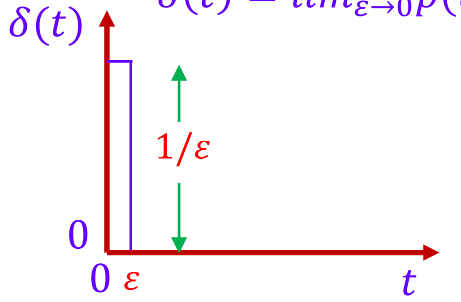
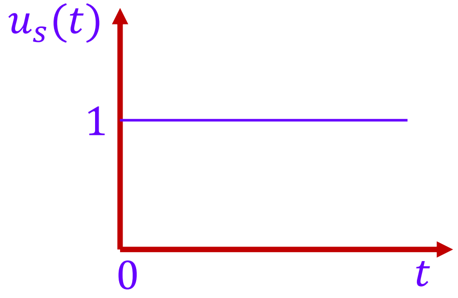
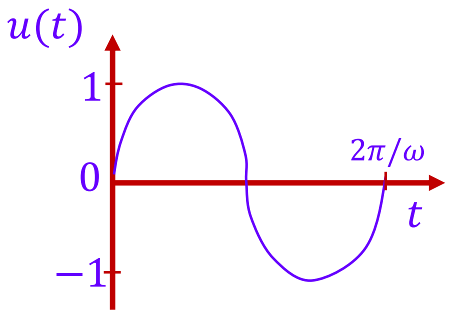
Análisis de Respuesta en el Tiempo de Sistemas de Primer Orden

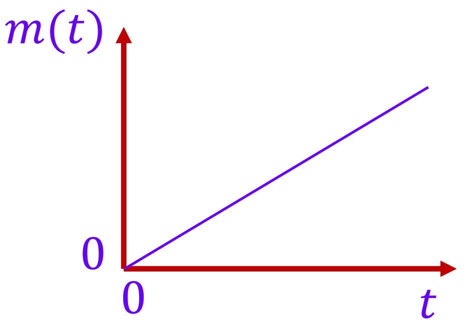
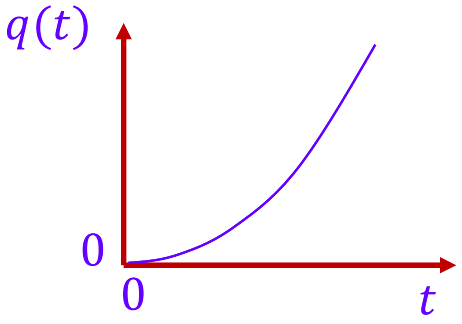
Señales de Prueba Típicas

- Si las entradas son lo suficientemente simples, matemáticamente, entonces la respuesta también será simple.

Impulso	Escalón	Senoide
$\delta(t) = lim_{\varepsilon\to 0} p(t)$  $p(t) = \begin{cases} 1/\varepsilon & t < \varepsilon \\ 0 & t \geq \varepsilon \end{cases}$	 $u_s(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & t \geq 0 \end{cases}$	 $u(t) = sen(\omega t)$
$L[\delta(t)] = 1$	$L[u_s(t)] = \frac{1}{s}$	$L[u(t)] = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$

Señales de Prueba Típicas

- La simplicidad de señales de entrada permitirá establecer los parámetros del controlador y estimar los <u>cambios necesarios</u> para mejorar la respuesta.

Rampa	Parábola
	
$m(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ t & t \geq 0 \end{cases}$	$q(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ t^2 & t \geq 0 \end{cases}$
$L[m(t)] = \frac{1}{s^2}$	$L[q(t)] = \frac{2}{s^3}$

Sistemas de Primer Orden

- Los sistemas de primer orden son sistemas cuyo modelo matemático puede ser representado por una E.D.O. de primer orden. En general tenemos :

$$\frac{dy(t)}{dt} + a_o y(t) = bu(t)$$

$donde:$ $y(t): salida\ o\ respuesta\ del\ sistema$

$u(t): entrada\ o\ excitacion\ del\ sistema$

Ejemplos Prácticos: Circuitos RC, Motores c.d. Sistemas de Nivel de Líquido, Hornos, Tanques a Presión, etc...

