Análisis de Fourier: SERIE DE FOURIER

- Representación en serie de Fourier para función par e impar.
- Cálculo de coeficientes de la Serie Trigonométrica de Fourier.
- Forma armónica de la serie de Fourier.
- Convergencia de la Serie de Fourier.
- Fenómeno de Gibbs.

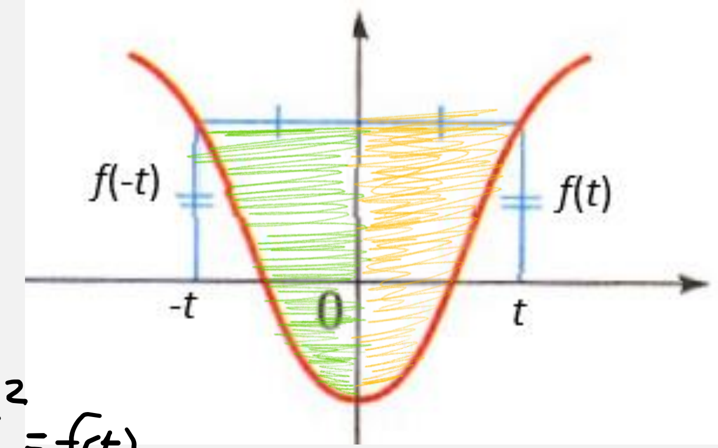
Representación de la Serie de Fourier para función par e impar

Una función $f(t)$ se dice que es **función par** o con simetría par en un intervalo $[-L, L]$ si su gráfica es simétrica respecto al eje vertical en dicho intervalo. Es decir, la función f(t) es par si

$$f(\boldsymbol{t}) = f(-\boldsymbol{t}) \ , \qquad -L \le t \le L$$

$f(t) = t^2$

$f(-t) = (-t)^2 = t^2 = f(t)$

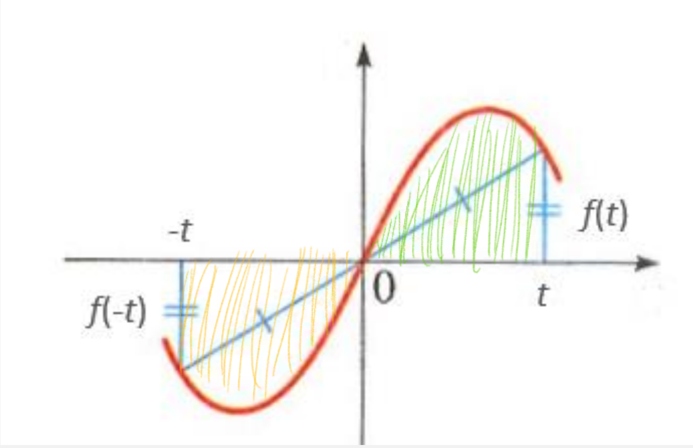


$$\boxed{\int_{-L}^{L} \boldsymbol{f(x)dx} = 2\int_{0}^{L} \boldsymbol{f(x)dx} \quad \text{si } f \text{ es par en } [-L, L]}$$

Una función $f(t)$ se dice que es **función impar** o con simetría impar en un intervalo $[-L, L]$, si su gráfica es simétrica respecto al origen en dicho intervalo, es decir, si cumple lo siguiente:

$$-f(t) = f(-\boldsymbol{t}), \qquad -L \le t \le L$$

$f(t) = t^3$



$$\boxed{\int_{-L}^{L} \boldsymbol{f(x)dx} = \boldsymbol{0} \quad \text{si } f \text{ es impar en } [-L, L]}$$

$f(-t) = (-t)^3 = -t^3 = -f(t)$

Representación de la Serie de Fourier para función par e impar

Ejemplo: Indicar si las siguientes funciones son pares o impares y bosquejar su gráfica

$f(t) = t^2 + 1 \;, -1 \leq t \leq 1$

$f(-t) = (-t)^2 + 1$

$= t^2 + 1$

$= f(t)$

func. par.

