Transformada Z

- Definición de la transformada Z
- Región de convergencia ROC
- Señal bilateral, causal o anticausal

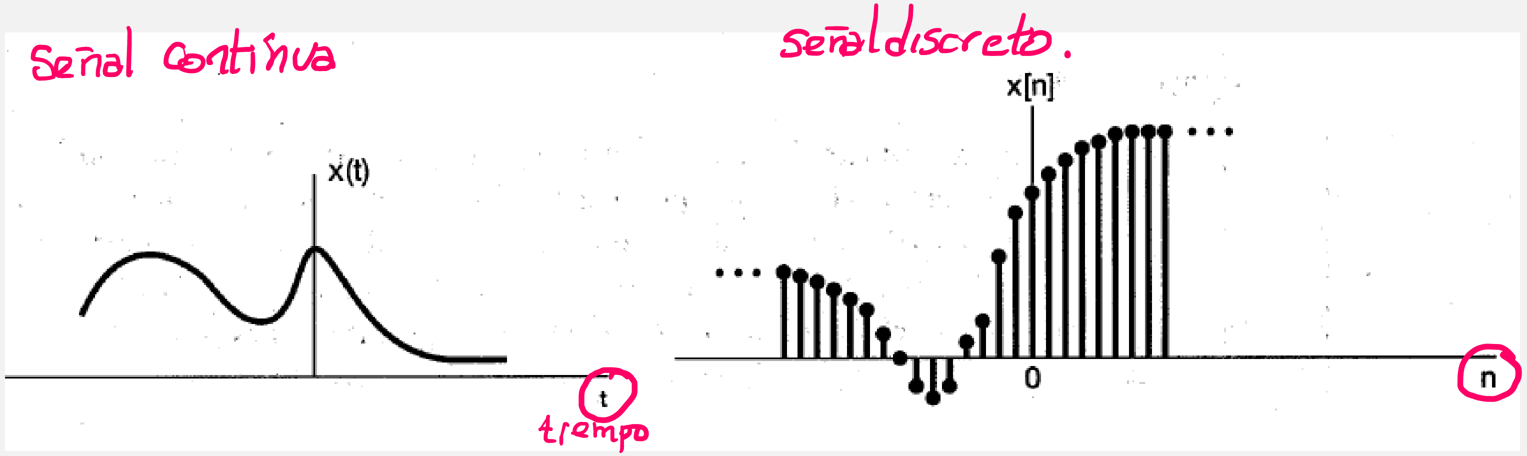
Nociones previas

Señales discretas

- La señales discretas están definidas para un conjunto de valores discretos de la variable independiente.

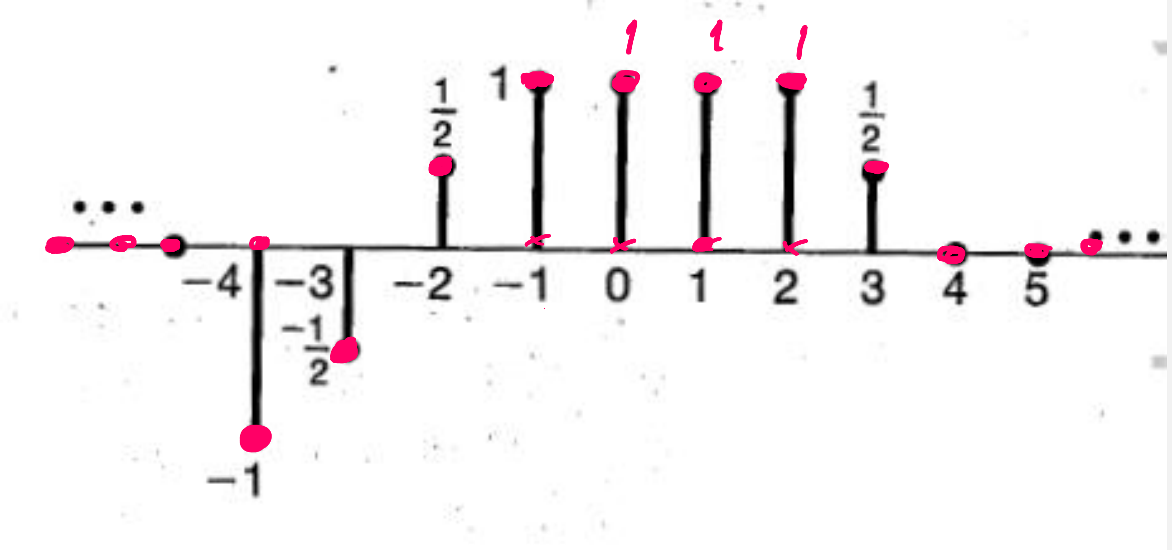
- La señal discreta se representará por x[n], donde n es la variable independiente que toma solo valores enteros.