FT de Sistemas de Primer Orden

- Aplicando la Transformada de Laplace a la EDO de primer orden obtenemos la FT

$$sY(s) + a_o Y(s) = bU(s)$$

$$(s + a_o)Y(s) = bU(s)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b}{(s + a_o)}$$

FT de un sistema de 1er Orden en su formato estandar

$$\boxed{G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{K}{ts + 1}}$$

t: *constante de tiempo*

K: *constante de tiempo* , **G(0)**

FT de Sistemas de Primer Orden

- Determine los parámetros K y τ para los siguientes sistemas de primer orden:

$$G_1(s) = \frac{1}{2s+1} \Rightarrow K = 1 \quad \tau = 2$$

$$G_2(s) = \frac{1}{s+0.5} \Rightarrow K = 2 \quad \tau = 2$$

$$G_3(s) = \frac{0.5}{s+2} \Rightarrow K = 0.25 \quad \tau = 0.5$$

$$G_4(s) = \frac{10}{-2s+1} \Rightarrow K = 10 \quad \tau = -2$$

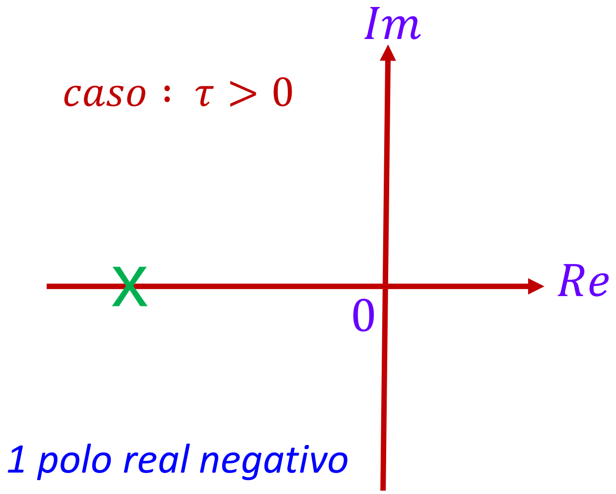
$$G_5(s) = \frac{1}{s-1} \Rightarrow K = -1 \quad \tau = -1$$

