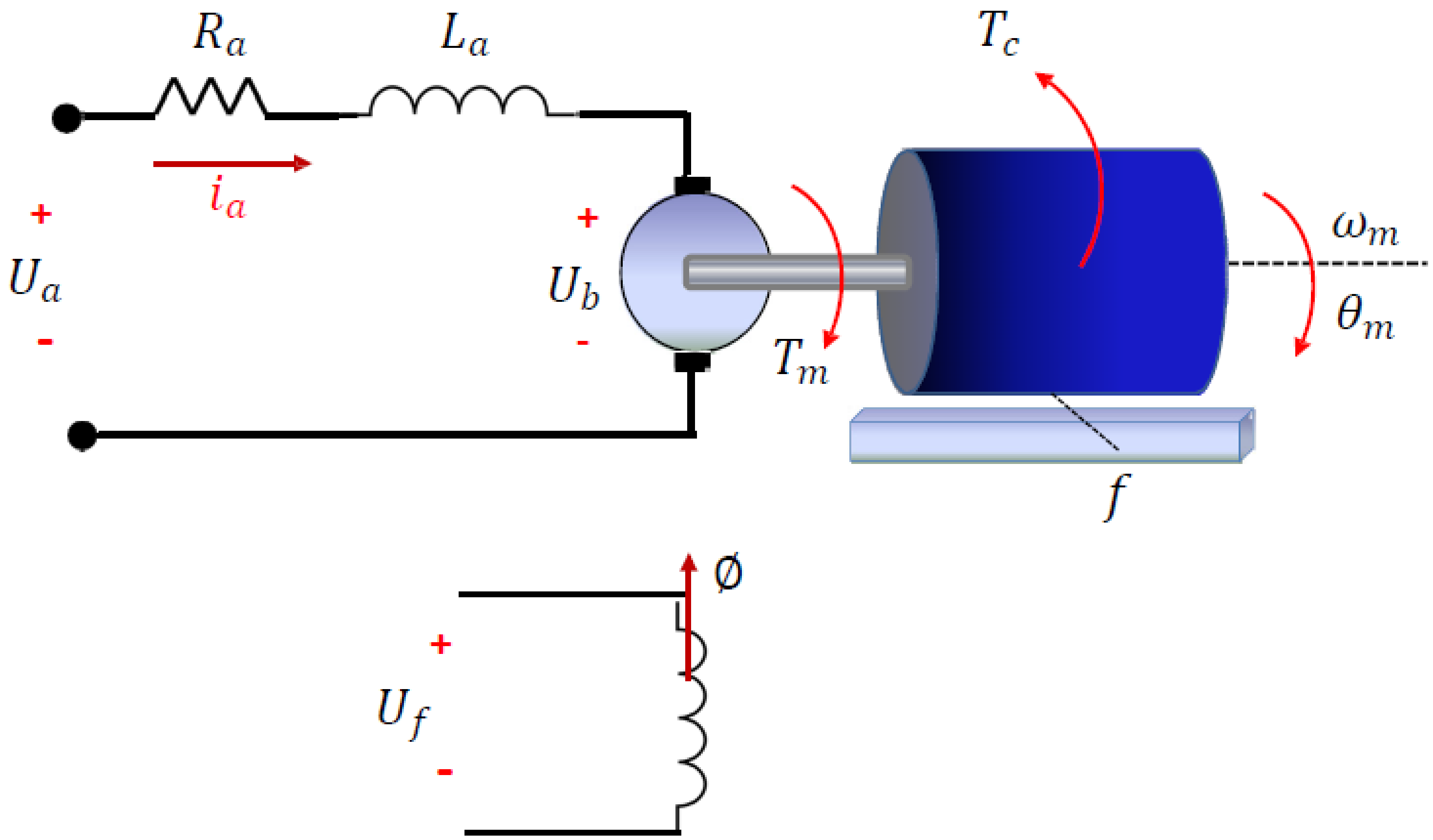
$$\frac{dx_1(t)}{dt} = x_2(t)$$

$$\frac{dx_2(t)}{dt} = x_3(t)$$

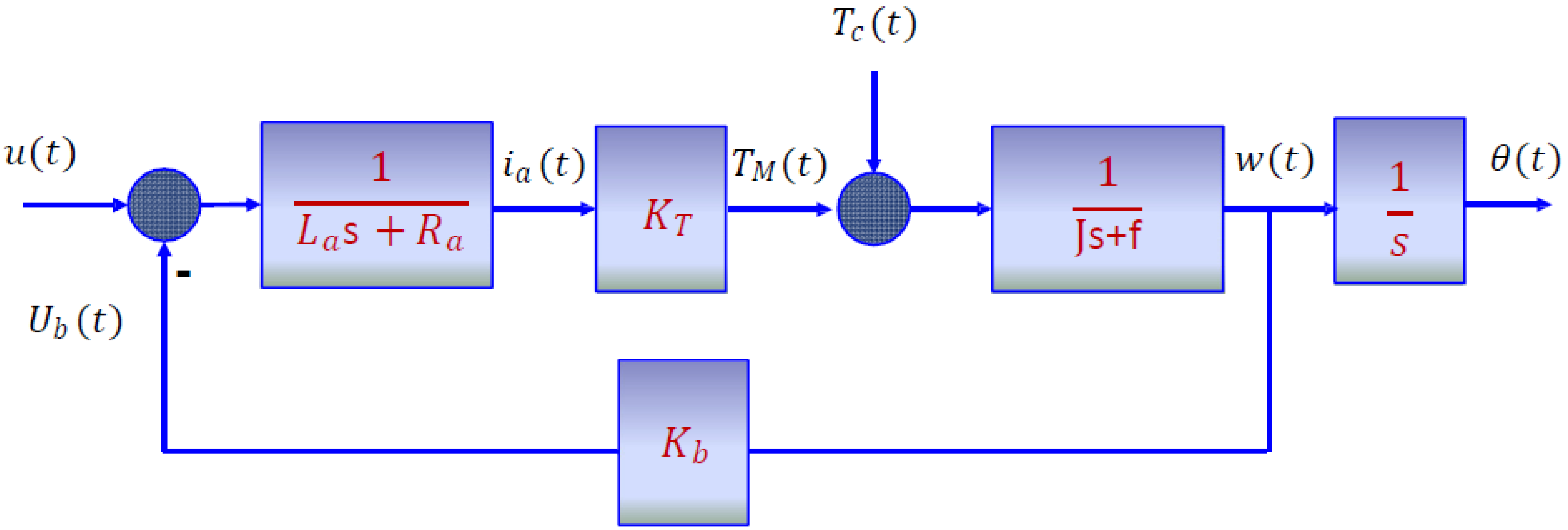
$$\frac{dx_n(t)}{dt} = -a_0 x_1(t) - a_1 x_2(t) - \cdots - a_{n-2} x_{n-1}(t) - a_{n-1} x_n(t) + u(t)$$

- Estas n ecuaciones diferenciales de 1er orden son las ecuaciones de estado del sistema.

Ejemplo 1



Ejemplo 1



$$u_a(t) = R_a i_a(t) + L_a \frac{di_a(t)}{dt} + u_b(t)$$

$$u_b(t) = K_b \omega\,(t)$$

$$T_m(t) - T_c(t) - f\omega(t) = J\,\frac{d\omega(t)}{dt}$$

$$T_m(t) \quad = K_T i_a(t)$$

Ejemplo 1

Define 3 variables de estado:

$$x_1(t) = i_a(t)$$

$$x_2(t) = \omega(t)$$

$$x_3(t) = \theta(t)$$

Define 2 variables de entrada:

$$u_a(t)$$

$$T_c(t)$$

$$\frac{dx_1(t)}{dt} = -\frac{R_a}{L_a}x_1(t) - \frac{K_b}{L_a}x_2(t) + \frac{u_a(t)}{L_a}$$

$$\frac{dx_2(t)}{dt} = -\frac{K_T}{J}x_1(t) - \frac{f}{J}x_2(t) + \frac{T_c(t)}{J}$$

