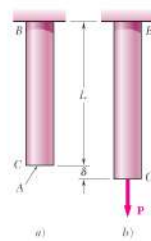


Carga axial



Deformación de una barra cargada axialmente.

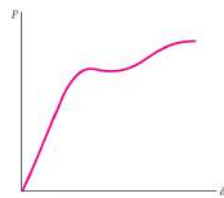
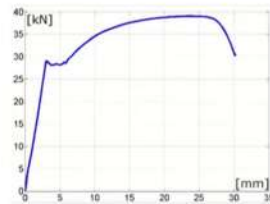


Figura 2.2 Diagrama de carga-deformación.



Curva para un material dúctil

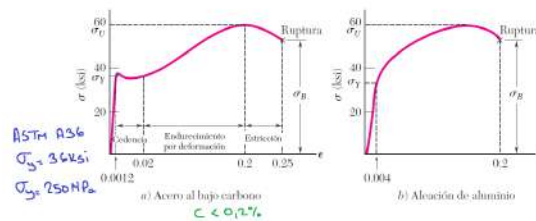
Deformación unitaria



Probeta típica para ensayo o prueba de tensión.

$$\epsilon = \frac{\delta}{L}$$

Diagrama esfuerzo - deformación



σ_y = esfuerzo a la fluencia
 y = yield = fluencia

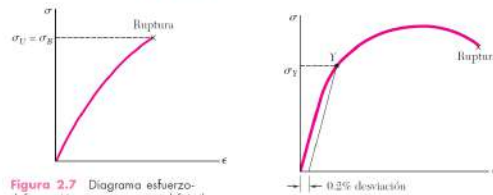


Figura 2.7 Diagrama esfuerzo-deformación para un material frágil típico.

Ley de Hooke. Modulo de elasticidad

La mayoría de los elementos en ingeniería, se diseñan para trabajar en la **zona elástica** donde se cumple:

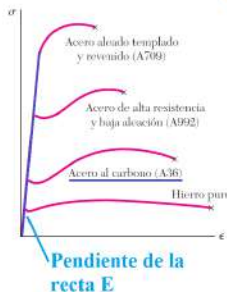
$$F = K \cdot x \quad \text{Ley de Hooke}$$

Para el acero:
 $E = 200 \text{ GPa}$

$$\sigma = E \cdot \epsilon$$

E: Modulo de elasticidad

ϵ : Deformación unitaria



$$E = \frac{\sigma}{\epsilon} \quad \text{pendiente.}$$

$$\sigma = E \cdot \epsilon$$

Deformaciones de elementos sometidos a carga axial



$$\sigma = E \cdot \epsilon \Rightarrow \epsilon = \frac{\sigma}{E}$$

$$\epsilon = \frac{\delta}{L}$$

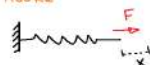
$$\frac{\delta}{L} = \frac{\sigma}{E}$$

$$\delta = \frac{\sigma \cdot L}{E}$$

$$\delta = \frac{P \cdot L}{E \cdot A}$$

$$\sigma = \frac{P}{A}$$

Ley de Hooke



$$F = K \cdot x$$

$$\delta = \frac{P \cdot L}{E \cdot A}$$

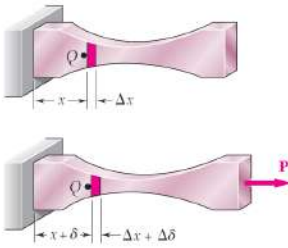
$$P = \left(\frac{EA}{L} \right) \cdot \delta$$

rigidez

Sí la varilla está cargada en otros puntos o si consta de varias porciones con distintas secciones transversales y distintos materiales :

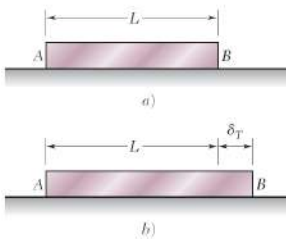
$$\delta = \sum_i \frac{P_i L_i}{A_i E_i}$$

