EL249 - Ingeniería de control 2

Unidad N°3: Diseño de observadores de estados, integración de controladores y observadores

Semana 9

- Observabilidad de sistemas.
- Deducción de la condición de observabilidad.
- Diseño de observadores o estimadores de estados de orden completo.
- Integración en un sistema de control, del controlador y del observador de orden completo.
- Diseño del regulador mediante realimentación de estados observados.

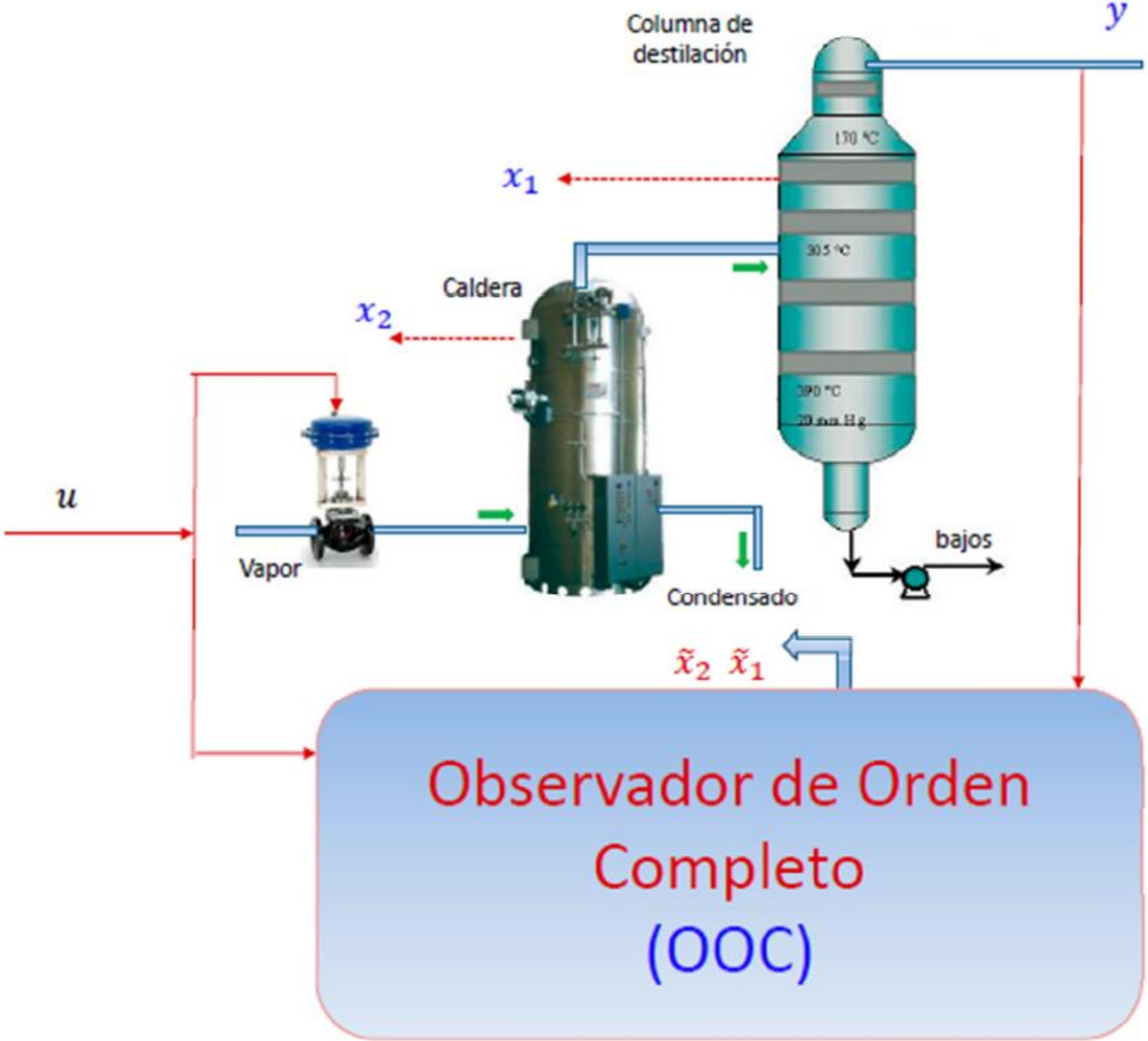
MEng. Carlos H. Inga Espinoza

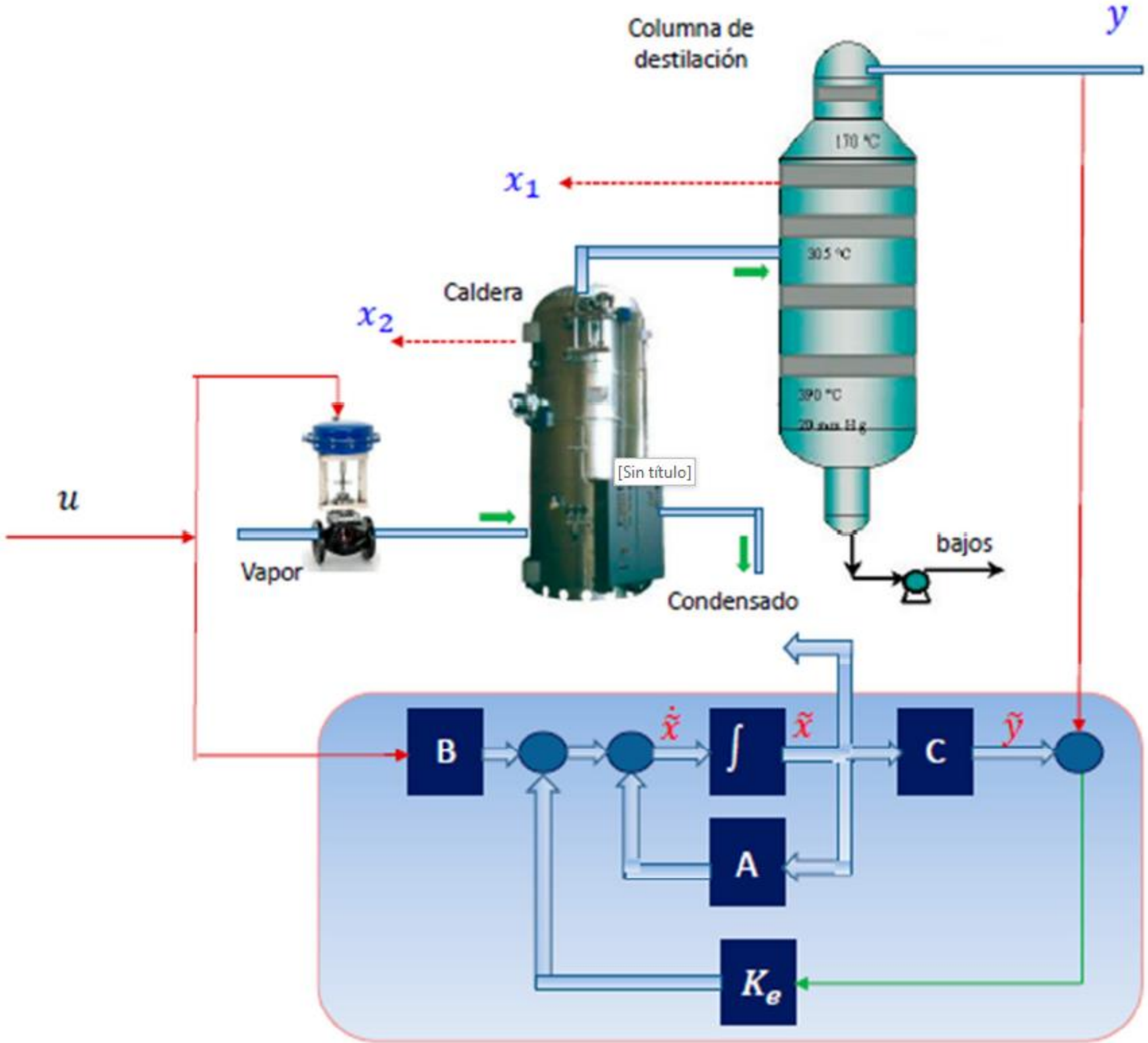
Introducción

- En el método de diseño de ubicación de polos, se supuso que todas las variables de estado podían medirse; sin embargo, en la práctica no todas las variables de estado pueden estar disponibles para la realimentación.
- En este caso, es necesario estimar las variables de estado no disponibles.
- El calculo que permite estimar las variables de estado recibe el nombre de observador de estado. Si el observador de estado permite estimar todas las variables de estado, independientemente de si algunas de ellas se encuentran disponibles para medición directa, se denomina observador de estado de orden completo (OOC). Si se miden menos del total de variables de estado se denomina observador de estado de orden reducido y en el caso de que sólo se requiere estimar las variables de estado no medibles, se denomina observador de estado de orden mínimo.

Introducción