$$\frac{dx_3(t)}{dt} = x_2(t)$$

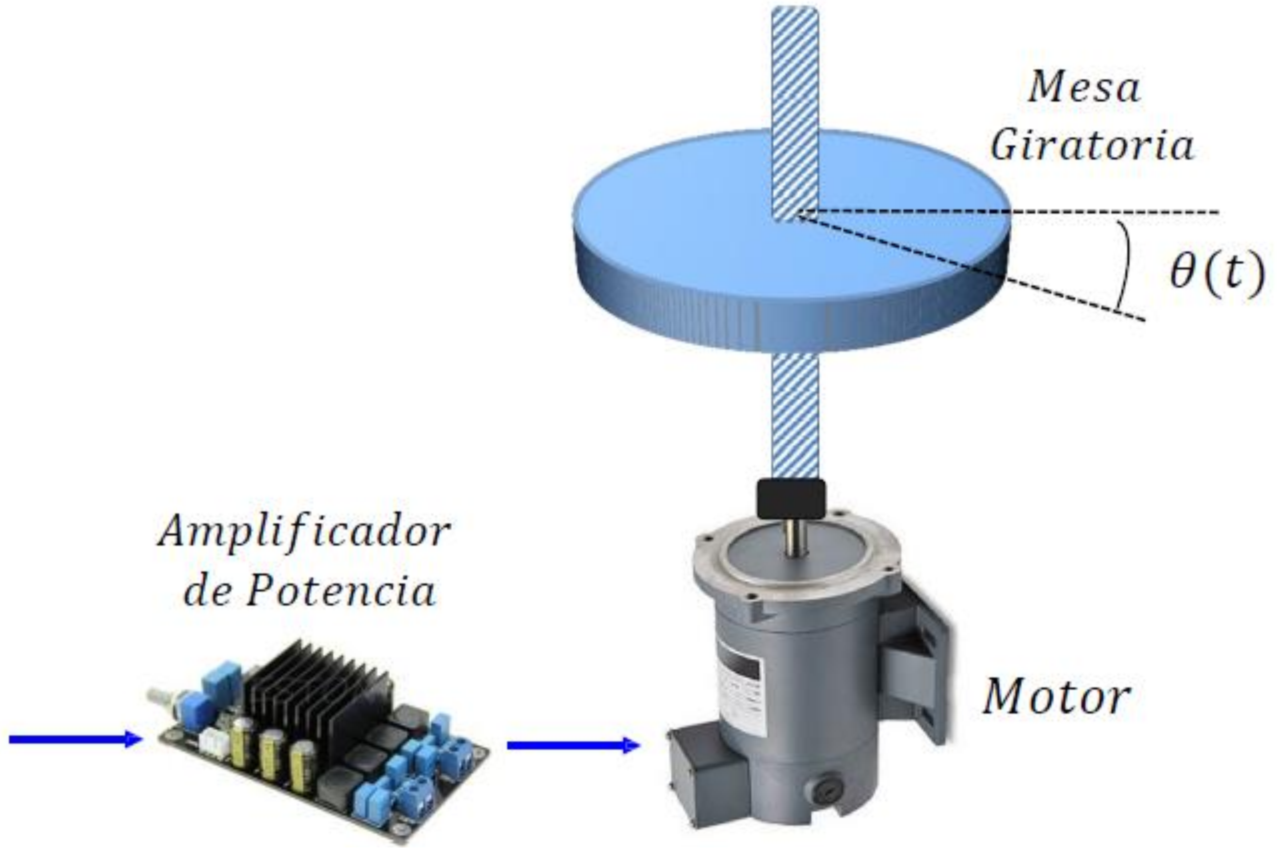
Ejemplo 1

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{R_a}{L_a} & -\frac{K_b}{L_a} & 0 \\ \frac{K_T}{J} & -\frac{f}{J}x_2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{L_a} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{-1}{J} \\ 0 \end{bmatrix} Tc(t)$$

$$y(t) = [0 \quad 0 \quad 1] \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix}$$

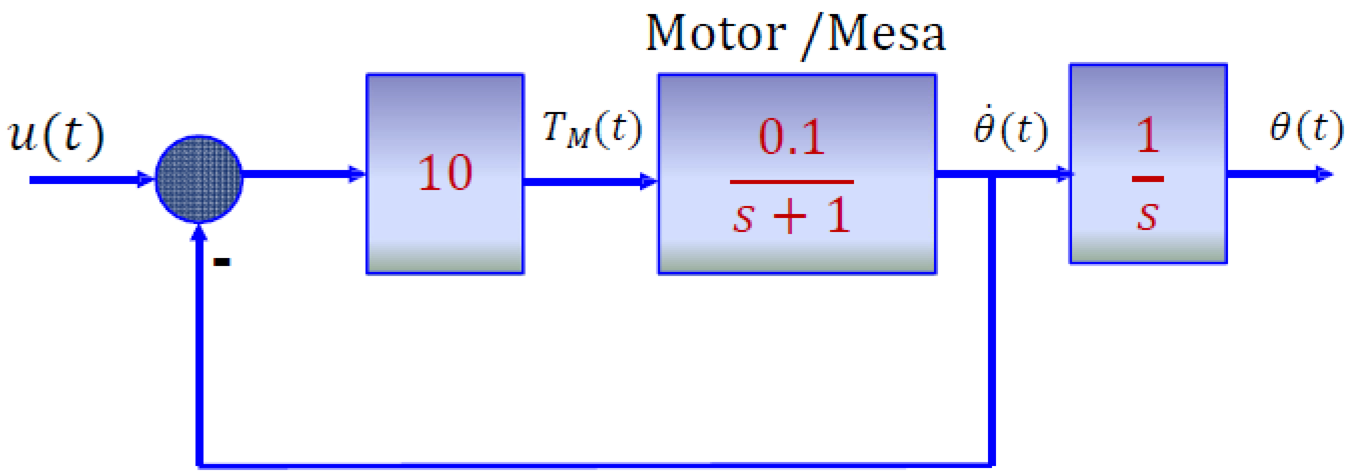
Ejemplo 2

- Determinar el modelo de estado de una mesa giratoria:



Ejemplo 2

- Cuyo diagrama de bloques del control viene dado por:



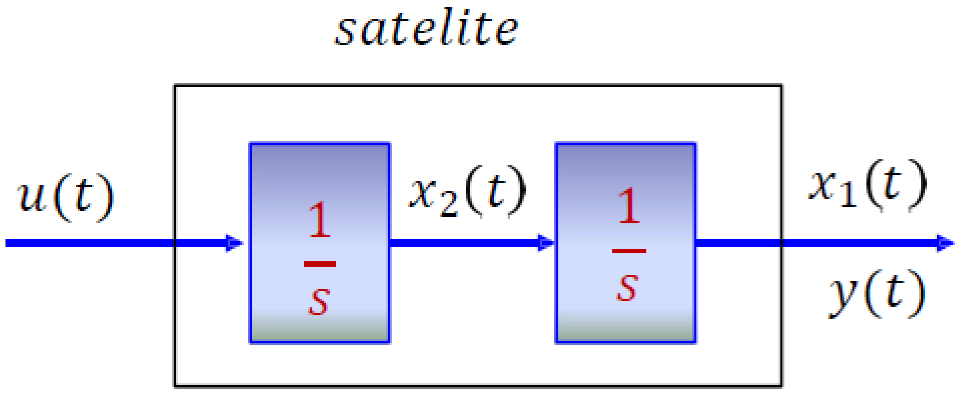
- Elegir como variables de estado:

$$x_1 = \theta$$

$$x_2 = \dot{\theta}$$

Ejemplo 3

- Se tiene el siguiente sistema:

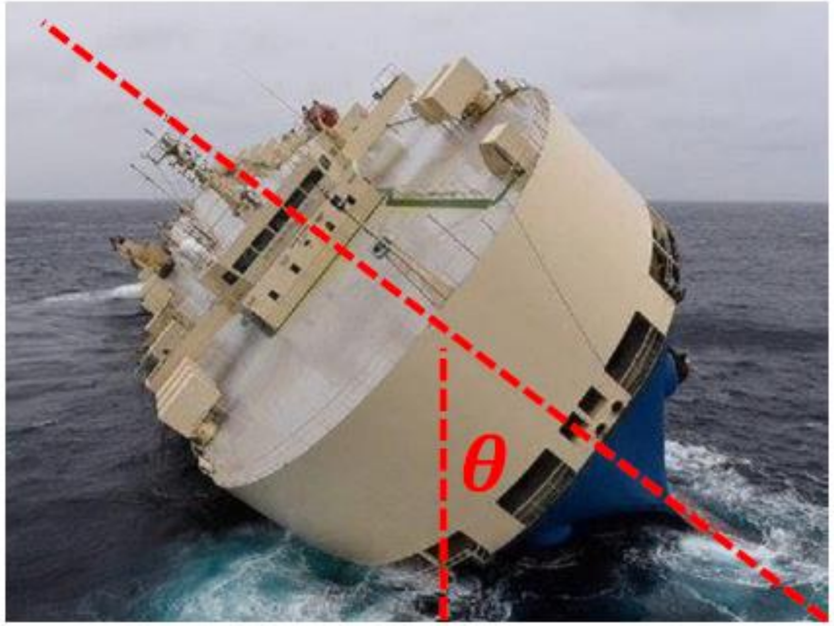


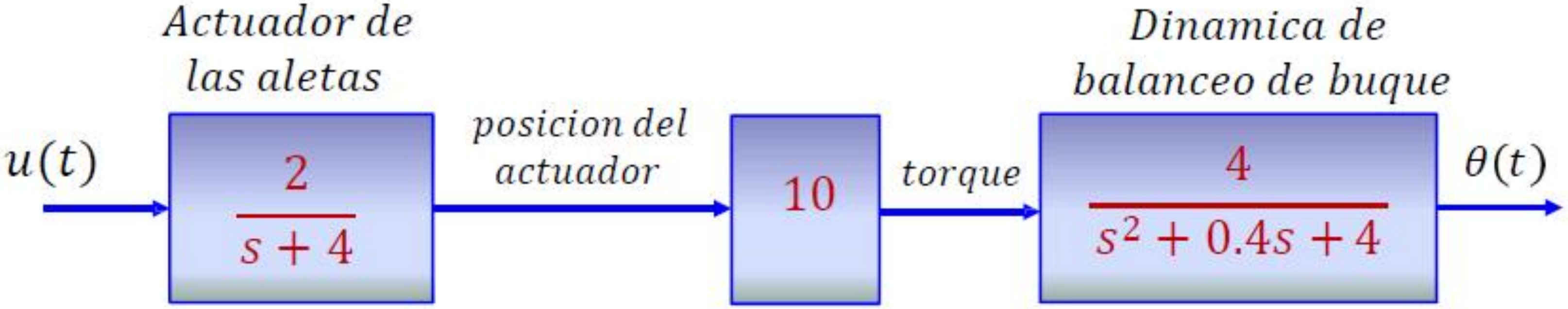
- Las ecuaciones estado son:

$$x(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

Ejemplo 4

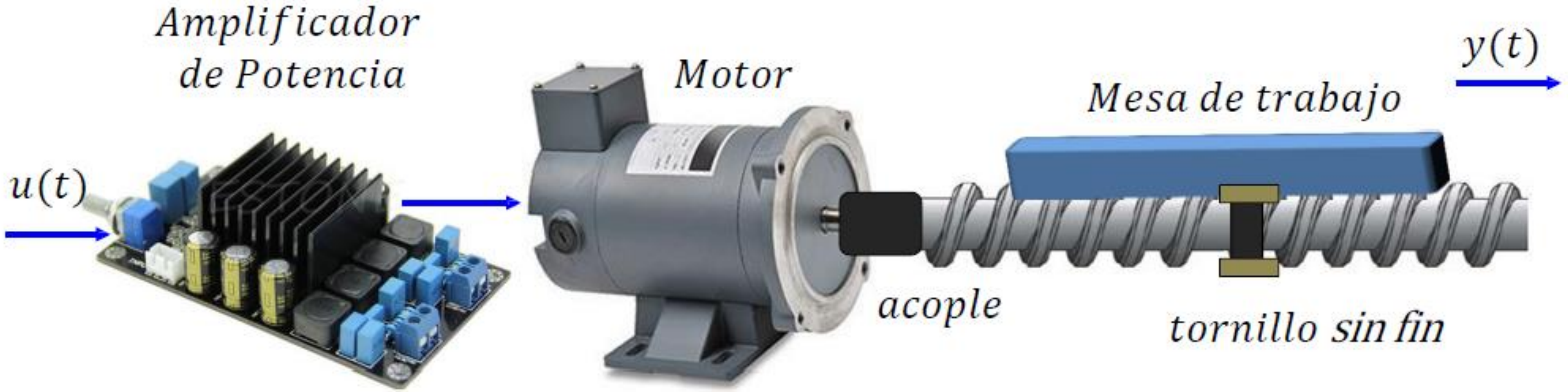
- Obtener el modelo de espacio de estado del sistema:



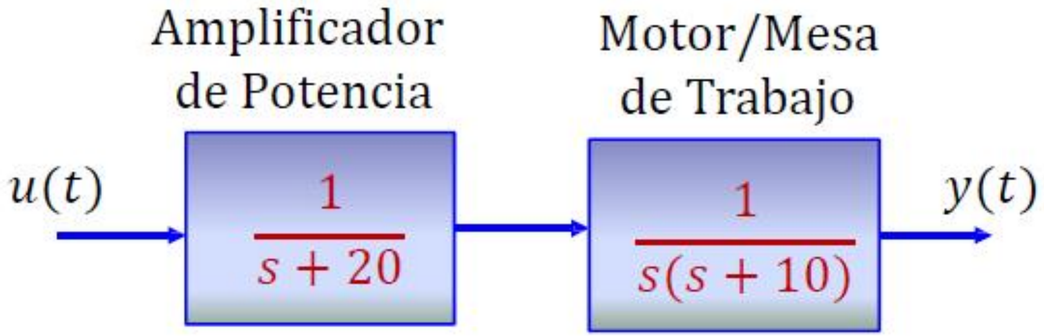


Ejemplo 5

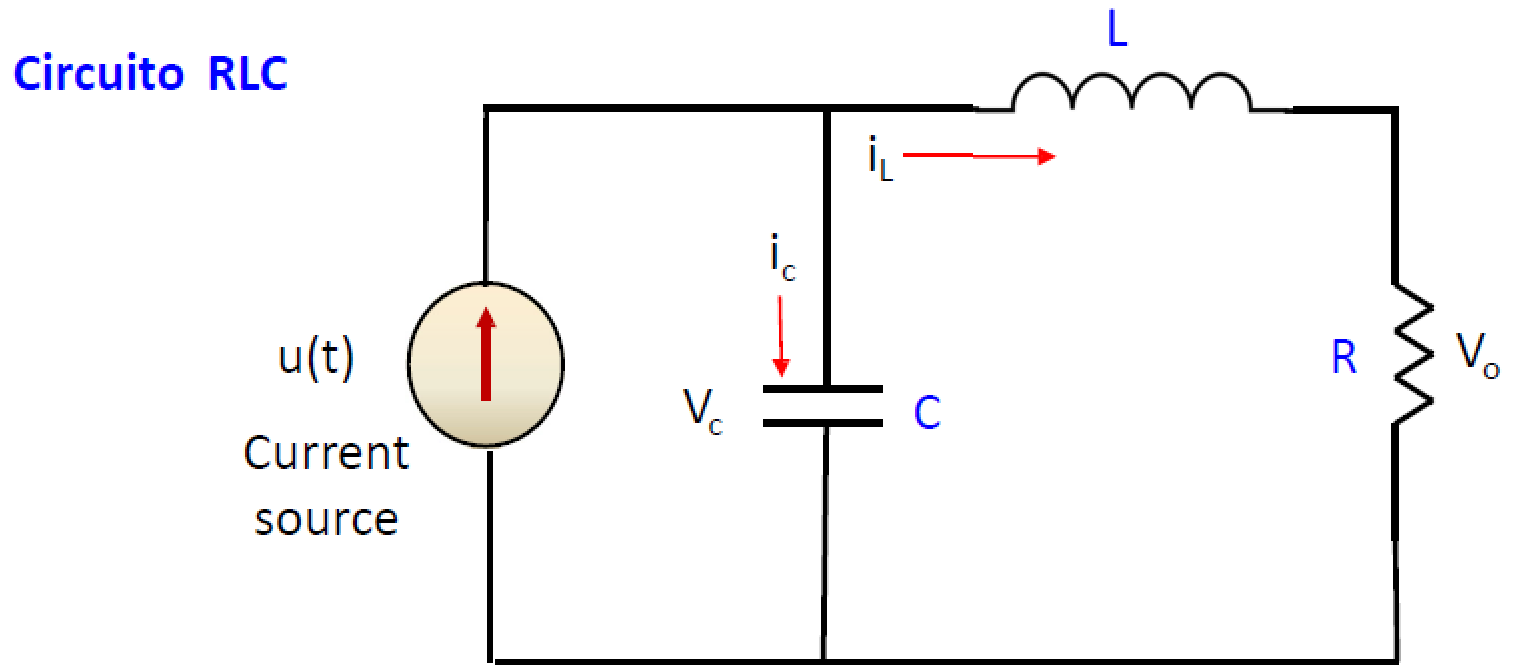
- Un sistema de posicionamiento de una mesa de trabajo se activa en cada eje mediante un motor y tornillo regulador



- Cuyo diagrama de bloques viene dado por:



Ejemplo: Circuito RLC



- El estado de este sistema puede ser descrito en términos de un conjunto de variables de estado $[x_1\ x_2]$, donde x_1 es el voltaje del capacitor $V_C\ (t)$ y x_2 es igual a la corriente del inductor $i_L(\mathrm{t})$.

Ejemplo: Circuito RLC

- Esta elección de las variables de estado es intuitivamente satisfactoria debido a que la energía almacenada de la red se puede describir en términos de estas variables.

- Por lo tanto $x_1(t_0)$ *y* $x_2(t_0)$ representan la energía total inicial de la red y por lo tanto el estado del sistema en $t = t_0$.

Ejemplo: Circuito RLC

- Según la ley de corriente eléctrica de **Kirchhoff**, se obtiene una ecuación diferencial de primer orden:

$$i_c(t) = C\frac{dv_c(t)}{dt} = u(t) - i_L(t)$$

- Voltaje de Kirchhoff para el bucle de la derecha proporciona la ecuación que describe la tasa de cambio de corriente del inductor:

$$L\frac{di_L(t)}{dt} = -Ri_L(t) + v_c$$

- La salida del sistema se representa por la ecuación algebraica lineal:

$$v_o = Ri_L(t)$$

Ejemplo: Circuito RLC

- Podemos escribir las Ecuaciones como un conjunto de dos Ecuaciones diferenciales de primer orden en cuanto a las Variables de Estado $\boldsymbol{x_1}$ $[V_C\ (t)]$ y $\boldsymbol{x_2}$ $[i_L(\mathrm{t})]$ de la siguiente manera:

$$C\frac{dv_c(t)}{dt} = u(t) + i_L(t) \longrightarrow \frac{dx_1(t)}{dt} = -\frac{1}{C}x_2(t) + \frac{1}{C}u(t)$$

$$L\frac{di_L(t)}{dt} = -Ri_L(t) + v_c(t) \longrightarrow \frac{dx_2(t)}{dt} = -\frac{1}{L}x_1(t) - \frac{R}{L}x_2(t)$$