Una varilla de sección variable



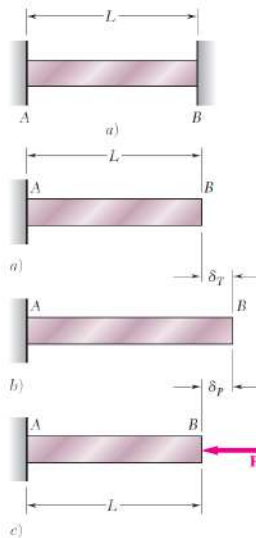
$$d\delta = \epsilon dx = \frac{P dx}{AE} \Rightarrow \delta = \int_0^L \frac{P dx}{AE}$$

Sistemas que involucran cambio de temperatura



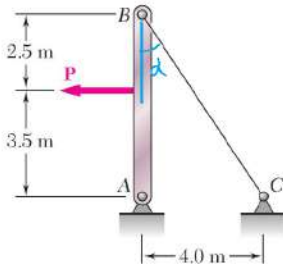
$$\delta_T = \alpha(\Delta T)L$$

Varillas con extremos restringidos contra la expansión termal.



Problema 01

El cable BC de 4 mm de diámetro es de un acero con $E = 200 \text{ GPa}$. Si se sabe que el máximo esfuerzo en el cable no debe exceder 190 MPa y que la elongación del cable no debe sobrepasar 6 mm , encuentre la carga máxima P que puede aplicarse como se muestra en la figura.



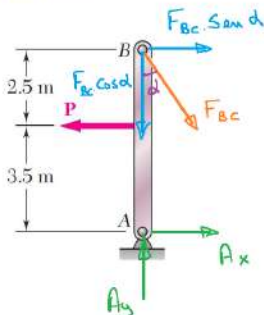
$$\tan \alpha = \frac{4}{6} \quad \alpha = 33,69^\circ$$

$$\sum M_A = 0$$

$$P \cdot 3,5 \text{ m} - F_{BC} \cdot \sin 33,69^\circ \cdot 6 \text{ m} = 0$$

$$P = 0,9509 F_{BC}$$

D.C.L para AB



1ra Condición

$$\sigma_{\max} = 190 \times 10^6 \text{ Pa}$$

$$190 \times 10^6 \text{ Pa} = \frac{F_{BC}}{12,566 \times 10^{-6} \text{ m}^2}$$

2da Condición

$$\delta_{\max} = 6 \text{ mm}$$

$$\delta_{BC} = \frac{F_{BC} \cdot L_{BC}}{E \cdot A_{BC}} \Rightarrow 6 \times 10^{-3} \text{ m} = \frac{F_{BC} \cdot 7,211 \text{ m}}{200 \times 10^9 \text{ Pa} \cdot 12,566 \times 10^{-6} \text{ m}^2}$$

$$F_{BC} = 2091 \text{ N}$$

La carga mas critica es 2091 N para F_{bc}

$$P = 0,9509 F_{BC}$$

$$P = 0,9509 \times 2091 \text{ N} = 1988 \text{ N}$$

$$L_{BC}^2 = 4^2 + 6^2$$

$$L_{BC} = 7,211 \text{ m}$$

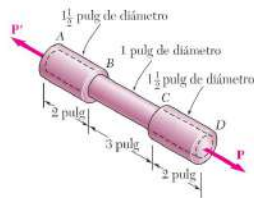
$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Para el cable } A = \frac{\pi d^2}{4} \\ A = \frac{\pi \cdot (4 \times 10^{-3} \text{ m})^2}{4} = 12,566 \times 10^{-6} \text{ m}^2 \end{array} \right.$$

$$F_{BC} = 2388 \text{ N}$$

Problema 03

La probeta que se muestra en la figura está compuesta por una varilla cilíndrica de acero de 1 pulg de diámetro y por dos mangas de 1.5 pulg de diámetro exterior unidas a la varilla. Si se sabe que $E = 29 \times 10^6$ psi, determine a) la carga P tal que la deformación total sea de 0.002 pulg, b) la deformación correspondiente de la porción central BC.

