Error en Estado Estacionario

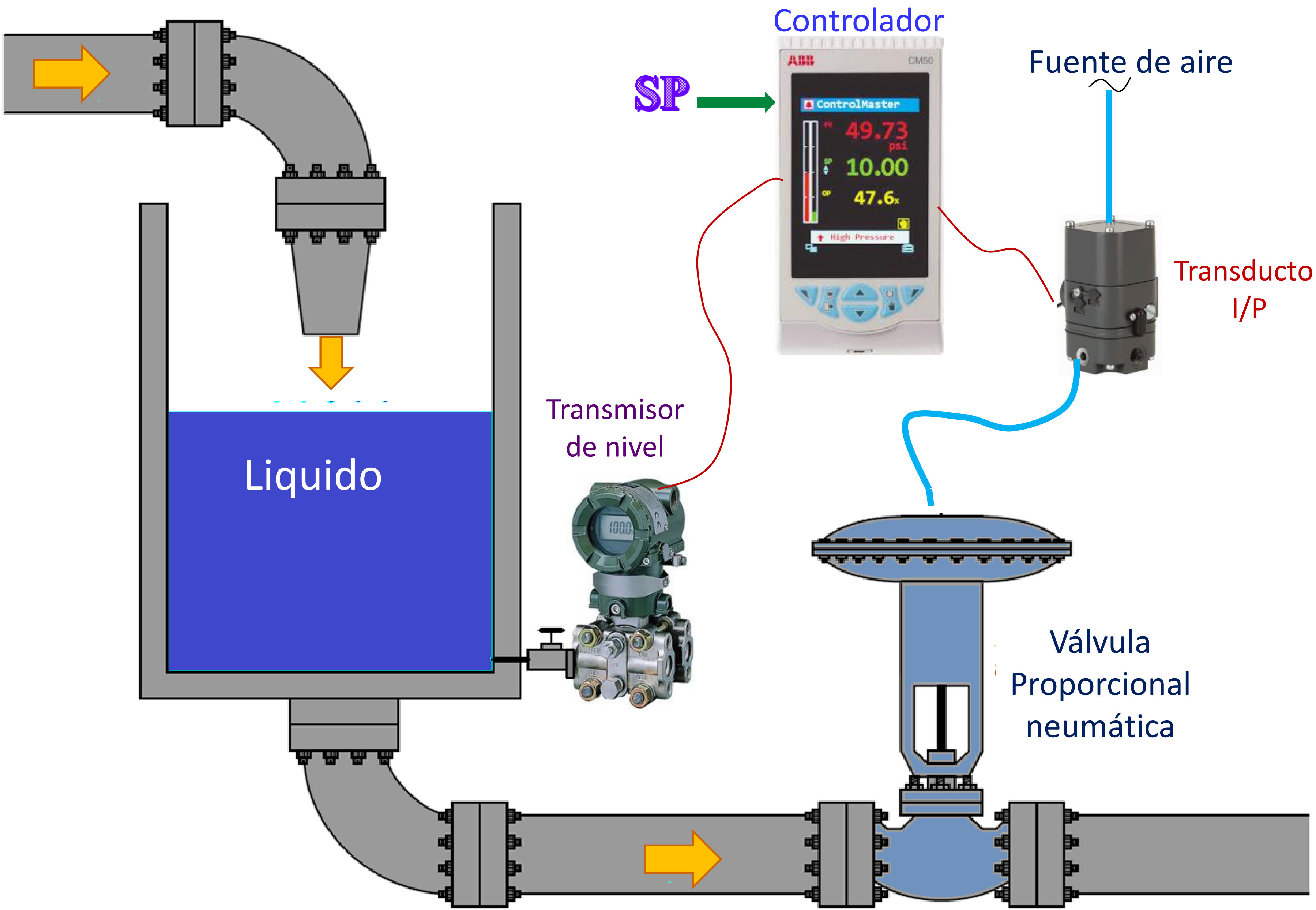
Ing. Eddie Sobrado

Error en Estado Estacionario (e_{ss})

