EL249 - Ingeniería de control 2

Unidad N°3: Diseño de observadores de estados, integración de controladores y observadores

Semana 13

- Introducción optimal

MEng. Carlos H. Inga Espinoza

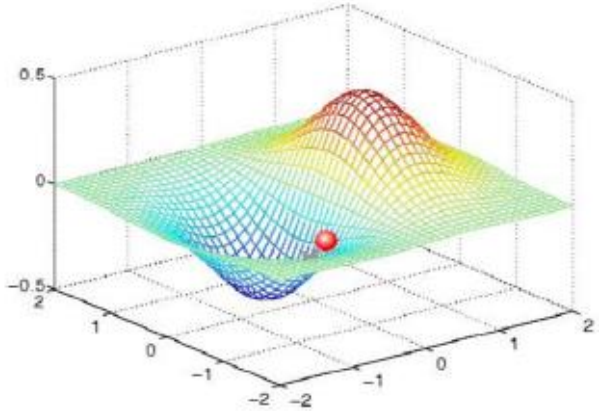
Optimización

- **Concepto de Optimización**
- Optimización: "tan bueno como lo permiten las restricciones“

- Optimización requiere de un punto de referencia para la comparación de soluciones o criterio de conducta (algunas veces llamado función de costo o de riesgo)

Optimización es hacer mínimo/máximo un criterio de calidad por adecuada selección de los grados de libertad.

- Índice de calidad en el dominio del tiempo
- Índice de calidad en el dominio de la frecuencia
- Índice de calidad en el espacio estado



Optimización en el control

Requerimientos en el lazo de Control

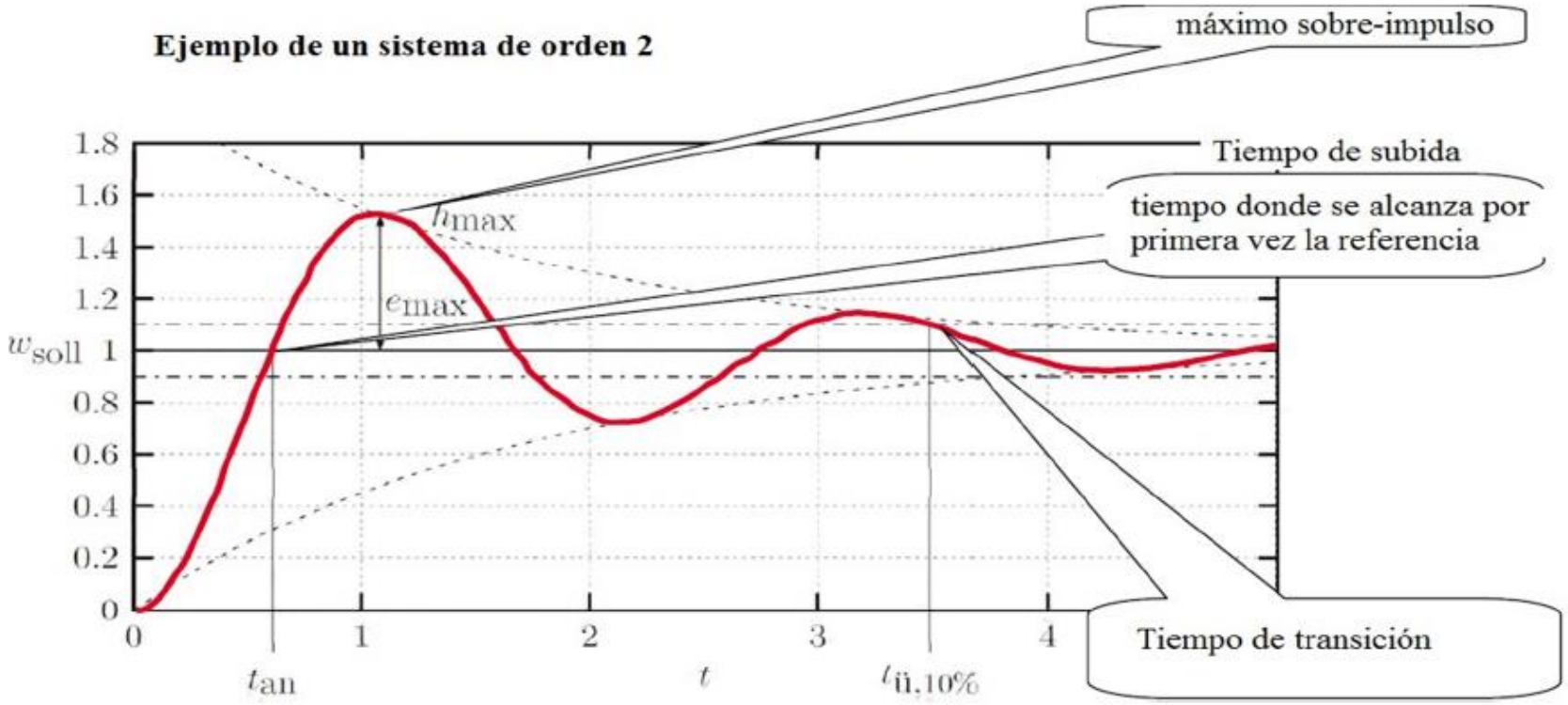
Estabilidad

Buen amortiguamiento

Aproximación en el estado estacionario

Buena conducta dinámica

Bajo esfuerzo de control



Índices de desempeño

- Para medir cuantitativamente el desempeño de un sistema.
- Necesario para comparar sistemas o para optimizar su desempeño.

Un índice de desempeño es una medida cuantitativa del desempeño de un sistema y es elegida dándole mayor peso a las especificaciones del sistema más importantes.

Índices de desempeño

- Un sistema es considerado optimo cuando los parámetros del sistema son ajustados tal que el índice de desempeño elegido alcanza un extremo, que con frecuencia es un mínimo.

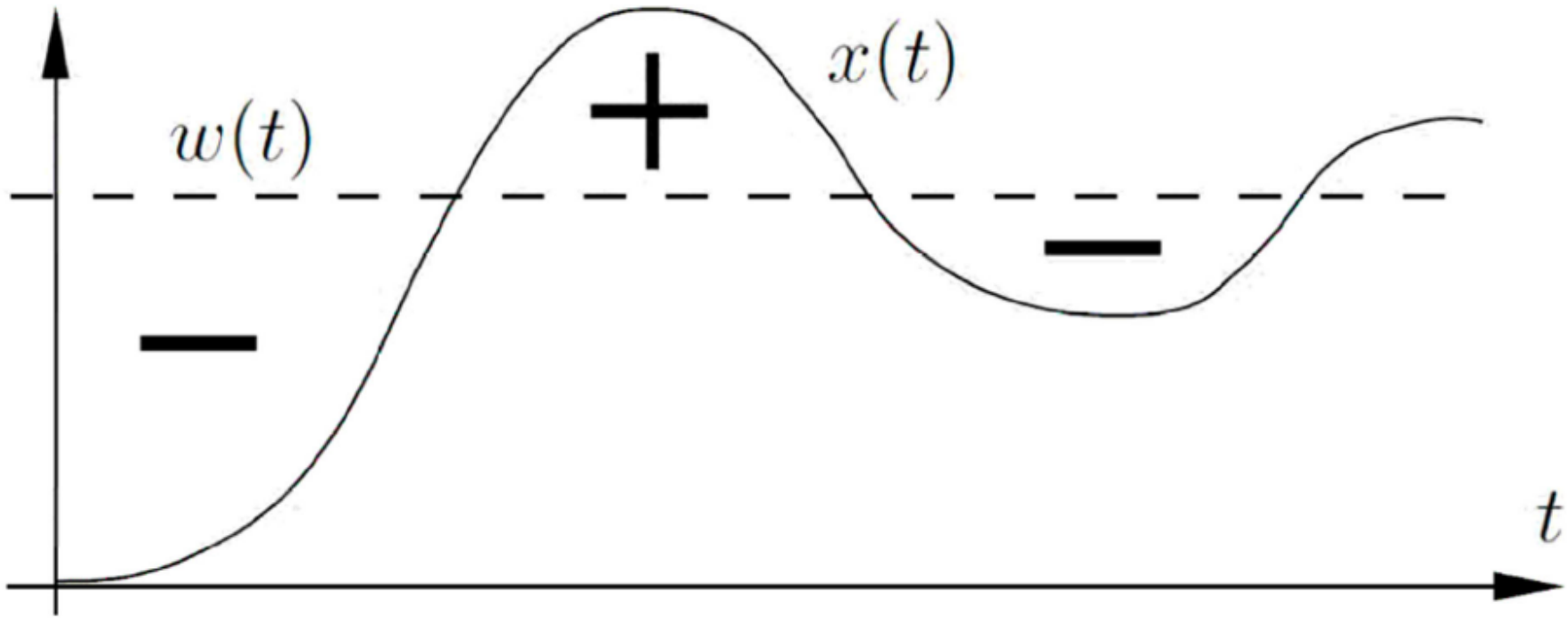
- Para sistemas de control es útil que el índice sea un número mayor o igual cero.

Índices de desempeño

Revisión del Criterio de la integral

Nombre	Criterio
Area Lineal	$J_1 = \int_0^\infty e(t)\,dt$
Area Acumulativa	$J_2 = \int_0^\infty \lvert e(t)\rvert\,dt$
Area Cuadrática	$J_3 = \int_0^\infty e^2(t)\,dt$
Valor del tiempo area lineal	$J_4 = \int_0^\infty t\,\lvert e(t)\rvert\,dt$
Valor del tiempo área cuadrática	$J_5 = \int_0^\infty t\,e^2(t)\,dt$
Valor cuadrático del tiempo y área cuadrática	$J_6 = \int_0^\infty t^2\,e^2(t)\,dt$
Area cuadrática generalizada	$J_7 = \int_0^\infty (e^2(t) + \alpha\dot{e}^2(t))$