$$\delta = \sum \frac{P_i L_i}{A_i E_i}$$



P: Carga
L: Longitud
A: Area
E: Modulo de elasticidad

$$A = \frac{\pi d^2}{4}$$

	L (pulg)	d (pulg)	A (pulg ²)	L/A (pulg ⁻¹)
AB	2	1.5	1.7671	1.1318
BC	3	1	0.7854	3.8197
CD	2	1.5	1.7671	1.1318

$$\sum \left(\frac{L}{A} \right) = 6.0833 \text{ pulg}^{-1}$$

$$\delta = \sum \frac{P_i L_i}{E_i A_i} = \frac{P \cdot \sum \frac{L_i}{A_i}}{E} \Rightarrow \frac{P \cdot (6.0833 \text{ pulg}^{-1})}{E} = \delta = 0.002 \text{ pulg}$$

$$P = 0.002 \text{ pulg} \cdot 29 \times 10^6 \frac{\text{lb f}}{\text{pulg}^2} \cdot \frac{1}{(6.0833 \text{ pulg}^{-1})}$$

a)

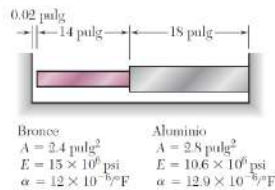
$$P = 9534.29 \text{ lb f}$$

b) Para δ_{BC} :

$$\delta_{BC} = \frac{P \cdot L_{BC}}{E \cdot A_{BC}} = \frac{9534.29 \text{ lb f} \cdot 3 \text{ pulg}}{29 \times 10^6 \frac{\text{lb f}}{\text{pulg}^2} \times 0.7854 \text{ pulg}^2} = 1.256 \times 10^{-3} \text{ pulg}$$

Problema 20

Si se sabe que existe una separación de 0.02 pulg cuando la temperatura es de 75°F, determine a) la temperatura en que el esfuerzo normal de la barra de aluminio será igual a -11 ksi, b) la longitud exacta correspondiente de la barra de aluminio.



$$\delta_T = \alpha(\Delta T)L$$

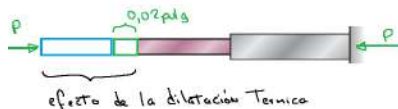
$$1 \text{ Ksi} = 1000 \text{ psi}$$

$$\sigma_{Al} = -11 \text{ Ksi (compresión)}$$

$$11 \times 10^3 \text{ psi} = \frac{P}{2.8 \text{ pulg}^2}$$

$$P = 30.8 \text{ Kip} \quad 1 \text{ Kip} = 1000 \text{ lb f}$$

Si no hubiera la pared izquierda



$$\delta_P = \frac{P \cdot L_B}{E_B A_B} + \frac{P \cdot L_A}{E_A A_A} = \frac{30.8 \times 10^3 \text{ lb f} \cdot 14 \text{ pulg}}{15 \times 10^6 \text{ psi} \cdot 2.4 \text{ pulg}^2} + \frac{30.8 \times 10^3 \text{ lb f} \cdot 18 \text{ pulg}}{10.6 \times 10^6 \text{ psi} \cdot 2.8 \text{ pulg}^2} = 0.03066 \text{ pulg}$$

$$\delta_{\text{dilatación}} = \delta_P + \delta_{\text{gap}} = 0.03066 \text{ pulg} + 0.02 \text{ pulg} = 0.05066 \text{ pulg}$$

$$\delta_{\text{dilatación}} = \delta_{T,B} + \delta_{T,A}$$

$$0.05066 \text{ pulg} = L_B \alpha_B \Delta T + L_A \alpha_A \Delta T$$

$$0.05066 \text{ pulg} = 14 \text{ pulg} \cdot 12 \times 10^{-6} / ^\circ\text{F} \cdot \Delta T + 18 \text{ pulg} \cdot 12.9 \times 10^{-6} / ^\circ\text{F} \cdot \Delta T$$