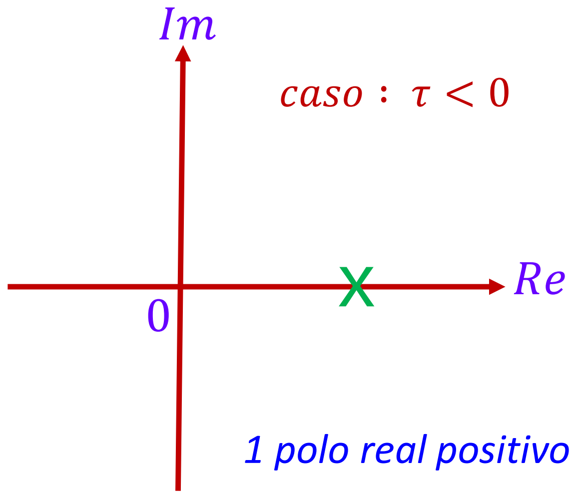
Polo de un Sistemas de Primer Orden

- Ecuación característica: $\Delta(s) = \tau s + 1 = 0$

$$\boxed{p_1 = -1/\tau}$$

1 polo real



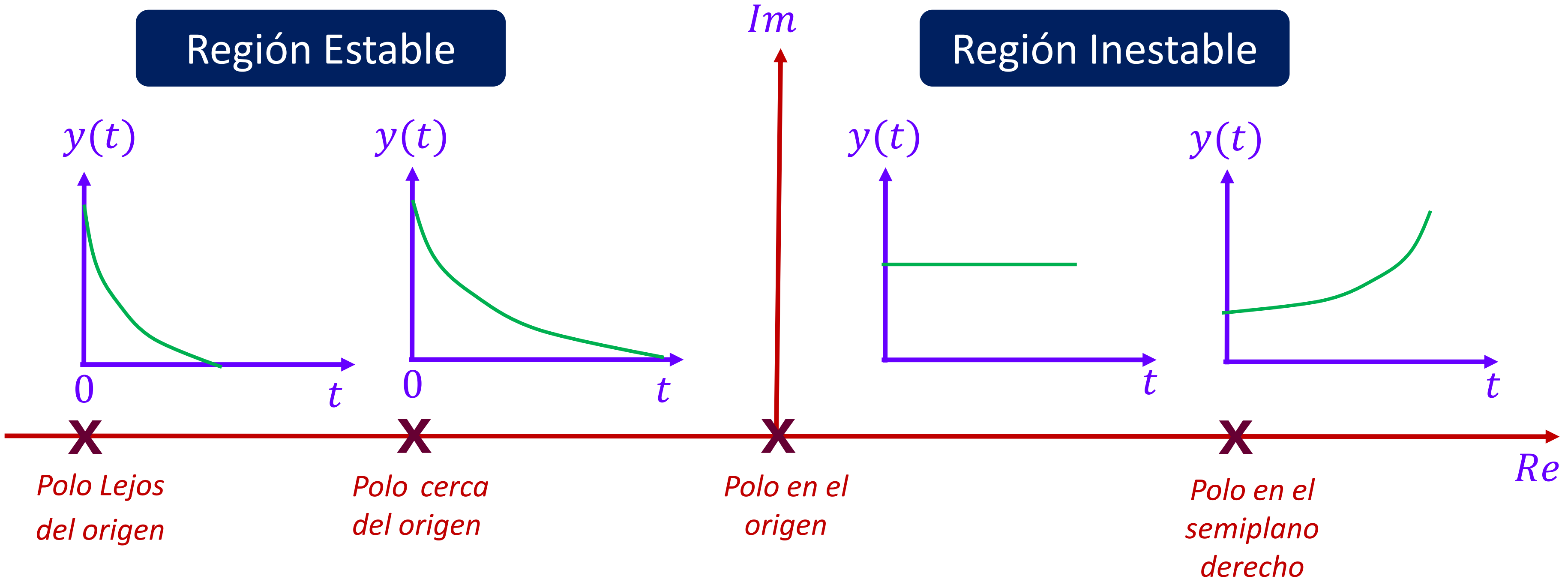


Estabilidad vs. Posición del Polo

- Analicemos la respuesta impulsiva en función de la posición del polo:

$$\boxed{p_1 = -1/\tau} \Rightarrow y(t) = \frac{K}{\tau} e^{-t/\tau} = K.p_1 e^{p_1 t}$$

Estable



Respuesta a un Escalón Unitario

- Usamos la FT para obtener la respuesta de los sistemas de primer orden a un escalón unitario:

$$Y(s) = G(s)u_s(s) = \frac{K}{\tau s + 1} * \frac{1}{s}$$

a. Aplicando el Teorema del valor final:

Ojo: recuerde que el TVF, solo se aplica para sistemas estables

$$V.F = lim_{t\to\infty} y(t) = lim_{s\to 0} sy(s) = K$$

Valor final $K = G(0)$

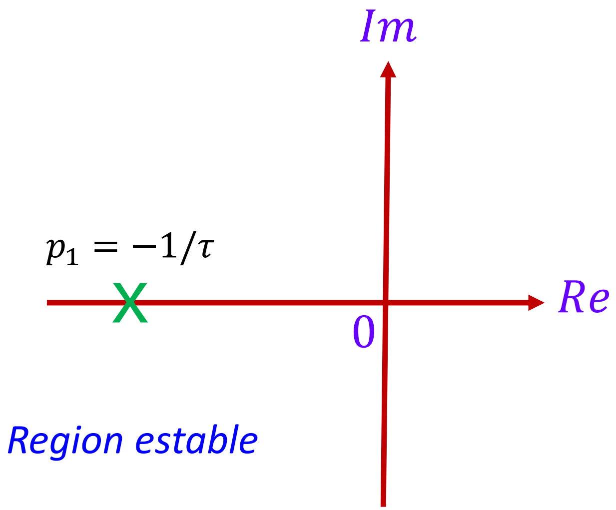
b. Aplicando la inversa de la Transformada de Laplace (tablas)

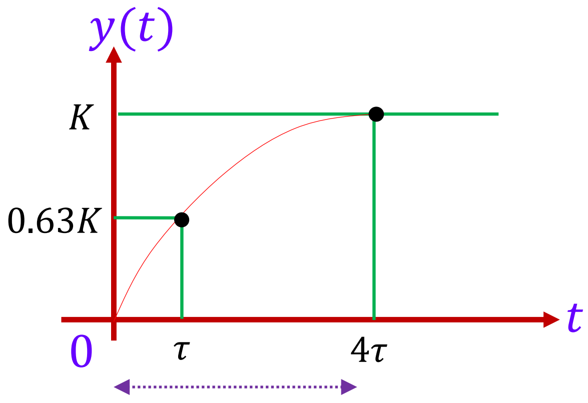
$$\boxed{y(t) = K(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})}$$