La señal de salida ***(output signal)*** es definida por :

$$y_1(t) = v_o(t) = Rx_2(t)$$

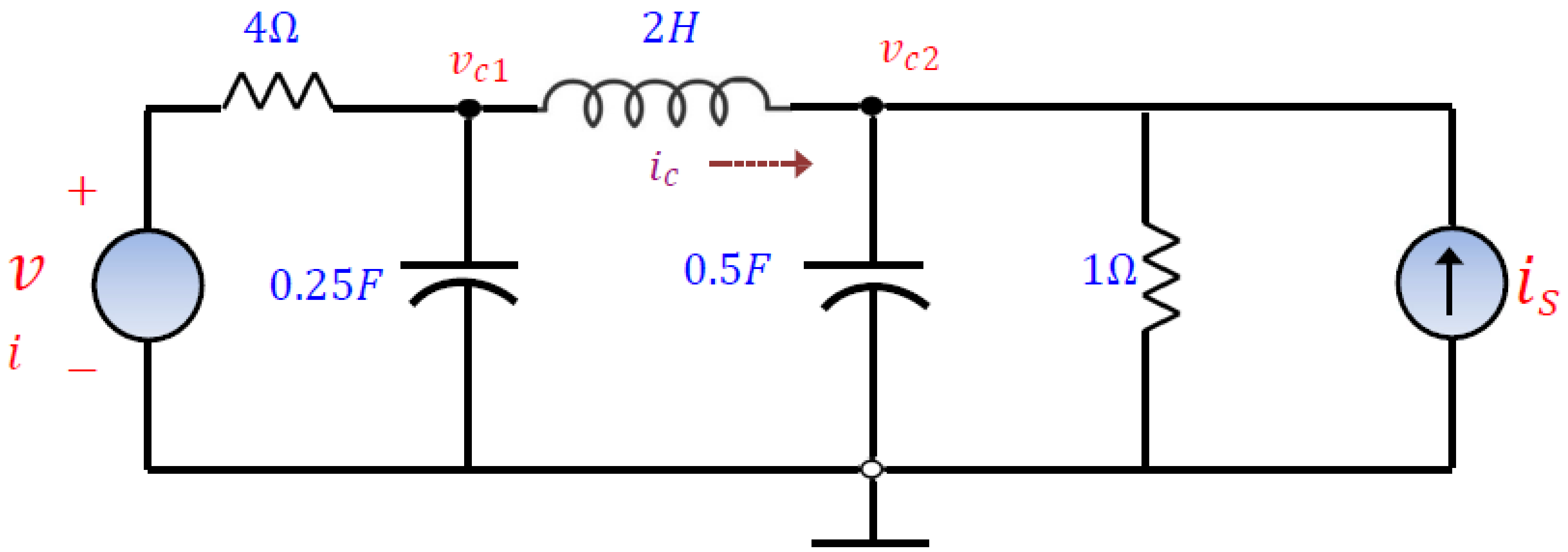
- Utilizando las ecuaciones diferenciales de primer orden y las condiciones iniciales de la red representados por $\boldsymbol{x_1(t_0)}$ $\boldsymbol{y}$ $\boldsymbol{x_2(t_0)}$, podemos determinar el futuro del sistema y su salida.

Ejemplo: Circuito RLC

- Las variables de estado que describen un sistema no son un conjunto único, y varios conjuntos alternativos de variables de estado pueden ser elegidos.
- Para el **circuito** RLC, podríamos elegir el conjunto de variables de estado como los dos voltajes, $v_c(t)$ y $v_L(t)$.

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{C} \\ \frac{1}{L} & -\frac{R}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{C} \\ 0 \end{bmatrix} u(t) \qquad y = \begin{bmatrix} 0 & R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Ejemplo: Circuito eléctrico



- Las variables de estado están directamente relacionadas con los elementos de almacenamiento de energía de un sistema. ('energy storage system')

Ejemplo: Circuito eléctrico

Variables de Estado: $v_{c1}(t)$, $v_{c2}(t)$, $i_L(t)$

- Parece, por lo tanto, que el número de condiciones iniciales independientes es igual al número de elementos de almacenamiento de energía.

Ejemplo: Circuito eléctrico

- Ecuaciones de Nodo

$$0.25\frac{dv_{c1}}{dt} + i_L + \frac{v_{c1} - v_i}{4} = 0 \quad \Rightarrow \quad v_c = -v_{c1} - 4i_L + v_i$$

$$0.5\frac{dv_{c2}}{dt} - i_L + \frac{v_{c2}}{1} - i_s = 0 \quad \Rightarrow \quad v_{c2} = 2i_L - 2v_{c2} + 2i_s$$

- Ecuaciones de lazo cerrado

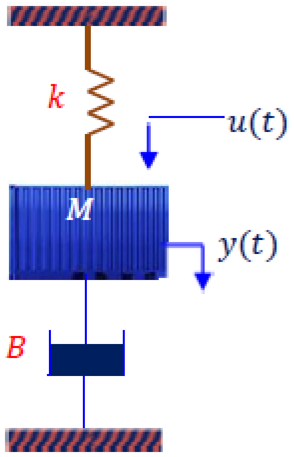
$$2\frac{di_L}{dt} + v_{c2} - v_{c1} = 0 \quad \Rightarrow \quad i_L = 0.5v_{c1} - 0.5v_{c2}$$

$$\begin{bmatrix} v_{c1} \\ v_{c2} \\ i_L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -4 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0.5 & -0.5 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{c1} \\ v_{c2} \\ i_L \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_i \\ i_s \end{bmatrix}$$

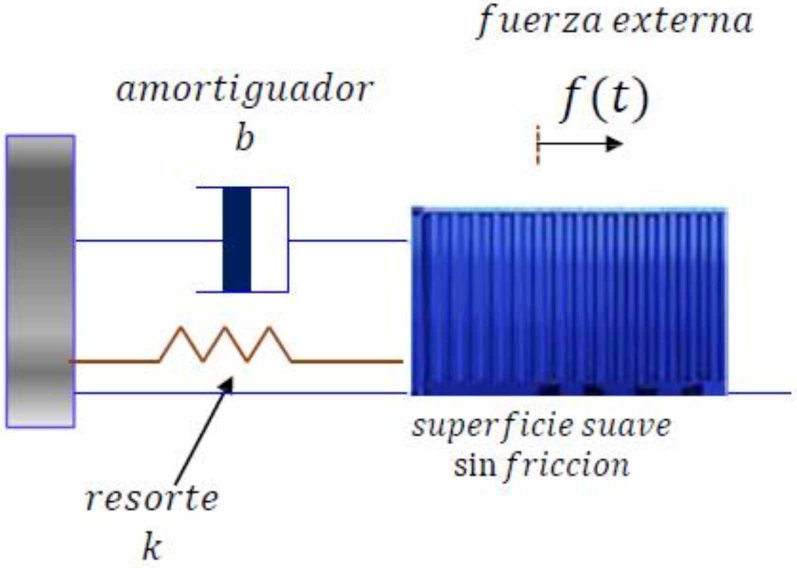
Ejemplo: sistema Mecánico

- Represente por medio de espacio de estado el siguiente sistema Mecánico, donde:

  $r(t)$ es la fuerza aplicada, k es la constante del resorte, b es el coeficiente de fricción viscosa. La fuerza del resorte se considera proporcional a la posición y la fuerza del amortiguador es proporcional a la velocidad, $y(t)$ es la posición de la masa.



Ejemplo: Sistema Masa-Resorte-Amortiguador



$$m\ddot{x}(t) + b\dot{x}(t) + kx(t) = f(t)$$

$$x_1 = x(t)$$
$$x_2 = \dot{x}(t)$$

$$\dot{x_1} = \dot{x}(t) = x_2$$

$$\dot{x_2} = \ddot{x}(t) = -\frac{k}{m}x_1 - \frac{b}{m}x_2 + -\frac{f}{m}$$

Modelo de Espacio de Estado

$$\begin{bmatrix} \dot{x_1} \\ \dot{x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{b}{m} \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix} f(t)$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Representación en el espacio de estado de sistemas de orden n representadas mediante ecuaciones diferenciales lineales

$$\overset{(n)}{y} + a_1 \overset{(n-1)}{y} + \cdots + a_{n-1}\dot{y} + a_n y = b_0 \overset{(n)}{u} + b_1 \overset{(n-1)}{u} + \cdots + b_{n-1}\dot{u} + b_n u \tag{2-33}$$

El problema principal al definir las variables de estado para este caso radica en los términos que están derivados. Las variables de estado deben ser de tal modo que eliminen las derivadas de u en la ecuación de estado.

