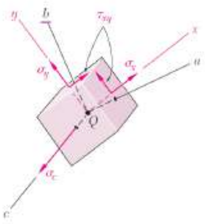
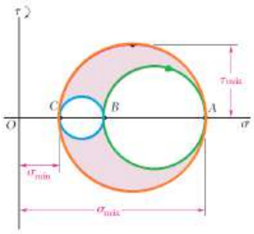
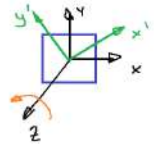
Aplicación del circulo de Mohr al analisis tridimensional de esfuerzos







$\sigma_a, \sigma_b, \sigma_c$ son esfuerzos principales

AB → gira con respecto al eje c

BC → gira con respecto al eje a

CA → gira con respecto al eje b

Puede, por tanto, usarse el círculo de diámetro AB para determinar los esfuerzos normales y cortantes ejercidos sobre las caras del elemento cuando gira con respecto al eje c (figura 7.27). Análogamente, los círculos de diámetro BC y CA pueden usarse para determinar los esfuerzos en el elemento cuando gira con respecto a los ejes a y b. Mientras este análisis se limita a rotaciones con respecto a los ejes principales, podría demostrarse que cualquier otra transformación de ejes conducirá a esfuerzos representados en la figura 7.27 por un punto dentro del área sombreada. Por consiguiente, el radio del mayor de los círculos da el esfuerzo cortante máximo en el punto Q. Notando que su diámetro es igual a la diferencia entre $\sigma_{máx}$ y $\sigma_{mín}$, se escribe

$$\tau_{máx} = \tfrac{1}{2}|\sigma_{máx} - \sigma_{mín}| \tag{7.22}$$

Criterios de fluencia para materiales ductiles bajo esfuerzo plano

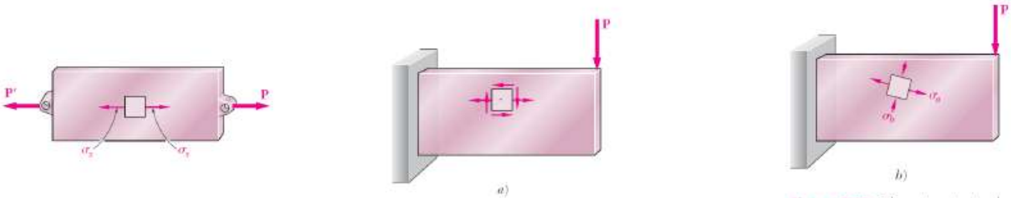


Figura 7.37 Elemento estructural en estado de esfuerzo plano.

Teoria de Falla de Tresca

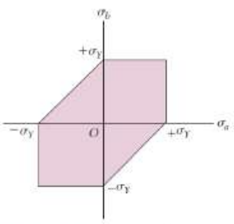


Figura 7.38 Hexágono de Tresca

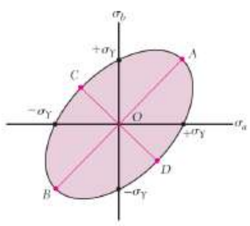
σ_Y = esfuerzo a la fluencia

Para un acero A36 $\quad \sigma_y \begin{cases} 250\text{MPa} \\ 36\text{ksi} = 36\,000 \ \dfrac{\text{lbf}}{\text{pulg}^2} \end{cases}$

Criterio de la máxima energia de distorsión (Von Mises)

La energia de distorsión por unidad de volumen

$$\boxed{u_d = \frac{1}{6G}(\sigma_a^2 - \sigma_a\sigma_b + \sigma_b^2)}$$

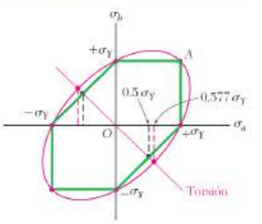


Criterio de Von Mises.

