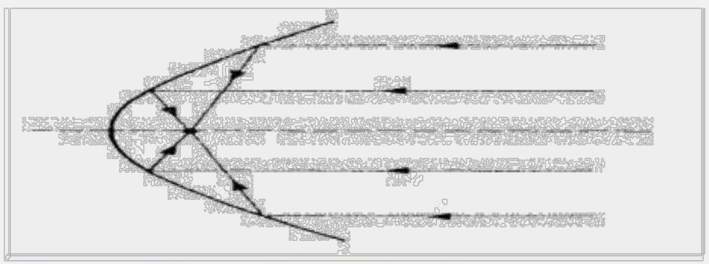
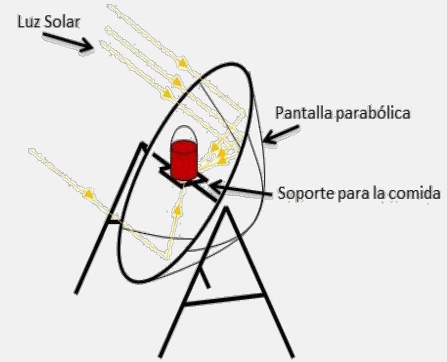
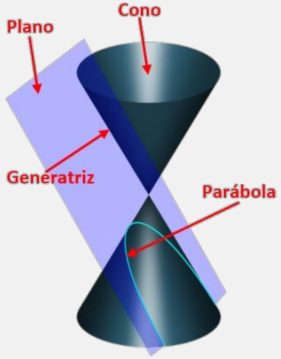
Motivación

Las principales aplicaciones de las parábolas comprenden su uso como reflectores del sonido, la luz, las ondas de radio y otras ondas electromagnéticas. Si se rota una parábola en un espacio tridimensional con respecto a su eje, la parábola genera un *paraboloide de revolución*. Si se coloca una fuente de señales en el foco de un paraboloide reflector, la señal se refleja fuera de la superficie en forma de líneas paralelas al eje de simetría. Esta propiedad se utiliza en las luces de las linternas, los faros, reflectores, repetidoras de microondas, receptores satelitales, etc.





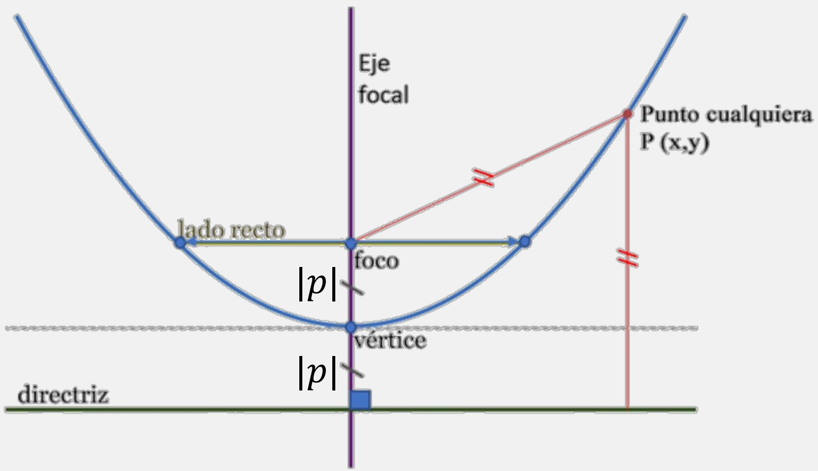
Definición geométrica de una parábola



Desde el punto de vista geométrico una parábola es la curva de intersección entre un plano y un cono, de tal manera que el plano sea paralelo a la generatriz del cono

Definición y elementos: Una parábola es el conjunto de puntos $P(x;y)$ del plano que equidistan de un punto fijo F (*llamado foco*) y de una recta fija L (*llamada directriz*), es decir:

$$d(P;F) = d(P;L)$$



El segmento de recta que pasa por el foco y es perpendicular al eje focal, con puntos extremos en la parábola, se llama **lado recto**, y su longitud es el **diámetro focal** (o ancho focal) de la parábola.