$$\Delta T = 126.58^\circ\text{F}$$

$$T_{\text{Final}} - T_{\text{inicial}} = 126.58^\circ\text{F}$$

$$T_{\text{Final}} = 201.58^\circ\text{F}$$

b)

$$\delta_a = \delta_{T,a} - \delta_{P,a}$$

$$\delta_a = L_a \alpha_a \Delta T - \frac{P L_a}{E_a A_a}$$

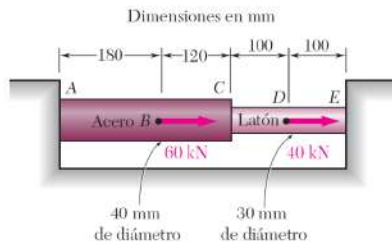
$$\delta_a = 18 \text{ pulg} \cdot 12.9 \times 10^{-6} / ^\circ\text{F} \cdot 126.58^\circ\text{F} - \frac{30.8 \times 10^3 \text{ lb f} \cdot 18 \text{ pulg}}{10.6 \times 10^6 \text{ psi} \cdot 2.8 \text{ pulg}^2}$$

$$\delta_a = 70.714 \times 10^{-3} \text{ pulg}$$

Problema 16

Dos varillas cilíndricas, una de acero y la otra de latón se unen en C y están restringidas por soportes rígidos en A y en E. Para la carga mostrada y sabiendo que $E_a = 200 \text{ GPa}$ y $E_l = 105 \text{ GPa}$, determine

a) las reacciones en A y en E, b) la deflexión del punto C.

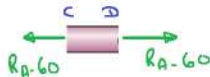
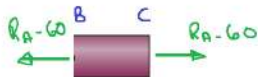
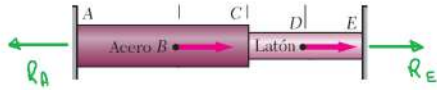


$$A_{\text{acero}} = \frac{\pi \cdot (0,04 \text{ m})^2}{4} = 1,2566 \times 10^{-3} \text{ m}^2$$

$$A_{\text{latón}} = \frac{\pi \cdot (0,03 \text{ m})^2}{4} = 7,0686 \times 10^{-4} \text{ m}^2$$

$$\delta = \frac{P \cdot L}{E \cdot A}$$

$$\delta_{AB} + \delta_{BC} + \delta_{CD} + \delta_{DE} = 0$$



$$\delta_{AB} = \frac{R_A \cdot 0,18 \text{ m}}{200 \times 10^9 \text{ Pa} \cdot 1,2566 \times 10^{-3} \text{ m}^2}$$

$$\delta_{BC} = \frac{(R_A - 60 \cdot 10^3) \cdot 0,12 \text{ m}}{200 \times 10^9 \text{ Pa} \cdot 1,2566 \times 10^{-3} \text{ m}^2}$$

$$\delta_{CD} = \frac{(R_A - 60 \cdot 10^3) \cdot 0,1 \text{ m}}{105 \times 10^9 \text{ Pa} \cdot 7,0686 \times 10^{-4} \text{ m}^2}$$

$$\delta_{DE} = \frac{(R_A - 100 \cdot 10^3) \cdot 0,1 \text{ m}}{105 \times 10^9 \text{ Pa} \cdot 7,0686 \times 10^{-4} \text{ m}^2}$$

$$\delta_{AB} + \delta_{BC} + \delta_{CD} + \delta_{DE} = 0$$

$$\frac{R_A \cdot 0,18 \text{ m}}{200 \times 10^9 \text{ Pa} \cdot 1,2566 \times 10^{-3} \text{ m}^2} + \frac{(R_A - 60 \cdot 10^3) \cdot 0,12 \text{ m}}{200 \times 10^9 \text{ Pa} \cdot 1,2566 \times 10^{-3} \text{ m}^2} + \frac{(R_A - 60 \cdot 10^3) \cdot 0,1 \text{ m}}{105 \times 10^9 \text{ Pa} \cdot 7,0686 \times 10^{-4} \text{ m}^2} + \frac{(R_A - 100 \cdot 10^3) \cdot 0,1 \text{ m}}{105 \times 10^9 \text{ Pa} \cdot 7,0686 \times 10^{-4} \text{ m}^2} = 0$$