- Una clase importante de señales discretas surge del muestreo de señales continuas. En este caso, la señal discreta x[n] representa muestras sucesivas de un fenómeno subyacente para el cual la variable independiente es continua.



Ejemplo de una secuencia

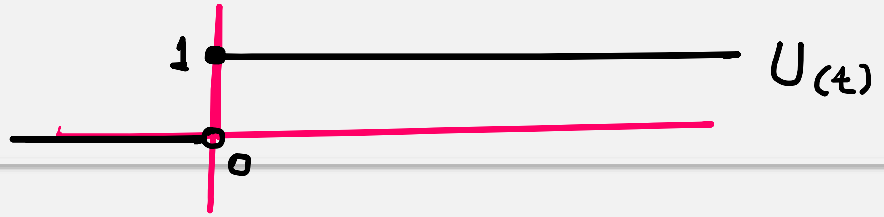
$$x[n] = \begin{cases} -1 & , \quad n = -4 \\ -1/2 & , \quad n = -3 \\ 1/2 & , \quad n = -2 \\ 1 & , \quad n = \{-1, \ldots 2\} \\ 1/2 & , \quad n = 3 \\ 0 & , \quad n > 3 \text{ y } n < -4 \end{cases}$$



Donde $n \epsilon \mathbb{Z}$

Nociones previas

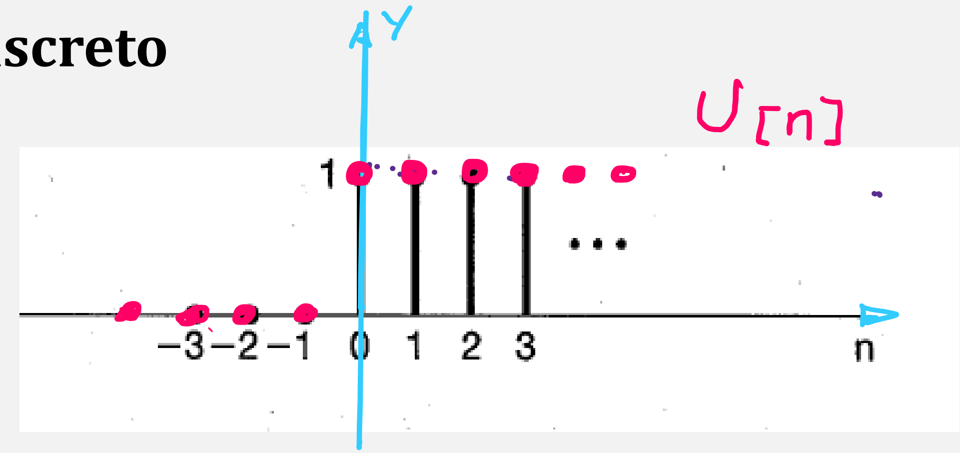
escalón continuo :



Señales discretas

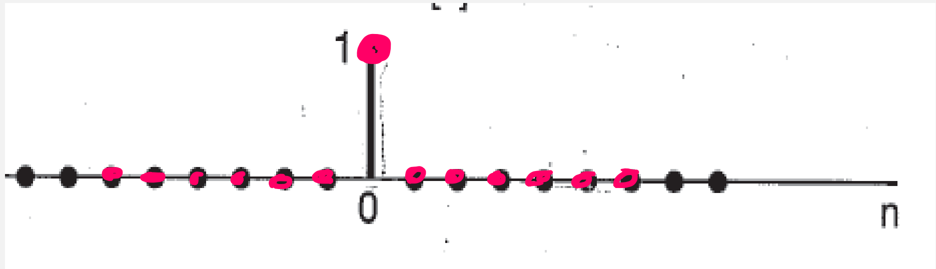
Secuencia discreta. **Escalón unitario discreto**

$$u[n] = \begin{cases} 1 \;, \text{ si } n \geq 0 \\ 0 \;, \text{ si } n < 0 \end{cases}$$



