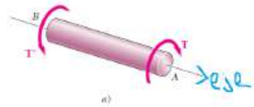
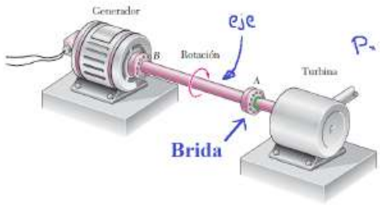
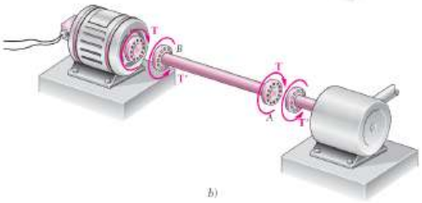
Se va a estudiar los esfuerzos y deformaciones en elementos de sección transversal sometidos a pares de torsión.



Eje sometido a torsión



$P = T.\omega$



Eje de transmisión.

Acoples flexibles

Análisis preliminar de los esfuerzos en un eje

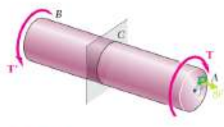


Fig. 3.3 Eje sometido a pares de torsión.

ρ = distancia radial

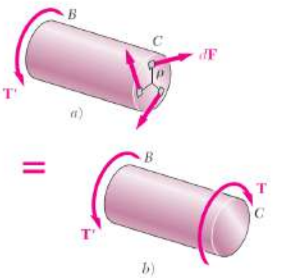
$dT = \rho . dF$

$T = \int \rho . dF$

Para un elemento diferencial

$\tau = \dfrac{dF}{dA}$

$\tau . dA = dF \Rightarrow \boxed{T = \int \rho . \tau . dA}$



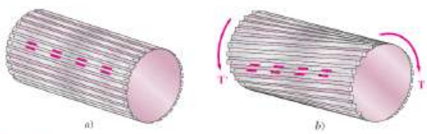


Figura 3.6 Modelo de un eje.

Todas las secciones transversales permanecen planas y sin distorsión (cada sección transversal gira como una placa solida rigida)

Deformaciones en un eje circular

ϕ = ángulo de giro

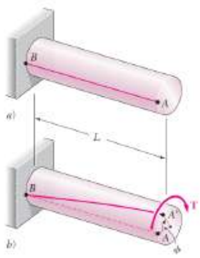


Figura 3.7 Eje con soporte fijo.

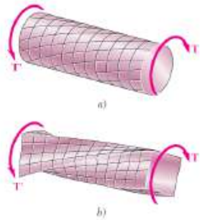


Figura 3.8 Comparación de deformaciones en un eje circular y uno cuadrado.

Hay que tener consideraciones especiales para analizar secciones no circulares

En casos prácticos se recomienda el uso del METODO DE LOS ELEMENTOS FINITOS

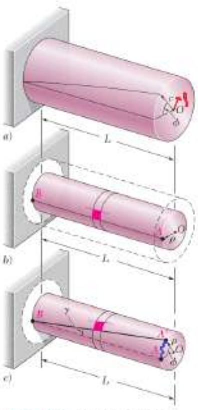
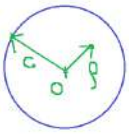


Figura 3.13 Deformación unitaria cortante.



c: radio externo

ρ: una distancia radial a cualquier punto

γ: deformación por cortante

$\rho . \phi = \gamma . L$

$\gamma = \dfrac{\rho . \phi}{L} \quad \ldots (\alpha)$

$\gamma_{máx}$ = deformación por cortante máxima

$\gamma_{máx} = \dfrac{c . \phi}{L} \quad \ldots (\beta)$

dividiendo:

$\dfrac{\gamma}{\gamma_{máx}} = \dfrac{\dfrac{\rho . \cancel{\phi}}{\cancel{L}}}{\dfrac{c . \cancel{\phi}}{\cancel{L}}}$

$\boxed{\gamma = \dfrac{\rho}{c} . \gamma_{máx}}$

Esfuerzo en el rango elástico

Para una carga axial:

$$\sigma = E \cdot \epsilon$$

Para una carga a torsión:

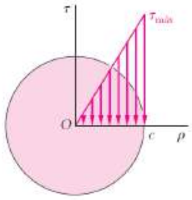
$$\tau = G \cdot \gamma$$

G: módulo de rigidez o módulo de corte del material

$$G \cdot \gamma = \frac{\rho}{c} \cdot \gamma_{máx} \cdot G$$

$$\boxed{\tau = \frac{\rho}{c} \tau_{máx}}$$

En forma grafica



$$\boxed{T = \int \rho \cdot \tau \cdot dA}$$

$$T = \int \rho \cdot \frac{\rho}{c} \tau_{máx} \cdot dA$$

$$T = \frac{\tau_{máx}}{c} \cdot \underbrace{\int \rho^2 \cdot dA}_{\text{momento polar de inercia } J}$$

$$T = \frac{\tau_{máx}}{c} \cdot J$$

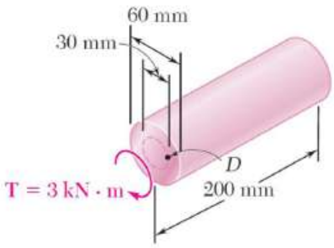
$$\therefore \quad \boxed{\tau_{máx} = \frac{T \cdot c}{J}}$$

Para una sección circular, el momento polar de inercia J, para un radio c es:

$$\boxed{J = \frac{1}{2} \pi \cdot c^4}$$

Problema 01

Un par de torsión T = 3 kN·m se aplica al cilindro de bronce sólido mostrado en la figura. Determine a) el máximo esfuerzo cortante, b) el esfuerzo cortante en el punto *D* que yace sobre un círculo de 15 mm de radio dibujado en el extremo del cilindro, c) el porcentaje del par de torsión soportado por la porción del cilindro dentro del radio de 15 mm.



$$\boxed{\tau_{max} = \frac{T \cdot c}{J}}$$

$$\boxed{J = \frac{1}{2} \pi \cdot c^4}$$

$$\boxed{\tau = \frac{\rho}{c} \cdot \tau_{max}}$$

$c = 30$ mm

$$J = \frac{1}{2} \pi \cdot (0{,}03\,m)^4 = 1{,}2723 \times 10^{-6}\, m^4$$

a) $$\tau_{máx} = \frac{T \cdot c}{J} = \frac{3000\, N.m \cdot (0{,}03\,m)}{1{,}2723 \times 10^{-6}\, m^4} = 70{,}6 \times 10^6\, Pa \approx 70\, MPa$$

$$\tau_{máx} < \tau_{adm.\, material}$$

b) $$\tau_D = \frac{\rho_D}{c} \cdot \tau_{máx} \Rightarrow \tau_D = \frac{0{,}015\,m}{0{,}03\,m} \cdot 70\,MPa = 35\,MPa$$

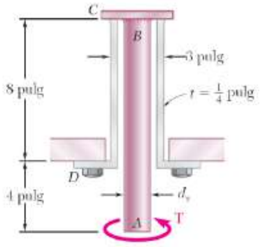
c) $$\tau_D = \frac{T_D \cdot \rho_D}{J_D} \Rightarrow T_D = \frac{\tau_D \cdot J_D}{\rho_D} \quad \Bigg\} \quad T_D = \frac{35 \times 10^6\, Pa \cdot 7{,}9522 \times 10^{-8}\, m^4}{0{,}015\,m}$$

$$J_D = \frac{1}{2} \pi \cdot (0{,}015\,m)^4 = 7{,}9522 \times 10^{-8}\, m^4 \qquad T_D = 185{,}55\, N.m$$

$$\frac{T_D}{T} = \frac{185{,}55\, N.m}{3000\, N.m} = 6{,}19\%$$

Problema 02

El vástago sólido AB tiene un diámetro d_s = 1.5 pulg y está hecho de un acero con un esfuerzo cortante permisible de 12 ksi, mientras que la manga CD está hecha de latón y tiene un esfuerzo cortante permisible de 7 ksi. Determine el par de torsión $\boldsymbol{T}$ máximo que puede aplicarse en A.