$$R_A = 62,82 \text{ kN} \downarrow$$

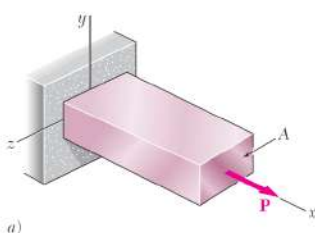
$$R_A - 100 = R_E \quad R_E = -37,18 \text{ kN} \downarrow$$

$$\delta_C = \delta_{AB} + \delta_{BC}$$

Reemplazando:

$$\delta_C = 46,27 \times 10^{-6} \text{ m} \downarrow$$

Relación de Poisson



$$\epsilon_x = \sigma_x / E$$

$$\nu = - \frac{\text{deformación unitaria lateral}}{\text{deformación unitaria axial}}$$

$$\nu = - \frac{\epsilon_y}{\epsilon_x} = - \frac{\epsilon_z}{\epsilon_x}$$

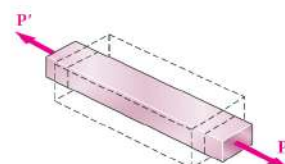
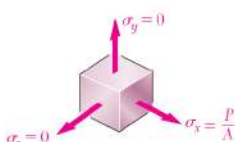
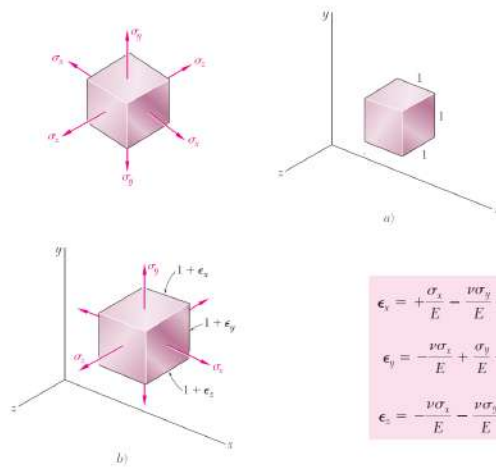
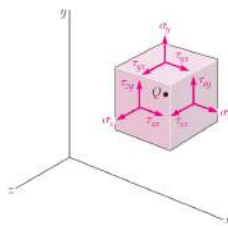


Figura 2.36 Contracción transversal de una barra bajo fuerza de tensión axial.

Carga multiaxial. Ley de Hooke generalizada



Deformación unitaria cortante



$$\sigma = E \cdot \epsilon$$

$$\gamma_{xy} = G \cdot \gamma_{xy}$$

G: Modulo de rigidez o modulo de cortante del material

γ_{xy} : angulo de deformación

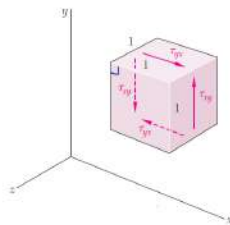


Figura 2.42 Elemento cúbico sujeto a esfuerzos cortantes.

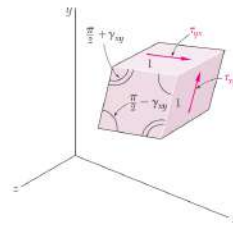


Figura 2.43 Deformación de un elemento cúbico debido a esfuerzos cortantes.