Secuencia discreta. **Impulso unitario**

$$\delta[n] = \begin{cases} 1 \;, \text{ si } n = 0 \\ 0 \;, \text{ si } n \neq 0 \end{cases}$$



Nociones previas

Serie geométrica

$$\sum_{n=0}^{\infty} u^n = 1 + u + u^2 + u^3 + \cdots + u^n + \cdots = \frac{1}{1-u}$$

Converge solo si
-1 <u <1

- Si $|r| < 1$, la serie geométrica converge y su suma es:

$$\sum_{n=0}^{\infty} r^n = \frac{1}{1-r}$$

- Si $|r| \geq 1$, la serie geométrica diverge.

$$\boxed{\sum_{n=k}^{\infty} u^n = u^k + u^{k+1} + \cdots + u^n + \cdots = \frac{u^k}{1-u}}$$

Esta serie converge, solo si:
$|u| < 1$

Transformada Z

❑ Definición

Dada una sucesión **{x[n]}** con n ∈ ℤ. Definimos la **Transformada Z** como la aplicación que asocia a {x[n]} la función compleja **Z(x[n])** definida por:

$$\boldsymbol{Z(x[n]) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n} = X(z), \quad z \in ROC}$$

región de convergencia

La función compleja tiene por dominio la región donde converge la serie, la cual se denomina **región de convergencia de la Transformada z** (***ROC***)

Transformada Z

$$\sum_{n=0}^{\infty} u^n = 1 + u + u^2 + u^3 + \cdots + u^n + \cdots = \frac{1}{1-u}$$ Converge solo si $-1 < u < 1$

$$X(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} x[n]\, z^{-n}$$

Ejemplo 1. Escalón unitario discreta

$$u[n] = \begin{cases} 1\ , & n \geq 0 \\ 0\ , & n < 0 \end{cases}$$

$$\boldsymbol{Z}(\mathbf{u[n]}) = \sum_{-\infty}^{\infty} u[n]\, z^{-n} = \boldsymbol{U}(\boldsymbol{z})$$

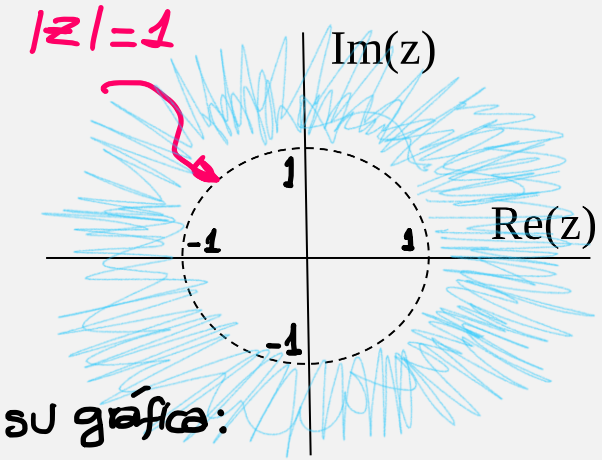
Pero cuando $n < 0$, se tiene que $u[n] = 0$

$$Z(\mathrm{u[n]}) = \cancelto{0}{\sum_{n=-\infty}^{-1} (\mathbf{0})\, z^{-n}} + \sum_{n=0}^{\infty} (\mathbf{1})\, z^{-n} = 1 + z^{-1} + z^{-2} + z^{-3} + \cdots$$

$$Z(\mathrm{u[n]}) = \mathrm{U(z)} = \sum_{n=0}^{\infty} (1)\, z^{-n} = 1 + \underbrace{(\boldsymbol{z}^{-1})}_{r} + \underbrace{(\boldsymbol{z}^{-1})^2}_{r^2} + \underbrace{(\boldsymbol{z}^{-1})^3}_{r^3} + \cdots \quad \Big\}\ z^{-1} = r$$