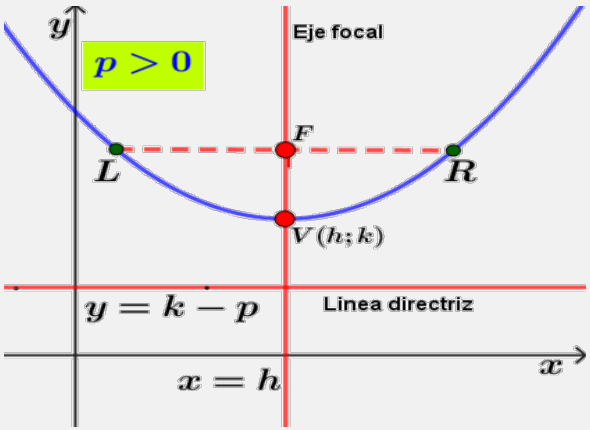
- ✓ $|p| = d(V;F) = d(V;L)$
- ✓ Ancho focal: $|4p|$ $(p \neq 0)$

Parábola con eje focal vertical (paralelo al eje y)

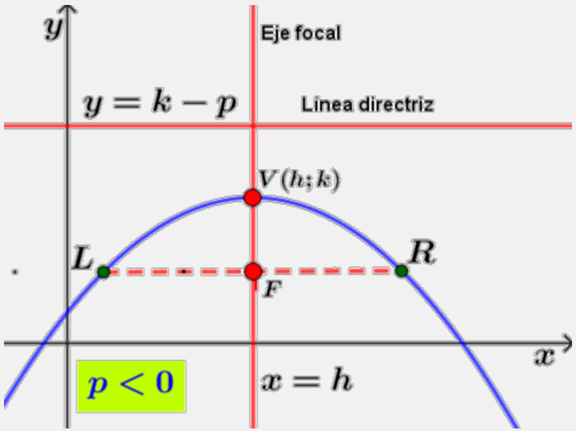
Ecuación estándar: $\boxed{(x-h)^2 = 4p(y-k)}$

- Donde $V(h;k)$ es el vértice la parábola.
- En este caso la ecuación del eje focal es: $\boldsymbol{x = h}$
- Si $V(0;0)$ entonces la ecuación sería: $\boxed{x^2 = 4py}$

Caso 1: Si $p > 0$ entonces la parábola se abre hacia arriba.



Caso 2: Si $p < 0$ entonces la parábola se abre hacia abajo.

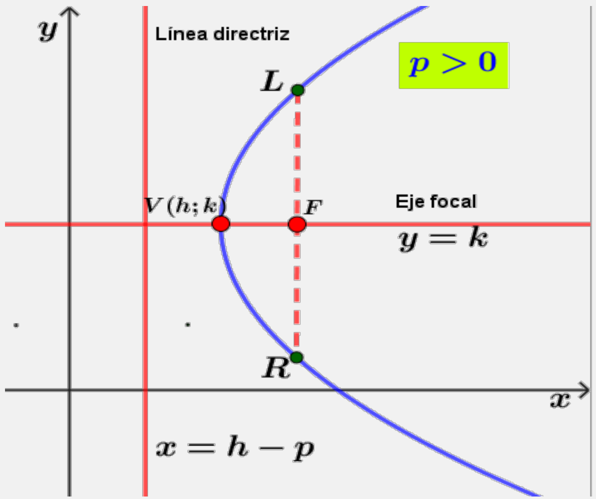


Parábola con eje focal horizontal (paralelo al eje x)