Respuesta a un Escalón unitario de un sistema de 1er orden

Respuesta a un Escalón Unitario

- Gráficamente: $y(t) = K(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$





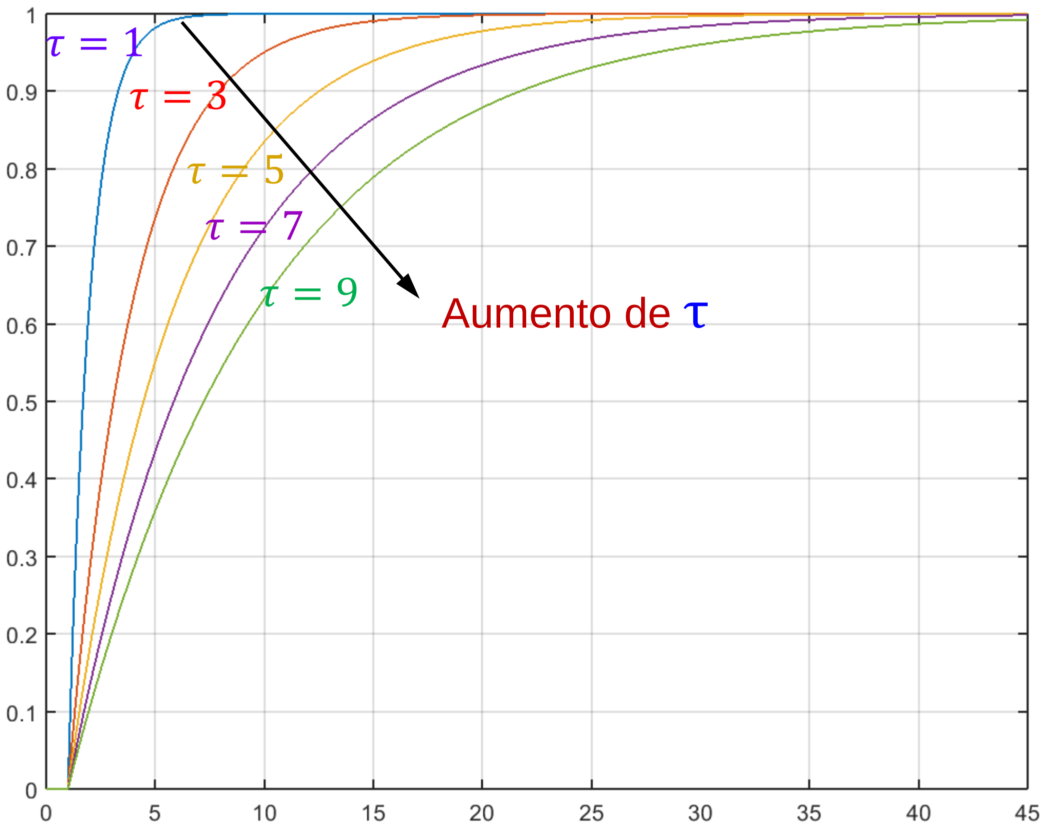
$$Ts = \frac{4}{|p_1|}$$

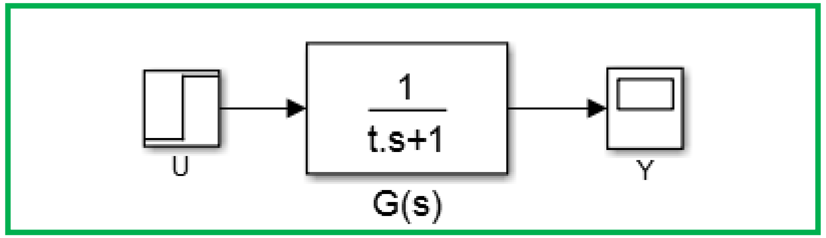
Ts : Tiempo de establecimiento

Se nota que para t = τ se obtiene el 63,7% de la señal de la respuesta.

Respuesta a un Escalón Unitario

Variando la constante de tiempo τ





Respuesta a un Escalón Unitario

- Analice y esboce a mano alzada el grafico de la respuesta de los siguientes sistemas de 1er orden para un escalón unitario.

$$G_1(s) = \frac{1}{2s+1} \qquad K = 1 \qquad \tau = 2$$

$$G_2(s) = \frac{1}{s+0.5} \qquad K = 2 \qquad \tau = 2$$

$$G_3(s) = \frac{0.5}{s+2} \qquad K = 0.25 \qquad \tau = 0.5$$

- Luego verifique sus predicciones a través de simulaciones numéricas en matlab/Simulink