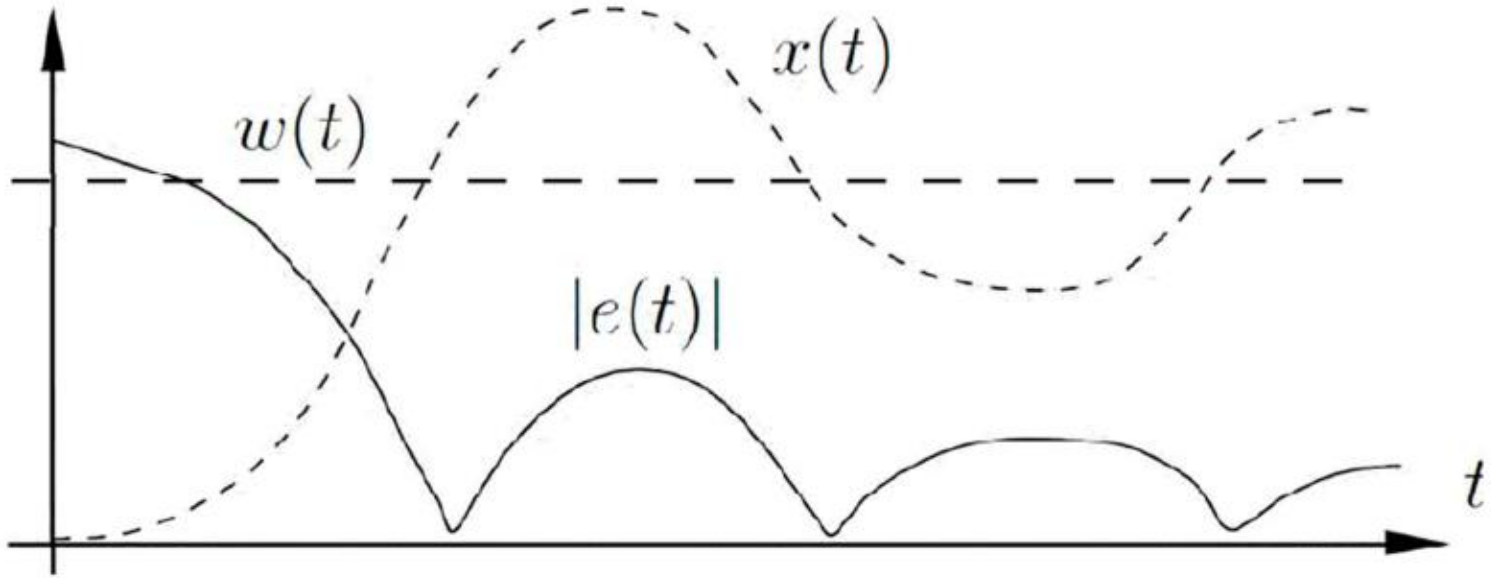
Integral del error total (ITE)



- Simple
- Buen criterio para sistemas sobre amortiguados o con respuesta monotona.
- Problemático en sistemas oscilatorios

$$J_1 = \int_0^\infty e(t)\,dt$$

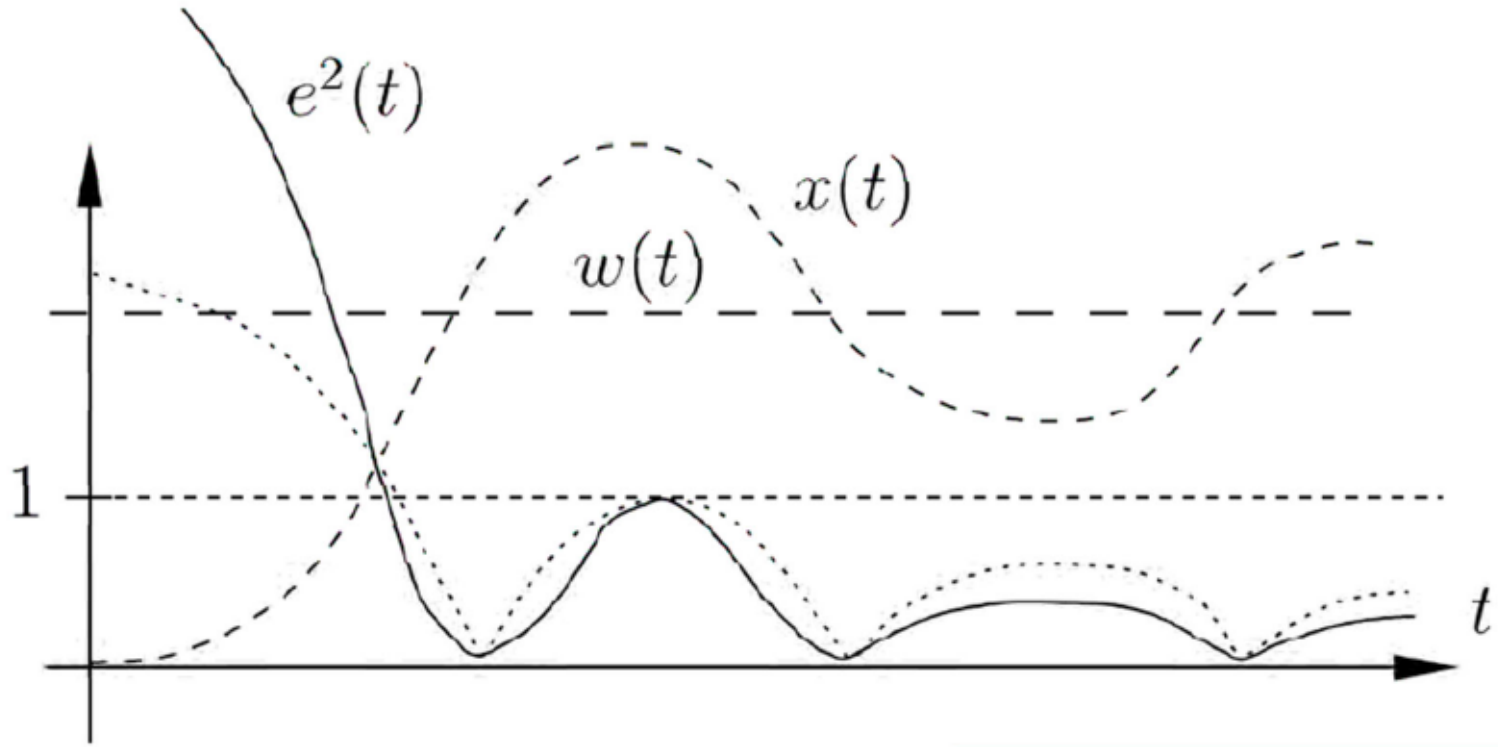
Integral del error absoluto (IAE)



- Matemáticamente complicado
- No es fácil de seguir analíticamente.

$$J_2 = \int_0^\infty |e(t)| \, dt$$

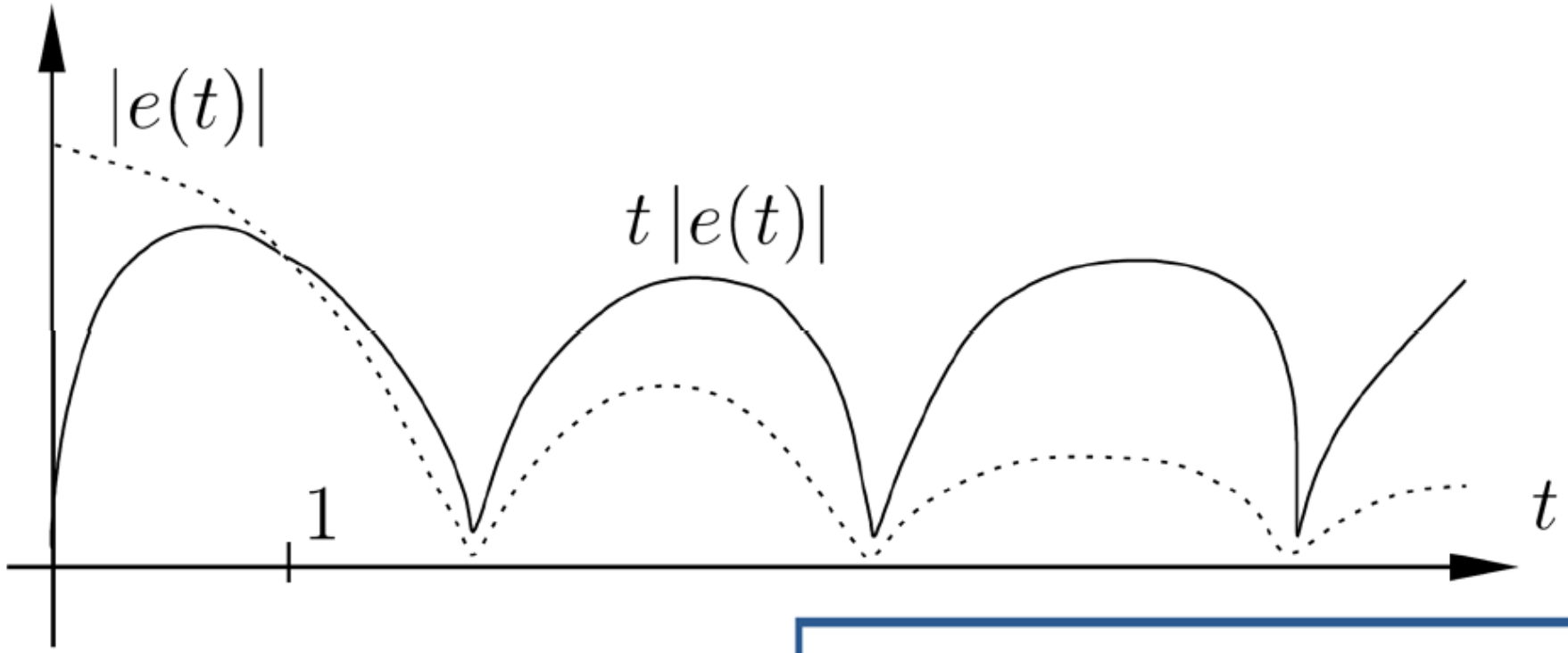
Integral del cuadrado del error (ISE)



- Mayor peso a los errores grandes comparado con los pequeños
- Es más fácil de manejar analíticamente.
- Resulta en Ts más largas que en J2

$$J_3 = \int_0^\infty e^2(t)\,dt$$

Integral el tiempo por el error absoluto (ITAE)



- Resultado similar a J2.
- Menor ponderación para errores pequeños

$$J_4 = \int_0^\infty t\,|e(t)|\,dt$$

Integral del error cuadrado generalizado (IGSE)

$$J_7 = \int_0^\infty \left(e^2(t) + \alpha \dot{e}^2(t)\right)\, dt$$

- Da mejores resultados que J3
- La selección de α es subjetiva.