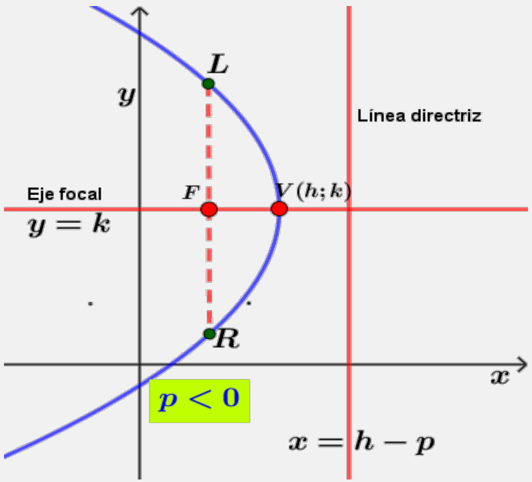
Ecuación estándar: $$\boxed{(y-k)^2 = 4p(x-h)}$$

- Donde $V(h;k)$ es el vértice la parábola.
- En este caso la ecuación del eje focal es: $\boldsymbol{y = k}$
- Si $V(0;0)$ entonces la ecuación sería: $\boxed{y^2 = 4px}$

Caso 1: Si $p > 0$ entonces la parábola se abre hacia la derecha.



Caso 2: Si $p < 0$ entonces la parábola se abre hacia la izquierda.



1. En cada caso determine la ecuación estándar de la parábola que satisface las condiciones dadas:

a. Vértice $(4;3)$, se abre hacia arriba y la longitud del lado recto es 8 unidades.

Vertice: $V(4;3)$

longitud: $|4p| = 8$

$p = 2$

Ecuación Estandar.

$(X-4) = 8(Y-3)$

b. Foco $(2;-1)$ y la ecuación de la directriz es $x = 6$.

$F(2;-1)$

longitud: $|4p| = 8$

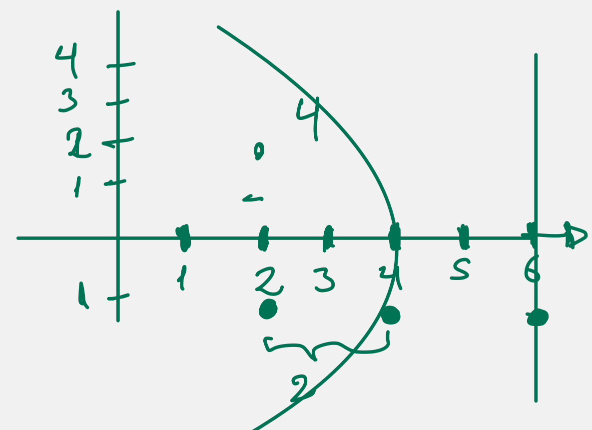
$\boxed{p=2}$

$p = -2$

Vertice:

$V(4;-1)$

$h;k$



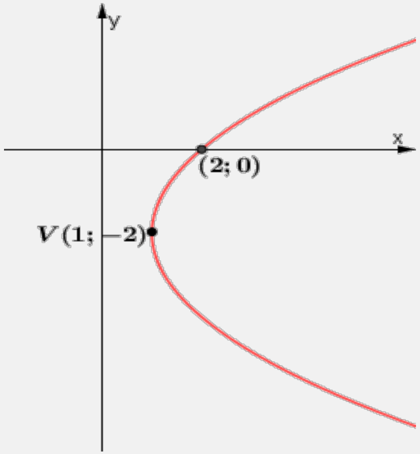
Directriz: $x = 6$

Ecuación de la parabola

$\boxed{(Y+1) = -8(X-4)}$

2. A partir de la gráfica, determine la ecuación de la parábola.

a.