$$Z(\mathrm{u[n]}) = \mathrm{U(z)} = \frac{1}{1-r} = \frac{1}{1-\boldsymbol{z}^{-1}} \rightarrow \boxed{Z(\mathrm{u[n]}) = \frac{1}{1-\boldsymbol{z}^{-1}} = \mathrm{U(z)}}$$

su gráfica:



$$ROC \quad |z| > 1$$

Para hallar el ROC: $|\mathbf{r}| < \mathbf{1} \rightarrow |\boldsymbol{z}^{-1}| < \mathbf{1} \rightarrow \frac{1}{|z|} < 1 \rightarrow |\mathbf{z}| > \mathbf{1}$ ROC

ROC: $|\mathbf{z}| > \mathbf{1}$ que representa el **exterior de un círculo de radio 1.**

* $|z| = a \rightarrow$ circunf. de radio a.

Transformada Z

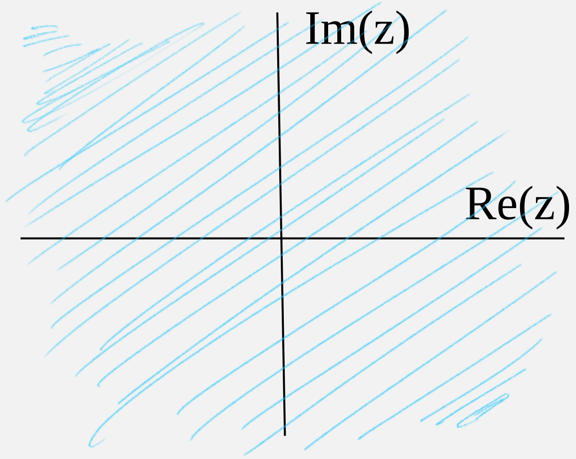
Ejemplo 2. **Impulso unitario** $\delta[n] = \begin{cases} 1 \ , & n = 0 \\ 0 \ , & n \neq 0 \end{cases}$

$$X(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} x[n]\, z^{-n}$$

$$\boldsymbol{Z}(\boldsymbol{\delta}[\mathbf{n}]) = \sum_{-\infty}^{\infty} \boldsymbol{\delta}[\boldsymbol{n}]\, \boldsymbol{z}^{-\boldsymbol{n}}$$

Pero **para todo** $\boldsymbol{n} \neq \mathbf{0}$, se tiene que $\boldsymbol{\delta}[\boldsymbol{n}] = \mathbf{0}$ y **solo para** $\boldsymbol{n} = \mathbf{0}$: $\boldsymbol{\delta}[\boldsymbol{n}] = \mathbf{1}$
Entonces de la sumatoria, solo quedará:

$$\boldsymbol{Z}(\boldsymbol{\delta}[\mathbf{n}]) = \sum_{\boldsymbol{n}=\mathbf{0}}^{\mathbf{0}} (\mathbf{1})\, z^{-n} = 1.\, z^{0} = \mathbf{1}$$



Para hallar el ROC notamos que $Z(\delta[n])$ **no depende de** $\boldsymbol{z}$ y por ello:
$\boldsymbol{ROC}$: $\mathbb{C}$ (todo el plano complejo)

$ROC: \quad C$

Transformada Z

$$\sum_{n=k}^{\infty} u^n = u^k + u^{k+1} + \cdots + u^n + \cdots = \frac{u^k}{1-u}$$

$$X(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} x[n]\, z^{-n}$$

Ejemplo 3. Halle la transformada z de x[n] e indique su ROC. $x[n] = \begin{cases} 2^{-n} & \text{si } n \geq 0 \\ 5^n & \text{si } \underbrace{n < 0}_{n \leq -1} \end{cases}$