Un material es seguro cuando, un punto se encuentra dentro del area que cumple esta ecuación:

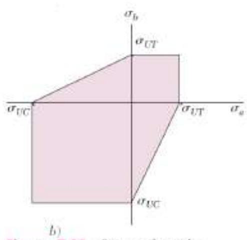
$$\sigma_a^2 - \sigma_a\sigma_b + \sigma_b^2 = \sigma_Y^2$$

Comparando Tresca - Von Mises



Criterios de fractura para materiales frágiles bajo esfuerzo plano

Criterio de Mohr



b)

Figura 7.45 Criterio de Mohr simplificado.

σ_{UT}: esfuerzo último a la Tracción.

σ_{UC}: esfuerzo último a la compresión.

σ_a y σ_b: esfuerzos principales.

Esfuerzos en recipientes a presión de pared delgada

El analisis de esfuerzos en recipientes de pared delgada se limitara a los dos tipos que se encuentran con mayor frecuencia: recipientes cilindricos y esfericos

Fotografía 7.3 Recipientes cilíndricos a presión.

Fotografía 7.4 Recipientes esféricos a presión.

Figura 7.46 Distribución de esfuerzos en los recipientes a presión de pared delgada.

Para un recipiente a presión

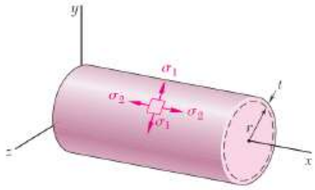


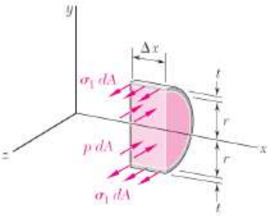
Figura 7.47 Recipiente cilíndrico presurizado.

r: radio interno

t: espesor

σ_1: esfuerzo Tangencial

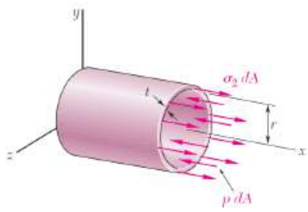
σ_2: esfuerzo longitudinal.



Por equilibrio:

$$2\,\sigma_1 . (\cancel{\Delta x} . t) = p . (\cancel{\Delta x} . 2r)$$

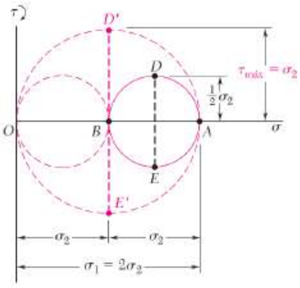
$$\boxed{\sigma_1 = \frac{p . r}{t}}$$



Por equilibrio

$$\sigma_2 . (2\cancel{\pi} . \cancel{r} . t) = \cancel{\pi} . r^2 . p$$

$$\boxed{\sigma_2 = \frac{p . r}{2t}} \qquad \sigma_1 = 2\sigma_2$$



$$\sigma_{prom} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2}$$

$$\tau_{máx} = \sigma_2$$

Para un recipiente esferico, de radio r y espesor t

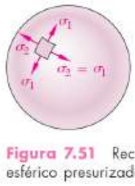
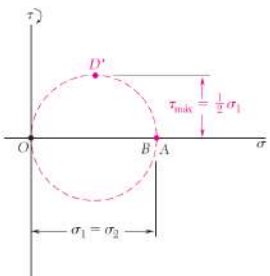


Figura 7.51 Recipiente esférico presurizado.

Figura 7.52 Diagrama de cuerpo libre para determinar el esfuerzo de pared.

$$\sigma_2 . (2\pi . r . t) = p . \pi . r^2$$

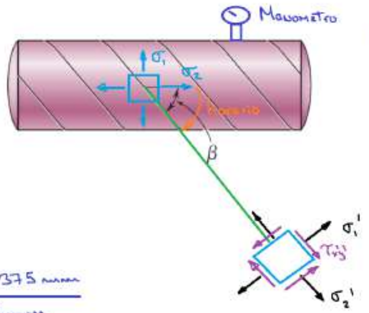
$$\boxed{\sigma_2 = \frac{p . r}{2t}}$$



$$\boxed{\tau_{máx} = \frac{p . r}{4t}}$$

Problema 25

El tanque de acero a presión que se muestra en la figura tiene un diámetro interior de 750 mm y un grosor de pared de 9 mm. Si se sabe que las costuras de soldadura a lo largo de una hélice forman un ángulo β = 50° con el eje longitudinal del tanque y que la presión manométrica en éste es de 1.5 MPa, determine a) el esfuerzo normal perpendicular a la soldadura, b) el esfuerzo cortante paralelo a la soldadura.