- Para ubicar las raíces de la ecuación característica de un sistema de lazo cerrado en las posiciones deseadas, es necesario medir todas las variables de estado.
- En aplicaciones prácticas, algunas variables no pueden ser medidas:
  - ✓ por razones de costo,
  - ✓ carencia de sensores apropiados
  - ✓ dato de Medición de sensores con ruido
  - ✓ ó por ser de naturaleza ficticia.
- Si un sistema es observable, se podrá estimar aquellas variables de estado que no pueden ser medidas, empleando un observador.


Columna de destilación
y
x1
Caldera
x2
u
Vapor
Condensado
bajos
x̃2 x̃1
Observador de Orden Completo
(OOC)



Columna de destilación
y
170 °C
x_1
305 °C
Caldera
x_2
390 °C
20 mm Hg
[Sin título]
u
Vapor
Condensado
bajos
B
$\dot{\tilde{x}}$
$\int$
$\tilde{x}$
C
$\tilde{y}$
A
K_e

Introducción

- Una variable estimada puede en algunos casos ser más confiable que una variable medida, esto debido a que el error en la medición producido por el sensor podría ser mayor que el error de estimación del observador.
- El observador de un SLI-t, debe ser diseñado teniendo la propiedad de que el error de estimación tienda a cero tan rápido como se desea.

Estructura del OOC

- Considere el modelo de espacio estado de un SLIT

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \qquad (1)$$

$$y(t) = Cx(t) \qquad (2)$$

- Se supone que el vector de estado x es estimado por $\tilde{x}$, así se tiene un subsistema similar a la planta para el observador de estado:

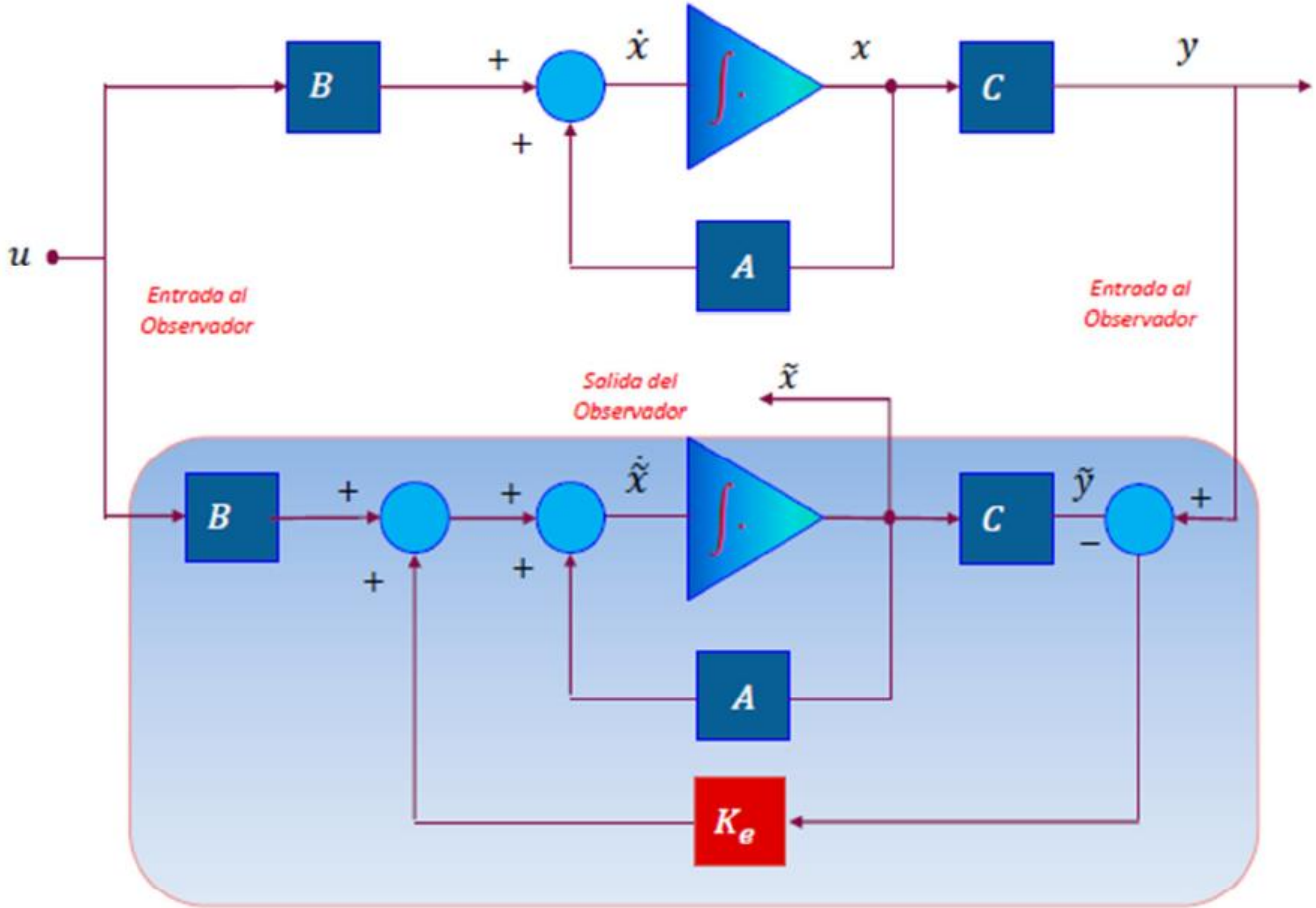
$$\dot{\tilde{x}} = A\tilde{x} + Bu + K_e(y - \tilde{y}) \qquad (3)$$

$$\dot{\tilde{x}} = A\tilde{x} - K_eC\tilde{x} + Bu + K_ey$$

$$\dot{\tilde{x}} = (A - K_eC)\tilde{x} + B\boxed{u} + K_e\boxed{y}$$

Entradas al observador

- El OOC tiene a $y(t)$ e $u(t)$ como entradas y a $\tilde{x}$ como salida. A través de u se estima un $\tilde{x}$, luego se hace correcciones a ese valor con el error $y - \tilde{y}$ que es amplificado por la ganancia K_e.



- La realimentación a través de K_e funciona como una señal de corrección para el modelo de la planta que incorpora los factores desconocidos en planta

Ecuación del error del OOC

- La ecuación del error en el observador se obtiene de la resta de las ecuaciones (1)-(3)

$$\dot{x} - \dot{\tilde{x}} = Ax - A\tilde{x} - K_e(Cx - C\tilde{x}) \qquad (4)$$

$$\boxed{\dot{e}(t) = (A - K_e C)e(t)} \qquad (5)$$

Anteriormente vimos para controladores:

$$\dot{\mathbf{e}} = (\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K})\mathbf{e}$$

No tiene exactamente la misma forma

- Si los valores propios de $A - K_e C$ corresponden a un sistema estable, entonces: $e(t) \to 0$ para cualquier $e(0)$.
- Es decir $\tilde{x}(t) \to x(t)$ sin importar los valores de $\tilde{x}(0)$ y $x(0)$
- Por lo anterior los valores propios de $A - K_e C$ se deberán elegir de tal manera que el sistema sea estable y $e(t) \to 0$ con la velocidad deseada

Ecuación del error del OOC

- Si el sistema es completamente observable, se puede demostrar que es posible seleccionar un K_e tal que $(A - K_eC)$ tenga valores característicos arbitrarios deseados, entonces se determina la matriz de ganancia del observador para producir la matriz deseada $(A - K_eC)$.
- El diseño del OOC se convierte en determinar un K_e apropiado tal que $(A - K_eC)$ tenga los valores característicos deseados. De hecho, el problema se convierte matemáticamente en el mismo que en el caso de ubicación de polos. Esto es, resolver un K para un sistema que es la forma dual de $\dot{x} = Ax + Bu$ como se demostrará:

El sist. original es:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x}$$

Su sistema dual es:

$$\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{A}^*\mathbf{z} + \mathbf{C}^*\mathbf{v}$$

$$\mathbf{n} = \mathbf{B}^*\mathbf{z}$$

Principio de dualidad: El sistema de la derecha es completamente observable si y solo si el sistema de la izquierda es completamente controlable y viceversa

***: transpuesta conjugada**

Dualidad

- Considere el sistema original:

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{B}u$$

$$y = \boldsymbol{C}\boldsymbol{x}$$

- En el diseño del OOC, se deberá resolver por ubicación de polos el sistema dual:

$$\left.\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{z}} &= \boldsymbol{A}^{*}\boldsymbol{z} + \boldsymbol{C}^{*}v \\ n &= \boldsymbol{B}^{*}\boldsymbol{z} \end{aligned}\right\} \text{Sistema dual}$$

- Asumiendo que la señal de control v es:

$$v = -\boldsymbol{K}\boldsymbol{z}$$

Dualidad

- Si el sistema dual es completamente controlable, entonces se puede determinar un **K**, tal que la matriz **A*-C*K** resulte en un conjunto de valores propios deseados.