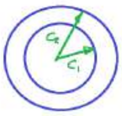


$$\boxed{\tau_{max} = \frac{T.c}{J}}$$

$$\boxed{J = \frac{1}{2}\pi.c^4}$$

$$\boxed{\tau = \frac{\rho}{c}.\tau_{max}}$$

Para la manga CD



$c_2 = 1{,}5$ pulg

$c_1 = 1{,}5$ pulg $- \frac{1}{4}$ pulg $= 1{,}25$ pulg

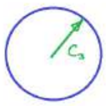
$J = \frac{1}{2}\pi.(c_2^4 - c_1^4) = \frac{1}{2}\pi.(1{,}5^4 - 1{,}25^4) = 4{,}1172 \text{ pulg}^4$

$\tau_{máx} = \frac{T.c_2}{J}$ → $T = \frac{\tau_{máx}.J}{c_2}$ $T = \frac{7 \times 10^3 \text{ psi} . 4{,}1172 \text{ pulg}^4}{1{,}5 \text{ pulg}}$

$T = 19213{,}6$ lbf. pulg

Para el vastago AB

$J_{AB} = \frac{1}{2}\pi.(0{,}75 \text{ pulg})^4 = 0{,}49701 \text{ pulg}^4$



$c_3 = 0{,}75$ pulg

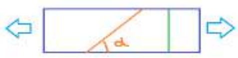
$\tau_{máx} = \frac{T.c_3}{J_{AB}}$ → $T = \frac{\tau_{máx}.J_{AB}}{c_3}$

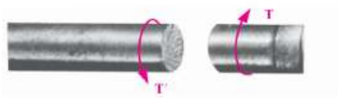
$T = \frac{12 \times 10^3 \text{ psi} . 0{,}49701 \text{ pulg}^4}{0{,}75 \text{ pulg}}$

$T = 7952{,}16$ lbf. pulg

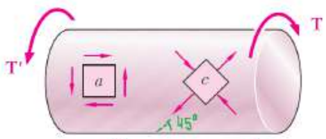
La carga máxima permisible para que se cumpla ambos requisitos es T = 7952.16 lbf.pulg

Los esfuerzos normales y cortantes o una combinación de ambos pueden encontrarse bajo la misma condición de carga, dependiendo de la orientación del elemento elegido.





a) Falla dúctil



$\tau_{máx} = \frac{Tc}{J}$ $\sigma_{45°} = \pm\frac{Tc}{J}$

b) Falla rígida

Ángulo de giro en el rango elastico

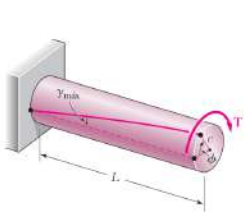


Figura 3.20 Ángulo de giro ϕ.

$$\gamma_{máx} = \frac{c\phi}{L}$$

$$\gamma_{máx} = \frac{\tau_{máx}}{G} = \frac{Tc}{JG}$$

$$\phi = \frac{TL}{JG}$$ **Ángulo de giro** **(en radianes)**

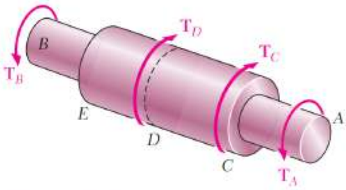
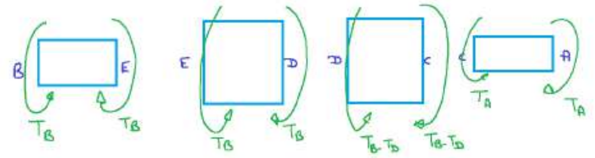
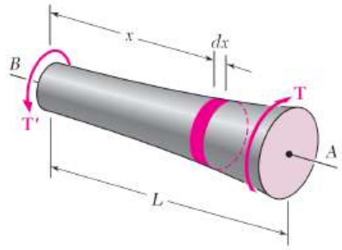