$\phi_i = 750$ mm

$r_i = \phi_i/2 = 375$ mm

$t = 9$ mm

$\beta = 50°$ (horario)

$\sigma_x = \sigma_2$

$\sigma_y = \sigma_1$

$\tau_{xy} = 0$

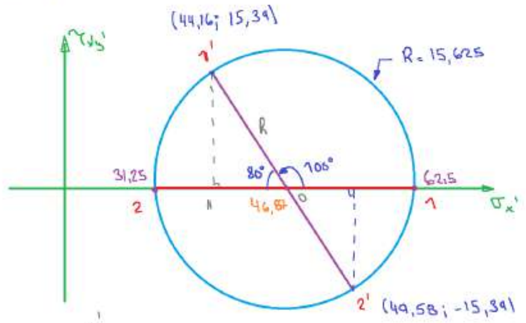
$\sigma_1 = \dfrac{P \cdot r}{t} = \dfrac{1{,}5 \text{ MPa} \cdot 375 \text{ mm}}{9 \text{ mm}}$

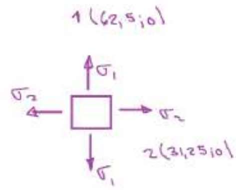
$\sigma_1 = 62{,}5$ MPa

$\sigma_2 = \dfrac{\sigma_1}{2} = 31{,}25$ MPa

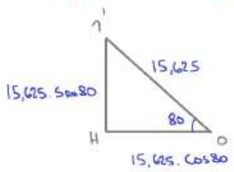
$\sigma_{prom} = \dfrac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2) = 46{,}87$ MPa

$R = \sqrt{\left(\dfrac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$ $\quad R = \sqrt{\left(\dfrac{31{,}25 - 62{,}5}{2}\right)^2 + 0^2} = 15{,}625$





$\theta = 50°$ horario



$H1' = 15{,}39$

$OH = 2{,}71$

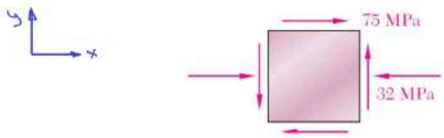
$\sigma_1' = 44{,}16$ MPa esf. perpendicular a la soldadura

$\sigma_2' = 49{,}58$ MPa

$\tau_{x'y'} = 15{,}39$ MPa esf. paralelo a la soldadura

Problema 20

Se espera que el estado de esfuerzo plano ilustrado en la figura ocurra en una fundición de aluminio. Si se sabe que para la aleación de aluminio usada σ_{UT} = 80 MPa y σ_{UC} = 200 MPa, y utilizando el criterio de Mohr, determine si se producirá la ruptura del componente.

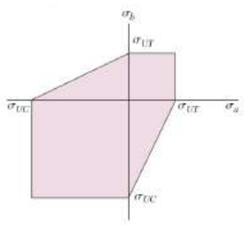


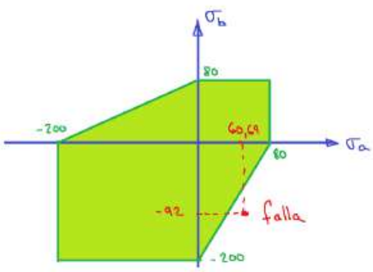
$\sigma_x = -32$ MPa

$\sigma_y = 0$

$\tau_{xy} = 75$ MPa

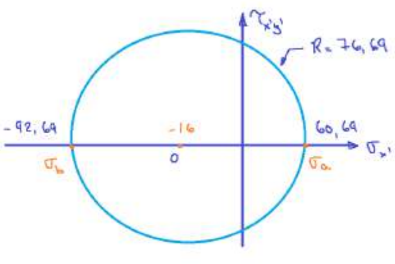
Criterio de Mohr





$\sigma_{prom} = \dfrac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) = \dfrac{1}{2} \cdot (-32 + 0) = -16$ MPa