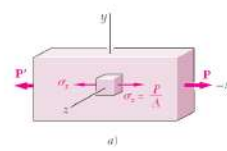
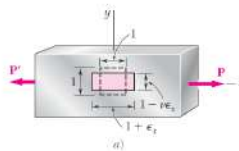
$$\tau_{xy} = G\gamma_{xy}$$

$$\tau_{yz} = G\gamma_{yz}$$

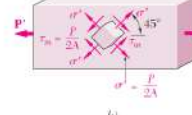
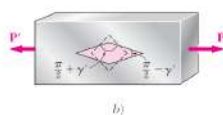
$$\tau_{zx} = G\gamma_{zx}$$

$$\begin{aligned}\epsilon_x &= +\frac{\sigma_x}{E} - \frac{\nu\sigma_y}{E} - \frac{\nu\sigma_z}{E} \\ \epsilon_y &= -\frac{\nu\sigma_x}{E} + \frac{\sigma_y}{E} - \frac{\nu\sigma_z}{E} \\ \epsilon_z &= -\frac{\nu\sigma_x}{E} - \frac{\nu\sigma_y}{E} + \frac{\sigma_z}{E} \\ \gamma_{xy} &= \frac{\tau_{xy}}{G} \quad \gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G} \quad \gamma_{zx} = \frac{\tau_{zx}}{G}\end{aligned}$$

Análisis adicional de las deformaciones bajo carga axial.



$$\frac{E}{2G} = 1 + \nu$$



E :200 GPa para una acero

Principio de Saint - Venant

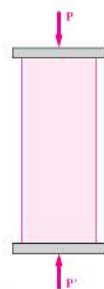


Figura 2.54 Carga axial aplicada sobre un elemento mediante placas rígidas.

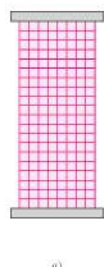


Figura 2.55 Carga axial aplicada sobre un modelo de caucho mediante placas rígidas.



Figura 2.56 Carga axial concentrada aplicada sobre un modelo de caucho.

1. La carga real y la utilizada para calcular los esfuerzos deben ser *estáticamente equivalentes*.
2. Los esfuerzos no pueden calcularse, de esta manera, en la cercanía inmediata de los puntos de aplicación de las cargas. Deben utilizarse métodos teóricos o experimentales avanzados para determinar la distribución de esfuerzos en estas áreas.

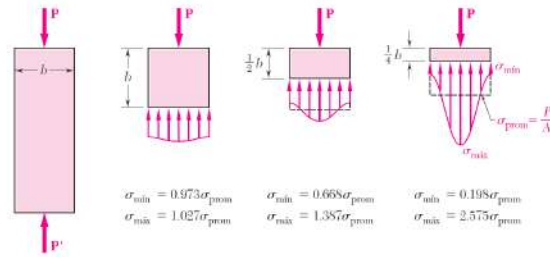
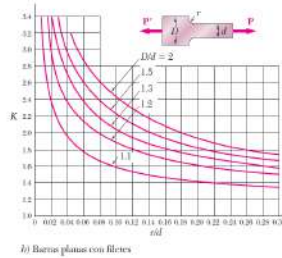
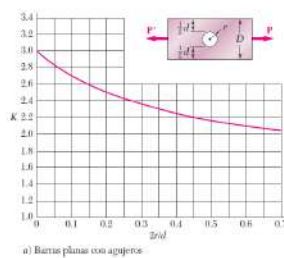


Figura 2.57 Distribuciones del esfuerzo en una placa sometida a cargas axiales concentradas.

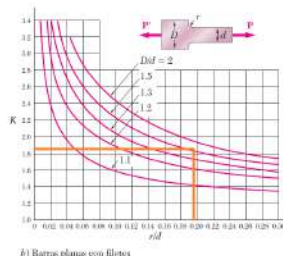
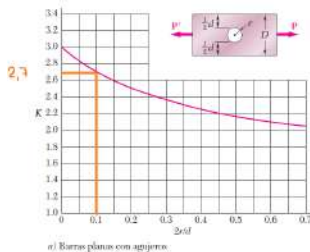
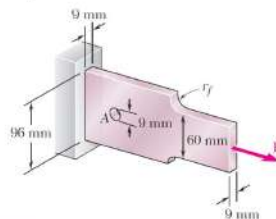
Concentración de esfuerzos



Observe que el esfuerzo promedio debe calcularse en la sección más angosta: $\sigma_{prom} = P/t$ donde t es el espesor de la barra.