$f(t) = t^5 \;, -2 \leq t \leq 2$

$f(-t) = (-t)^5$

$= -t^5$

$= -f(t)$

func. impar

$f(t) = \text{sen}(t)$

$f(t) = \cos(2t)$

Seno es impar:

$\boldsymbol{Sen(-t) = -Sen(t)}$

Coseno es Par:

$\boldsymbol{Cos(-t) = Cos(t)}$

Representación de la Serie de Fourier para función par e impar

A saber:

- **No toda función es par o impar**. Por ejemplo $f(t) = t^2 + t^3$
- Tener presente lo siguiente:

$$\overset{(+)}{par} * \overset{(+)}{par} = \overset{(+)}{par}$$
$$\overset{(-)}{impar} * \overset{(-)}{impar} = \overset{(+)}{par}$$
$$\overset{(+)}{par} * \overset{(-)}{impar} = \overset{(-)}{impar}$$

$* f_{par} = (+)$

$* f_{impar} = (-)$

Por ejemplo, $f(t) = t^2\cos(3t)$ es una función par (producto de 2 funciones pares); la función $f(t) = t^3\text{sen}(2t)$ es una función par (producto de 2 funciones impares).

$\underbrace{(-)\ (-)}_{(+)} \rightarrow$ PAR.

- Ahora recuerde que del cálculo se sabe:

$$\int_{-L}^{L} f(x)dx = 0 \quad \text{si } f \text{ es impar en } [-L, L]$$

$$\int_{-L}^{L} f(x)dx = 2\int_{0}^{L} f(x)dx \quad \text{si } f \text{ es par en } [-L, L]$$

Representación de la Serie de Fourier para función par e impar

- Se sabe que:
  - La función sen$(n\omega_0 t)$ es una **función impar** para todo n≠0
  - La función cos$(n\omega_0 t)$ es una **función par** para todo n,

Además:

$$a_0 = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)dt \;, \qquad a_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\cos(n\omega_0 t)dt \quad , \qquad b_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)sen(n\omega_0 t)dt$$

Luego:

Si $f(t)$ **es par**, su serie de Fourier no contendrá términos seno, por lo tanto $b_n = 0$ para todo n,

Si $f(t)$ **es impar**, su serie de Fourier no contendrá términos cosenos, por lo tanto $a_n = 0$ para todo n

Representación de la Serie de Fourier para función par e impar

- **En resumen**: Dado

$$f(t) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}[a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n sen(n\omega_0 t)]$$

Si $f(t)$ **es par**, su serie de Fourier **no contendrá términos seno**, por lo tanto $\boldsymbol{b_n = 0}$ para todo n, donde la serie se reduce a:

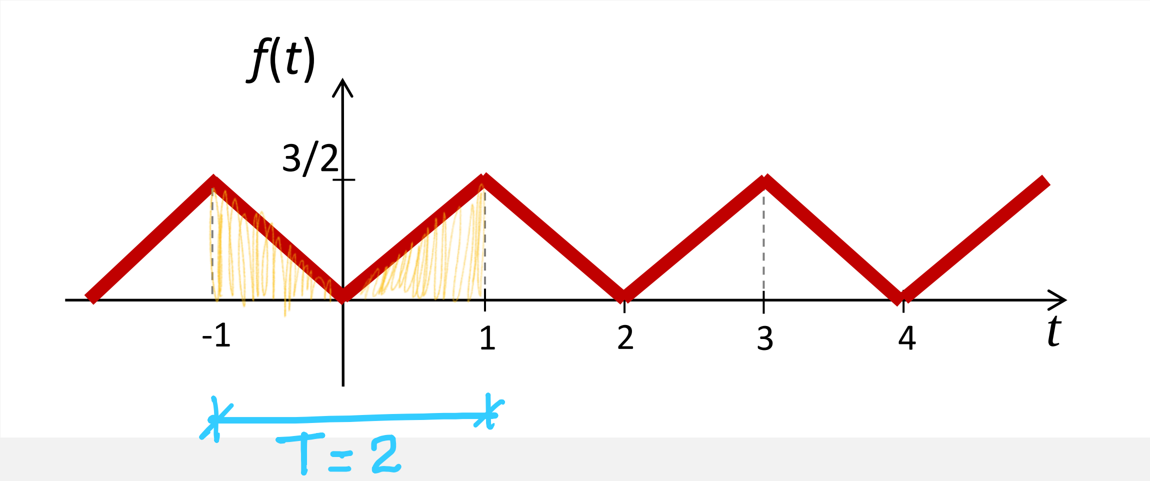
$$f(t) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}[a_n \cos(n\omega_0 t)] \quad , \quad a_0 = \frac{4}{T}\int_0^{T/2} f(t)dt \; ; \quad \boxed{a_n = \frac{4}{T}\int_0^{T/2} f(t)\cos(n\omega_0 t)dt}$$