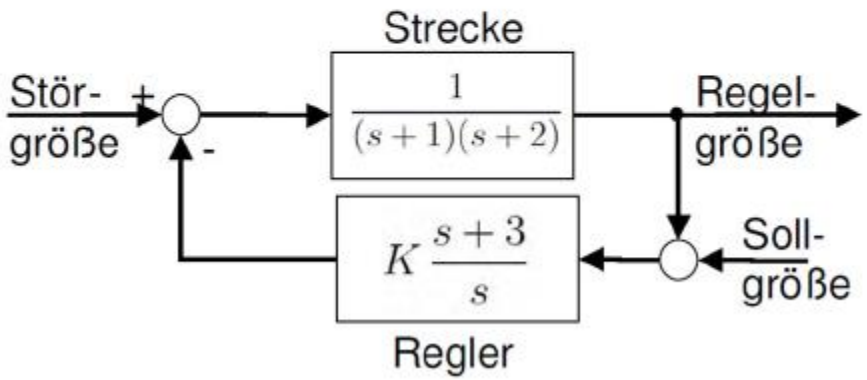
Ejemplo comparativo

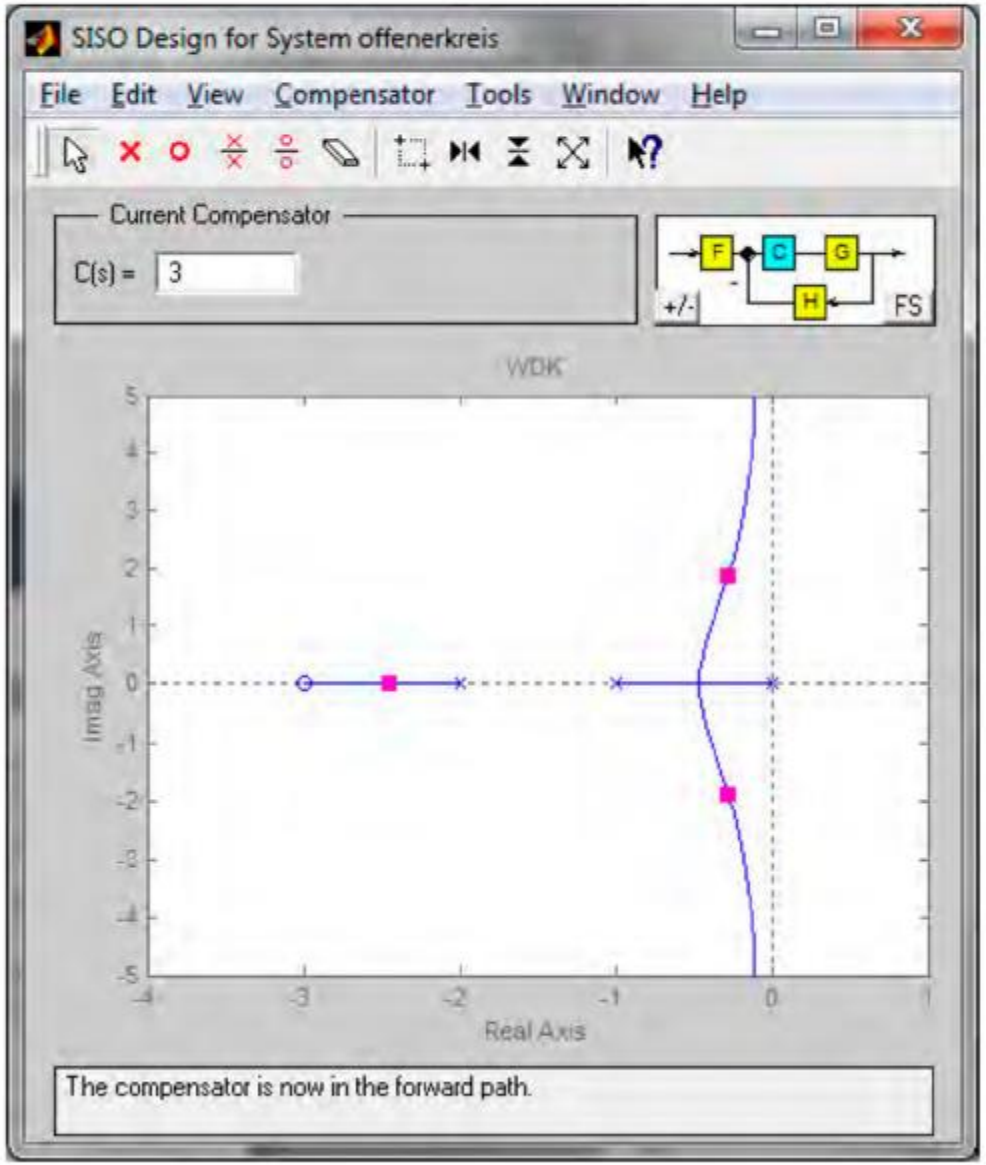
Planta

$$F_S(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)}$$

Control PI

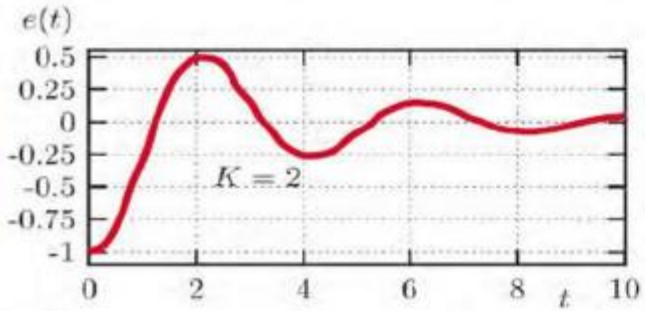
$$F_S(s) = K\,\frac{s+3}{s} \quad ; \quad 0 < K < \infty$$

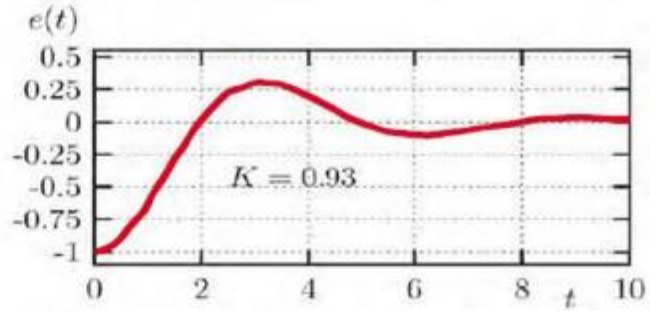




Ejemplo comparativo

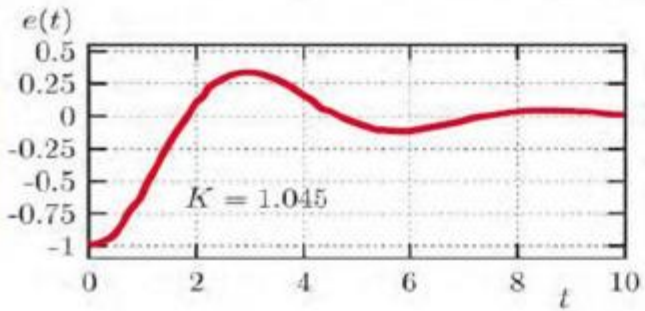
$$J_1 = \int_0^\infty e(t)\,dt$$

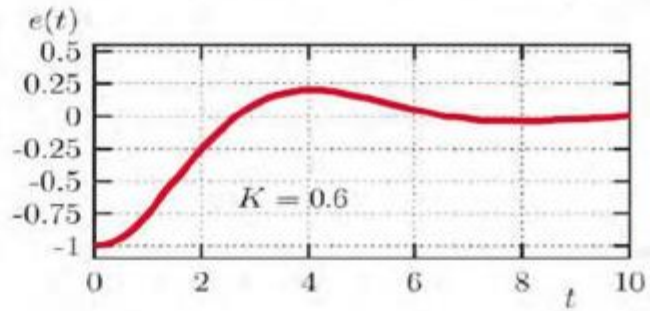




$$J_5 = \int_0^\infty t\,e^2(t)\,dt$$

$$J_2 = \int_0^\infty |e(t)|\,dt$$





$$J_7 = \int_0^\infty \left(e^2(t) + \alpha\dot{e}^2(t)\right)\,dt$$

	Criterio	Ganancia Optima
Area Cuadrática	$\int_0^\infty e^2(t)\,dt$	$K^* \approx 2$
Valor del tiempo con área cuadrática	$\int_0^\infty t\,e^2(t)\,dt$	$K^* \approx 0.93$
Area Acumulativa	$\int_0^\infty \lvert e(t)\rvert\,dt$	$K^* \approx 1.045$
Area cuadrática generalizada	$\int_0^\infty e^2(t) + \dot{e}^2(t)\,dt$	$K^* \approx 0.6$

Problema

La planta de un sistema con realimentación unitaria tiene la siguiente FT:

$$\frac{Y(S)}{E(S)} = G(S) = \frac{K}{s}$$

La entrada del sistema es un escalón con amplitud A. La condición inicial del sistema en el tiempo t_0 es $y(t_0)=Q$, donde y(t) es la salida del sistema. El índice de desempeño es un ISE.

- Demuestre que $J = \frac{(A-Q)^2}{2K}$
- Determine la ganancia K para minimizar J. ¿Es físicamente factible implementar este valor?

Índice de desempeño para el control

- Supongamos que queremos optimizar la siguiente planta en un intervalo fijo [t_0 t_f]:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \qquad x(t_0) = x_0,$$
$$y(t) = Cx(t)$$

- Tal que los componentes del vector de estados sean pequeños. Un índice adecuado podría ser:

$$J_1 = \int_{t_0}^{t_f} \boldsymbol{x}^T(t)\boldsymbol{x}(t)\,dt.$$

- La norma $\|x(t)\| = x^T(t) * x(t)$

Índice de desempeño para el control

- Si el objetivo de control es minimizar la salida y(t) entonces:

$$
\begin{aligned}
J_2 &= \int_{t_0}^{t_f} \boldsymbol{y}^T(t)\,\boldsymbol{y}(t)\,dt \\
&= \int_{t_0}^{t_f} \boldsymbol{x}^T(t)\boldsymbol{C}^T\boldsymbol{C}\boldsymbol{x}(t)\,dt \\
&= \int_{t_0}^{t_f} \boldsymbol{x}^T(t)\,\boldsymbol{Q}\boldsymbol{x}(t)\,dt,
\end{aligned}
$$

- Donde Q es una matriz simétrica positiva semidefinida.