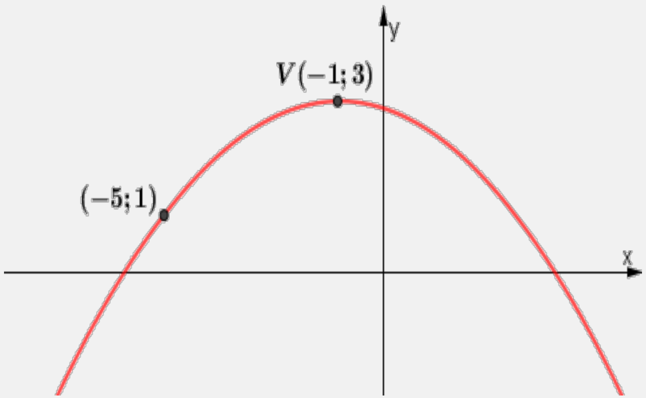
$$(y+2)^2 = +4p(x-1)$$

$$4 = 4p(2-1)$$

$$1 = p$$

$$(y+2)^2 = 4(x-1)$$

b.



$$(x+1)^2 = 4p(y-3)$$

$$16 = 4p(-2)$$

$$-2 = p$$

$$(x+1)^2 = -8(y-3)$$

3. Determine las coordenadas del vértice, foco, ecuación del eje focal y de la directriz, longitud del lado recto y trace la gráfica de la siguiente cónica $(y+2)^2 = 8x$. Además, determine los puntos de corte con los ejes coordenados.

$(y+2)^2 = 8(x-0) \Rightarrow (y+2)^2 = 8x$

Vertice: $V(0,-2)$

longitud del lado recto: $|4p| = 8$

$\boxed{p = 2}$

Foco: $(2;-2)$

Ecuacion del eje focal: $y = -2$

Directriz: $x = -2$

Corte con el eje x $(y=0)$

$(y+2)^2 = 8x$

$4 = 8x$

$\frac{1}{2} = x$

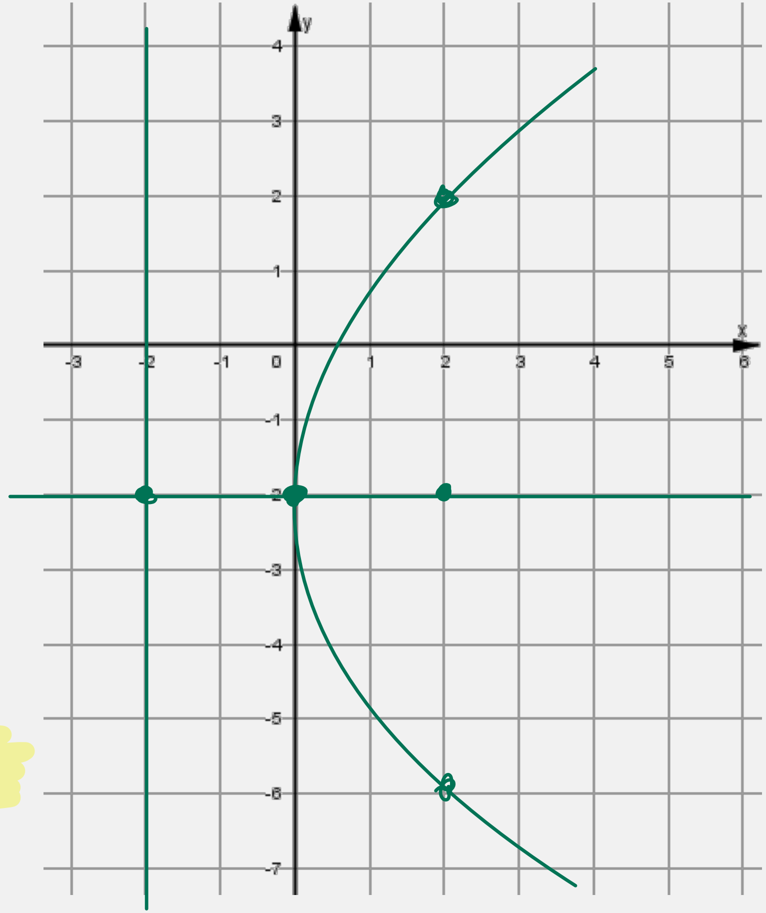
$\left(\frac{1}{2}; 0\right)$

Corte con el eje y $(x=0)$

$y^2 + 4 = 8x$

$y = \pm 2$

$(0, \pm 2)$



4. Determine las coordenadas del vértice, foco, ecuación del eje focal y de la directriz, longitud del lado recto y trace la gráfica de la siguiente cónica $x^2 + 2x + 4y - 11 = 0$. Además, determine los puntos de corte con los ejes coordenados.