- Si μ_1 , μ_2 ,..., μ_n , son los valores propios deseados de la matriz de estados observados ($\boldsymbol{A} - \boldsymbol{K}_e\boldsymbol{C}$), entonces tomando esos mismos $\mu_i{}'s$ como los valores propios deseados de la matriz de ganancia de estados retroalimentados del sistema dual, se obtiene:

$$|sI - (\boldsymbol{A}^* - \boldsymbol{C}^*\boldsymbol{K})| = (s - \mu_1)(s - \mu_2) \cdots (s - \mu_n)$$

- Nótese que los valores propios de **A*-C*K** y los de **A-K*C** son los mismos, entonces:

$$|sI - (\boldsymbol{A}^* - \boldsymbol{C}^*\boldsymbol{K})| = |sI - (\boldsymbol{A} - \boldsymbol{K}^*\boldsymbol{C})|$$

Recuerde: * es la transpuesta conjugada

Dualidad

$$|sI - (A^* - C^* K)| = |sI - (A - K^* C)|$$

- Comparando el polinomio característico $|sI - (A - K^* C)|$ y el polinomio característico para el sistema observado $|sI - (A - K_e C)|$, encontramos que K_e y K^* están relacionados así:

$$|sI - (A - K^* C)| = |sI - (A - K_e C)|$$

$$K^* = K_e$$

- Luego, usando la matriz K determinado con el método de ubicación de polos en el sistema dual, la matriz de ganancias K_e para el sistema original se puede determinar usando la relación $K_e = K^*$.

*Recuerde que al momento de hallar Ke con el 1er método visto anteriormente, será válido para la forma canónica del sistema por lo que se deberá hacer la transformación respectiva.

Condición necesaria y suficiente para la observación de estados

- Como se expuso, la condición necesaria y suficiente para determinar una ganancia K_e es que el sistema dual ($\dot{z} = A^*z + C^*v$) del sistema original sea completamente controlable. Por el principio de dualidad, si el sistema dual es controlable entonces el sistema original es observable.
- Por lo tanto, la condición necesaria y suficiente para diseñar un observador de estados es que el sistema original sea completamente observable.

Diseño de Observador: Teorema

- Si un SLI-t es completamente observable, existe un vector **Ke** que permite que los estados estimados lleguen a ser iguales a los estados reales lo mas pronto posible.
- **Demostración.**
- Si en un SLI-t las matrices **A**, **B** se puede transformar a la FCO: **Ao**, **Bo**.

$$A_{\mathrm{FCO}}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & -a_2 \\ \vdots & \vdots & \cdots & 0 & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_{n-1} \end{bmatrix}$$

$$C_{\mathrm{FCO}} = [\, 0 \quad \dots 0 \;\; 0 \quad 1 \,]$$

$K_{e\mathrm{FCO}}$: La ganancia hallada para el observador en su FCO

K_e: La ganancia hallada para el observador en su forma original

$$K_{e\mathrm{FCO}} = Q^{-1} K_e \quad \Rightarrow \quad K_e = Q K_{e\mathrm{FCO}}$$

Diseño de Observador: Teorema

- Para este caso se obtiene:

$$A_{\mathrm{FCO}} - K_{e\,\mathrm{FCO}}C_{\mathrm{FCO}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -(a_0 + K_{e1o}) \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -(a_1 + K_{e2o}) \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & -(a_2 + K_{e3o}) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -(a_{n-1} + K_{eno}) \end{bmatrix}$$

- Y la ecuación característica será::

$$|sI - A_{\mathrm{FCO}} - K_{e\,\mathrm{FCO}}\,C_{\mathrm{FCO}}| = s^n + (a_{n-1} + K_{en\,\mathrm{FCO}})s^{n-1} + \cdots + (a_1 + K_{e2\,\mathrm{FCO}})\,s + (a_0 + K_{e1\,\mathrm{FCO}}) = 0 \tag{9}$$

Diseño de Observador: Teorema

La determinación de K_e para el OOC con A_{FCO} y C_{FCO} dados, es el mismo problema que la determinación de K en el diseño por ubicación de polos con A y B dados.

Diseño de Observador: Teorema

- Teniendo en cuenta la ecuación característica deseada de 8=9, al igualar coeficientes de los

términos con iguales potencias

$$s^n + \alpha_{n-1}s^{n-1} + \alpha_{n-2}s^{n-2} + \cdots + \alpha_1 s + \alpha_0 =$$

$$= s^n + \ a_{n-1} + (K_{en\mathrm{FCO}}\ \ s^{n-1}) + \cdots + (a_1 + K_{e2\ \mathrm{FCO}}\ )s + (a_0 + K_{e1\ \mathrm{FCO}})$$

$$\alpha_0 = a_0 + K_{e1\ \mathrm{FCO}}$$

$$\alpha_{n-1} = a_{n-1} + K_{en\ \mathrm{FCO}}$$

De donde se obtienen las ganancias

$$K_{ei\mathrm{FCO}} = \alpha_{i-1} - a_{i-1} \qquad i = 1,2, \ldots n$$

- Para el sistema original se calcula el vector K_e empleando la transformación:

$$K_e = QK_{e\mathrm{FCO}}$$

Matriz de ganancias del observador (Método 1)

- Usando la matriz de transformación Q

$$\boldsymbol{K}_{FCO} = [\alpha_n - a_n \quad \alpha_{n-1} - a_{n-1} \quad \cdots \quad \alpha_2 - a_2 \quad \alpha_1 - a_1]$$

- Ya que $\boldsymbol{K}_e = \boldsymbol{K}^*$

$$\boldsymbol{K}_{eFCO} = \boldsymbol{K}_{FCO}{}^* = \begin{bmatrix} \alpha_n - a_n \\ \alpha_{n-1} - a_{n-1} \\ \vdots \\ \alpha_2 - a_2 \\ \alpha_1 - a_1 \end{bmatrix}$$

$$\boxed{K_e = QK_{e\mathrm{FCO}}}$$

a_i: Coeficientes de la ec. característica de la matriz A
α_i: Coeficientes de la ec. Característica deseada
a_n, α_n: término independiente de la ecuación.

$$\mathbf{Q} = (\mathbf{W}\mathbf{N}^*)^{-1}$$

$$\mathbf{N} = [\mathbf{C}^* \; \vdots \; \mathbf{A}^*\mathbf{C}^* \; \vdots \; \cdots \; \vdots \; (\mathbf{A}^*)^{n-1}\mathbf{C}^*]$$

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_1 & 1 \\ a_{n-2} & a_{n-3} & \cdots & 1 & 0 \\ \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\ a_1 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Matriz de ganancias del observador (Método 2)

- Método de sustitución directa: reemplazando

$$\boldsymbol{K_e} = \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_3 \\ k_n \end{bmatrix}$$