Figura 3.21 Secciones y pares de torsión múltiples.

$$\phi = \sum_i \frac{T_i L_i}{J_i G_i}$$



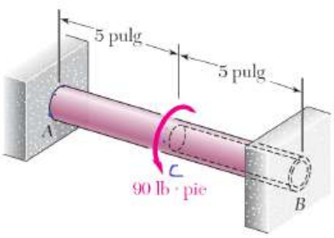
Para un eje de sección variable



$$d\phi = \frac{T\,dx}{JG}$$

$$\boxed{\phi = \int_0^L \frac{T\,dx}{JG}}$$

Ejes estáticamente inderteminados

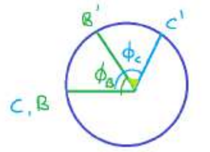


$T_A + T_B = 90 \text{ lb.pie}$

ϕ_1 = **angulo de giro de la porción AC**

ϕ_2 = **angulo de giro de la porción CB**

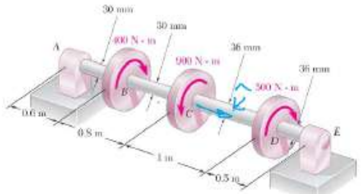
$\phi_1 + \phi_2 = 0$

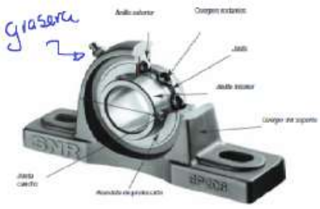


$\phi_c - \phi_B$ = giro relativo

Problema 08

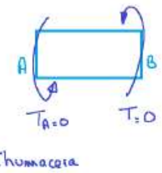
Los pares de torsión mostrados en la figura se ejercen sobre las poleas B, C y D. Si se sabe que todo el eje está hecho de aluminio (G = 27 GPa), determine el ángulo de giro entre a) C y B, b) D y B



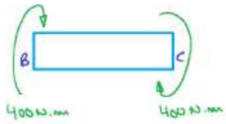


El ángulo de giro entre A y B

$$\boxed{\phi = \frac{TL}{JG}}$$ **Ángulo de giro** **(en radianes)**



El ángulo de giro entre B y C



$T_{BC} = 400 \text{ N.m}$ $\quad L_{BC} = 0{,}8 \text{ m}$

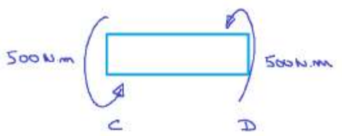
$C = 15 \text{ mm}$ $\quad G = 27.10^9 \text{ Pa}$

$J_{BC} = \frac{1}{2}\pi . (0{,}015 \text{ m})^4 = 7{,}952 \times 10^{-8} \text{ m}^4$

a) $\phi_{C/B} = \frac{T.L}{J.G} = \frac{400 \text{ N.m} \;.\; 0{,}8 \text{ m}}{7{,}952 \times 10^{-8} \text{ m}^4 . \; 27 \times 10^9 \text{ Pa}} = 0{,}149042 \text{ rad}$

$\phi_{C/B} = \phi_C - \phi_B$

El ángulo de giro entre C y D



$T_{CD} = 500 \text{ N.m}$ $\quad C = 18 \text{ mm}$

$L_{CD} = 1 \text{ m}$ $\quad G = 27 \times 10^9 \text{ Pa}$

$J_{BC} = \frac{1}{2}\pi . (0{,}018 \text{ m})^4 = 0{,}1649 \times 10^{-6} \text{ m}^4$