$R = \sqrt{\left(\dfrac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$ $\quad R = \sqrt{\left(\dfrac{-32 - 0}{2}\right)^2 + 75^2} = 76{,}69$ MPa



$\sigma_a = 60{,}69$ MPa

$\sigma_b = -92{,}69$ MPa

Para el criterio de falla de Mohr, para el cuarto cuadrante

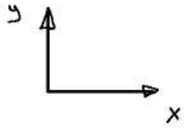
$$\frac{\sigma_a}{\sigma_{UT}} - \frac{\sigma_b}{\sigma_{UC}} < 1 \qquad \text{No ocurre la falla.}$$

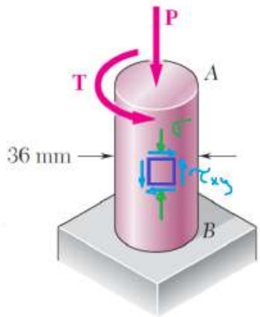
$$\frac{60{,}69}{80} - \frac{(-92{,}69)}{200} = 1{,}22 > 1 \qquad \text{ocurre la falla.}$$

Problema 19

Resuelva el problema anterior, y ahora use el criterio de la máxima energía de distorsión.

El eje AB de 36 mm de diámetro está hecho de un grado de acero cuyo esfuerzo de tensión hasta la fluencia es de 250 MPa. Usando el criterio ~~del es fuerzo cortante máximo~~, determine la magnitud del par de torsión **T** para el que ocurre la fluencia cuando P = 200 kN.





$$P = 200\ kN$$

$$c = \frac{d}{2} = 18 \times 10^{-3}\ m$$

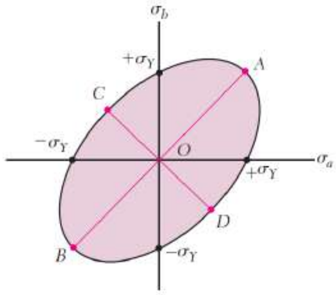
$$A = \pi . c^2 = 1{,}01788 \times 10^{-3}\ m^2$$

$$\sigma_y = -\frac{P}{A} = -\frac{200 \times 10^3\ N}{1{,}01788 \times 10^{-3}\ m^2}$$

$$\sigma_y = -196{,}49\ MPa$$

$$\sigma_x = 0$$

$$\tau_{xy}$$



Criterio de Von Mises.

$$\sigma_{prom} = \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) = -98{,}24\ MPa$$

$$R = \sqrt{\left(\frac{0+196{,}49}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

$$\sigma_a = \sigma_{prom} + R \qquad \sigma_b = \sigma_{prom} - R$$

Por el criterio de máxima energia de distorsión (Von Mises)

$$\sigma_a^2 - \sigma_a\sigma_b + \sigma_b^2 = \sigma_Y^2$$

$$(\sigma_{prom} + R)^2 - (\sigma_{prom} + R).(\sigma_{prom} - R) + (\sigma_{prom} - R)^2 = \sigma_y^2$$

$$\sigma_{prom}^2 + 3R^2 = \sigma_y^2$$

$$98{,}24^2 + 3\left(98{,}24^2 + \tau_{xy}^2\right) = 250^2$$

$$\tau_{xy} = 89{,}242\ MPa \qquad \text{(debido a la Torsión T)}$$

Para la Torsión:

$$J = \frac{\pi}{2}.c^4 = \frac{\pi}{2}.(18 \times 10^{-3}\ m)^4 = 164{,}846 \times 10^{-9}\ m^4$$

$$\tau_{xy} = \frac{T.c}{J} \Rightarrow T = \frac{J.\tau_{xy}}{c} = \frac{164{,}846 \times 10^{-9}\ m^4 \cdot 89{,}242 \times 10^6\ Pa}{18 \times 10^{-3}\ m}$$

$$T = 818\ N.m$$