Matriz de ganancias del observador (Método 3)

- Fórmula de Ackermann

$$K = [0 \quad 0 \quad \cdots 0 \quad 1][B \quad AB \quad A^2B \ \cdots \quad A^{n-1}B]^{-1}\emptyset(A)$$

- Para el sistema dual:

$$\dot{\boldsymbol{z}} = \boldsymbol{A}^*\boldsymbol{z} + \boldsymbol{C}^*v$$

$$n = \boldsymbol{B}^*\boldsymbol{z}$$

$$\boldsymbol{K} = [0 \quad 0 \quad \cdots 0 \quad 1][C^* \quad A^*C^* \quad (A^*)^2C^* \cdots \quad (A^*)^{n-1}C^*]^{-1}\emptyset(A^*)$$

- Ya que $\boldsymbol{K}_e = \boldsymbol{K}^*$

$$\boldsymbol{K}_e = \boldsymbol{K}^* = \{[0 \quad 0 \quad \cdots 0 \quad 1][C^* \quad A^*C^* \quad (A^*)^2C^* \cdots \quad (A^*)^{n-1}C^*]^{-1}\emptyset(A^*)\}^*$$

Matriz de ganancias del observador (Método 3)

$$\boldsymbol{K}_e = \boldsymbol{K}^* = \{[0 \quad 0 \quad \cdots 0 \quad 1][C^* \quad A^*C^* \quad (A^*)^2C^* \cdots \quad (A^*)^{n-1}C^*]^{-1}\emptyset(A^*)\}^*$$

- Simplificando:

$$K_e = \emptyset(A^*)^*\{[C^* \quad A^*C^* \quad (A^*)^2C^* \cdots \quad (A^*)^{n-1}C^*]^{-1}\}^*[0 \quad 0 \quad \cdots 0 \quad 1]^*$$

$$\boxed{K_e = \emptyset(A)\begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-2} \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}$$

$\emptyset(A)$: Ecuación característica deseada evaluada en la matriz A

Matriz de ganancias del observador

- La señal de realimentación a través de la matriz de ganancia $\mathbf{K_e}$ sirve como una señal de corrección a la planta modelo para tener en cuenta el comportamiento no modelado o las perturbaciones de la planta.

- Si existen factores desconocidos significativos, entonces la señal de realimentación a través de la matriz $\mathbf{K_e}$ debería ser relativamente grande.

- Sin embargo, si la señal de salida se contamina en forma significativa con perturbaciones y ruido, la salida y no es fiable y la señal de realimentación a través de la matriz $\mathbf{K_e}$ debería ser relativamente pequeña.

Matriz de ganancias del observador

- Recuerde que la matriz de ganancias del observador $\mathbf{K}_e$ depende de la ecuación característica deseada:

$$(s-\beta_1)(s-\beta_2)\cdots(s-\beta_n)=0$$

- Los polos del observador deben ser 2 a 5 veces más rápidos que los polos del controlador para asegurarse que el error del observador (error de estimación) converge rápidamente a cero.

- Esto significa que la estimación del error del observador decae 2 a 5 veces más rápido que el error del vector de estado **x**.

- Este decaimiento más rápido del error del observador en comparación con la dinámica deseada hace que los polos del controlador dominen la respuesta del sistema.

Matriz de ganancias del observador

- Es importante que si el ruido del sensor es considerable, se pueden seleccionar los polos del observador para que sea más lentos que dos veces los polos del controlador, de manera que el ancho de banda del sistema se haga más pequeño y se atenúe el ruido.

- En este caso la respuesta del sistema estará fuertemente influenciada por los polos del observador.

- Si los polos del observador están ubicados a la derecha de los polos del controlador en el semiplano izquierdo de s, la respuesta estará dominada por los polos del observador en lugar de los polos del controlador.

Matriz de ganancias del observador

- En el diseño de un observador de estado, es conveniente determinar algunas otras matrices de ganancias del observador K_e basado en diferentes ecuaciones características deseadas.

- Para cada una de las distintas matrices K_e , deben realizarse pruebas de simulación para evaluar el desempeño resultante del sistema.

- Luego escogemos el mejor K_e para el sistema en general.

- En muchas casos, la selección de la mejor matriz K_e es un compromiso entre una respuesta rápida y la sensibilidad frente a perturbaciones y ruidos.

Ejemplo 1

- Considere el sistema:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 20.6 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

- Usaremos un método basado en observador para diseñar un control de estados realimentado tal que:

$$u = -\boldsymbol{K}\breve{\boldsymbol{x}}$$

- Diseñe un obsersador de estados completo tal que los valores propios deseados son $\beta_1 = -10$, $\beta_2 = -10$.

Ejemplo 1

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 20.6 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

- Verificando la matriz de observabilidad:

$$OM = \begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

- Ya que rank(OM)=2 el sistema es completamente observable y la determinación de la matriz de ganancias del observador es posible.

Ejemplo 1 (Método 1)

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 20.6\\ 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}u(t)$$

$$y = \begin{bmatrix}0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}$$

- El sistema esta ya en la FCO. Entonces, la matriz de transformación **Q** es **I**.

Ejemplo 1 (Método 1)

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 20.6 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

- La ecuación característica del sistema es:

$$|sI - A| = s^2 - 20.6 = 0$$

- Tenemos:

$$a_1 = 0, \qquad a_2 = -20.6$$

Ejemplo 1 (Método 1)

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 20.6 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

- La ecuación deseada del sistema es:

$$(s - \beta_1)(\, s - \beta_2) = (s + 10)\,(s + 10)$$

$$(s - \beta_1)(\, s - \beta_2) = s^2 + 20s + 100$$

- Tenemos:

$$\alpha_1 = 20, \qquad \alpha_2 = 100$$

Ejemplo 1 (Método 1)

- La ganancia del observador K_e puede ser calculada usando la siguiente fórmula:

$$\boldsymbol{K}_e = \begin{bmatrix} \alpha_2 - a_2 \\ \alpha_1 - a_1 \end{bmatrix}$$

- Donde:

$a_1 = 0, \qquad a_2 = -20.6 \qquad\qquad \alpha_1 = 20, \qquad \alpha_2 = 100$

$$\boldsymbol{K}_e = \begin{bmatrix} 100 - (-20.6) \\ 20 - 0 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{K}_e = \begin{bmatrix} 120.6 \\ 20 \end{bmatrix}$$

Ejemplo 1 (Método 2)

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 20.6\\ 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}u(t)$$

$$y = \begin{bmatrix}0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}$$

- La ecuación característica del sistema observado es:

$$|s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A} + \boldsymbol{K}_e\boldsymbol{C}| = 0$$

- Dándole nombres a las variables de Ke:

$$\boldsymbol{K}_e = \begin{bmatrix}k_{e1}\\ k_{e2}\end{bmatrix}$$

$$|s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A} + \boldsymbol{K}_e\boldsymbol{C}| = \left|\begin{bmatrix}s & 0\\ 0 & s\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}0 & 20.6\\ 1 & 0\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}k_{e1}\\ k_{e2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 1\end{bmatrix}\right|$$

$$= s^2 + k_{e2}s - 20.6 + k_{e1}$$

Ejemplo 1 (Método 2)

- La ecuación característica deseada es:

$$(s-\beta_1)(\,s-\beta_2) = s^2 + 20s + 100$$

- Comparando ambos coeficientes de s:

$$s^2 + 20s + 100 = s^2 + k_{e2}s - 20.6 + k_{e1}$$

$$\boldsymbol{K}_e = \begin{bmatrix} 120.6 \\ 20 \end{bmatrix}$$

Ejemplo 1 (Método 3)

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 20.6 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

- Usando la fórmula de Ackermann:

$$\boldsymbol{K}_e = \emptyset(\boldsymbol{A}) \begin{bmatrix} \boldsymbol{C} \\ \boldsymbol{CA} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

- Donde:

$$\emptyset(\boldsymbol{A}) = A^2 + \alpha_1 A + \alpha_2 I$$

$$\alpha_1 = 20, \qquad \alpha_2 = 100$$

$$\emptyset(\boldsymbol{A}) = A^2 + 20A + 100I$$

Ejemplo 1 (Método 3)

$$\emptyset(\boldsymbol{A}) = \boldsymbol{A}^2 + 20\boldsymbol{A} + 100\boldsymbol{I}$$

$$\emptyset(\boldsymbol{A}) = \begin{bmatrix} 0 & 20.6 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^2 + 20\begin{bmatrix} 0 & 20.6 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + 100\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\emptyset(\boldsymbol{A}) = \begin{bmatrix} 120.6 & 412 \\ 20 & 120.6 \end{bmatrix}$$

Ejemplo 1 (Método 3)

- Usando la fórmula de Ackermann:

$$\boldsymbol{K}_e = \emptyset(\boldsymbol{A}) \begin{bmatrix} \boldsymbol{C} \\ \boldsymbol{CA} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{K}_e = \begin{bmatrix} 120.6 & 412 \\ 20 & 120.6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{K}_e = \begin{bmatrix} 120.6 \\ 20 \end{bmatrix}$$

Ejemplo 1

- Obtenemos el mismo $\mathbf{K_e}$ en los 3 métodos.

- La ecuación de observador de estados de orden completo está dada por:

$$\dot{\breve{\boldsymbol{x}}} = \boldsymbol{A}\breve{\boldsymbol{x}} + \boldsymbol{B}u + \boldsymbol{K_e}(y - \boldsymbol{C}\breve{\boldsymbol{x}})$$

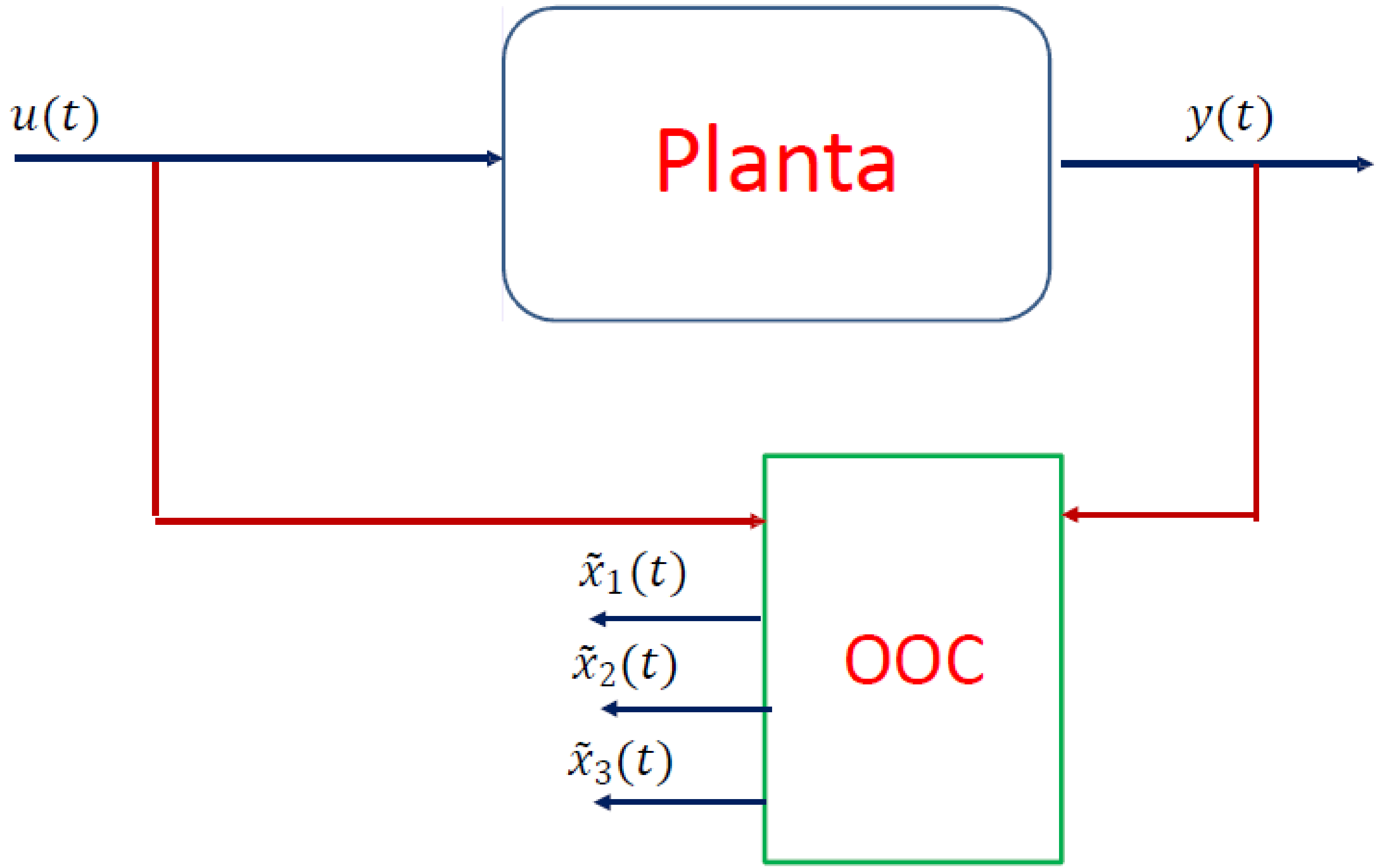
$$\begin{bmatrix} \dot{\breve{x}}_1 \\ \dot{\breve{x}}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 20.6 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \breve{x}_1 \\ \breve{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) + \begin{bmatrix} 120.6 \\ 20 \end{bmatrix} \left(y - \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \breve{x}_1 \\ \breve{x}_2 \end{bmatrix}\right)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{\breve{x}}_1 \\ \dot{\breve{x}}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 20.6 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \breve{x}_1 \\ \breve{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) + \begin{bmatrix} 120.6 \\ 20 \end{bmatrix} y - \begin{bmatrix} 120.6 \\ 20 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \breve{x}_1 \\ \breve{x}_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{\breve{x}}_1 \\ \dot{\breve{x}}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -100 \\ 1 & -20 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \breve{x}_1 \\ \breve{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) + \begin{bmatrix} 120.6 \\ 20 \end{bmatrix} y$$