Índice de desempeño para el control

- En caso se desee controla el sistema tal que la entrada sea lo más pequeña posible, entonces:

$$J_3 = \int_{t_0}^{t_f} \boldsymbol{u}^T(t)\boldsymbol{u}(t)\,dt,$$

$$J_4 = \int_{t_0}^{t_f} \boldsymbol{u}^T(t)\boldsymbol{R}\boldsymbol{u}(t)\,dt,$$

- Donde R es una matriz simétrica positiva definida.
- <u>Pero,</u> uno no puede minimizar simultáneamente los estados y las entradas, por que la minimización de los estados requiere señales de control grandes. Para resolver esto podemos establecer una relación convexa entre J1 y J3

$$J = \lambda J_1 + (1 - \lambda) J_3$$

Índice de desempeño para el control

- Finalmente, tendremos:

$$J = \int_{t_0}^{t_f} (\boldsymbol{x}^T(t)\boldsymbol{Q}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{u}^T(t)\boldsymbol{R}\boldsymbol{u}(t))\, dt.$$

- A veces también es necesario minimizar el estado final, entonces:

$$\boxed{J = \frac{1}{2}\boldsymbol{x}^T(t_f)\boldsymbol{F}\boldsymbol{x}(t_f) + \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_f} (\boldsymbol{x}^T(t)\boldsymbol{Q}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{u}^T(t)\boldsymbol{R}\boldsymbol{u}(t))\, dt,}$$

- La minimización de este índice se llama el problema del regulador lineal cuadrático o LQR

Índice de desempeño para el control

Resumen : La medida general de la calidad cuadrática para sistema lineales en espacio estado

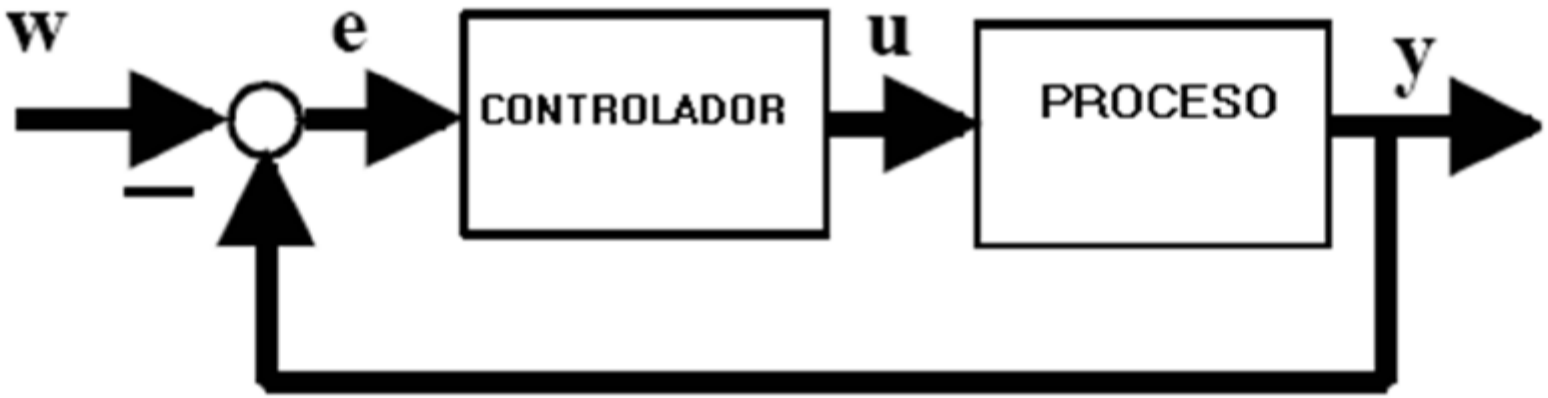
$$\boxed{J = \underbrace{\mathbf{x}^T(t_e)\mathbf{S}\mathbf{x}(t_e)}_{\text{Aproximación al estado estacionario}} + \underbrace{\int_0^{t_e} \mathbf{x}^T(t)\mathbf{Q}(t)\mathbf{x}(t)}_{\text{Trayectoria óptima}} + \underbrace{\mathbf{u}^T(t)\mathbf{R}(t)\mathbf{u}(t)\,dt}_{\text{Consumo óptimo}}}$$

$\mathbf{S} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ **Matriz constante simétrica , semi-definida positiva**

$\mathbf{R} \in \mathbb{R}^{p\times p}$ **Matriz constante simétrica, definida positiva**

$\mathbf{Q} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ **Matriz constante simétrica, semi-definida positiva**

Control óptimo

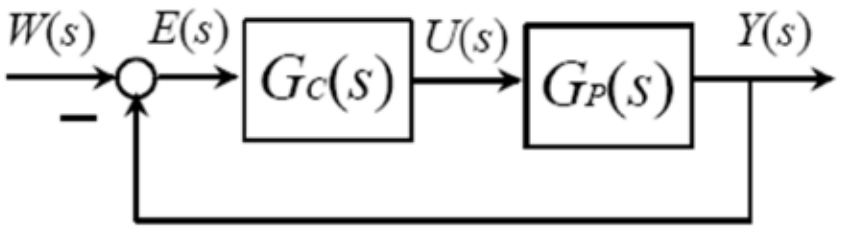


Preguntas:

¿Como se define un control óptimo?
¿Cual es el problema cuando uno diseña control?
¿Por qué resolvemos la ecuación de Riccati?
¿Cómo son implementados los reguladores óptimos?
¿Cuál es el alcance de estas reglas?

Control- Regulador Optimal

- **En un controlador óptimo, la función que representa el comportamiento del sistema se reduce al mínimo:**



Algunas Funciones de Comportamiento:

Integral del error Absoluto
Integral of Absolute Error (IAE)

$$\min J = \int_0^\infty |e(t)| dt$$

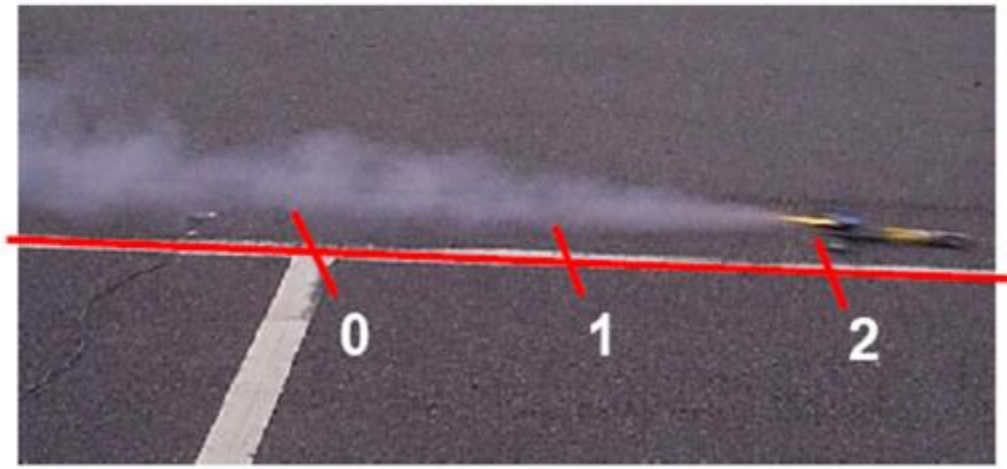
Integral del cuadrado del Error
Integral of Square Error (ISE)

$$\min J = \int_0^\infty e^2(t) dt$$

Integral del Error Absoluto ponderado en tiempo.
Integral of Time-weighted Absolute Error (ITAE)

$$\min J = \int_0^\infty t\,|e(t)| dt$$

Control óptimo de un carro cohete



$x_1(t): Posición$

$x_2(t): Velocidad$

$u(t): Fuerza\ Conductora$

$m: masa (m = 1kg)$

El carro se desplaza en ambas direcciones

$Condiciones\ Iniciales:$

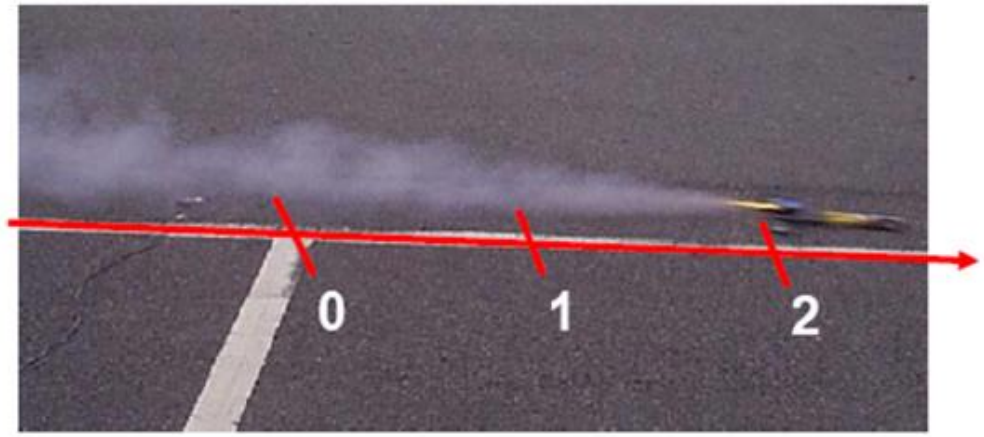
$x_1(0) = 2m, \quad x_2(0) = 1\ m/s$

Objetivo: posicionar al carro en la posición "0", donde estaría detenido.

$Condición\ del\ Objetivo: \quad posición\ x_1^s = 0, velocidad\ x_2^s = 0$

¿Cuál es la estrategia optima que permite que el carro cumpla su objetivo y que requiera la mínima fuerza para lograrlo?

Representación de Espacio Estado



$x_1(t): Posición$

$x_2(t): Velocidad$

$u(t): Fuerza\ Conductora$

$m: masa (m = 1kg)$

Modelo :

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t)$$
$$u(t) = m\,a(t) = m\,\dot{x}_2(t)$$

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t)$$
$$\dot{x}_2(t) = u(t)$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

Condiciones Iniciales :

$x_1(0) = 2m, \quad x_2(0) = 1\ m/s$

Puntos estacionarios :

$x_1^s = 0, \quad x_2^s = 0$

Objetivo del control Optimo

- **minimizar las desviaciones** : $\mathbf{x_1^s - x_1(t);\ x_2^s - x_2(t)}$
- **minimizar la fuerzamotriz** : $\mathbf{u(t)}$

Función cuadrática en control

La tarea del control optimo es minimizar la diferencia entre el punto de referencia x_s y el valor actual $x(t)$, dentro del tiempo $t \in [t_0, t_f]$

$$\min_{u(t)} J_1 = \int_{t_0}^{t_f} e^2(t)dt \qquad \text{con} \qquad e(t) = x^S - x(t)$$

Un cambio puede ser el valor objetivo establecido a cero:

$$x^S \equiv 0 \qquad \text{quedando} \qquad \min_{u(t)} J_1 = \int_{t_0}^{t_f} x^2(t)dt$$

Para sistemas con múltiples variables de estado se tiene:

$$\boxed{\min_{\mathbf{u}} J_1 = \int_{t_0}^{t_f} \sum_{i=1}^{n} q_i x_i^2(t)dt}$$

En la fórmula anterior hay factores de ponderación para cada variable introducida.

Función cuadrática en control

$$\min_{\mathbf{u}} J_1 = \int_{t_0}^{t_f} \sum_{i=1}^{n} q_i x_i^2(t)dt \quad \longrightarrow \quad \min_{\mathbf{u}} J_1 = \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_f} \mathbf{x}^T(t)\mathbf{Q}\mathbf{x}(t)dt$$

Ejemplo: El primer objetivo del régimen óptimo del carro cohete es de reducir al mínimo las desviaciones: $e_1(t) = x_1^S - x_1(t); \quad e_2(t) = x_2^S - x_2(t)$

$$\sum_{i=1}^{2} q_i e_i^2(t) = q_1 e_1^2(t) + q_2 e_2^2(t) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} e_1 & e_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2q_1 & 0 \\ 0 & 2q_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix}$$

Si elige q_1=1 y q_2=2 significa una mayor exigencia de la eliminación del error de velocidad.