Si $f(t)$ **es impar**, su serie de Fourier **no contendrá términos coseno**, por lo tanto $\boldsymbol{a_n = 0}$ para todo n, donde la serie se reduce *a:*

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty}[b_n sen(n\omega_0 t)] \quad , \quad a_0 = 0 \quad \boxed{b_n = \frac{4}{T}\int_0^{T/2} f(t) sen(n\omega_0 t)dt}$$

Cálculo de los coeficientes de la serie trigonométrica de Fourier

Ejemplo: Encontrar la Serie de Fourier para la siguiente función periódica:



Observación:

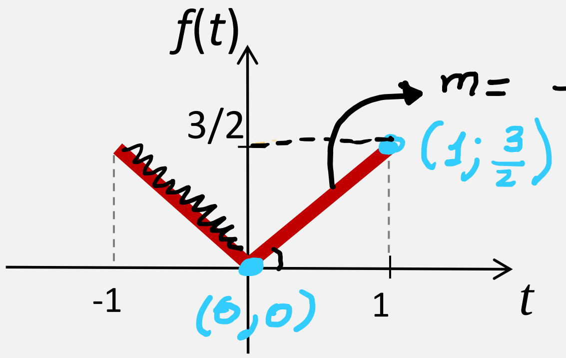
Note que la función es par y por lo tanto $\boldsymbol{b_n = 0}$

Se aprecia que la grafica es de una funcion par, ya que es simétrica respecto del eje Y.

Cálculo de los coeficientes de la serie trigonométrica de Fourier

Solución:

- Tomando un periodo de la función: $T = 2$ donde f sea **función par**



$m = \dfrac{\frac{3}{2} - 0}{1 - 0} = \dfrac{3}{2}.$

$\boxed{y = \frac{3}{2}x + 0}$

$a_0 = \dfrac{4}{T}\displaystyle\int_0^{T/2} f(t)dt$

- Calculando coeficiente a_0:

$$a_0 = \frac{4}{T}\int_0^{T/2} f(t)dt = \frac{4}{2}\int_0^1 \frac{3}{2}t\,dt = 3\frac{t^2}{2}/_0^1 = 1{,}5$$

Recordar que $\omega_0 = 2\pi/T$

En el problema: $T = 2$ ➔ $\omega_0 = \dfrac{2\pi}{2} = \pi$

$a_0 = \dfrac{3}{2}$

Cálculo de los coeficientes de la serie trigonométrica de Fourier

Solución:

- Calculando coeficiente a_n:

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{2} = \pi$$

$$a_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\cos(n\omega_0 t)dt$$

$$\boldsymbol{a_n = \frac{4}{T}\int_0^{T/2} f(t)\cos(n\omega_0 t)dt} = \frac{4}{2}\int_0^1 f(t)\cos(n\pi t)dt$$

Dado que $f(t)$ es par entre -1 y 1:

$$a_n = 2.\int_0^1 \frac{3}{2}t.\cos(n\pi t)dt = 3.\int_0^1 t.\cos(n\pi t)dt = 3\left[\frac{\cos(n\pi t) + n\pi t.sen(n\pi t)}{(n\pi)^2}\right]/_0^1$$

$$a_n = \frac{3}{n^2\pi^2}[\underbrace{\cos(n\pi)}_{(-1)^n} + (n\pi).\underbrace{sen(n\pi)}_{0} - \underbrace{cos0}_{1} - 0] = \frac{3}{n^2\pi^2}((-1)^n - 1)$$