Respuesta a un Escalón Unitario

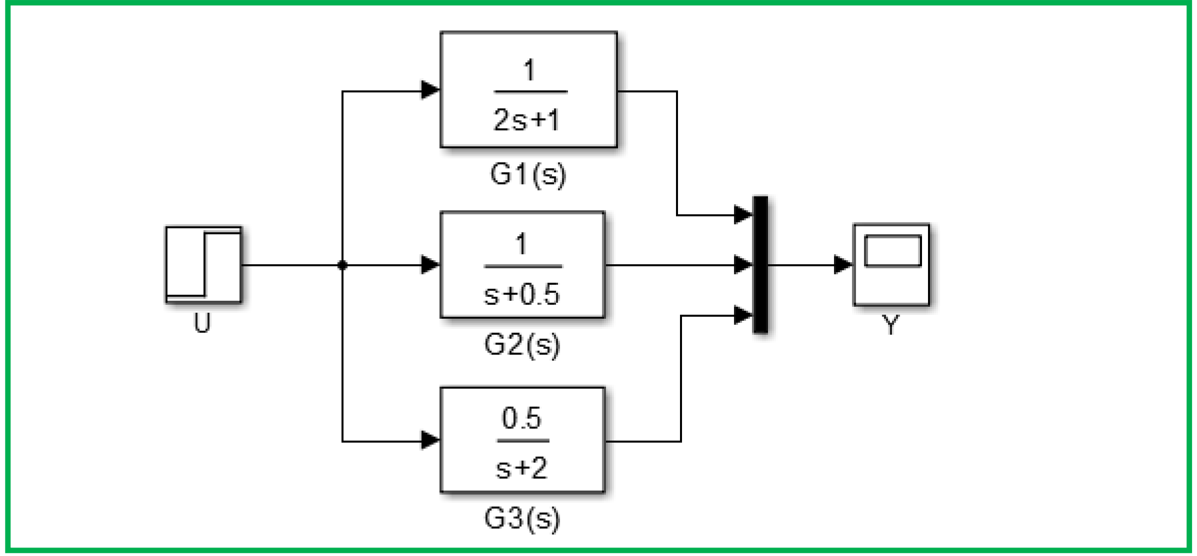
MATLAB (En la ventana de comandos)

>> num=1; >> den=[2 1]; >> step(num,den)	>> num=1; >> den=[1 0.5]; >> step(num,den)	>> num=0.5; >> den=[1 2]; >> step(num,den)

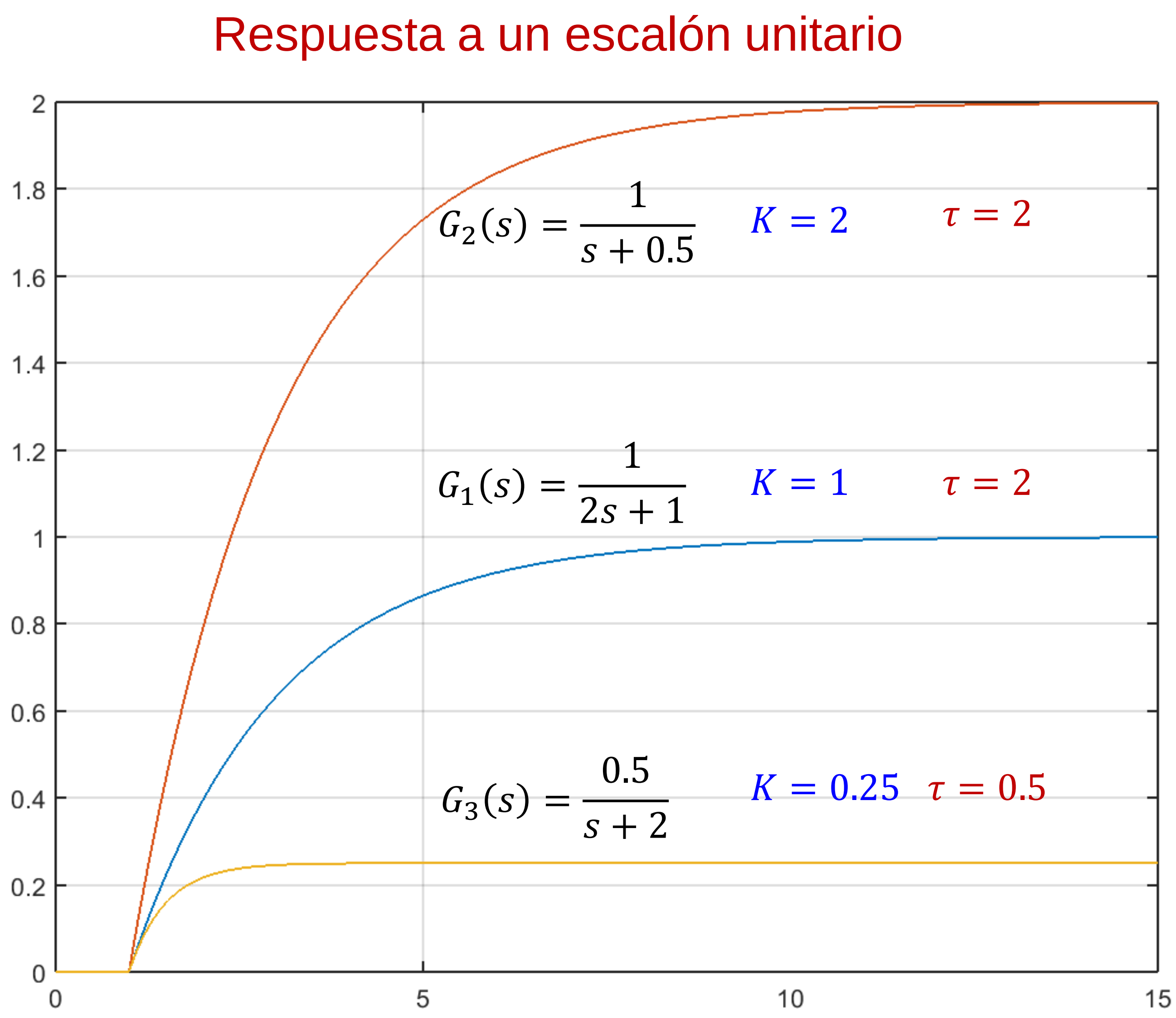
MATLAB (En la ventana de comandos)