Problema 27

Si se sabe que el agujero tiene un diámetro de 9 mm, determine a) el radio r_f de los filetes para el cual ocurre el mismo esfuerzo máximo en el agujero A y en los filetes, b) la carga máxima permisible P correspondiente si el esfuerzo permisible es de 100 MPa.

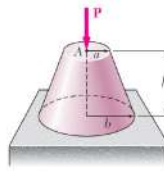


Observe que el esfuerzo promedio debe calcularse en la sección más angosta: $\sigma_{prom} = P/t$ donde t es el espesor de la barra.

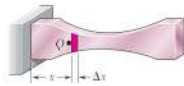
$$\begin{aligned}
 r &= 9/2 = 4,5 \text{ mm} & \frac{2r}{d} &= \frac{2 \times 4,5}{87} = 0,103 \\
 d + 9 &= 96 & & \\
 d &= 87 \text{ mm} & \text{de la gráfica:} & \\
 & & K &= 2,7 \\
 K &= \frac{\sigma_{máx}}{\sigma_{prom}} & \sigma_{prom} &= \frac{100 \text{ MPa}}{2,7} = 37,04 \text{ MPa} \\
 \sigma_{prom} &= \frac{P}{87 \text{ mm} \times 9 \text{ mm}} & 37,04 \text{ MPa} &= \frac{P}{783 \times 10^{-6} \text{ m}^2} \\
 P &= 29 \text{ kN} \downarrow \\
 \sigma_{prom} &= \frac{P}{t \cdot d} = \frac{29 \times 10^3 \text{ N}}{9 \text{ mm} \times 60 \text{ mm}} = 53,7 \text{ MPa} \downarrow \\
 K &= \frac{\sigma_{máx}}{\sigma_{prom}} & K &= \frac{100 \text{ MPa}}{53,7 \text{ MPa}} = 1,86 \\
 D/d &= \frac{96}{60} = 1,6 & r_f/d &= 0,19 & r_f &= 60 \text{ mm} \times 0,19 \\
 & & r_f &= 11,4 \text{ mm} \downarrow
 \end{aligned}$$

Problema 12

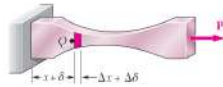
La carga vertical P se aplica en el centro A de la sección superior de un cono circular truncado con altura h , radio mínimo a y radio máximo b . Si se denota con E el módulo de elasticidad del material y se desprecia el efecto de su peso, determine la deflexión del punto A .



Una varilla de sección variable



$$d\delta = \epsilon dx = \frac{P dx}{AE} \Rightarrow \delta = \int_0^L \frac{P dx}{AE}$$



$$T_{\text{aud}} = \frac{a}{x_1}$$

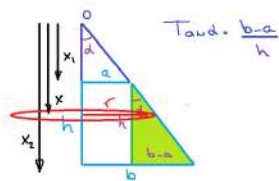
$$x_1 = \frac{a}{T_{\text{aud}}}$$

$$T_{\text{aud}} = \frac{b}{x_2}$$

$$x_2 = \frac{b}{T_{\text{aud}}}$$

$$T_{\text{aud}} = \frac{r}{x}$$

$$r = x \cdot T_{\text{aud}}$$



$$d\delta = \frac{P dx}{E \cdot A} = \frac{P dx}{\pi \cdot r^2 \cdot E} = \frac{P dx}{\pi \cdot x^2 \cdot T_{\text{aud}}^2 \cdot E}$$

$$\delta = \int_{x_1}^{x_2} \frac{P dx}{\pi \cdot x^2 \cdot T_{\text{aud}}^2 \cdot E} = \frac{P}{\pi \cdot E \cdot T_{\text{aud}}^2} \int_{a/T_{\text{aud}}}^{b/T_{\text{aud}}} \frac{1}{x^2} dx$$