$$\boldsymbol{a_n = \frac{3}{n^2\pi^2}((-1)^n - 1), \qquad n \in \mathbb{Z}^+}$$

9	$\int t\cos(at)dt = \frac{\cos(at) + at\,\mathrm{sen}(at)}{a^2} + C$

Cálculo de los coeficientes de la Serie trigonométrica de Fourier

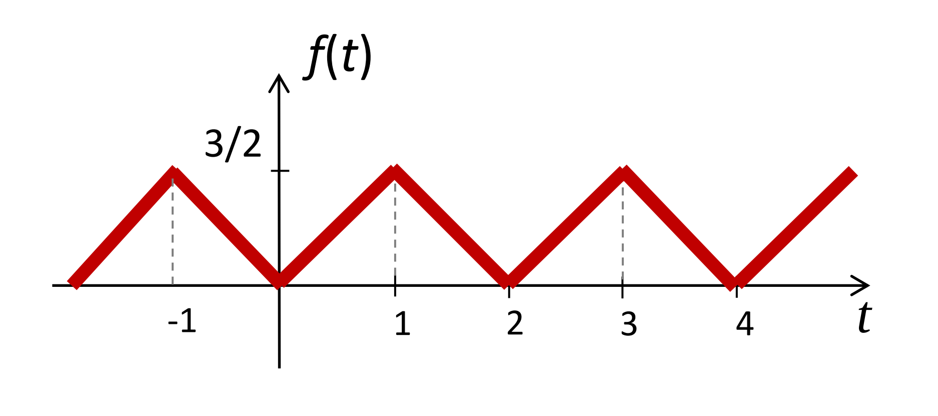
- Finalmente la serie de Fourier

$$f(t) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}[a_n \cos(n\omega_0 t) + \cancel{b_n} sen(n\omega_0 t)]$$

0

queda:

$$\boldsymbol{f(t) = \frac{3}{4} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{3}{n^2\pi^2}((-1)^n - 1)\cos(n\pi t)\right]}$$



Forma armónica de la serie de Fourier

$$f(t) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}[a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n sen(n\omega_0 t)]$$

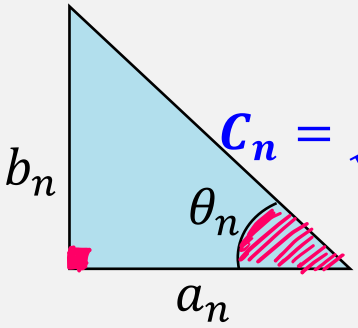
- Es posible escribir de una manera ligeramente diferente la Serie de Fourier, si observamos que el término $a_n\cos(n\omega_0 t)+b_n sen(n\omega_0 t)$ se puede escribir como

$$\sqrt{a_n^2+b_n^2}\left(\frac{a_n}{\sqrt{a_n^2+b_n^2}}\cos(n\omega_0 t)+\frac{b_n}{\sqrt{a_n^2+b_n^2}}sen(n\omega_0 t)\right)$$

Podemos encontrar una manera más compacta para expresar estos coeficientes pensando en un triángulo rectángulo:

Sea:

$Tan\,\theta_n = \frac{b_n}{a_n} \Rightarrow$



$$C_n = \sqrt{a_n^2+b_n^2}$$

$$\frac{a_n}{\sqrt{a_n^2+b_n^2}} = \cos\theta_n$$

$$\frac{b_n}{\sqrt{a_n^2+b_n^2}} = sen\theta_n$$

Recordar:
$\cos(A-B) = \cos A \cdot \cos B + \text{sen}A \cdot \text{sen}B$

Con lo cual la expresión queda:

$$C_n[\cos\theta_n \cos(n\omega_0 t) + sen\theta_n sen(n\omega_0 t)] = C_n[\cos(n\omega_0 t - \theta_n)]$$

Forma armónica de la serie de Fourier

- Si además definimos $C_0 = a_0/2$, la serie de Fourier

$$f(t) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}[a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n sen(n\omega_0 t)]$$

se puede escribir como

$$\boxed{f(t) = C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n[\cos(n\omega_0 t - \theta_n)]}$$

Llamada **forma trigonométrica compacta**

Donde:

$$\operatorname{Tan}\theta_n = \frac{b_n \rightarrow \text{coef. de seno}}{a_n \rightarrow \text{coef. de coseno}}$$

$$C_0 = \frac{a_0}{2} \quad , \quad C_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \quad , \theta_n = tan^{-1}\left(\frac{b_n}{a_n}\right) \rightarrow \operatorname{Tan}\theta_n = \frac{b_n}{a_n}$$

Forma armónica de la serie de Fourier

$$f(t) = C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n[\cos(n\omega_0 t - \theta_n)]$$

Componentes armónicas

- Así, una función periódica f(t) se puede escribir como la suma de **componentes sinusoidales** de diferentes frecuencias $\omega_n = n\omega_0$.
- A la componente sinusoidal de frecuencia $n\omega_0$: $C_n(\cos(n\omega_0 t - \theta_n))$ se le llama la **enésima armónica** de f(t).
- **A la primera armónica (n=1) se le llama la componente fundamental** y su periodo es el mismo que el de f(t)
- A la frecuencia $\omega_0 = 2\pi f_0 = 2\pi/T$ se le llama **frecuencia angular fundamental.**
- A la componente de **frecuencia cero C_0**, se le llama componente de corriente directa (cd) y corresponde al valor promedio de f(t) en cada periodo.
- Los coeficientes **C_n** y los **ángulos θ_n** son respectiva-mente las **amplitudes** y los ángulos de fase de las armónicas.