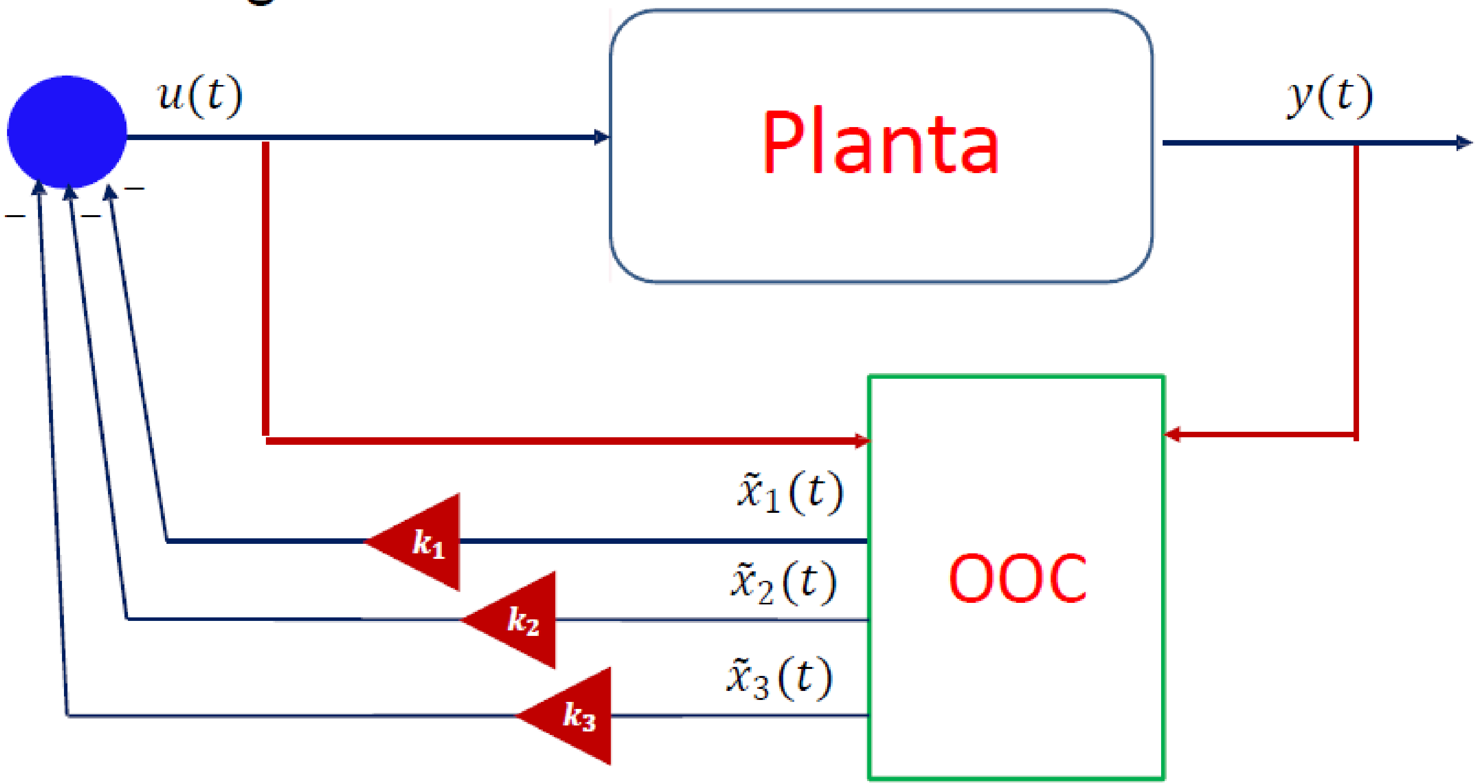
Estimación de variables

- Los observadores pueden emplearse como sensores virtuales los cuales permiten estimar variables de estado



Integración de observadores en diseño por ubicación de polos

- Cuando la planta tiene variables no medibles, se podrían emplear variables estimadas por un OOC (en vez de las variables reales) a fin de elaborar la variable de control
- Por ejemplo en un sistema de regulación como se muestra en la figura