Una forma de obtener una ecuación de estado y una ecuación de salida es definir las siguientes n variables como un conjunto de n variables de estado:

$$\begin{aligned}
x_1 &= y - \beta_0 u \\
x_2 &= \dot{y} - \beta_0 \dot{u} - \beta_1 u = \dot{x}_1 - \beta_1 u \\
x_3 &= \ddot{y} - \beta_0 \ddot{u} - \beta_1 \dot{u} - \beta_2 u = \dot{x}_2 - \beta_2 u \\
&\;\vdots \\
x_n &= \overset{(n-1)}{y} - \beta_0 \overset{(n-1)}{u} - \beta_1 \overset{(n-2)}{u} - \cdots - \beta_{n-2}\dot{u} - \beta_{n-1} u = \dot{x}_{n-1} - \beta_{n-1} u
\end{aligned} \tag{2-34}$$

Representación en el espacio de estado de sistemas de orden n representadas mediante ecuaciones diferenciales lineales

donde $\beta_0, \beta_1, \beta_2, ..., \beta_{n-1}$ se determinan a partir de

$$\begin{aligned}
\beta_0 &= b_0 \\
\beta_1 &= b_1 - a_1\beta_0 \\
\beta_2 &= b_2 - a_1\beta_1 - a_2\beta_0 \\
\beta_3 &= b_3 - a_1\beta_2 - a_2\beta_1 - a_3\beta_0 \\
&\vdots \\
\beta_{n-1} &= b_{n-1} - a_1\beta_{n-2} - \cdots - a_{n-2}\beta_1 - a_{n-1}\beta_0
\end{aligned} \tag{2-35}$$

Con esta elección de variables de estado está garantizada la existencia y unicidad de la solución de la ecuación de estado. (Obsérvese que esta no es la única elección de un conjunto de variables de estado.) Con la elección actual de variables de estado, se obtiene

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= x_2 + \beta_1 u \\
\dot{x}_2 &= x_3 + \beta_2 u \\
&\vdots \\
\dot{x}_{n-1} &= x_n + \beta_{n-1} u \\
\dot{x}_n &= -a_n x_1 - a_{n-1}x_2 - \cdots - a_1 x_n + \beta_n u
\end{aligned} \tag{2-36}$$

donde β_n está dado por

$$\beta_n = b_n - a_1\beta_{n-1} - \cdots - a_{n-1}\beta_1 - a_{n-1}\beta_0$$

Representación en el espacio de estado de sistemas de orden n representadas mediante ecuaciones diferenciales lineales

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1} \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \cdots & -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_{n-1} \\ \beta_n \end{bmatrix} u$$

$$y = [1 \quad 0 \quad \cdots \quad 0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \beta_0 u$$

Representación en el espacio de estado de sistemas de orden n representadas mediante ecuaciones diferenciales lineales en las que la función de entrada no contiene derivados

$$\boxed{\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_{n-1}s + a_n}} \longrightarrow \boxed{\overset{(n)}{y} + a_1 \overset{(n-1)}{y} + \cdots + a_{n-1}\dot{y} + a_n y = u} \tag{2.30}$$

Si se considera que el conocimiento de $y(0)$, $\dot{y}(0)$, ..., $\overset{(n-1)}{y}(0)$, junto con la entrada $u(t)$ para $t \geqslant 0$, determina totalmente el comportamiento futuro del sistema, se puede tomar $y(t)$, $\dot{y}(t)$, ..., $\overset{(n-1)}{y}(t)$ como un conjunto de n variables de estado. (Matemáticamente, tal elección de variables de estado es muy conveniente. Sin embargo, en la práctica, debido a que los términos que contienen las derivadas de orden superior no son exactos, por los efectos de ruido inherentes en cualquier situación práctica, tal elección de las variables de estado puede no ser conveniente.)

Si se define

$$\begin{aligned} x_1 &= y \\ x_2 &= \dot{y} \\ &\vdots \\ x_n &= \overset{(n-1)}{y} \end{aligned}$$

entonces, la Ecuación (2-30) se escribe como

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= x_3 \\ &\vdots \\ \dot{x}_{n-1} &= x_n \\ \dot{x}_n &= a_n x_1 - \cdots - a_1 x_n + u \end{aligned}$$

o bien

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u \tag{2-31}$$

Representación en el espacio de estado de sistemas de orden n representadas mediante ecuaciones diferenciales lineales en las que la función de entrada no contiene derivados

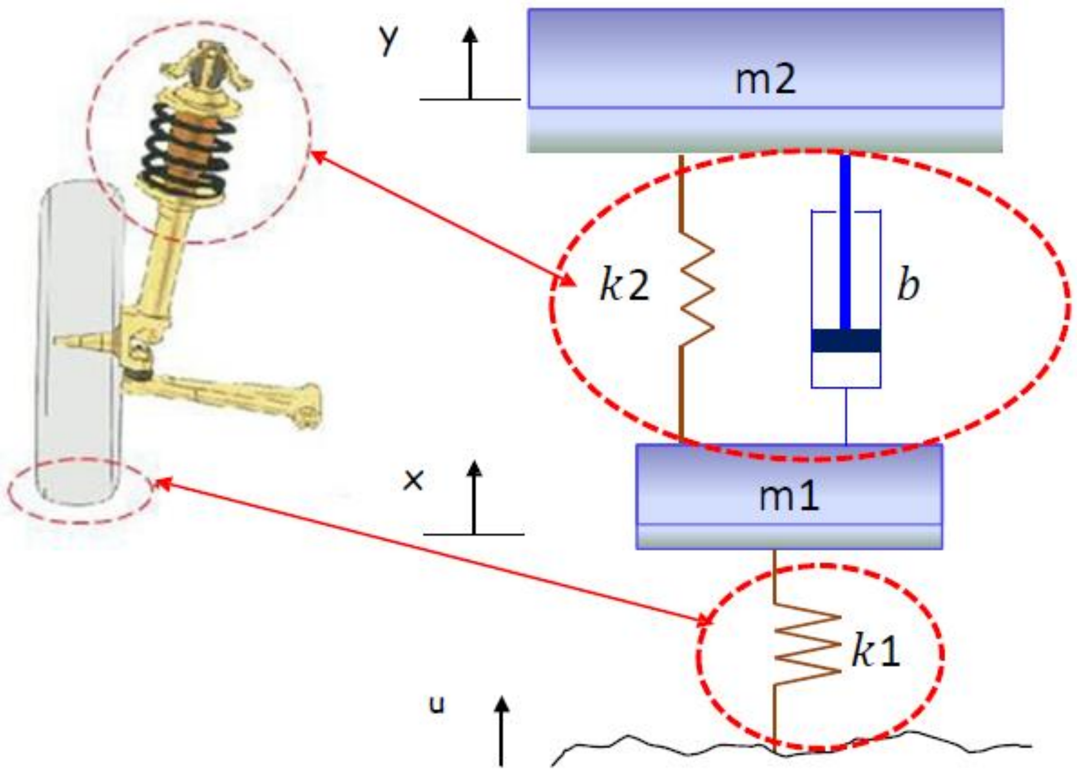
$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \cdots & -a_1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$y = [1 \quad 0 \quad \cdots \quad 0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

$$y = \mathbf{C}\mathbf{x}$$

$$\mathbf{C} = [1 \quad 0 \quad \cdots \quad 0]$$

Ejemplo: Sistema de Suspensión



$$m_1\ddot{x} = k_2(y - x) + b(\dot{y} - \dot{x}) + k_1(u - x)$$

$$m_2\ddot{y} = -k_2(y - x) - b(\dot{y} - \dot{x})$$

$$m_1\ddot{x} + b\dot{x} + (k_1 + k_2)x = b\dot{y} + k_2 y + k_1 u$$

$$m_2\ddot{y} + b\dot{y} + k_2 y = b\dot{x} + k_2 x$$

Ejemplo: Masas Acopladas

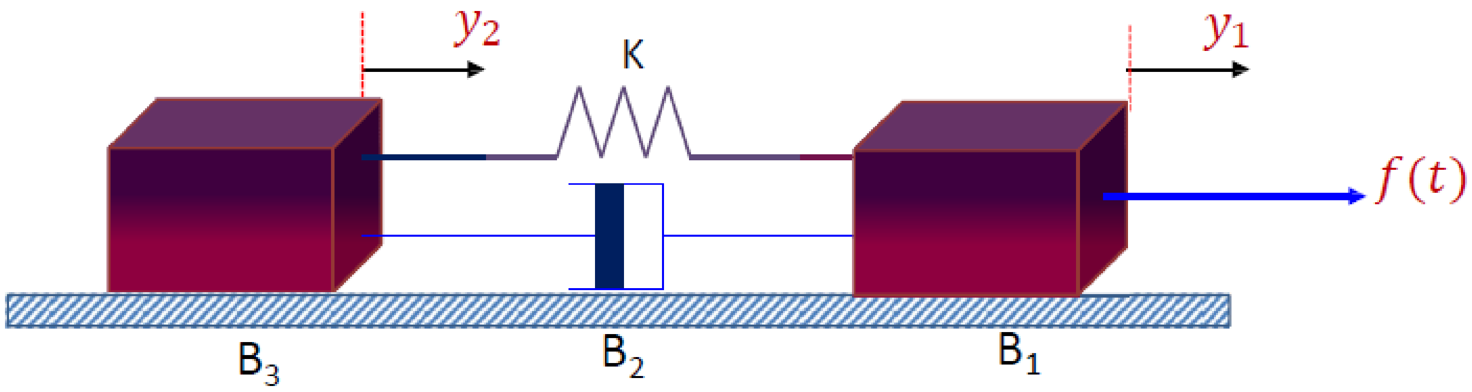
$$\dot{x}_1 = x_3$$
$$\dot{x}_2 = x_4$$
$$\dot{x}_3 = -\frac{k}{m_1}x_1 + \frac{k}{m_1}x_2 - \frac{b}{m_1}x_3 + \frac{b}{m_1}x_4 + u$$
$$\dot{x}_4 = \frac{k}{m_2}x_1 - \frac{k}{m_2}x_2 + \frac{b}{m_2}x_3 - \frac{b}{m_2}x_4$$