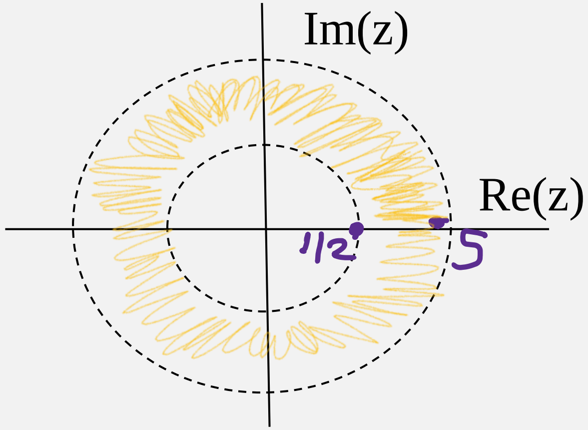
Solución:

$$Z(\mathbf{x}[\mathbf{n}]) = \mathbf{X}(\mathbf{z}) = \sum_{-\infty}^{\infty} x[n]\, z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{n=-1} 5^n z^{-n} + \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} z^{-n}$$

Haciendo: $n = -k$

$$Z(\mathrm{x[n]}) = \mathrm{X(z)} = \sum_{k=\infty}^{k=1} 5^{-k} z^k + \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} z^{-n} = \sum_{k=1}^{k=\infty} \left(\frac{z}{5}\right)^k + \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2z}\right)^n$$

$$Z(\mathrm{x[n]}) = \mathrm{X(z)} = \frac{\frac{z}{5}}{1-\frac{z}{5}} + \frac{1}{1-\frac{1}{2z}}$$



Para hallar el ROC:

$\left|\frac{z}{5}\right| < 1 \rightarrow |z| < 5$

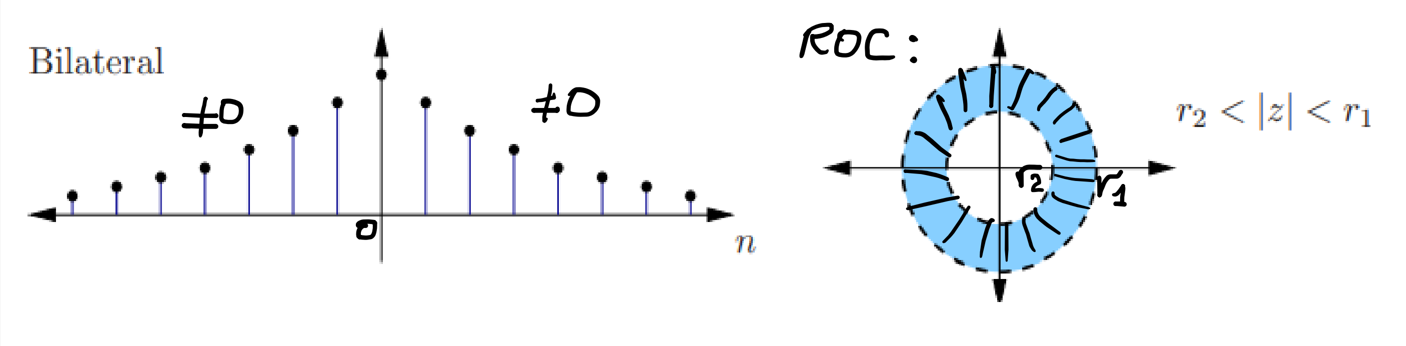
$\left|\frac{1}{2z}\right| < 1 \rightarrow |z| > \frac{1}{2}$