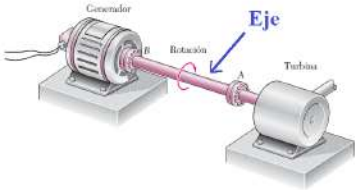
$\phi_{D/C} = \frac{T_{CD} . L_{CD}}{J_{BC} . G} = \frac{500 \text{ N.m} \;.\; 1 \text{ m}}{0{,}1649 \times 10^{-6} \text{ m}^4 . \; 27 \times 10^9 \text{ Pa}} = 0{,}112302 \text{ rad}$ $\quad \phi_{D/C} = \phi_D - \phi_C$

$$\left.\begin{aligned} \phi_{C/B} &= \phi_C - \phi_B \\ \phi_{D/C} &= \phi_D - \phi_C \end{aligned}\right\} \phi_D - \phi_B = \phi_{D/B} = 0{,}149042 \text{ rad} + 0{,}112302 \text{ rad} = 0{,}26134 \text{ rad}$$

Diseño de ejes de transmisión

Las especificaciones principales que deben cumplirse en el diseño de un eje de transmisión son la *potencia* que debe transmitirse y la *rapidez de rotación* del eje. La función del diseñador es seleccionar el material y las dimensiones de la sección transversal del eje, para que el esfuerzo cortante máximo permisible del material no sea excedido cuando el eje transmite la potencia requerida a la rapidez especificada.

$$\boxed{P = T\omega} \quad \ldots \qquad T = N.m \qquad \omega = s^{-1}$$



Sabemos:

$$\boxed{\tau = \frac{T.\rho}{J}}$$

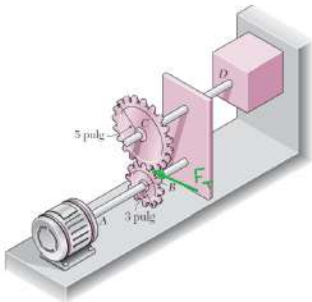
J = momento polar de inercia

Para un circulo

$$J = \frac{1}{2}\pi c^4$$

Problema 16

Los dos ejes sólidos y los engranes que se muestran en la figura se emplean para transmitir 16 hp desde el motor A hasta la máquina herramienta en D, a una velocidad de 1 260 rpm. Si se sabe que el esfuerzo cortante permisible es de 8 ksi, determine el diámetro requerido a) del eje AB, b) del eje CD.



$\tau_{perm} = 8$ ksi

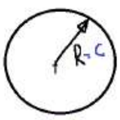
$$\left.\begin{array}{l} T_{AB} = F_T . r_B \\ T_{CD} = F_T . r_C \end{array}\right\} \quad \frac{T_{AB}}{T_{CD}} = \frac{r_B}{r_C}$$

$\omega_{AB} > \omega_{CD}$

$P = T.\omega$ $\qquad$ $1\ hp = 550$ lbf.pie/s $\qquad$ 1 pie $= 12$ pulg

$$16\ hp . \frac{550\ lbf.pie/s}{1\ hp} = T_{AB} . 1260 \frac{\cancel{rev}}{\cancel{min}} . \frac{1\ \cancel{min}}{60\ s} . \frac{2\pi}{1\ \cancel{rev}}$$

$$T_{AB} = 66,69\ lbf.pie = 800,28\ lbf.pulg$$



$$\tau_{máx} = \frac{T_{AB} . r_{AB}}{J_{AB}} \qquad J_{AB} = \frac{1}{2}\pi . r_{AB}^4$$

$$\tau_{máx} = \frac{T_{AB} . r_{AB}}{\frac{1}{2}\pi . r_{AB}^4} = \frac{2 . T_{AB}}{\pi . r_{AB}^3}$$

$$8\,000\ psi = \frac{2 . 800,28\ lbf.pulg}{\pi . r_{AB}^3}$$

$$r_{AB} = 0,4\ pulg \qquad \phi_{AB} = 0,8\ pulg$$

b)

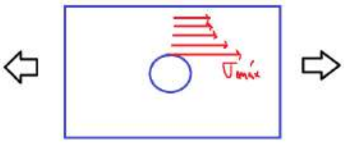
$$\frac{T_{AB}}{T_{CD}} = \frac{r_B}{r_C} \Rightarrow T_{CD} = T_{AB} . \left(\frac{r_C}{r_B}\right) \qquad T_{CD} = 800,28\ lbf.pulg . \left(\frac{5\ pulg}{3\ pulg}\right)$$