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \dot{x}_3\\ \dot{x}_4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ -\frac{k}{m_1} & \frac{k}{m_1} & -\frac{b}{m_1} & \frac{b}{m_1}\\ \frac{k}{m_2} & -\frac{k}{m_2} & \frac{b}{m_2} & -\frac{b}{m_2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\ 0\\ 1\\ 0\end{bmatrix}u$$

$$\begin{bmatrix}y_1\\ y_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\end{bmatrix}$$

Ejemplo: Masas Acopladas

- Derive el Modelo de Espacio Estado de Variables Físicas del siguiente Sistema Masa - Resorte - Amortiguador



$$M_1\ddot{y}_1 + B_1\dot{y}_1 + B_2(\dot{y}_1 - \dot{y}_2) + k(y_1 - y_2) = f(t)$$

$$M_2\ddot{y}_2 + B_3\dot{y}_2 + B_2(\dot{y}_2 - \dot{y}_1) + k(y_2 - y_1) = 0$$

$x_1 = y_1 - y_2$

$x_2 = \dot{y}_1$

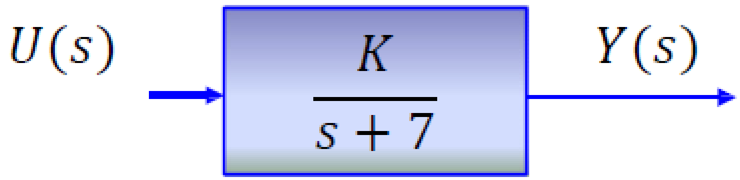
$x_3 = \dot{y}_2$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \dot{x}_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -\frac{K}{M_1} & -\frac{(B_1+B_2)}{M_1} & \frac{B_2}{M_1} \\ \frac{K}{M_2} & \frac{B_2}{M_2} & \frac{-(B_2+B_3)}{M_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{M_1} \\ 0 \end{bmatrix} f(t)$$

Obtención de las ecuaciones de estado a partir de la función de transferencia

Ejemplo

- A partir de la función de transferencia, se obtiene la ecuación diferencial, se definen las variables de estado y se busca su dinámica.



$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{K}{s+7}$$

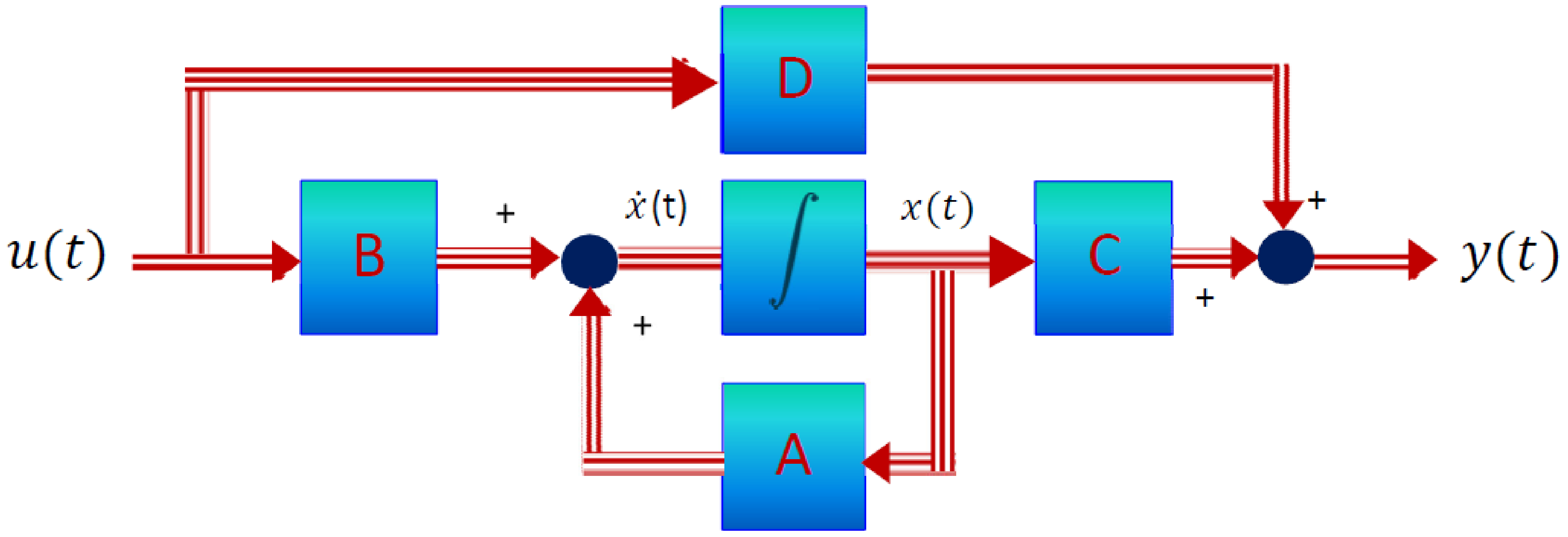
$$(s+7)Y(s) = KU(s)$$

$$\frac{dy(t)}{dt} + 7y(t) = Ku(t)$$

$$\frac{dy(t)}{dt} = -7y(t) + Ku(t)$$

Diagrama de simulación en Bloques

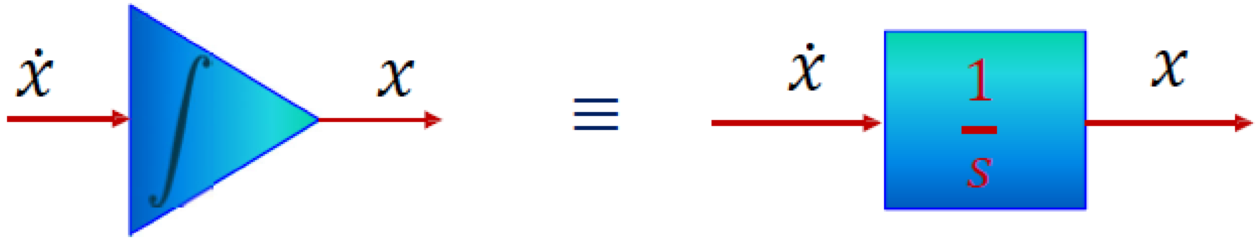
- Considere el problema de construir un sistema analógico para producir un comportamiento entrada-salida dado, usando solamente integradores, elementos de ganancia y elementos de suma (como en un ‘computador analógico’)



Donde A,B,C,D son matrices y vectores

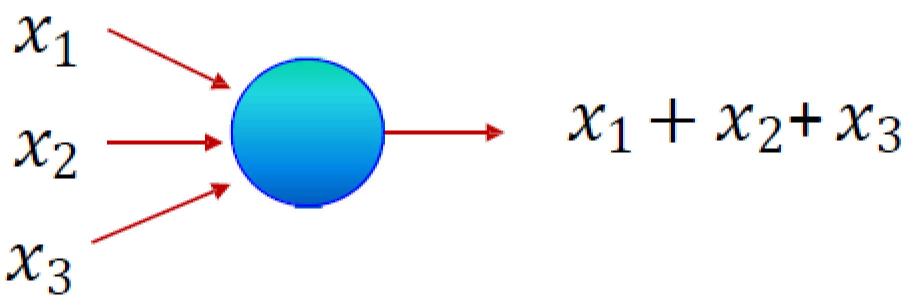
Diagrama de simulación en Bloques

- Se emplean para representar en forma gráfica los modelos de espacio de estado de SL.
- Son más convenientes que las ecuaciones matemáticas y su principal uso es en simulaciones.
- Consisten de tres tipos básicos de elementos:

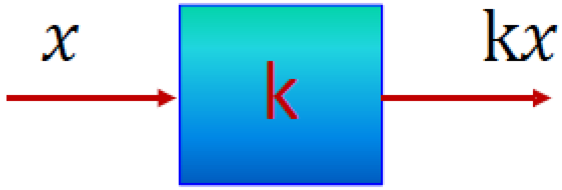


Bloques integradores, representados por triángulos o un bloque con la expresión del integrador (1/s) en Laplace

Diagrama de simulación en Bloques



Bloques sumadores, representados por círculos



Bloques ganancias, representados por rectángulos,

Diagrama de simulación: Ejemplo 1

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1(t)\\ \dot{x}_2(t)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}b_{11} & b_{12}\\ b_{21} & b_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_1\\ u_2\end{bmatrix}$$

$$y(t) = \begin{bmatrix}c_1 & c_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\end{bmatrix}$$

- Dado el modelo de estado de la planta:

$$\dot{x}_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + b_{11}u_1 + b_{12}u_2$$