$x^2 + 2x = -4y + 11$

$\boxed{(x+1)^2 = -4p + 12}$

Vertice: V $(-1; 3)$

Foco : $(1; 2)$

Ecuación del eje focal : $x = 1$

directriz : $y = 4$

longitud del lado recto : $|4p| = 4$

$p = 1$

$\boxed{p = -1}$

Corte con eje X $(y=0)$

$(x+1)^2 = -4(y-3)$ $(-1 \pm \sqrt{12}; 0)$

$x = -1 \pm \sqrt{12}$

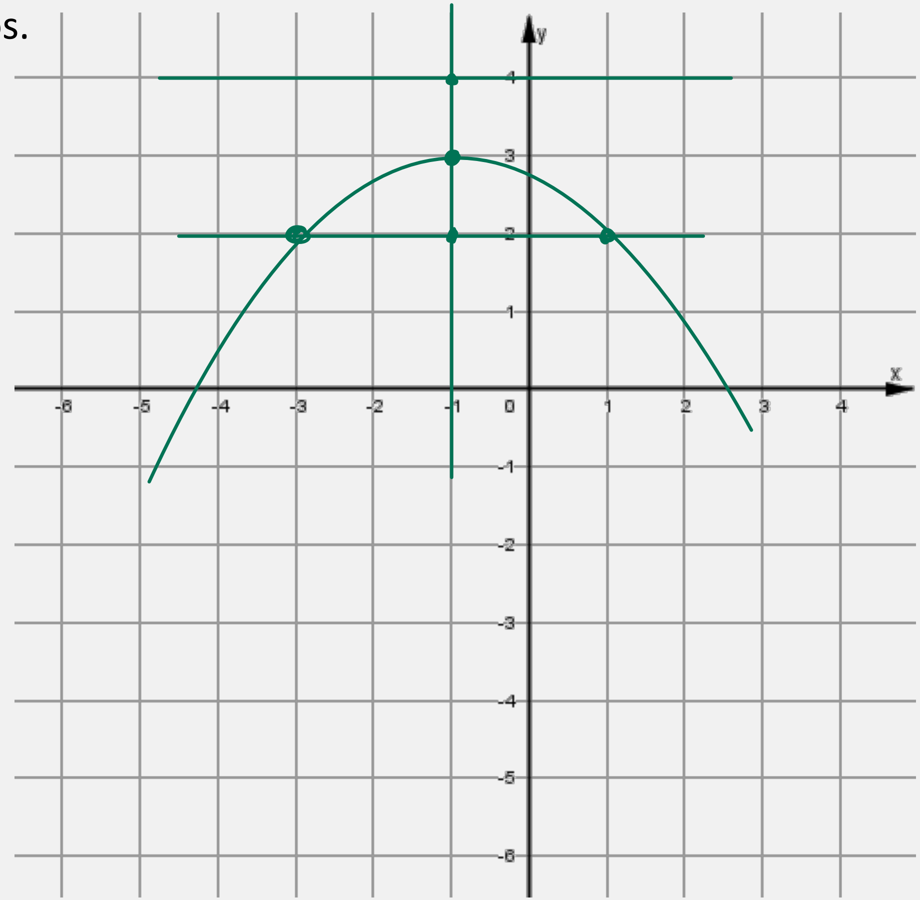
Corte con el eje Y $(x=0)$

$(x+1)^2 = -4(y-3)$

$1 = -4p + 12$

$\frac{11}{4} = p$

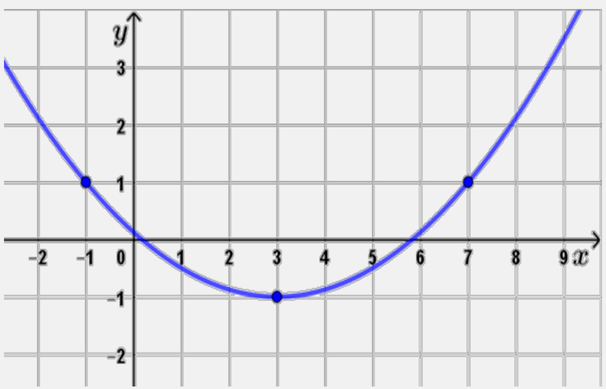
$(0, \frac{11}{4})$



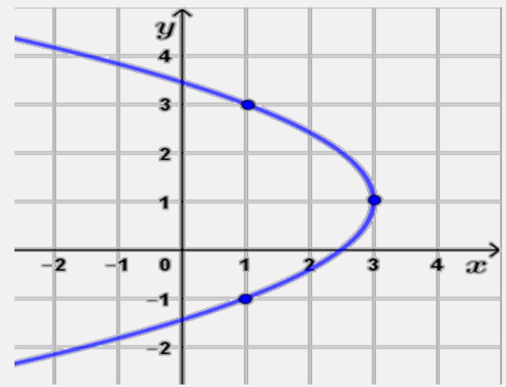
1. En cada caso determine la ecuación de una parábola que satisface las condiciones dadas:
   a. Foco $(-4;\ 2)$, directriz $x = 4$.
   b. Vértice $(2;\ -3)$, se abre a la izquierda y ancho focal 8.
   c. Vértice $(3;\ 4)$ y foco $(5;\ 4)$.

2. A partir de la gráfica, determine la ecuación de la parábola.

a.



b.



3. En cada caso determine las coordenadas del vértice, foco, ecuación del eje focal y de la directriz, longitud del lado recto y trace la gráfica. Además, determine los puntos de corte con los ejes coordenados.