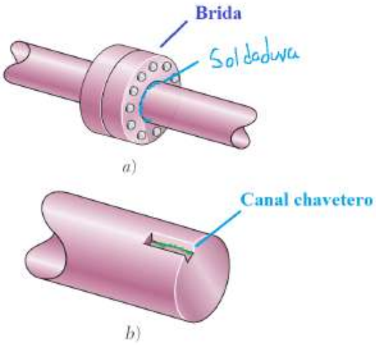
$$T_{CD} = 1333,8\ lbf.pulg$$

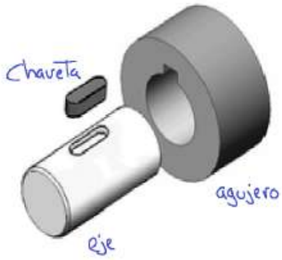
$$\tau_{máx} = \frac{2 . T_{CD}}{\pi . r_{CD}^3} = \frac{2 \times 1333,8\ lbf.pulg}{\pi . r_{CD}^3} = 8\,000\ psi$$

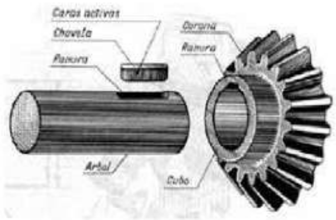
$$r_{CD} = 0,47\ pulg \qquad \phi_{CD} = 0,94\ pulg$$

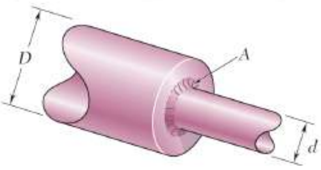
Concentraciones de esfuerzos en ejes circulares

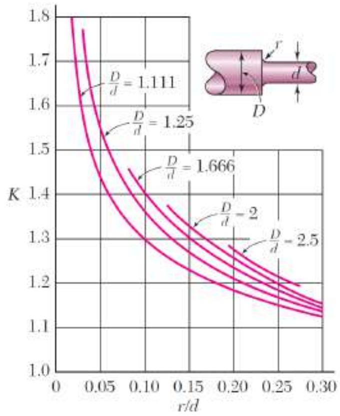










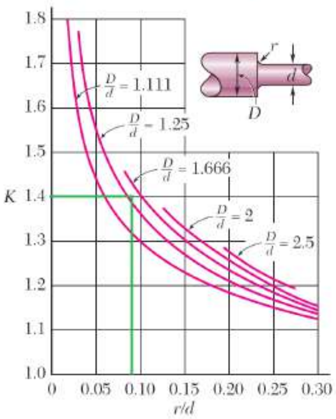


$$\tau_{máx} = K \cdot \frac{T \cdot c}{J}$$

donde el esfuerzo Tc/J es el esfuerzo calculado para el eje de menor diámetro.

Problema 19

Si se sabe que el eje escalonado que se muestra en la figura transmite un par de torsión de magnitud T = 2.50 kips·pulg, determine el esfuerzo cortante máximo en el eje cuando el radio del filete es a) $r = \frac{1}{8}$ pulg, b) $r = \frac{3}{16}$ pulg.



$$\frac{r}{d} = \frac{1/8 \text{ pulg}}{1,5 \text{ pulg}} = 0,083$$

$$\frac{D}{d} = \frac{2 \text{ pulg}}{1,5 \text{ pulg}} = 1,333$$

$$K = 1,4$$

$$\tau_{máx} = 1,4 \cdot \left(\frac{2500 \text{ lbf.pulg} \times 0,75 \text{ pulg}}{\frac{1}{2}\pi \cdot (0,75 \text{ pulg})^4} \right)$$

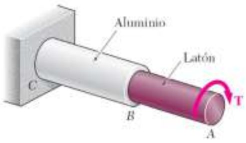
$$\tau_{máx} = 5281,59 \text{ lbf/pulg}^2$$

$$\tau_{máx} = 5,3 \text{ ksi}$$

Mag. Ing Omar Bejarano

Problema 05

La varilla solida BC tiene un diámetro de 30 mm y está hecha de un aluminio para el que el esfuerzo cortante permisible es de 25 MPa. La varilla AB es hueca y tiene un diámetro exterior de 25 mm; está hecha de un latón para el que el esfuerzo cortante permisible es de 50 MPa. Determine a) el máximo diámetro interior de la varilla AB para el que el factor de seguridad es el mismo para cada varilla, b) el máximo par de torsión que puede aplicarse en A.