$$ROC: \quad \frac{1}{2} < |z| < 5$$

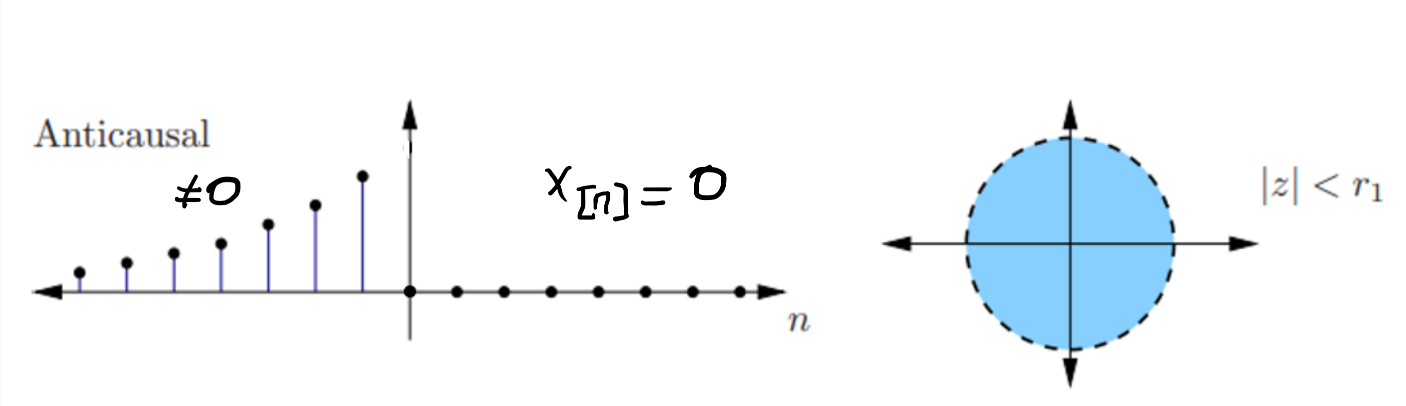
Transformada Z

❑ Señales de duración infinita:

- Si la sucesión x[n] tiene elementos no nulos para n positivo y negativo se denomina señal bilateral. Su ROC de la TZ es de la forma $r_2 < |z| < r_1$

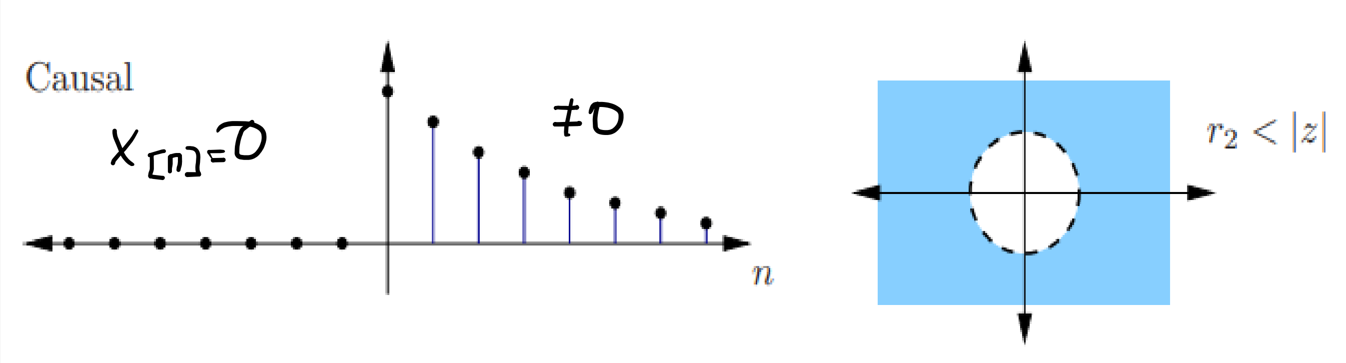


- Si x[n]=0 para n≥0 la señal se llama anticausal. El ROC de su TZ es de la forma $|z| < r_1$



Transformada Z

- **Señales de duración infinita**:
  - Si x[n]=0 para n<0 la señal se llama Causal (unilateral). El ROC de su TZ es de la forma $r_2 < |z|$



Para toda señal x[n], la señal a$[n] = x[n]u[n]$ **es causal**, muchas veces llamada parte causal de $x[n]$

Transformada Z

Ejemplo 4. Halle la transformada z de x[n] e indique su ROC.