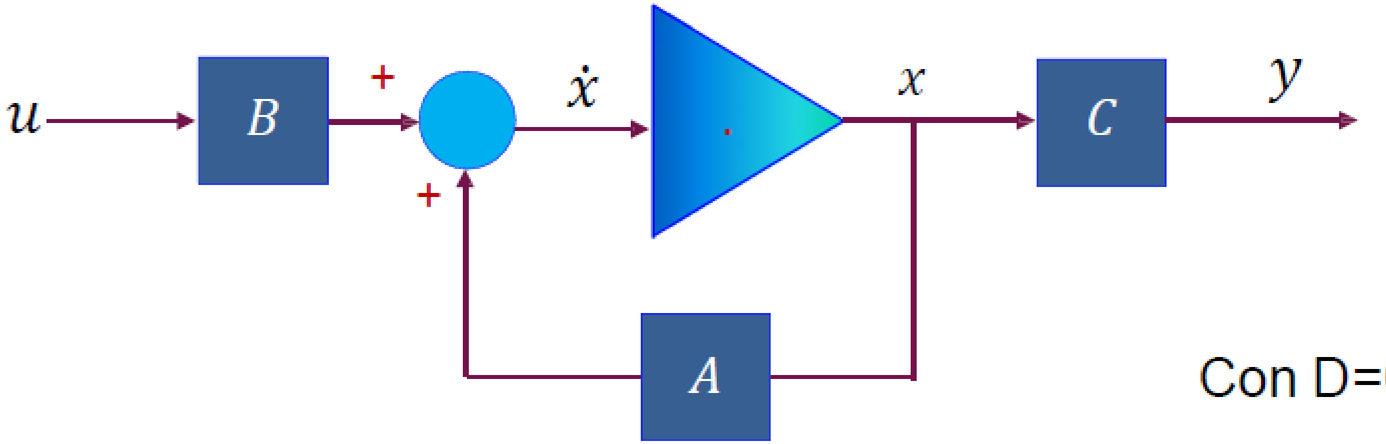
$$\dot{x}_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + b_{21}u_1 + b_{22}u_2$$

$$y = c_1x_1 + c_2x_2$$

Construir su diagrama de simulación

Diagrama de simulación: Ejemplo 1

- Recordemos que el diagrama de simulación en general es:



Con D=0

Por lo tanto resolviendo

Diagrama de simulación en Bloques

Solución:

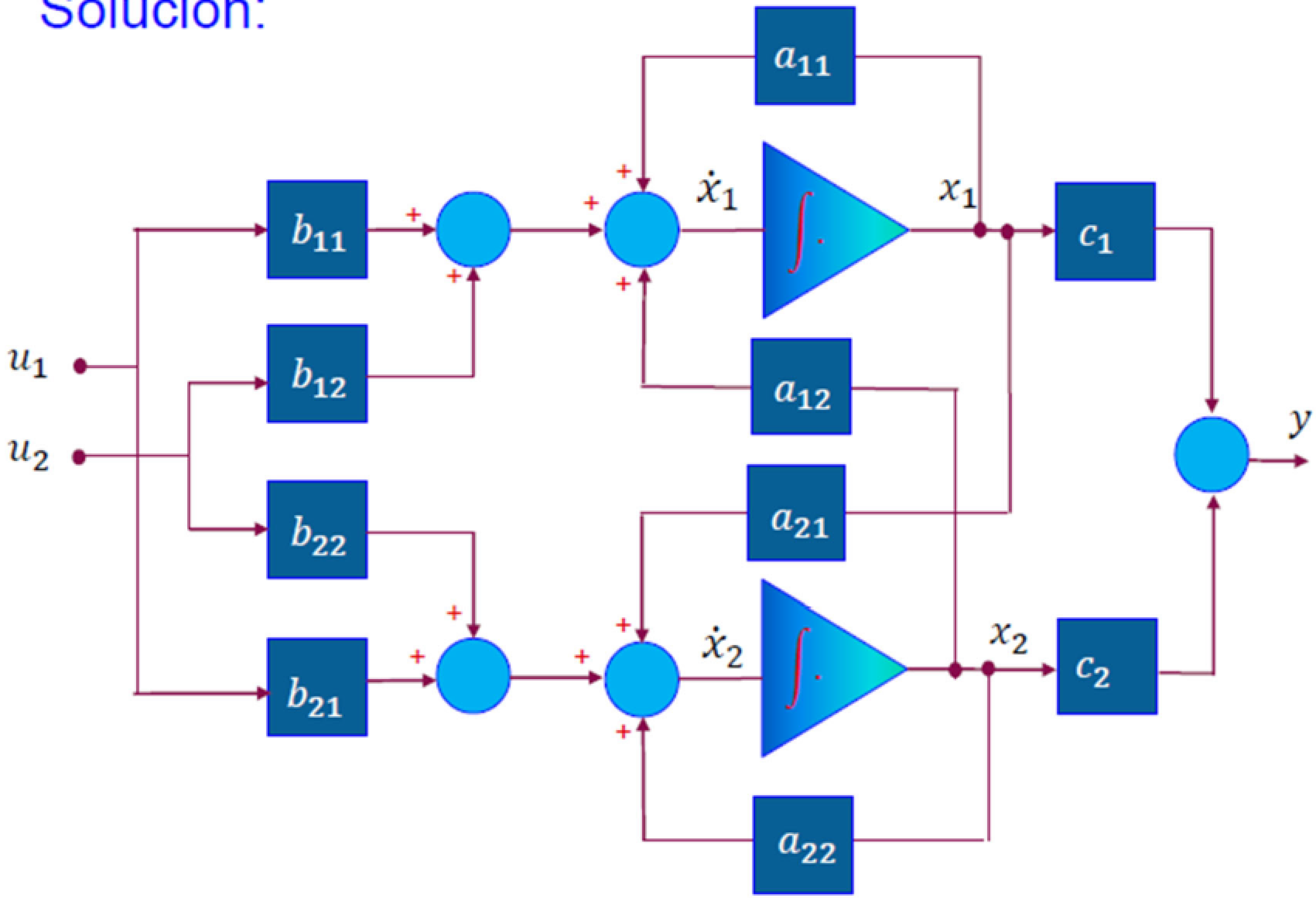


Diagrama de simulación en Bloques

Ejemplo 2:

- Dado el modelo de estado de la planta:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -4 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$$

Construir su diagrama de simulación

Diagrama de simulación en Bloques

Ejemplo 3:

- Dado la ecuación dinámica del circuito RLC:

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t)$$

$$\dot{x}_2(t) = -\frac{1}{LC}x_1(t) - \frac{R}{L}x_2(t) + \frac{1}{L}u(t)$$

Construir su diagrama de simulación

Diagrama de Simulación vs Diagrama Bloques

- Haremos la distinción entre un diagrama de simulación, en el cual:
  - ✓ señales están en el dominio del tiempo.
  - ✓ Los únicos elementos del sistema son integradores, ganancias y sumadores

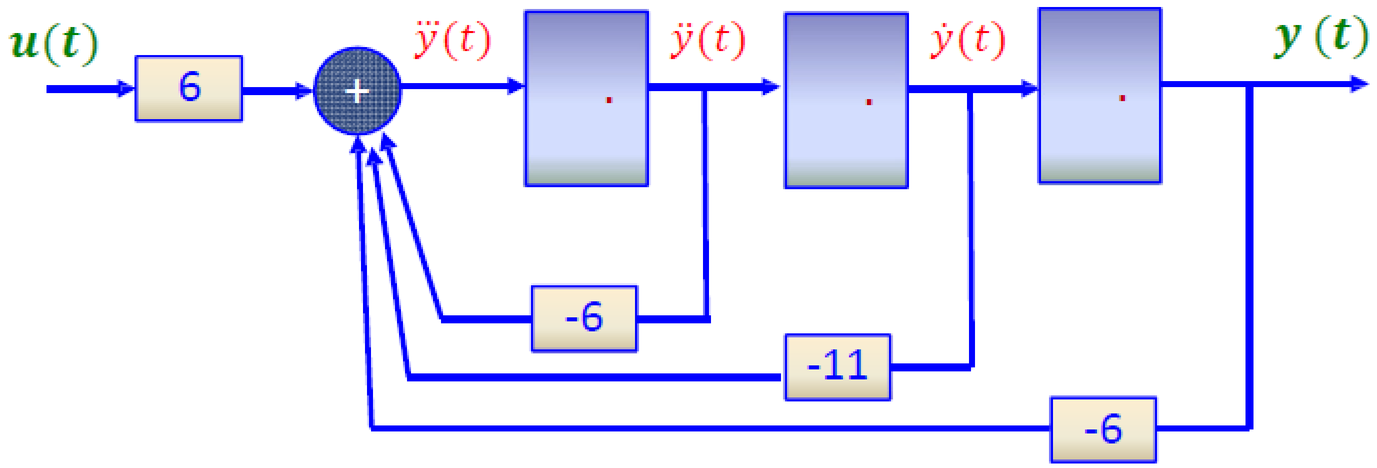
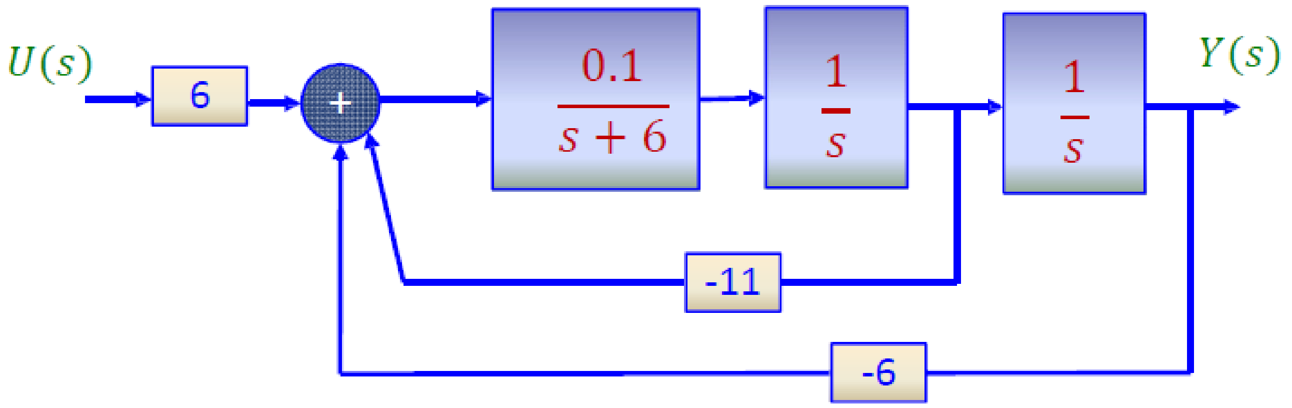
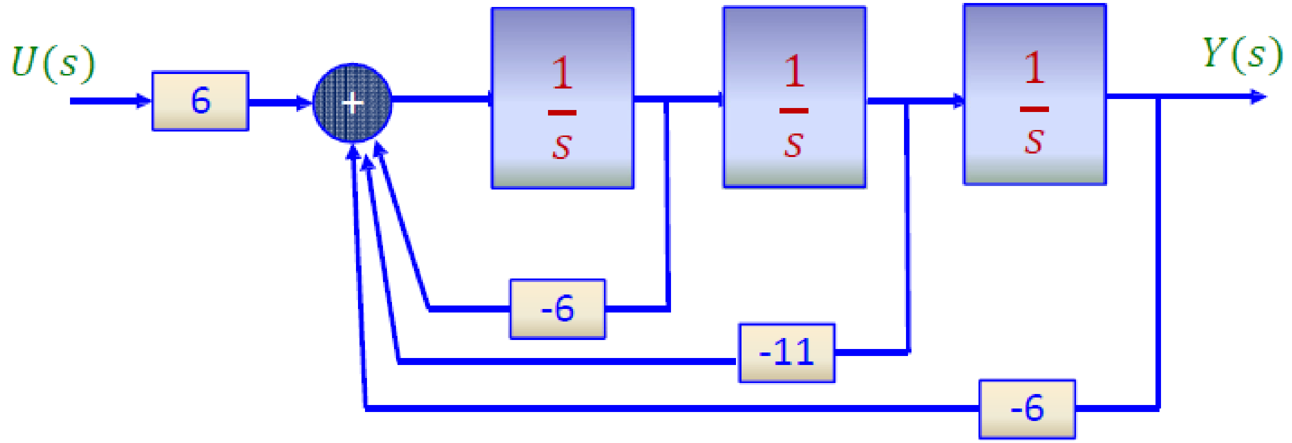