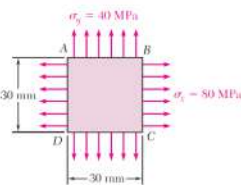
$$= \frac{P}{\pi \cdot E \cdot T_{\text{aud}}^2} \left(-\frac{1}{x} \right) \Bigg|_{a/T_{\text{aud}}}^{b/T_{\text{aud}}}$$

$$= \frac{P}{E \cdot \pi \cdot T_{\text{aud}}^2} \cdot \left(\frac{b-a}{ab} \right) \cdot T_{\text{aud}}^2$$

$$\delta = \frac{P h}{E \cdot \pi \cdot ab}$$

Problema 22

Un cuadro de 30 mm se grabó en uno de los lados de un gran recipiente de acero a presión. Después de la presurización, la condición de esfuerzo biaxial en el cuadro es como se muestra en la figura. Para $E = 200 \text{ GPa}$ y $\nu = 0.30$, determine el cambio en la longitud de a) el lado AB , b) el lado BC , c) la diagonal AC .



$$\epsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} - \frac{\nu \sigma_y}{E} - \frac{\nu \sigma_z}{E}$$

$$\epsilon_y = \frac{\nu \sigma_x}{E} + \frac{\sigma_y}{E} - \frac{\nu \sigma_z}{E}$$

$$\epsilon_z = -\frac{\nu \sigma_x}{E} - \frac{\nu \sigma_y}{E} + \frac{\sigma_z}{E}$$

$$\sigma_x = 80 \text{ MPa}$$

$$E = 200 \cdot 10^9 \text{ Pa}$$

$$\sigma_y = 40 \text{ MPa}$$

$$\nu = 0.30$$

$$\sigma_z = 0$$

$$\epsilon_x = \frac{80 \cdot 10^6 \text{ Pa}}{200 \cdot 10^9 \text{ Pa}} - \frac{0.30 \cdot 40 \cdot 10^6 \text{ Pa}}{200 \cdot 10^9 \text{ Pa}} = 3.4 \cdot 10^{-4}$$

$$\epsilon_y = -\frac{0.30 \cdot 80 \cdot 10^6 \text{ Pa}}{200 \cdot 10^9 \text{ Pa}} + \frac{40 \cdot 10^6 \text{ Pa}}{200 \cdot 10^9 \text{ Pa}} = 8 \cdot 10^{-5}$$

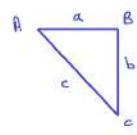
a)

$$\epsilon_x = \frac{\delta_{AB}}{L_{AB}}$$

$$\delta_{AB} = 3.4 \cdot 10^{-4} \cdot 30 \cdot 10^{-3} \text{ m} = 102 \cdot 10^{-7} \text{ m} = 1.02 \cdot 10^{-5} \text{ m}$$

$$\epsilon_y = \frac{\delta_{BC}}{L_{BC}}$$

$$\delta_{BC} = 8 \cdot 10^{-5} \cdot 30 \cdot 10^{-3} \text{ m} = 240 \cdot 10^{-8} \text{ m} = 2.4 \cdot 10^{-6} \text{ m}$$



$$c^2 = a^2 + b^2$$

$$c = \sqrt{2 \cdot 30^2}$$

$$c = 42.426 \text{ mm}$$

diferenciando

$$2c dc = 2a da + 2b db$$

$$dc = \frac{a}{c} da + \frac{b}{c} db$$

$$da = \delta_{AB} = 1.02 \cdot 10^{-5} \text{ m}$$

$$db = \delta_{BC} = 2.4 \cdot 10^{-6} \text{ m}$$

$$dc = \frac{a}{c} da + \frac{b}{c} db$$

$$dc = \frac{30 \text{ mm}}{42.426 \text{ mm}} \cdot 1.02 \cdot 10^{-5} \text{ m} + \frac{30 \text{ mm}}{42.426 \text{ mm}} \cdot 2.4 \cdot 10^{-6} \text{ m} = 8.91 \cdot 10^{-6} \text{ m}$$

$$\delta_{AC} = dc = 8.91 \cdot 10^{-6} \text{ m}$$