Forma armónica de la serie de Fourier

$$f(t) = C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n[\cos(n\omega_0 t - \theta_n)]$$

Ejemplo: La función $f(\mathrm{t}) = \cos\left(\frac{\mathrm{t}}{3}\right) + \cos\left(\frac{\mathrm{t}}{4}\right)$

Como ya se mostró tiene un periodo $\mathrm{T} = 24\pi$, por lo tanto su frecuencia fundamental es w_0=1/12 rad/seg.

$$f(t) = 0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[C_n \cos\left(\frac{nt}{12}\right)\right], C_n = \begin{cases} 0, n \neq 3{,}4 \\ 1, n = 3{,}4 \end{cases}$$

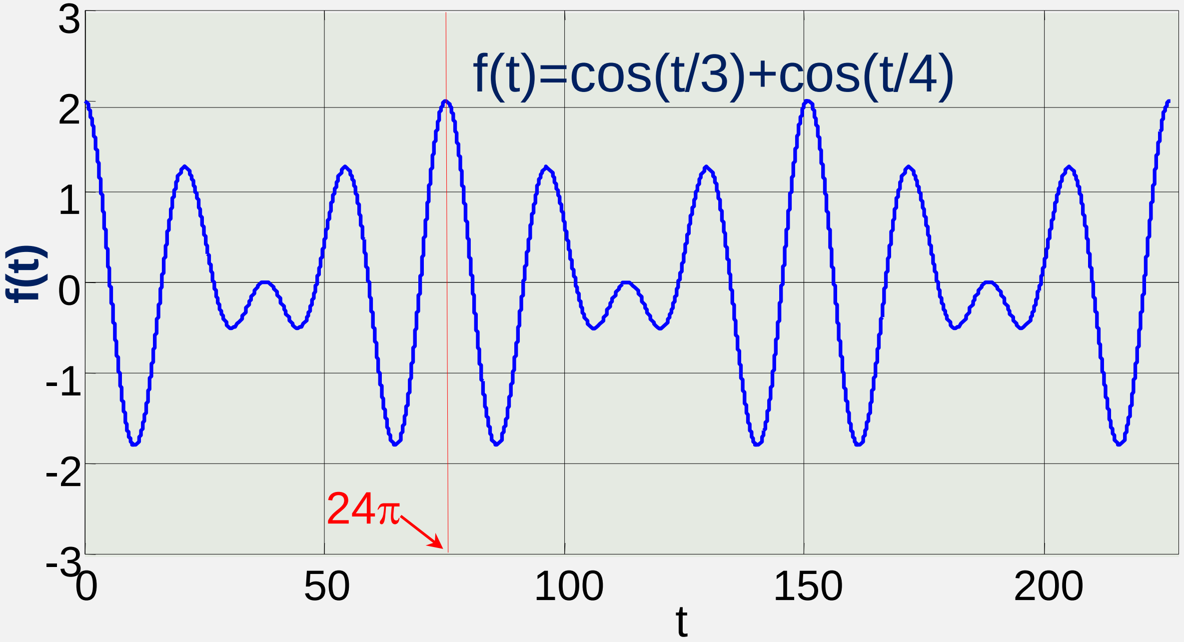
Componente fundamental es de la forma: 0*cos(t/12).

Tercer armónico:

$$\cos\left(\frac{3\mathrm{t}}{12}\right) = \cos\left(\frac{\mathrm{t}}{4}\right)$$

Cuarto armónico:

$$\cos\left(\frac{4\mathrm{t}}{12}\right) = \cos\left(\frac{\mathrm{t}}{3}\right)$$



Convergencia de la serie trigonométrica de Fourier

- El cálculo de los coeficientes de Fourier no es suficiente para afirmar que en efecto la función puede ser representada por medio de una serie trigonométrica.

  Para garantizar tal convergencia, las condiciones más usuales que se imponen a la función son las llamadas CONDICIONES DE DIRICHLET.