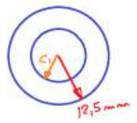


$\phi_{BC} = 30\,mm$

$\tau_{perm,al} = 25\,MPa$

$\tau_{perm,latón} = 50\,MPa$.

La sección de AB



$$\tau = \frac{T.c}{J}$$

$$J = \frac{1}{2}\pi . c^4$$

J = momento polar de inercia

$$J = \frac{1}{2}\pi . (0{,}015\,m)^4 = 7{,}9521 \times 10^{-8}\,m^4$$

$$25 \times 10^6\,Pa = \frac{T.\ 0{,}015\,m}{7{,}9521 \times 10^{-8}\,m^4}$$

$$T = 132{,}53\,N.m$$

Para el laton, la barra hueca AB

$$J = \frac{1}{2}\pi (0{,}0125^4 - c_1^4)$$

$$50 \times 10^6 = \frac{132{,}53\,N.m \cdot 0{,}0125\,m}{\frac{1}{2}\pi (0{,}0125^4 - c_1^4)}$$

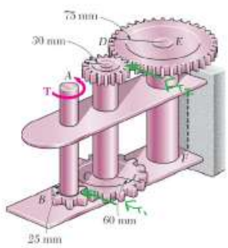
$$c_1 = 7{,}59 \times 10^{-3}\,m$$

$$c_1 = 7{,}59\,mm$$

$$\phi_{AB} = 2 \times 7{,}59\,mm = 15{,}18\,mm$$

Problema 06

Un par de torsión con magnitud T = 100 N·m se aplica al eje AB del tren de engranes mostrado. Si se sabe que los diámetros respectivos de los tres ejes sólidos son d_{AB} = 21 mm, d_{CD} = 30 mm y d_{EF} = 40 mm, determine el esfuerzo cortante máximo en a) el eje AB, b) el eje CD, c) el eje EF.



$T = 100\,N.m$

$\phi_{AB} = 21\,mm$

$\phi_{CD} = 30\,mm$

$\phi_{EF} = 40\,mm$

$r_B = 25\,mm$

$r_C = 60\,mm$

$r_D = 30\,mm$

$r_E = 75\,mm$

$$T = F_{T_1} . r_b \qquad T_{CD} = F_{T_1} . r_c \qquad \frac{T}{T_{CD}} = \frac{r_b}{r_c}$$

$$T_{CD} = T . \frac{r_c}{r_b} = 100\,N.m . \frac{60\,mm}{25\,mm} = 240\,N.m$$

$$\frac{T_{CD}}{T_{EF}} = \frac{r_D}{r_E} \Rightarrow T_{EF} = T_{CD} . \frac{r_E}{r_D} = 240\,N.m . \frac{75\,mm}{30\,mm} = 600\,N.m$$

Esfuerzo cortante máximo

$$\tau_{máx} = \frac{T.c}{J} = \frac{2.T}{\pi . c^3}$$

Para el eje AB

$$\tau_{máx,AB} = \frac{2 \times 100\,N.m}{\pi . (0{,}0105)^3} \cong 55\,MPa$$

Para el eje CD

$$\tau_{máx,CD} = \frac{2 \times 240\,N.m}{\pi . (0{,}015\,m)^3} \cong 45{,}3\,MPa$$

Para el eje EF

$$\tau_{máx,EF} = \frac{2 \times 600\,N.m}{\pi . (0{,}02\,m)^3} \cong 47{,}7\,MPa$$