>> G1=tf([1],[2 1]); >> G2=tf([1],[1 0.5]); >> G3=tf([0.5],[1 2]);	>> step(G1); hold on; >> step(G2); >> step(G3);

SIMULINK(Lenguaje grafico de Diagrama de Bloques)

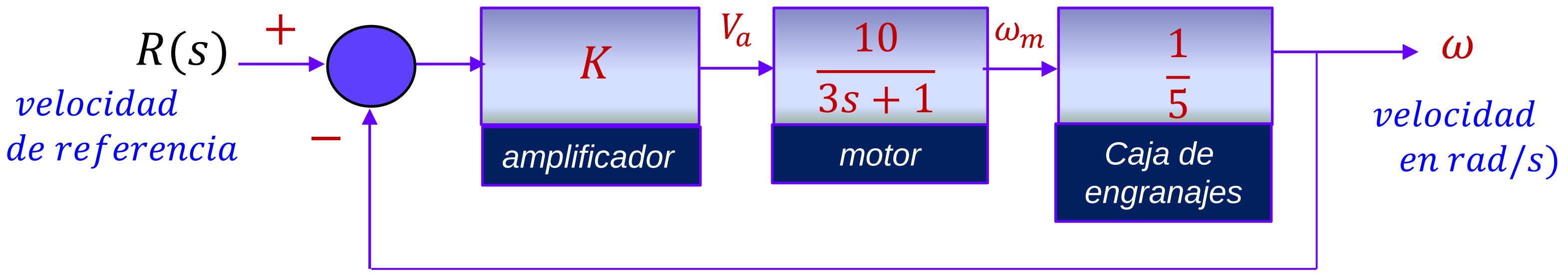


Respuesta a un Escalón Unitario



Tarea: Control de velocidad

- La figura muestra el diagrama de bloques de un sistema de control de la velocidad de un motor que mueve una faja



- Grafique la respuesta del motor sin control, es decir en lazo abierto desde V_a a ω para un voltaje V_a tipo escalón unitario. Indique el valor del tiempo de asentamiento y el valor final de la velocidad angular ω
- Determine el valor de la ganancia del amplificador K de tal manera que el sistema en lazo cerrado responda en 2s
- Para le valor de K determinado en la pregunta a, determine el valor final de la respuesta de la velocidad para una referencia r escalón $10u_s(t)$
- Para el mismo valor de K y r grafique la respuesta en el tiempo del sistema de control en lazo cerrado $\omega(t)$. Además grafique la señal de control $V_a(t)$