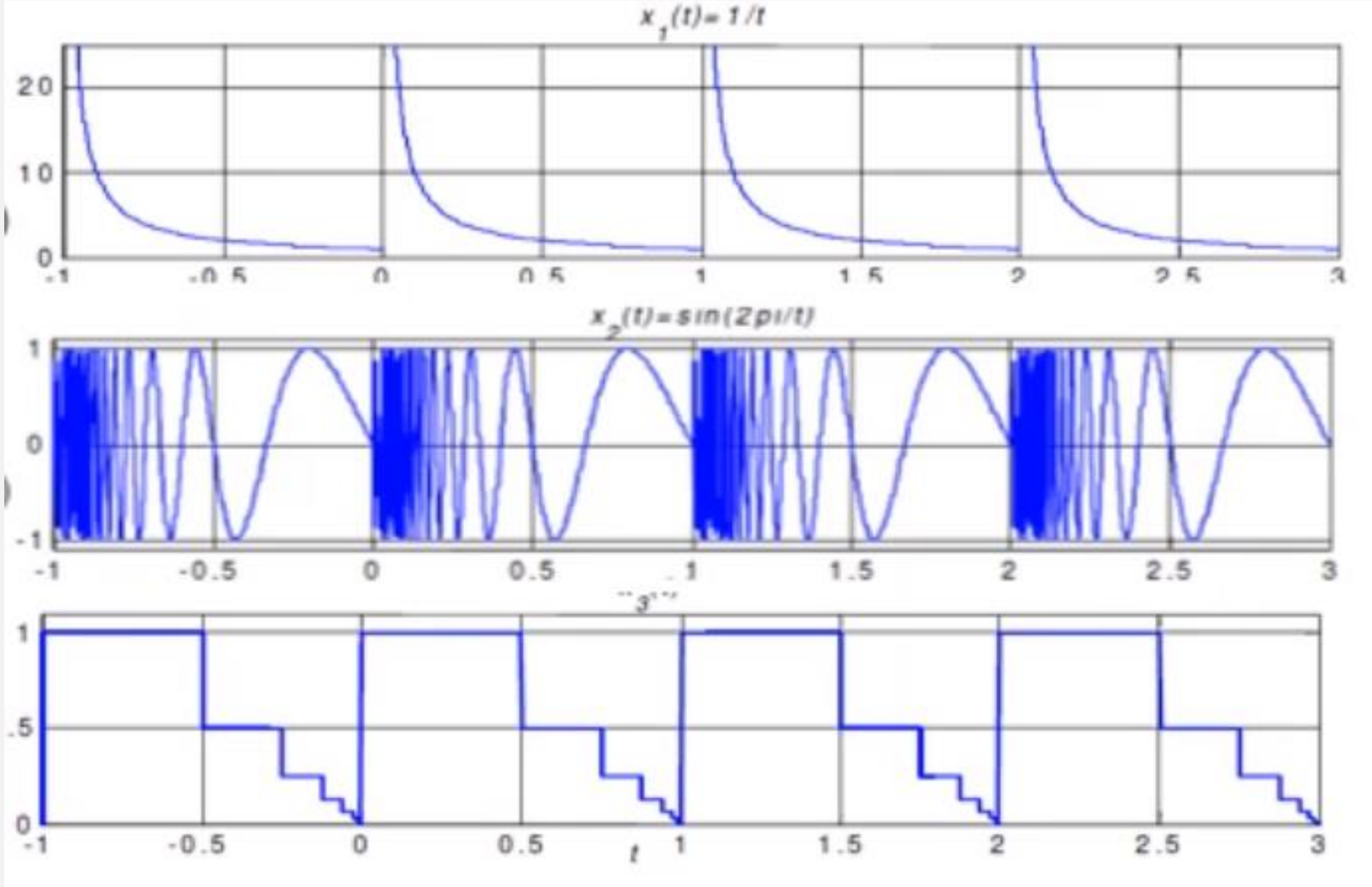
- Sea una función periódica que satisface las siguientes condiciones (**llamadas de Dirichlet**):
  a. Tiene un número finito de discontinuidades **en un periodo**.
  b. Tiene un número finito de máximos y mínimos **en el periodo**
  c. La integral de la función en un periodo es finita:

$$\int_{-T/2}^{T/2} |f(t)|dt < +\infty$$

  Entonces se puede desarrollar la serie de Fourier para la función periódica

Convergencia de la serie trigonométrica de Fourier

- **Ejemplo** de funciones que NO cumplen las condiciones de Dirichlet

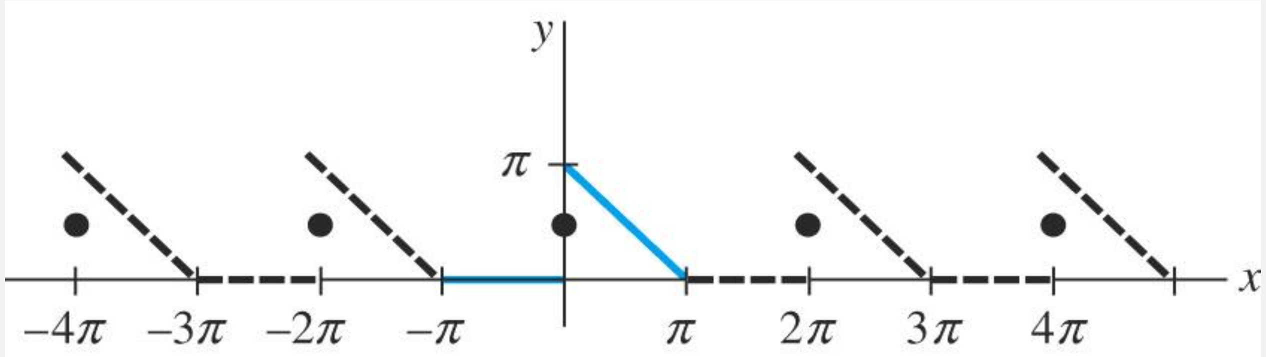


Convergencia de la serie trigonométrica de Fourier

- Si se cumplen las condiciones de **Dirichlet,** entonces la serie de Fourier converge en los puntos de continuidad al valor de la función en ese punto

En los puntos de discontinuidad de f, la serie de Fourier converge a la semisuma de valores laterales de la función en ese punto.

$$\frac{1}{2}\left(f(t_o+) + f(t_0 -)\right)$$



La serie es una extensión periódica de la función f. Las discontinuidades en

$x = 0, \pm 2\pi, \pm 4\pi, \ldots$ convergen a:

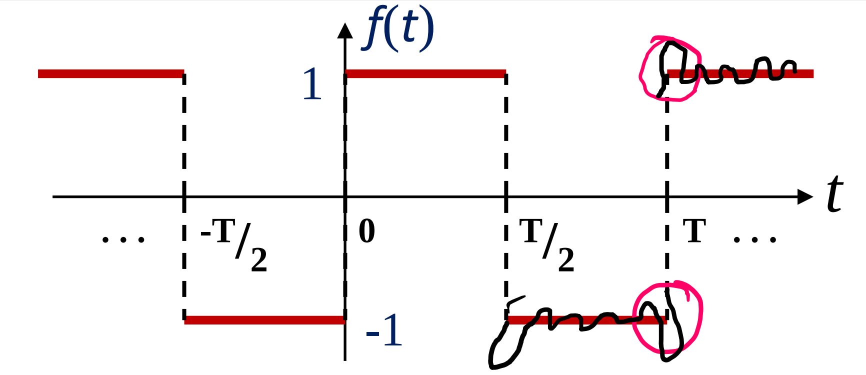
$$\frac{f(0+) + f(0-)}{2} = \frac{\pi + 0}{2} = \frac{\pi}{2}$$

Fenómeno de Gibbs

- Si la serie de Fourier para una función $f(t)$ se trunca para lograr una aproximación en suma finita de senos y cosenos, es natural pensar que a medida que agreguemos más armónicos, la sumatoria se aproximará más a $f(t)$.