En este caso:

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Función cuadrática en control

Al mismo tiempo los valores de la variable de control son minimizadas, tal que

$$\min_{\mathbf{u}} J_2 = \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_f} \mathbf{u}^T \mathbf{R}\mathbf{u}\, dt$$

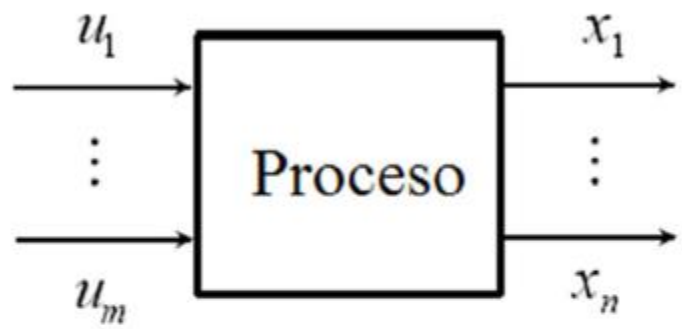
Al final del intervalo de tiempo $t = t_f$, las variables de estado tienden al valor nominal (cero):

$$\min_{\mathbf{u}} J_3 = \frac{1}{2}\mathbf{x}^T(t_f)\mathbf{F}\mathbf{x}(t_f)$$

El objetivo completo del regulador optimo:

$$\boxed{\min_{\mathbf{u}} \left[J = J_1 + J_2 + J_3 = \frac{1}{2}\mathbf{x}^T(t_f)\mathbf{F}\mathbf{x}(t_f) + \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_f} (\mathbf{x}^T\mathbf{Q}\mathbf{x} + \mathbf{u}^T\mathbf{R}\mathbf{u})dt \right]}$$

Proceso Dinámico



Variables de Entrada: $\mathbf{u} = [u_1(t) \quad u_2(t) \quad \cdots \quad u_m(t)]^T$ $\quad (m \neq n)$

Variables de estado: $\mathbf{x} = [x_1(t) \quad x_2(t) \quad \cdots \quad x_n(t)]^T$

Dominio del tiempo: $t_0 \leq t \leq t_f$ (establecido o libre)

Condición inicial: $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$ (conocida)

Condición final: $\mathbf{x}(t_f) = \mathbf{x}_f$ (establecido o libre)

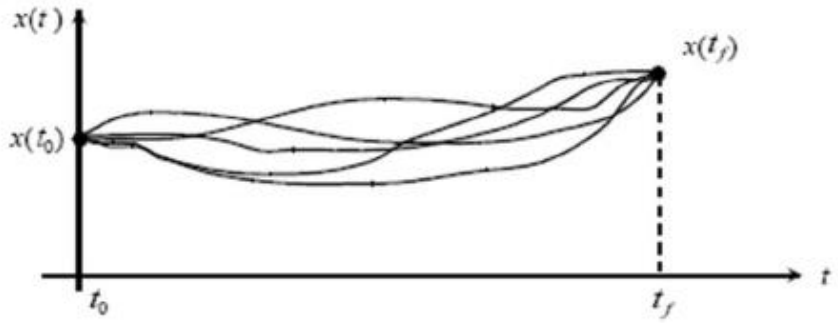
Modelo: $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u})$ (Lineales o no Lineales)

Representación gráfica de una variable de estado

t_0, t_f Establecido

$x(t_0), x(t_f)$ Establecido

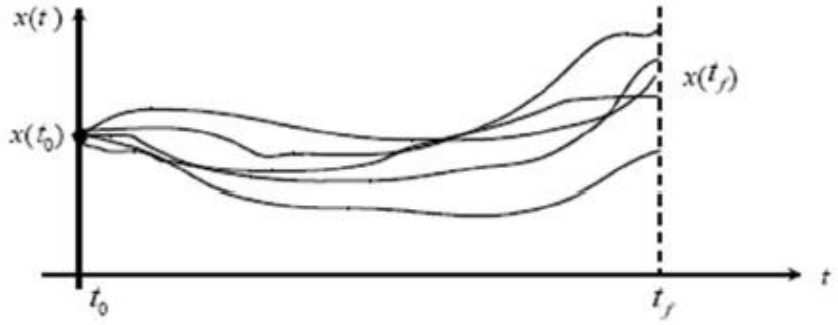
$x(t)$ Ilimitado



t_0, t_f Establecido

$x(t_f)$ Libre

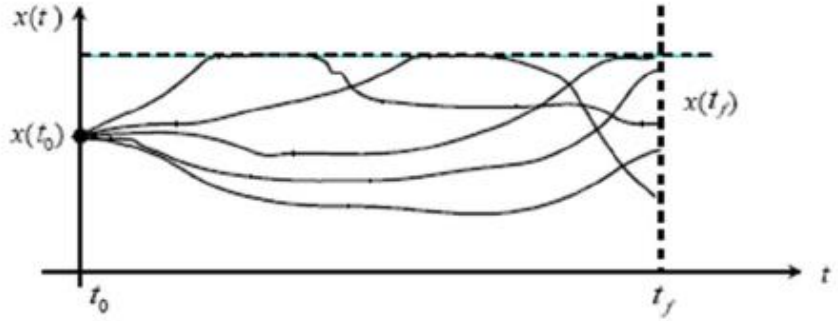
$x(t)$ Ilimitado



t_0, t_f Establecido

$x(t_f)$ Libre

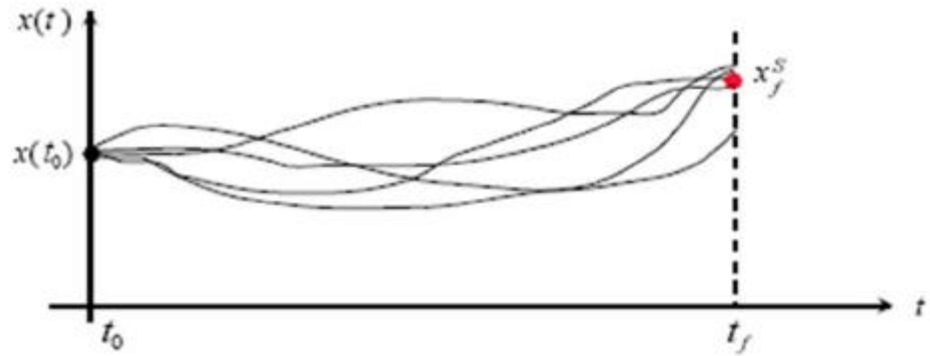
$x(t)$ Limitado



El objetivo del control óptimo :

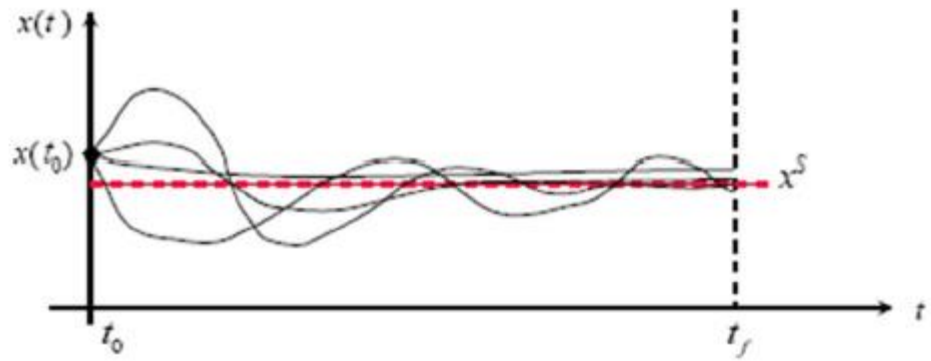
Llegar a un punto:

$$J = \min_{u(t)} [x(t_f) - x_f^S]^2$$



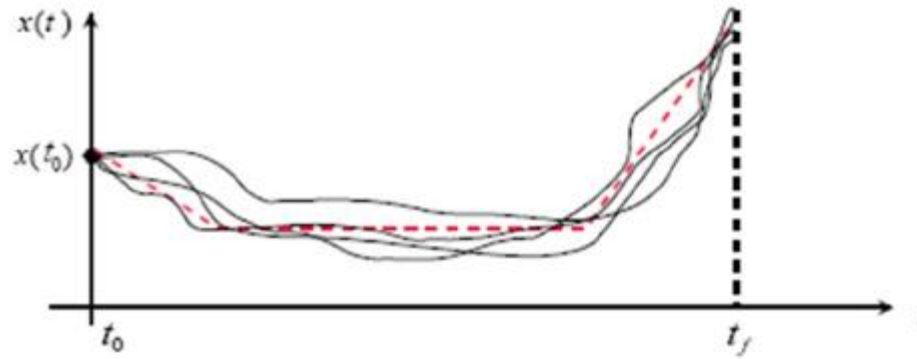
Mantenerse en un setpoint:

$$J = \min_{u(t)} \int_{t_0}^{t_f} [x(t) - x^S]^2 dt$$



Seguimiento a la referencia:

$$J = \min_{u(t)} \int_{t_0}^{t_f} [x(t) - x^S(t)]^2 dt$$



Problema de Control Optimo

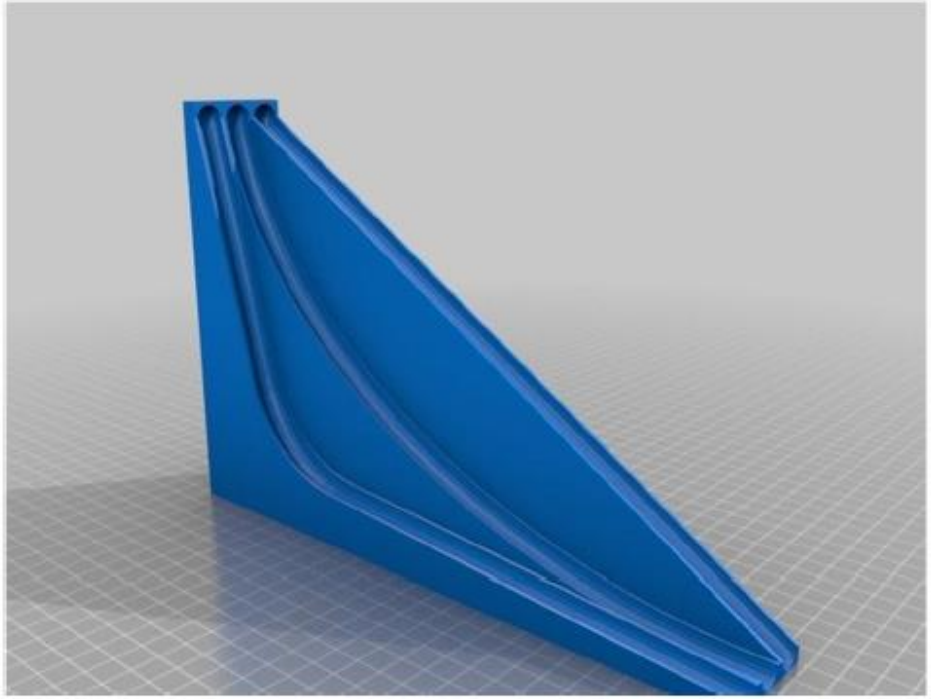
Función Objetivo	:	$J = \min_{u(t)} \left(\phi(\mathbf{x}(t_f)) + \int_{t_0}^{t_f} f_0(\mathbf{x},\mathbf{u})dt \right)$	
Modelo:		$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x},\mathbf{u})$	(número de equaciones=n)
Cond. iniciales	:	$\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$	(conocida)
Cond. finales	:	$\mathbf{x}(t_f) = \mathbf{x}_f$	(sujetas o libres)
Dominio	:	$t_0 \le t \le t_f$	(sujetas o Libres)

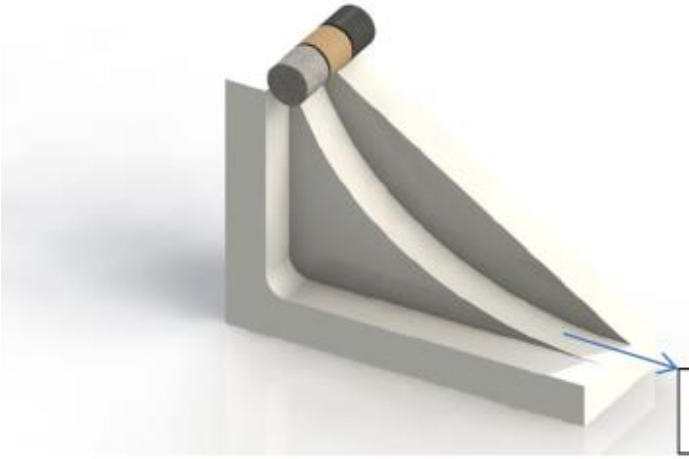
El control óptimo u * (t) es la solución al problema de minimizar el un funcional de costo *J*.