   a. $(y-1)^2 = -4(x+2)$
   b. $(x+2)^2 = 6(y+3)$
   c. $x^2 + 4x - 6y + 7 = 0$
   d. $y^2 - 8y + 4x = 0$

Respuestas:

1. **a.** $(y-2)^2 = -16(x)$; **b.** $(y+3)^2 = -8(x-2)$; **c.** $(y-4)^2 = 8(x-3)$

2. **a.** $(x-3)^2 = 8(y+1)$; **b.** $(y-1)^2 = -2(x-3)$

3.

a.	b.	c.	d.
• V(-2;1) • F(-3;1) • L_f: y = 1 • $L_d: x = -1$ • $\lvert 4p\rvert = 4$ • Punto de corte: $\left(-\frac{9}{4};0\right)$	• V(-2;-3), • F$\left(-2;-\frac{3}{2}\right)$ • $L_f: x = -2$ • $L_d: y = -\frac{9}{2}$ • $\lvert 4p\rvert = 6$ • Puntos de corte: $\left(-3\sqrt{2}-2;0\right)$, $\left(3\sqrt{2}-2;0\right)$ y $\left(0;-\frac{7}{3}\right)$	• V$\left(-2;\frac{1}{2}\right)$ • $F(-2;2)$ • $L_f: x = -2$ • $L_d: y = -1$ • $\lvert 4p\rvert = 6$ • Puntos de corte: $\left(0;\frac{7}{6}\right)$	• $V(4;4)$ • $F(3;4)$ • $L_f: y = 4$ • $L_d: x = 5$ • $\lvert 4p\rvert = 4$ • Puntos de corte: $(0;0)$,$(0;0)$ y $(0;8)$

Observación: La gráfica de una parábola debe pasar por el vértice, los extremos del lado recto y por los puntos de corte con los ejes si es que los tiene.