Esto se cumple excepto en las discontinuidades de $f(t)$, en donde el error de la suma finita no tiende a cero a medida que agregamos armónicos

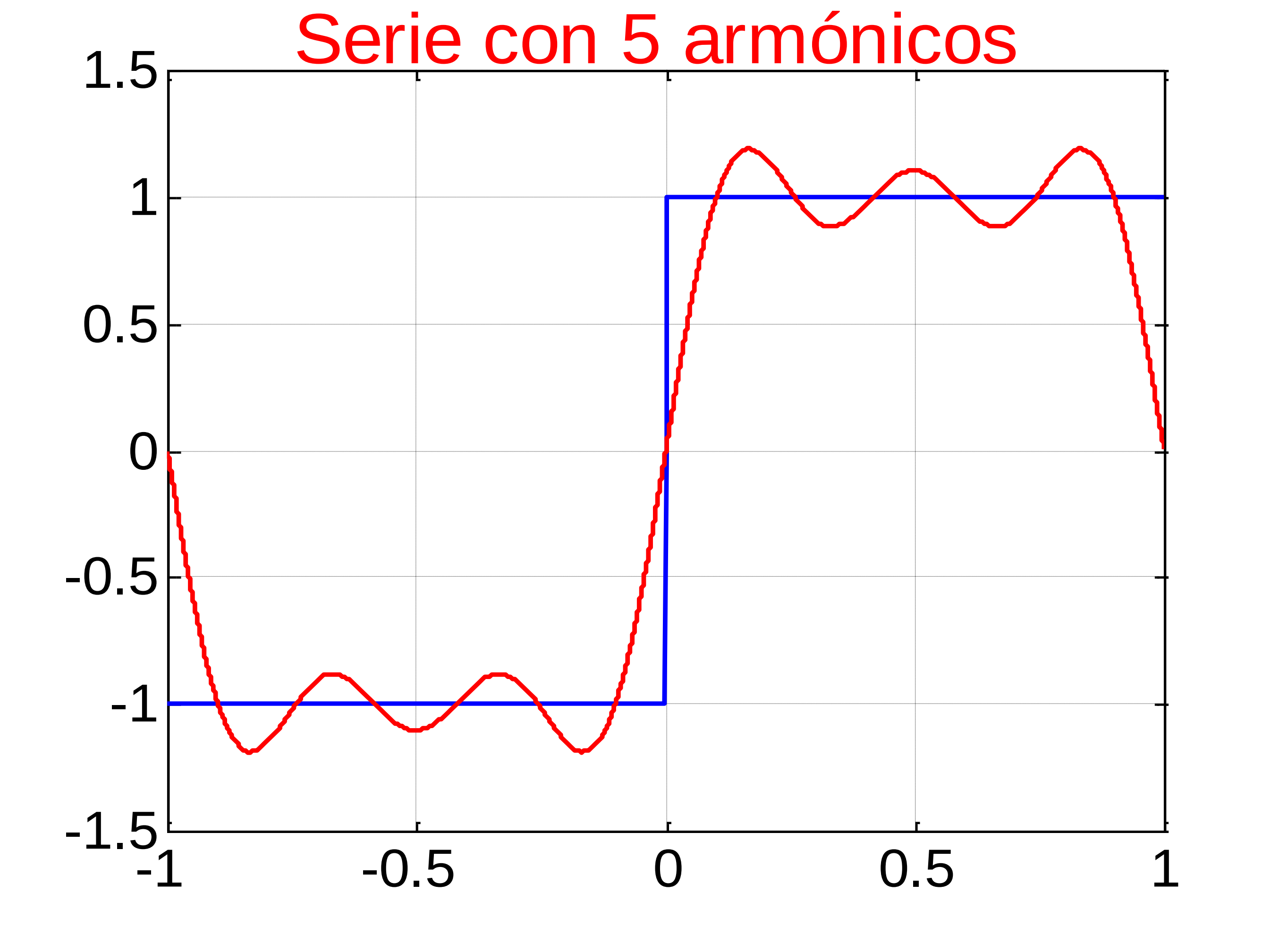
Por ejemplo, consideremos el tren de pulsos, de un ejemplo anterior, dado por:



$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{2(1-(-1)^2)}{n\pi} \operatorname{sen}(n\pi t) \right] = \frac{4}{\pi} \left[sen(\pi t) + \frac{1}{3} sen(3\pi t) + \frac{1}{5} sen(5\pi t) + \ldots \right]$$

Fenómeno de Gibbs

$$f(t) = \frac{4}{\pi}\left[sen(\pi t) + \frac{1}{3}sen(3\pi t) + \frac{1}{5}sen(5\pi t)\right]$$



Fenómeno de Gibbs

$$f(t) = \frac{4}{\pi}\left[sen(\pi t) + \frac{1}{3}sen(3\pi t) + \frac{1}{5}sen(5\pi t) + \frac{1}{7}sen(7\pi t) + \cdots + \frac{1}{99}sen(99\pi t).\right]$$