Al mismo tiempo que las restricciones son satisfechas.

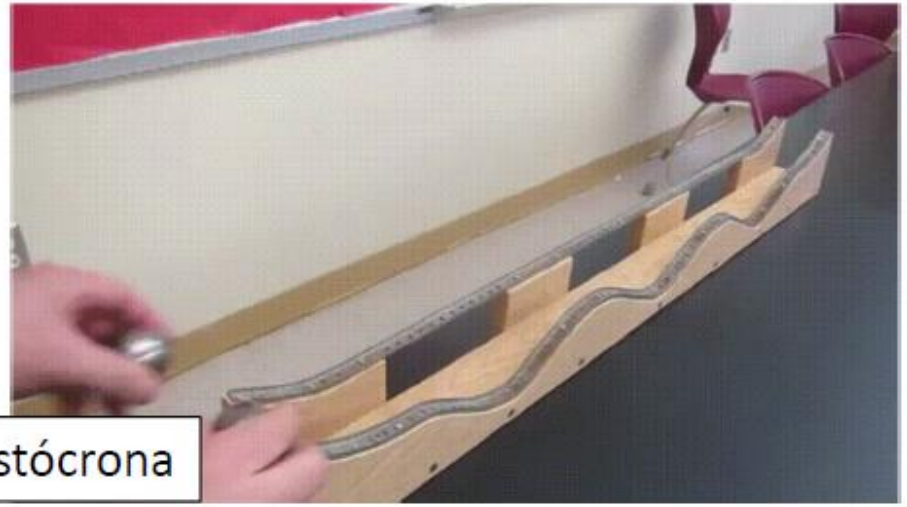
Cálculo de variaciones

- Una esfera se desliza a lo largo de una trayectoria entre 2 puntos fijos. Encuentre la curva que minimiza el tiempo de viaje entre los dos puntos.





Curva braquistócrona



Cálculo de variaciones

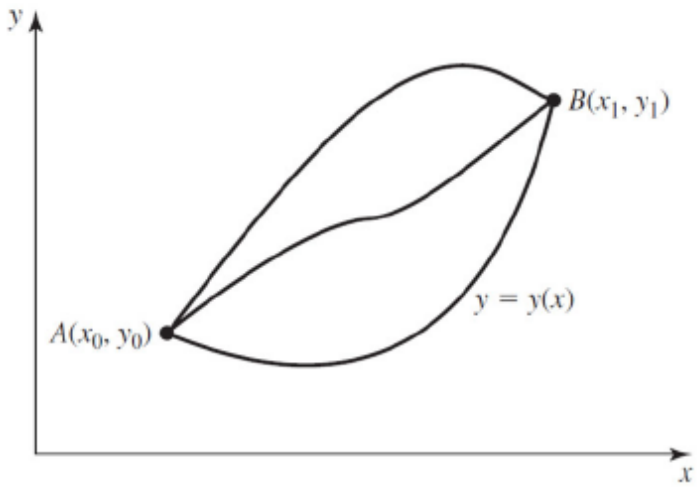
- Trata sobre la minimización o maximización de *funcionales*.
- **Funcional**: Un funcional J es una regla de correspondencia que asigna a cada función X en un cierto espacio, un único valor real. El espacio de funciones sería el dominio del funcional y el conjunto de valores asociados a las funciones es el rango del funcional.
- Compárese con la definición de función:

Función: Es una regla de correspondencia que asigna cada elemento de un conjunto D a un único elemento del conjunto R. Donde D se llama dominio y R, rango.

Cálculo de variaciones

- Un ejemplo de funcional es un conjunto de funciones de desempeño como las que hemos visto hasta ahora.
- La longitud de un trayectoria entre dos puntos es en el plano x-y, es otro ejemplo de funcional. Sabemos que:

$$I = I(y(x)) = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + (dy(x)/dx)^2}\, dx,$$



Dominio: Conjunto de funciones de trayectorias

Rango: La longitud total de la trayectoria

Cálculo de variaciones

- Entonces un funcional se puede decir que es una "función de funciones". Sea la función $x: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ el argumento del funcional ν. Una variación δx (del argumento del funcional) es similar a un diferencial de t:

$$\delta x = x - x_1$$

- Un funcional ν es continuo si un cambio "pequeño" de la función x corresponde a un cambio pequeño del funcional.

Recuerde: El argumento de una función que depende del tiempo es t

Cálculo de variaciones

- Un funcional es lineal si:

$$v(ax_1 + x_2) = av(x_1) + v(x_2)$$

- La variación de un funcional es como el diferencial de una función ($\Delta x = x(t + \Delta x) - x(t)$).

Recuerde:

$$x'(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t}. \quad = \lim_{\Delta \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{\delta x}{\delta t}$$

Cálculo de variaciones

- Puede demostrarse del concepto de derivada de una función que (Stanislaw, 2003):

$$\Delta x = x(t+\Delta t) - x(t) = \Delta x = x'(t)\Delta t + \beta(\Delta t)|\Delta t|$$

Parte lineal de Δx

$$= \boxed{L(t,\Delta t)} + \beta(\Delta t)|\Delta t|,$$

$Si\ \Delta t \to 0$ ➡ $\boxed{\delta x = L(t,\delta t) = x'(t)\delta t}$

Donde:

$$\beta(\Delta t) = \varphi(\Delta t) \qquad \text{if } \Delta t > 0$$
$$\beta(\Delta t) = -\varphi(\Delta t) \qquad \text{if } \Delta t < 0.$$

$$\lim_{\Delta t \to 0} \beta(\Delta t) = 0$$

- De forma análoga para una variación:

Parte lineal de Δv

$$\Delta v = \boxed{L(x,\delta x)} + \beta(\delta x)\|\delta x\|$$

$$L(\boldsymbol{x},\Delta\boldsymbol{x}) = Df(\boldsymbol{x})\,\Delta\boldsymbol{x} = \nabla f(\boldsymbol{x})^T\,\Delta\boldsymbol{x}$$

$Si\ \|\delta x\| \to 0$ ➡ $\boxed{\delta v = L(x,\delta x) = \nabla v(x)^T \delta x}$

Donde:

$$\|\delta x\| = \max_{t\in[t_0,t_1]} |\delta x|$$

$$\beta(\delta x) \to 0\ si\ \|\delta x\| \to 0$$

Ejemplo

- Halle la variación del funcional:

$$v = \int_0^1 (2x^2(t) + x(t))\,dt.$$

- Calculamos el incremento:

$$\begin{aligned}
\Delta v &= v(x+\delta x) - v(x) \\
&= \int_0^1 (2(x+\delta x)^2 + (x+\delta x))dt - \int_0^1 (2x^2 + x)dt \\
&= \int_0^1 (2x^2 + 4x\delta x + 2(\delta x)^2 + x + \delta x - 2x^2 - x)\,dt \\
&= \int_0^1 (4x+1)\delta x\,dt + 2\int_0^1 (\delta x)^2\,dt.
\end{aligned}$$

- Luego <u>la parte lineal</u> y solución del ejemplo es:

$$\delta v = \int_0^1 (4x+1)\delta x\,dt,$$

Cálculo de variaciones

- Se puede demostrar para mayor facilidad de computo:

$$\delta v = \frac{d}{d\alpha} v(x + \alpha \delta x) \Big|_{\alpha=0}$$

- En el ejemplo anterior:

$$\begin{aligned}
\delta v &= \frac{d}{d\alpha} v(x + \alpha \delta x)|_{\alpha=0} \\
&= \frac{d}{d\alpha} \left(\int_0^1 (2(x + \alpha \delta x)^2 + (x + \alpha \delta x))\, dt \right) \Bigg|_{\alpha=0} \\
&= \int_0^1 (4(x + \alpha \delta x)\delta x + \delta x)\, dt \Bigg|_{\alpha=0} \\
&= \int_0^1 (4x + 1)\delta x\, dt,
\end{aligned}$$

Cálculo de variaciones

- Se puede demostrar para mayor facilidad de computo:

$$\delta v = \frac{d}{d\alpha} v(x + \alpha \delta x) \Big|_{\alpha=0}$$

- En el ejemplo anterior:

$$\begin{aligned}
\delta v &= \frac{d}{d\alpha} v(x + \alpha \delta x)|_{\alpha=0} \\
&= \frac{d}{d\alpha} \left(\int_0^1 (2(x + \alpha \delta x)^2 + (x + \alpha \delta x))\, dt \right) \Big|_{\alpha=0} \\
&= \int_0^1 (4(x + \alpha \delta x)\delta x + \delta x)\, dt \Big|_{\alpha=0} \\
&= \int_0^1 (4x + 1)\delta x\, dt,
\end{aligned}$$