Diagrama de Simulación vs Diagrama Bloques

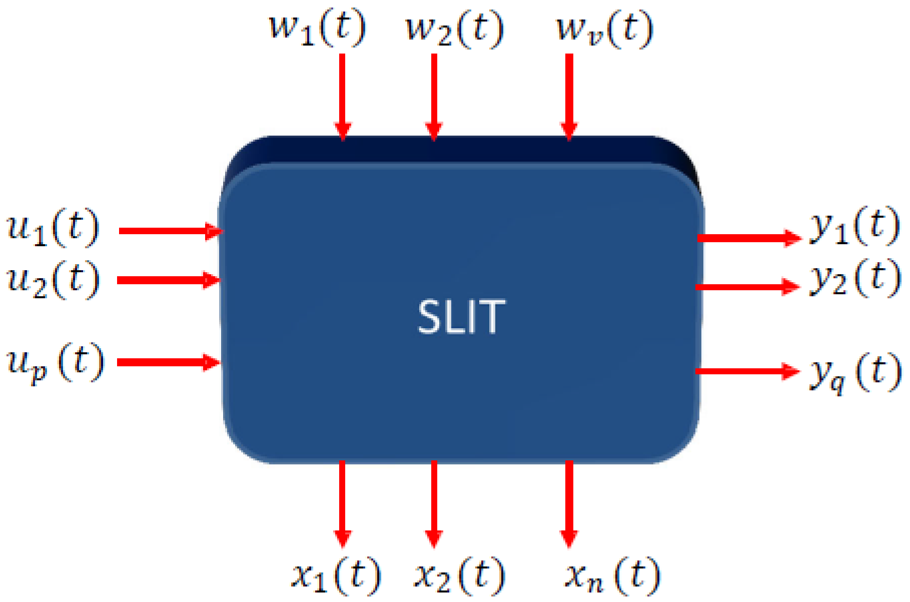
- Y un diagrama de bloque, en el cual:
  - ✓ las señales están en el dominio de Laplace
  - ✓ los elementos del sistema pueden ser arbitrariamente funciones de transferencia





Relación entre la ecuación de estado y la FT

- Podemos obtener la FT de un SLIT a partir de la ecuación de estado.
- Dado un SLIT descrito por su modelo de estado

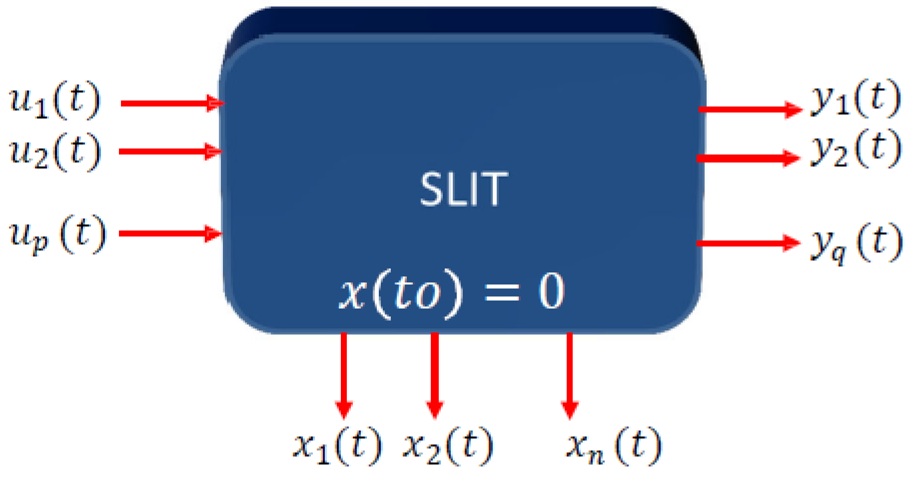


$$\frac{dx(t)}{dt} = Ax(t) + Bu(t) + Ew(t)$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t) + Hw(t)$$

Relación entre la ecuación de estado y la FT

- La FT de un SLIT se define asumiendo c.i.=0



- Para establecer una relación entre u(t) e y(t), es decir entrada-salida se asume w(t)=0 y se toma la transformada de Laplace

$$sX(s) - x(0) = AX(s) + BU(s)$$

Relación entre la ecuación de estado y la FT

De donde

$$X(s) = (sI - A)^{-1}x(0) + (sI - A)^{-1}BU(s)$$

$$Y(s) = CX(s) + DU(s)$$

Sustituyendo se tiene

$$Y(s) = C(sI - A)^{-1}x(0) + [C(sI - A)^{-1}B + D]\,U(s)$$

Por definicion la FT se obtiene para c.i.=0, asi x(0)=0

$$Y(s) = [C(sI - A)^{-1}B + D]U(s)$$

Relación entre la ecuación de estado y la FT

De donde

$$\boxed{G_u(s) = C(sI - A)^{-1}B + D}$$

Matriz de FT de dimensión *qxp* entre u$(t)e\ y(t) con\ w(t) = 0$

De la misma manera puede obtenerse:

$$\boxed{G_w(s) = C(sI - A)^{-1}E + H}$$

Matriz de la FT de dimensión *qxv* entre : w$(t)e\ y(t) con\ u(t) = 0$

Ejercicio 1

Ejemplo:

Dada las ecuaciones dinámicas del sistema de control:

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x(t)$$

Determinar la FT:

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = ?$$

Ejercicio 1

Solución:

$$G_u(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s+3 & -1 \\ 2 & s \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dfrac{s}{(s+1)(s+2)} & \dfrac{1}{(s+1)(s+2)} \\ \dfrac{-2}{(s+1)(s+2)} & \dfrac{s+3}{(s+1)(s+2)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dfrac{1}{(s+1)(s+2)} \\ \dfrac{s+3}{(s+1)(s+2)} \end{bmatrix} = \frac{1}{(s+1)(s+2)}$$

Ejercicio 2

Ejemplo:

Dada las ecuaciones dinámicas del sistema de control:

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} -7 & -12 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} x(t)$$

Determinar la FT:

Solución:

$$G(s) = \frac{(s+2)}{(s+3)(s+4)}$$

Solución de la ecuación de estado

- Ecuación escalar:

$$\dot{x} = ax + bu$$

- Solución:

$$x(t) = e^{at}x_0 + \int_0^t e^{a(t-\tau)}bu(\tau)d\tau$$

- Considerando una entrada tipo rampa y condición inicial $x_0 = 0$:

$$x(t) = \frac{b}{a}(e^{at} - 1)$$

Solución de la ecuación de estado

- En la representación de espacio de estados:

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

$$x(t) = e^{At}x_0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau$$

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \qquad u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_m \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1m} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2m} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nm} \end{bmatrix}$$

Solución de la ecuación de estado

- Conversión a tiempo discreto:

$$x(t) = e^{At}x_0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau$$

$$x_{k+1} = Px_k + Qu_k$$

$$P = e^{A\Delta t}$$

$$Q = \left(e^{A\Delta t} - I\right)A^{-1}B$$

Gracias por vuestra atención...