$$x[n] = \boldsymbol{a^n u[n]}$$

$$X(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} x[n]\, z^{-n}$$

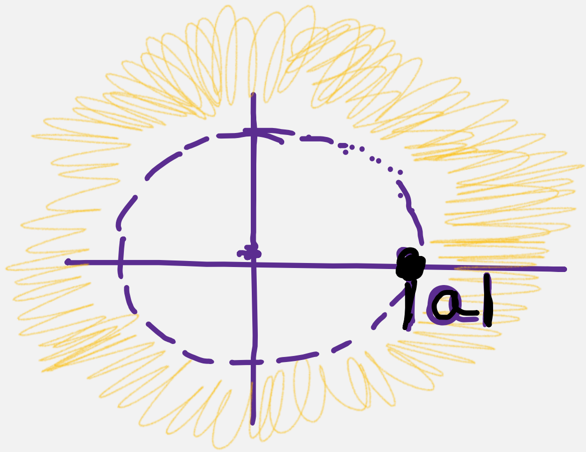
$$\boldsymbol{Z}(\mathbf{x[n]}) = \boldsymbol{X}(\mathbf{z}) = \sum_{-\infty}^{\infty} \boldsymbol{x[n]\, z^{-n}} = \sum_{-\infty}^{\infty} \boldsymbol{a^n u[n]}\, z^{-n}$$

$$\sum_{n=k}^{\infty} r^n = \frac{r^k}{1-r}$$

$$Z(\mathrm{x[n]}) = X(\mathrm{z}) = \cancelto{0}{\sum_{n=-\infty}^{-1} a^n (\mathbf{0})\, z^{-n}} + \sum_{n=0}^{\infty} a^n (\mathbf{1})\, z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\left(\frac{a}{z}\right)}_{r}^{n} = \frac{\mathbf{1}}{1 - \frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{z}}}$$

Para hallar el ROC: $|r| < 1$

$\left|\frac{a}{z}\right| < 1$ ➔ $|z| > |a|$



Transformada Z

$$X(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} x[n]\, z^{-n}$$

Ejemplo 5. Halle la transformada z de x[n] e indique su ROC.

$$x[n] = (5^n)u[\underbrace{n-2}_{m}]$$

$\rightarrow$ solo queda con $m \geq 0 \Rightarrow n-2 \geq 0$

$n \geq 2$

$\Downarrow$

$u[n-2] = 1$

$$u[m] = \begin{cases} 1, & m \geq 0 \\ 0, & m < 0 \end{cases}$$

$$Z(\mathrm{x[n]}) = X(\mathrm{z}) = \sum_{-\infty}^{\infty} x[n]\, z^{-n} = \sum_{-\infty}^{\infty} 5^n . u[n-2]\, z^{-n}$$

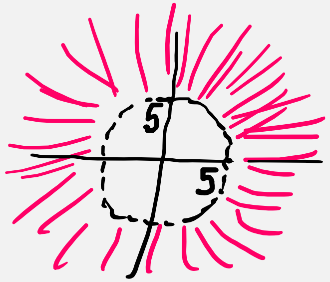
Dado que $u[n-2] = 1$ cuando $n - 2 \geq 0$: $\Rightarrow n \geq 2$

$$Z(\mathrm{x[n]}) = X(\mathrm{z}) = \sum_{n=2}^{\infty} 5^n(\mathbf{1})\, z^{-n} = \sum_{n=2}^{\infty} \underbrace{\left(\frac{5}{z}\right)}_{r}^{n} = \frac{(\frac{5}{z})^2}{1 - \frac{5}{z}}$$

$$* \sum_{n=k}^{\infty} r^n = \frac{r^k}{1-r}$$

Para hallar el ROC: $|r| < 1$

$\left|\frac{5}{z}\right| < 1 \rightarrow |z| > 5$ ROC.



Transformada Z

$$X(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} x[n]\, z^{-n}$$

Ejemplo 6. Halle la transformada z de x[n] e indique su ROC: $\boldsymbol{x[n] = \left(\left(\frac{1}{3}\right)^{n} - \left(\frac{1}{2}\right)^{n}\right) u[-n-1]}$

$$\boldsymbol{Z(\mathrm{x[n]}) = X(\mathrm{z}) = \sum_{-\infty}^{\infty} x[n]\, z^{-n} = \sum_{-\infty}^{\infty} \left(\left(\frac{1}{3}\right)^{n} - \left(\frac{1}{2}\right)^{n}\right) u[-n-1]}\, z^{-n}$$

$u[-n-1] = 0$ cuando $-n-1 < 0$, es decir cuando $\boldsymbol{n > \ -1}$

Luego $\boldsymbol{u[-n-1] = 1}$ **si** $\boldsymbol{n \le -1}$, entonces:

Se hace: $n = -k$

$$Z(\mathrm{x[n]}) = X(\mathrm{z}) = \sum_{n=-\infty}^{n=-1} \left(\left(\frac{1}{3}\right)^{n} - \left(\frac{1}{2}\right)^{n}\right)(1)\, z^{-n} = \sum_{k=\infty}^{k=1} \left(\left(\frac{1}{3}\right)^{-k} - \left(\frac{1}{2}\right)^{-k}\right) z^{k}$$

$$Z(\mathrm{x[n]}) = X(\mathrm{z}) = \sum_{k=1}^{k=\infty} \left((3)^{k} - (2)^{k}\right) z^{k} = \sum_{k=1}^{k=\infty} (3z)^{k} - \sum_{k=1}^{k=\infty} (2z)^{k} = \frac{3z}{1-3z} - \frac{2z}{1-2z}$$

Para hallar el ROC:

$|\boldsymbol{3z}| < 1 \Rightarrow |z| < \frac{1}{3}$

$|\boldsymbol{2z}| < 1 \Rightarrow |z| < \frac{1}{2}$

intersección

ROC: $\boldsymbol{|z| < \frac{1}{3}}$

Transformada Z

Demuestre que la transformada z de $\mathbf{x[n] = cos(}\boldsymbol{an}\mathbf{)} \cdot \boldsymbol{u[n]}$ es:

$$X(z) = \frac{1 - z^{-1}\cos(a)}{1 - 2z^{-1}\cos(a) + z^{-2}} \quad , \qquad ROC: |z| > 1$$

$$X(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} x[n]\, z^{-n}$$

$$Z(\mathrm{x[n]}) = X(\mathrm{z}) = \sum_{-\infty}^{\infty} \cos(an) \cdot u[n]\, z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} \cos(an)\, z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{e^{jan} + e^{-jan}}{2}\right) z^{-n}$$

$$Z(\mathrm{x[n]}) = X(\mathrm{z}) = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} e^{jan}\, z^{-n} + \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} e^{-jan}\, z^{-n} = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} \left(e^{ja} z^{-1}\right)^n + \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} \left(e^{-ja} z^{-1}\right)^n$$

$$Z(\mathrm{x[n]}) = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{1 - e^{ja}z^{-1}} + \frac{1}{1 - e^{-ja}z^{-1}}\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{1 - e^{-ja}z^{-1} + 1 - e^{ja}z^{-1}}{1 - e^{-ja}z^{-1} - e^{ja}z^{-1} + z^{-2}}\right]$$

$$Z(\mathrm{x[n]}) = \frac{1}{2}\left[\frac{2 - z^{-1}\left(e^{ja} + e^{-ja}\right)}{1 - z^{-1}\left(e^{ja} + e^{-ja}\right) + z^{-2}}\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{2 - z^{-1}(2\cos(a))}{1 - z^{-1}(2\cos(a)) + z^{-2}}\right] = \frac{1 - z^{-1}\cos(a)}{1 - 2z^{-1}\cos(a) + z^{-2}}.$$

Para hallar el ROC:

$\left|e^{ja}z^{-1}\right| < 1 \Rightarrow \left|e^{ja}\right| < |z|$

$\left|e^{-ja}z^{-1}\right| < 1 \Rightarrow \left|e^{-ja}\right| < |z|$

Multiplicando ambos:

$1 < |z|^2 \Rightarrow$ ROC: $|z| > 1$

Transformada inversa Z

Transformada inversa Z

Dado

$$Z(x[n]) = X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n} \quad z \in ROC$$

Donde

$$x[n] = \frac{1}{2\pi j}\oint_{l} X(z)z^{n-1}dz$$

Donde *l* es cualquier circunferencia cerrada con centro el origen y radio cualquier valor para el cual X(z) converge.

Transformada inversa Z

Ejemplo 1. Halle, mediante la definición, la señal x[n] con ROC: $|z| > |a|$,

Siendo $X(z) = \dfrac{1}{1 - az^{-1}}$

$$2\pi j f(z_0) = \oint_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz$$

$$x[n] = \frac{1}{2\pi j} \oint_l X(z) z^{n-1} dz$$