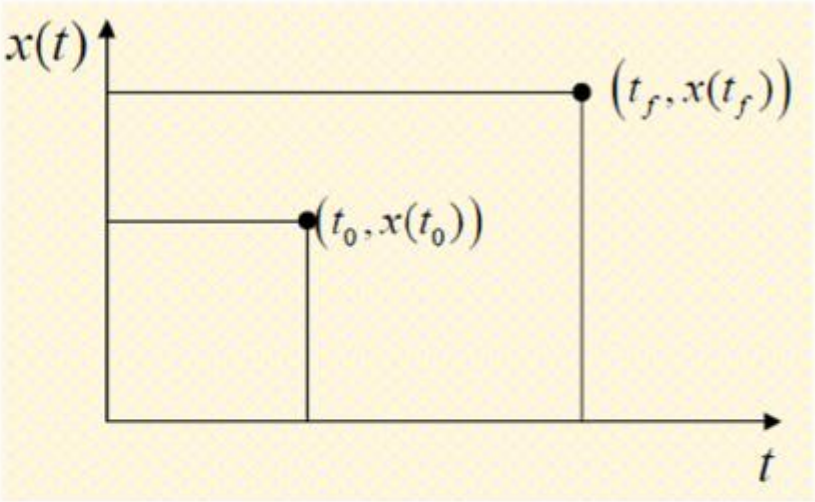
Teorema fundamental del cálculo de variaciones

- De forma análoga para una función, un funcional es máximo para una función x_0 si el valor del funcional evaluado en cualquier función cercana a x_0 es menor o igual al funcional de x_0. Se puede demostrar haciendo uso de la ecuación anterior el siguiente teorema:
- **Teorema**: Si para un funcional ν existe una variación; y el funcional alcanza un máximo o mínimo en una función x_0, entonces:

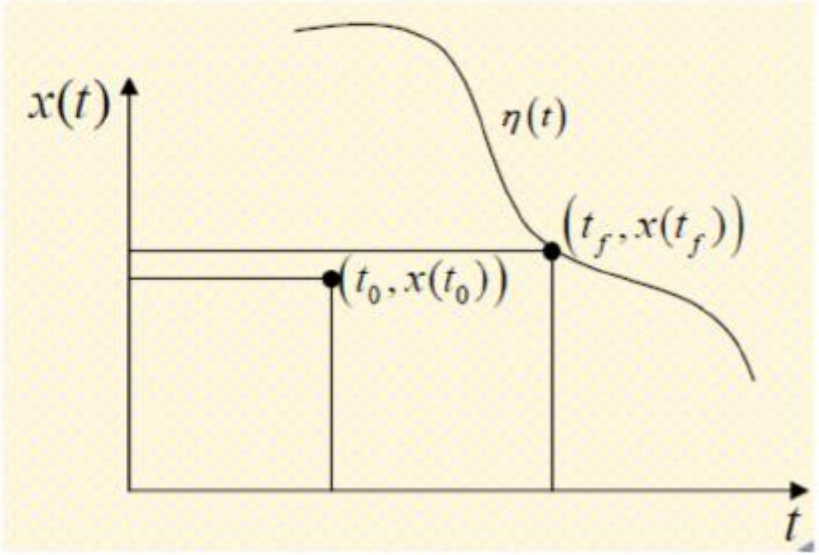
$$\delta\nu(x_0) = 0$$

Condiciones de frontera

- Problema de puntos finales fijos
  - (t_0,x_0) especificado
  - (t_f,x_f) especificado



- Problema de puntos finales libres
  - Completamente libre
  - Puede requerirse que permanezca en una línea n

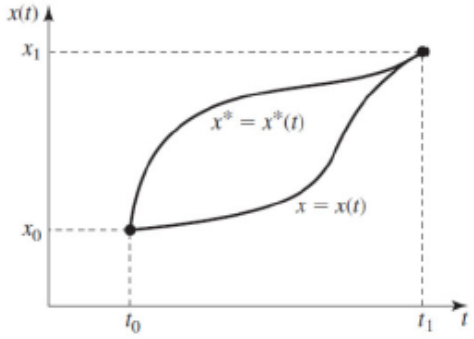


Ecuación de Euler-Lagrange

- Consideremos el siguiente problema de optimización
- Problema: Suponga que se dan dos puntos (t_0, x_0) y (t_1,x_1) en el plano x-t. Se desea hallar una curva o trayectoria que una los puntos tal que el funcional:

$$v(x) = \int_{t_0}^{t_1} F(t, x, \dot{x})\, dt$$

- evaluado en una curva alcance su valor extremo (máximo o mínimo)



Lema fundamental del cálculo de variaciones

- Para resolver esto hacemos se puede demostrar la siguiente observación:
- **Lema**: Suponga que una función $\phi: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es continua en el intervalo $[t_0, t_1]$, entonces:

$$\int_{t_0}^{t_1} \phi(t)\delta x(t)dt = 0$$

- Para todo δx en ese intervalo, si y solo si $\phi(t) = 0$ en cada punto del intervalo $[t_0, t_1]$

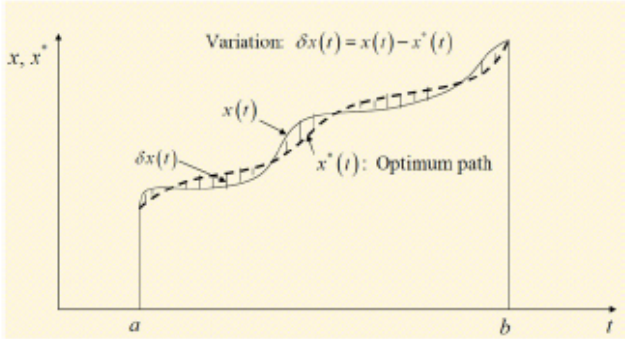
Ecuación de Euler-Lagrange

- Asumamos que existe un trayectoria optima x=x(t) uniendo los puntos (t_0,x_0) y (t_1,x_1), tal que $\delta v\big(x(t)\big) = 0$. Consideremos una curva arbitraria $x^* = x^*(t)$ que este cerca de *x* y provenga de una familia de curvas:

$$x(t,\alpha) = x(t) + \alpha(x^*(t) - x(t)) = x(t) + \alpha\delta x(t)$$

- Note que si α=0, obtenemos x(t) y para $\alpha = 1$, obtenemos $x^*(t)$.

$$\boxed{x(t,\alpha) = x(t) + \alpha\delta x(t)}$$



Ecuación de Euler-Lagrange

- Para evaluar la variación del funcional necesitamos las derivadas, entonces necesitaremos hacer:

$$\frac{d}{dt}(\delta x(t)) = \frac{d}{dt}(x^*(t) - x(t)) = \delta x',$$

$$\frac{d^2}{dt^2}(\delta x(t)) = \frac{d^2}{dt^2}(x^*(t) - x(t)) = \delta x''.$$

- Ahora analizaremos el comportamiento del funcional $v = \int_{t_0}^{t_1} F(t, x, \dot{x})dt$
- Note que ahora v depende de α. Entonces:

$$v\big(x(t,\alpha)\big) = \Phi(\alpha)$$

Recuerde: $$\delta v = \frac{d}{d\alpha} v(x + \alpha\delta x)\Big|_{\alpha=0}$$

Ecuación de Euler-Lagrange

- De la condición de suficiencia para que un punto sea extremo de un función de una variable, podemos decir que $\alpha = 0$ es una candidata que extremiza a Φ si

$$\left.\frac{d\Phi(\alpha)}{d\alpha}\right|_{\alpha = 0} = 0$$

- Donde: $$\Phi(\alpha) = \int_{t_0}^{t_1} F(t, x(t, \alpha), x'(t, \alpha))\, dt,$$

Recuerde: $$\delta v = \left.\frac{d}{d\alpha} v(x + \alpha \delta x)\right|_{\alpha=0}$$

Ecuación de Euler-Lagrange

- Sabemos que:

$$\delta v = \frac{d}{d\alpha} v(x + \alpha \delta x)|_{\alpha=0}$$

- Entonces:

$$\frac{d}{d\alpha}\Phi(0) = \delta v$$

- Y por lo tanto:

$$\boxed{\delta v = \int_{t_0}^{t_1} (F_x \delta x + F_{x'} \delta x')\, dt}$$

Ecuación de Euler-Lagrange

- Integrando:

$$\boxed{\delta v = (F_{x'}\delta x)|_{t_0}^{t_1} + \int_{t_0}^{t_1} \left(F_x - \frac{d}{dt} F_{x'} \right) \delta x \, dt}$$

- Ya que los puntos finales son fijos, esto implica:

$$\left.\begin{aligned} \delta x|_{t=t_0} &= x^*(t_0) - x(t_0) = 0 \\ \delta x|_{t=t_1} &= x^*(t_1) - x(t_1) = 0 \end{aligned}\right\} \text{Valores de frontera}$$

Ecuación de Euler-Lagrange

- Entonces:

$$\delta v = \int_{t_0}^{t_1} \left(F_x - \frac{d}{dt} F_{x'} \right) \delta x \, dt$$

- Por condición necesaria de optimalidad (teorema fundamental): $\delta v = 0$
- Por el lema fundamental:

$$\boxed{F_x - \frac{d}{dt} F_{x'} = 0}$$

Esta es la ecuación de Euler-Lagrange

$F_x = \frac{\partial}{\partial x} F(t, x(t,\alpha), x'(t,\alpha))$ $\qquad$ $F_{x'} = \frac{\partial}{\partial x'} F(t, x(t,\alpha), x'(t,\alpha))$

Conclusión

- Condición necesaria para puntos fijos:

1. $$\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\right) = 0$$

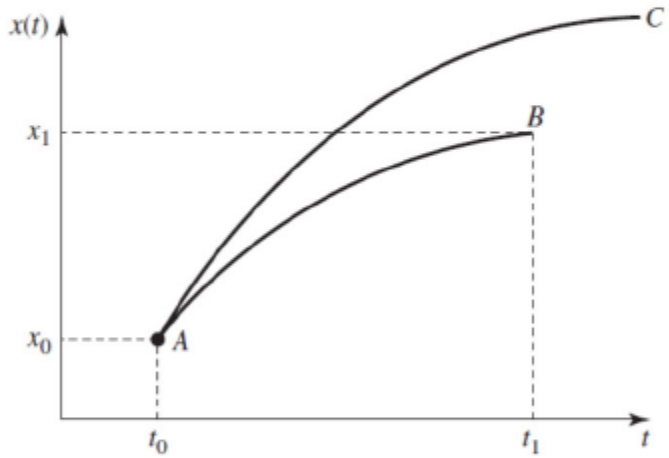
Ecuación de Euler-Lagrange

Problema para (t_0,x_0) fijo y (t_f,x_f) libre

- En el plano (x,t) el punto a la izquierda A está fijo, mientras que el punto a la derecha B esta libre. Se requiere encontrar la trayectoria x=x(t) empezando en A en donde el funcional $\nu = \int_{t_0}^{t_1} F(t,x,x')\,dt$ pueda lograr su valor extremo.

Problema para (t_0,x_0) fijo y (t_f,x_f) libre

- Asumiendo que la solución existe, esta trayectoria debe satisfacer la ecuación de Euler-Lagrange.