Adición del OOC a un Sistema de lazo cerrado

- En los casos que no pueda medirse x(t) se empleará un OOC y en base a $\tilde{x}(t)$ se realizara la realimentación

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \qquad (1)$$

$$y(t) = Cx(t) \qquad (2)$$

$$u(t) = -K\tilde{x}(t) \qquad (3)$$

Sustituyendo 3 en 1

Sumamos y restamos BKx

$$\dot{x} = Ax - BK\,\tilde{x}$$

$$\dot{x} = Ax - BK\,\tilde{x} + BKx - BKx)$$

$$\dot{x} = (A - BK)x + BK(x - \tilde{x})$$

Adición del OOC a un Sistema de lazo cerrado

De donde:

$$x = (A - BK)x + BKe \qquad (5)$$

Aparte sabemos que:

$$\dot{e} = (A - K_e C)e \qquad (6)$$

Uniendo 5 y 6 en una matriz extendida:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{e} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A - BK & BK \\ 0 & A - K_e C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ e \end{bmatrix}$$

La ecuación característica del sistema:

$$\Delta(s) = |sI - A + BK||sI - A + K_e C| = 0$$

El diseño por ubicación de polos y el diseño del observador son independiente uno del otro.

Conclusión

- El diseño del control de regulación de una planta cuyas variables de estado no puedan medirse, consiste de dos etapas
- Determinación del vector de ganancias **K**, que permite ubicar las raíces de Δc (s) en las posiciones deseadas.
- Determinación del vector de ganancias **K***e* , que permite ubicar las raíces de Δe (s) en las posiciones deseadas.

Ejemplo 2

- Diseñe un regulador para la siguiente planta:

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 1\\ 20.6 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}u(t)$$

$$y = \begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}$$

- Los polos de LC deseados del sistema son $\mu_1 = -1.8 + j2.4$, $\mu_2 = -1.8 - j2.4$. Calcula la matriz de ganancias **K** para ubicar los polos en la ubicación deseada.

- Suponga que usamos control con estados observados. Los valores propios deseados de la matriz de ganancias del observador son $\beta_1 = -8, \beta_2 = -8$.

- Obtenga la matriz de ganancias del observador **K**$_e$ y dibuje el diagrama de bloques para el sistema de control con estados observados.

Problema 1

- Considere el siguiente sistema:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} \qquad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{C} = [1 \quad 0]$$

$$y = \mathbf{C}\mathbf{x}$$

- Diseñe un OOC con los 3 métodos. Los polos deseados son: s= -5 y s= -5

Problema 2

- Considere el siguiente sistema:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1.244 & 0.3956 & -3.145 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1.244 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

- Diseñe un OOC con los siguientes polos deseados:

$$s = -5 + j5\sqrt{3}, \qquad s = -5 - j5\sqrt{3}, \qquad s = -10$$

Problema 3

- Considere el siguiente sistema:

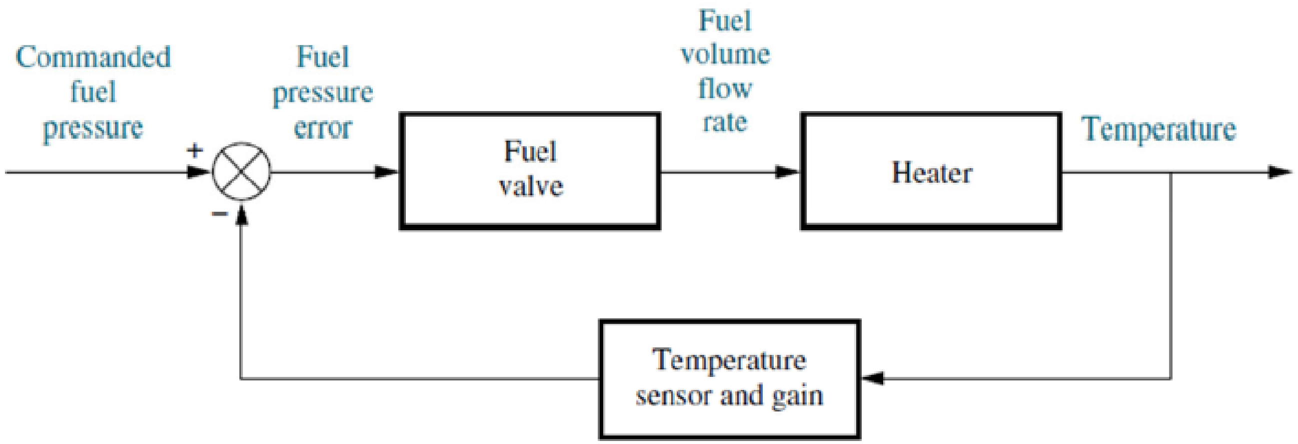
$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u$$
$$y = \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}u,$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -6 & -12 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} -5 \\ 1 \end{bmatrix},$$
$$\mathbf{C} = [4 \quad -3], \quad \text{and} \quad \mathbf{D} = [0].$$

- Verifique el sistema es observable y controlable. Si es así, diseñe un control con estados observador. Ubique ambos polos para el control $s = -1 \pm j$ y ambos polos para el observador en s=-12

Problema 4

- El diagrama de bloques de un calentador a gas se muestra en la figura. Se desea diseñar un controlador con observador de orden completa tal que la respuesta tenga 5% de sobreimpulso y un tiempo de asentamiento de 10min. El observador debe responder 10 veces más rapido que el controlador pero con el mismo % de sobreimpulso.



$$G_H(s) = \frac{1}{(s+0.4)(s+0.8)} \frac{\text{degrees F}}{\text{ft}^3/\text{min}}$$

$$G_v(s) = \frac{5}{s+5} \frac{\text{ft}^3/\text{min}}{\text{psi}}$$

Problema 5

- Considere el sistema:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u$$
$$y = \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}u,$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -5 & 10 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$
$$\mathbf{C} = [1 \quad -4], \quad \text{and} \quad \mathbf{D} = [0].$$

- Verifique que el sistema es observable. Luego diseñe un OOC colocando los dos polos en s=-1. Grafique la respuesta del error estimado e=x-$\tilde{x}$ con condiciones iniciales e(0)=[1 1]’

Gracias por vuestra atención...