Considere una trayectoria adjunta especificado por $x + \delta x$ uniendo (t0,x0) y $(t_1 + \delta x_1, x_1 + \delta x_1)$, entonces:

$$\begin{aligned}\Delta v &= v(x+\delta x) - v(x)\\ &= \int_{t_0}^{t_1+\delta t_1} F(t, x+\delta x, x'+\delta x')\,dt - \int_{t_0}^{t_1} F(t,x,x')\,dt\\ &= \int_{t_1}^{t_1+\delta t_1} F(t, x+\delta x, x'+\delta x')\,dt + \int_{t_0}^{t_1} (F(t, x+\delta x, x'+\delta x') - F(t,x,x'))\,dt\end{aligned}$$

Problema para (t_0,x_0) fijo y (t_f,x_f) libre

- El objetivo será extraer de $\Delta\nu$ la parte lineal de δx.
- Aproximando la primera integral:

$$\int_{t_1}^{t_1+\delta t_1} F(t, x+\delta x, x'+\delta x')\, dt \approx F(t, x, x')|_{t=t_1}\delta t_1 .$$

- Y expandiendo el integrando de la segunda integral con una serie de Taylor y manteniendo solo los términos de 1er orden

$$\int_{t_0}^{t_1} (F(t, x+\delta x, x'+\delta x') - F(t, x, x'))\, dt = \int_{t_0}^{t_1} (F_x(t, x, x')\delta x + F_{x'}(t, x, x')\delta x')\, dt.$$

Problema para (t_0,x_0) fijo y (t_f,x_f) libre

- Integrando el segundo termino y combinando con el primero resulta:

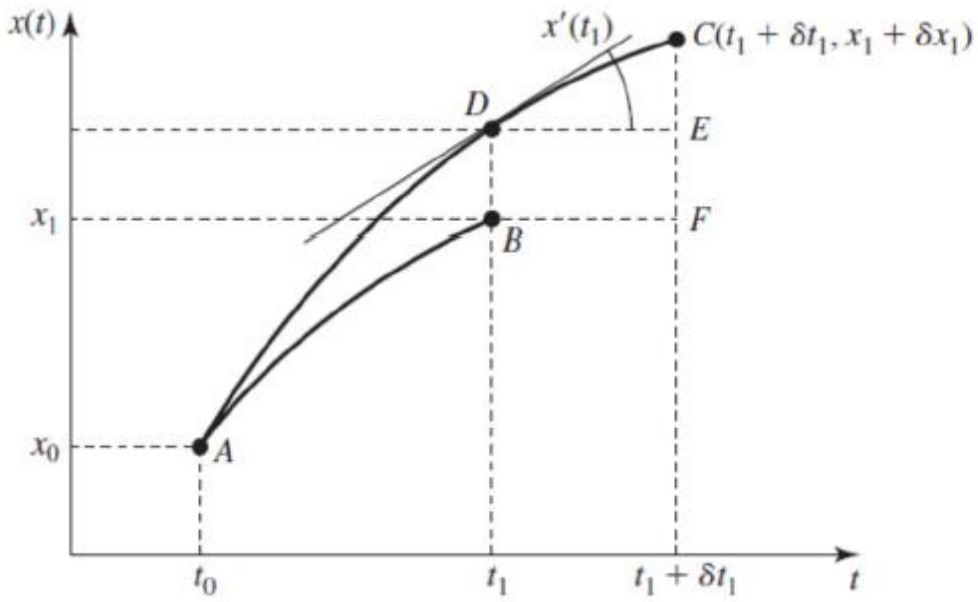
$$\int_{t_0}^{t_1} (F_x \delta x + F_{x'} \delta x')\, dt = (F_{x'} \delta x)\Big|_{t_0}^{t_1} + \int_{t_0}^{t_1} \left(F_x - \frac{d}{dt} F_{x'} \right) \delta x \, dt$$

- Sabemos que esto debe cumplir la ecuación de Euler-Lagrange: $F_x - \frac{d}{dt} F_{x'} = 0$
- Además como el punto de la izquierda es fijo, entonces: $\delta x|_{t=t_0} = 0.$

Problema para (t_0,x_0) fijo y (t_f,x_f) libre

- Finalmente tenemos:

$$\Delta v \approx F(t, x, x')|_{t=t_1}\delta t_1 + (F_{x'}\delta x)|_{t=t_1}.$$



$$DB = \delta x|_{t=t_1},$$
$$FC = \delta x_1,$$
$$EC \approx x'(t_1)\delta t_1,$$
$$DB = FC - EC.$$

$$\delta x|_{t=t_1} \approx \delta x_1 - x'(t_1)\delta t_1.$$

Problema para (t_0,x_0) fijo y (t_f,x_f) libre

- Finalmente:

$$\begin{aligned}\delta v &= F(t,x,x')|_{t=t_1}\delta t_1 + F_{x'}|_{t=t_1}(\delta x_1 - x'(t_1)\delta t_1)\\ &= (F - x'F_{x'})|_{t=t_1}\delta t_1 + F_{x'}|_{t=t_1}\delta x_1.\end{aligned}$$

- Si las variaciones δt_1 y δx_1 son arbitrarias, obtendremos $\delta v = 0$ si en adición a la ecuación de Euler Lagrange, las siguiente condiciones también se cumplen:

$$\boxed{(F - x'F_{x'})|_{t=t_1} = 0 \quad \text{and} \quad F_{x'}|_{t=t_1} = 0.}$$

Condiciones de Transversalidad

Conclusión

- Condiciones necesarias para puntos inicial fijo (t_0,x_0):

1. $$\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\right) = 0$$ Ecuación de Euler-Lagrange

2. $$\left[\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\delta x\right]_{t_f} = 0$$ Condición de transversalidad

*La condición 1 debe cumplirse independientemente de la condición de frontera escogida

Resumen

- 1ra condición necesaria para optimalidad

1. $$\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\right) = 0$$ Ecuación de Euler-Lagrange

*La condición 1 debe cumplirse independientemente de la condición de frontera escogida

Resumen

- Condición general de transversalidad:

2. $$\boxed{\left[\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\delta x\right]_{t_0}^{t_f} + \left[\left\{F - \dot{x}\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\right)\right\}\delta t\right]_{t_0}^{t_f} = 0}$$

- Casos especiales:

1) Puntos fijos: (t_0,x_0) y (t_f,x_f) fijos

   No hay otra condición.

2) t_0 y t_f fijos (x_0 y x_f libres)

$$\left[\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\delta x\right]_{t_0}^{t_f} = 0$$

Resumen

3) (t_0,x_0) fijos (t_f libre, x_f libre)

$$\left[\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\right]_{t_f} \delta x_f + \left\{F - \dot{x}\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\right)\right\}\Big|_{t_f} \delta t_f = 0$$

4) (t_0,x_0) y x_f fijos (t_f libre)

$$\left\{F - \dot{x}\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\right)\right\}\Big|_{t_f} = 0$$

5) (t_0,x_0) y t_f fijos (x_f libre)

$$\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\Big|_{t_f} = 0$$

Ejemplo 1

- Encuentre el extremo del siguiente funcional:

$$v = \int_0^{\pi/2} ((x')^2 - x^2)\,dt$$

- Donde x(0)=0 y $x\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$

$$\begin{aligned} F_x - \frac{d}{dt}F_{x'} &= \frac{\partial}{\partial x}((x')^2 - x^2) - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial}{\partial x'}((x')^2 - x^2)\right) \\ &= -2x - \frac{d}{dt}(2x') \\ &= -2x - 2x'' \\ &= 0. \end{aligned}$$

Ejemplo 1

- Entonces la ecuación de Euler-Lagrange del funcional dado puede presentarse así

$$x'' + x = 0$$

- Resolviendo la ec. Diferencial tomando transformada de Laplace:

$$s^2 + 1 = 0 \Rightarrow \begin{array}{c} x(t) = C_1 \cos t + C_2 \sin t \\ x(0) = C_1 = 0, \\ x\left(\frac{\pi}{2}\right) = C_2 = 1. \end{array} \Rightarrow x(t) = \sin t$$

El funcional se minimiza o maximiza con la función sin(t)

Ejemplo 2

- Encuentre un extremo del funcional:

$$v = \int_0^1 ((x')^2 + 12xt)\,dt$$

- Donde x(0)=0 y x(1)=1.

Ejemplo 3

- Considere el funcional que se muestra, el punto de la izquierda es fijo y el de la derecha es libre.

$$v = \int_0^1 ((x')^2 + 12xt)\,dt,$$

- Aquí tenemos que t1=1. Como $\delta t_1 = 0$ y δx_1 es arbitrario, las condiciones de trasnversalidad para el punto de la derecha son:

$$F_{x'}|_{t=t_1} = 0.$$

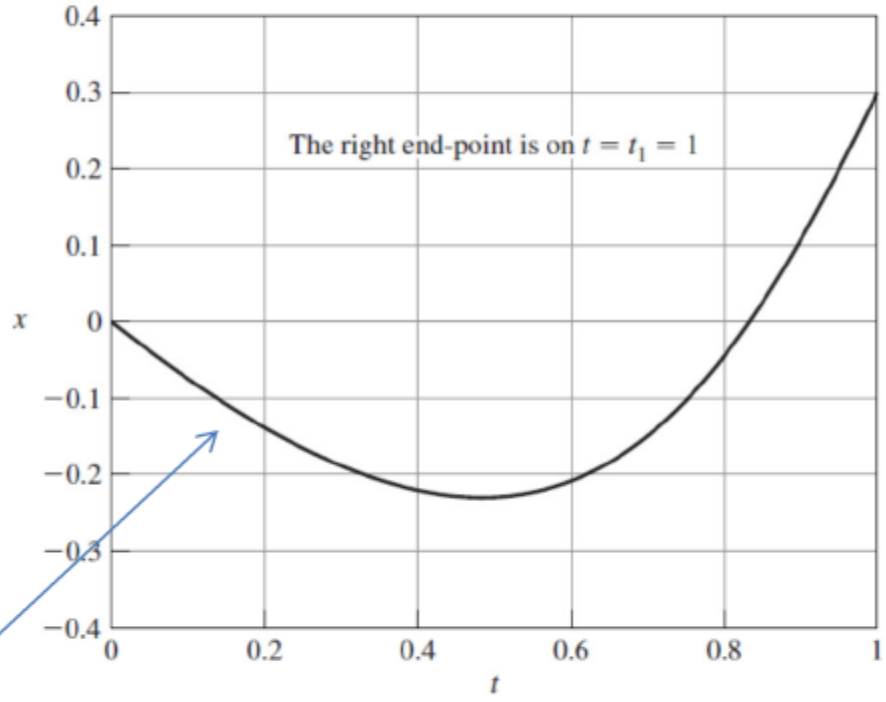
Ejemplo 3

- Tomando en cuenta que la ecuación de Euler Lagrange es x''=6t, entonces:

$$
\begin{aligned}
0 &= F_{x'}|_{t=t_1} \\
&= 2x'(t_1) \\
&= 2(C_1 + 3t^2)|_{t=1} \\
&= 2(C_1 + 3).
\end{aligned}
$$

- Entonces C1=-3 y el extremo será:

$$x(t) = -3t + t^3.$$



Gracias por vuestra atención...