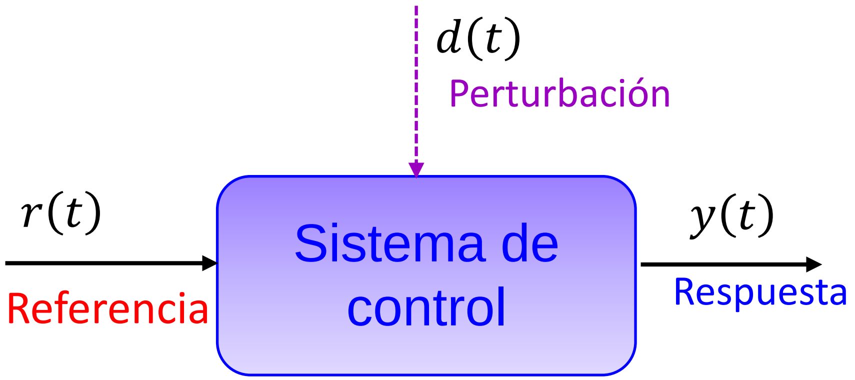
- **El error en estado estable o en estado estacionario,** es la señal que indica la diferencia entre la señal de entrada de referencia (Set Point) y el resultado obtenido por el sensor a partir de la salida realimentada (salida del proceso)

Régimen permanente o **estado estacionario**, se entiende la zona de la respuesta del **sistema** en la que, tras haber transcurrido tiempo suficiente, todas las señales del **sistema** se han estabilizado y permanecen a un valor constante

Error en Estado Estacionario (e_{ss})



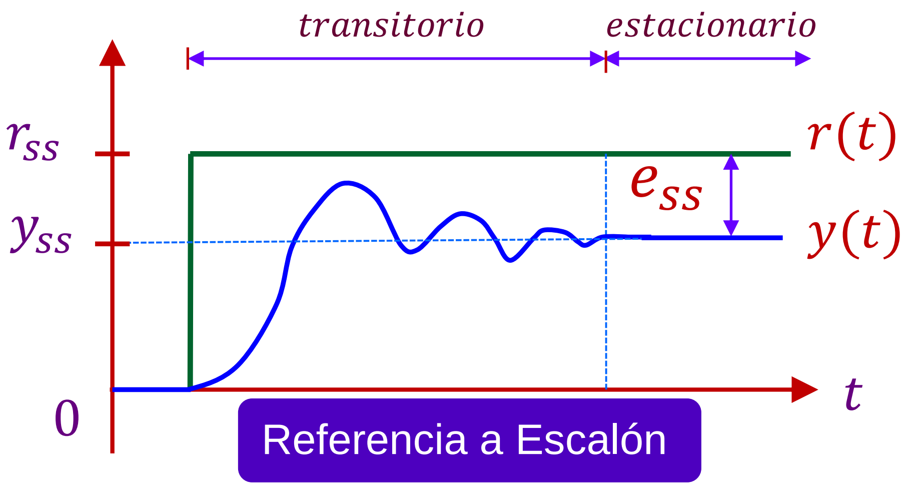
Error en Estado Estacionario (e_{ss})

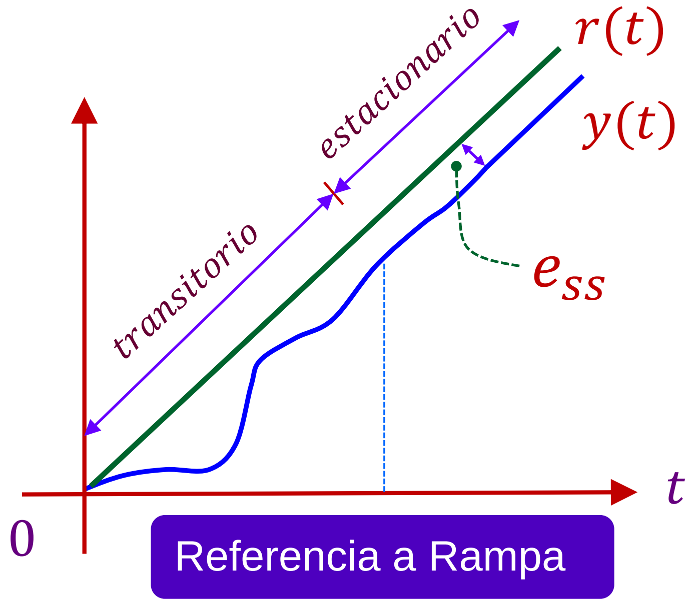


Error $\quad e(t) \equiv r(t) - y(t)$

Error en Estado Estacionario:

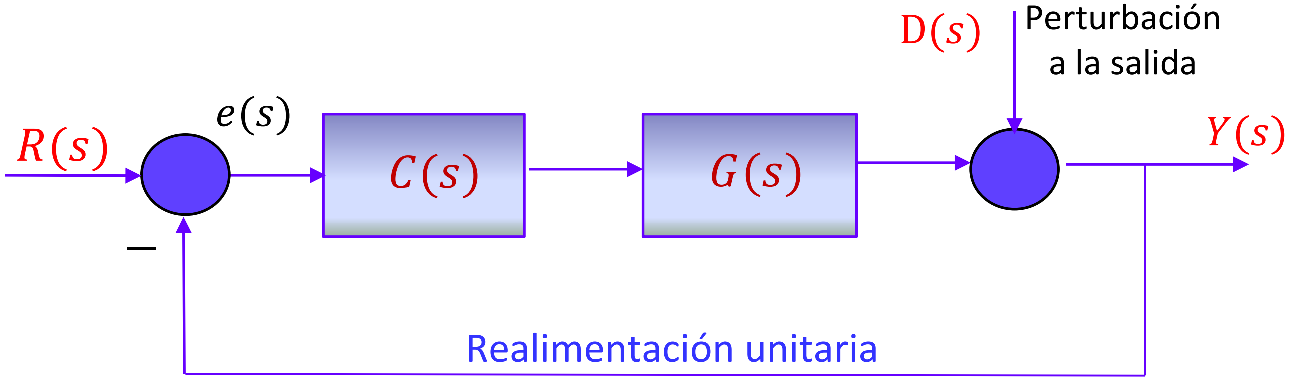
$$e_{ss} \equiv lim_{t\to\infty} e(t)$$





Error en Estado Estacionario:
Realimentación unitaria

e_{ss} para realimentación unitaria



$$e(s) = R(s) - Y(s)$$

$$Y(s) = C(s)G(s)E(s) + D(s)$$

$$E(s) = R(s) - C(s)G(s)E(s) - D(s)$$

$$[1 + C(s)G(s)]E(s) = R(s) - D(s)$$

$$E(s) = \frac{R(s) - D(s)}{1 + C(s)G(s)}$$

e_{ss} para realimentación unitaria

- Aplicando el TVF obtendremos una expresión para el error en estado estacionario:

$$e_{ss} = lim_{t\to in} e(t) = lim_{s\to 0} sE(s) = lim_{s\to 0} \frac{s[R(s) - D(s)]}{1 + C(s)G(s)}$$
$$= lim_{s\to 0} \frac{s[R(s)]}{1 + C(s)G(s)} + lim_{s\to 0} \frac{-s[D(s)]}{1 + C(s)G(s)}$$

$$e_{ss} = lim_{s\to 0} \frac{s[R(s) - D(s)]}{1 + C(s)G(s)} = \underline{lim_{s\to 0} \frac{s[R(s)]}{1 + C(s)G(s)}} + \underline{lim_{s\to 0} \frac{-s[D(s)]}{1 + C(s)G(s)}}$$

e_{ss} para realimentación unitaria

- Podemos desagregar esta expresión del e_{ss} total en dos componentes

$$e_{ss} = {e_{ss}}^r + {e_{ss}}^d$$

$${e_{ss}}^r = lim_{s\to 0} \frac{sR(s)}{1 + C(s)G(s)}$$

(Debido a la Referencia)

$${e_{ss}}^d = lim_{s\to 0} \frac{-sD(s)}{1 + C(s)G(s)}$$

(Debido a la Perturbación)

- Note que el error a perturbación se esta calculando cuando la perturbación esta a la salida del sistema
- La perturbación puede estar en otra parte por tanto el calculo será diferente

Tipo de un Sistema Dinámico

- El error estacionario e_{ss} depende de la Función de transferencia de Lazo Abierto del sistema $G(s)$ y específicamente depende del numero de polos en $s = 0$

Definición:

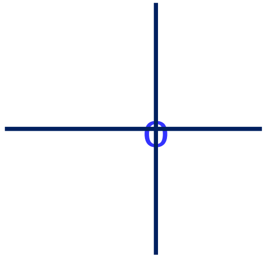
- Un sistema dinámico es de tipo $\boldsymbol{K}$, si tiene $\boldsymbol{K}$ polos iguales a cero (polos en el origen). Es decir términos $\boldsymbol{s^K}$ en el denominador, que representa un polo de multiplicidad K en el origen.
- El esquema de clasificación se basa en la cantidad de términos 1/s indicadas por la FT en lazo abierto

$$G(s) = \frac{K(T_1 s + 1)(T_2 s + 1) \ldots (T_{m1} s^2 + T_{m2} s + 1)}{\boldsymbol{s^K}(T_a s + 1)(T_b s + 1) \ldots (T_{n1} s^2 + T_{n2} s + 1)}$$

Tipo de un Sistema Dinámico

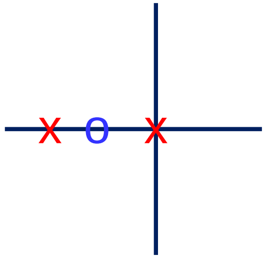
- Por ejemplo el tipo de los siguientes sistemas:

Tipo 0 $\quad \boldsymbol{K = 0} \quad C(s)G(s) = \dfrac{s}{s^2 + 1}$



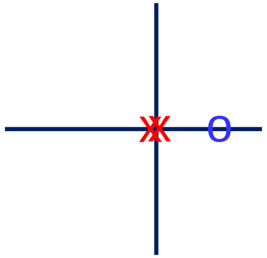
No hay polo en el origen

Tipo 1 $\quad \boldsymbol{K = 1} \quad C(s)G(s) = \dfrac{s + 1}{s(s + 2)}$



Hay 1 polo en el origen

Tipo 2 $\quad \boldsymbol{K = 2} \quad C(s)G(s) = \dfrac{s - 1}{s^3 + s^2}$



Hay 2 polos en el origen

e_{ss} para realimentación unitaria

- Relación entre el Tipo de C(s)G(s) y el e_{ss}

$$e_{ss}{}^{r} = lim_{s\to 0}\frac{sR(s)}{1+C(s)G(s)}$$

(Debido a la Referencia)

En general: $C(s)G(s) = \dfrac{num(s)}{den(s)}$ $\Rightarrow$ $e_{ss}{}^{r} = lim_{s\to 0}\dfrac{sR(s)}{1+\dfrac{num(s)}{den(s)}}$

Para $C(s)G(s)$ de tipo K, tenemos: $\Rightarrow$ $e_{ss}{}^{r} = lim_{s\to 0}\dfrac{sR(s)}{1+\dfrac{num(s)}{s^{k}den^{*}(s)}}$

$$e_{ss}{}^{r} = \frac{lim_{s\to 0}[s^{k+1}R(s)]}{lim_{s\to 0}\left[s^{k}+\dfrac{num(s)}{den^{*}(s)}\right]} \Rightarrow \boxed{e_{ss}{}^{r} = \frac{lim_{s\to 0}[s^{k+1}R(s)]}{lim_{s\to 0}\left[s^{k}+\dfrac{num(s)}{den^{*}(s)}\right]}}$$

$den^{*}(0)\neq 0 \quad num(0)\neq 0$

e_{ss} para sistemas TIPO 0

- Relación entre el Tipo de C(s)G(s) y el e_{ss}

$$e_{ss}{}^{r} = \frac{lim_{s\to 0}[s^{k+1}R(s)]}{lim_{s\to 0}\left[s^k + \frac{num(s)}{den^*(s)}\right]}$$

$Si\ k = 0$

$$e_{ss}{}^{r} = \frac{lim_{s\to 0}[s^{1}R(s)]}{lim_{s\to 0}[1 + C(s)G(s)]}$$

Se define Constante de error de **POSICIÓN**:

$$K_p = K_0 = lim_{s\to 0}[C(s)G(s)] \Rightarrow$$

$$\boxed{e_{ss}{}^{r} = \frac{lim_{s\to 0}[s^{1}R(s)]}{1 + K_0}}$$

Para $R(s) = \frac{a_0}{s}$ $\quad e_{ss}{}^{r} = \frac{lim_{s\to 0}[sa_0/s]}{1 + K_0} = \frac{a_0}{1 + K_0}$ Error ACOTADO

Para $R(s) = \frac{a_1}{s^2}$ $\quad e_{ss}{}^{r} = \frac{lim_{s\to 0}[sa_1/s^2]}{1 + K_0}$ Error No ACOTADO

Para $R(s) = \frac{2a_2}{s^3}$ $\quad e_{ss}{}^{r} = \frac{lim_{s\to 0}[s2a_2/s^3]}{1 + K_0}$ Error No ACOTADO

e_{ss} para sistemas TIPO 1

- Relación entre el Tipo de C(s)G(s) y el e_{ss}

$$e_{ss}{}^{r} = \frac{lim_{s\to 0}[s^{k+1}R(s)]}{lim_{s\to 0}\left[s^{k} + \frac{num(s)}{den^{*}(s)}\right]}$$

$Si\ k = 1$

$$e_{ss}{}^{r} = \frac{lim_{s\to 0}[s^{2}R(s)]}{lim_{s\to 0}[s^{1}C(s)G(s)]}$$

Se define Constante de error de **VELOCIDAD**:

$$K_V = K_1 = lim_{s\to 0}[sC(s)G(s)] \Rightarrow$$

$$\boxed{e_{ss}{}^{r} = \frac{lim_{s\to 0}[s^{2}R(s)]}{K_1}}$$

Para $R(s) = \frac{a_0}{s}$ $\quad e_{ss}{}^{r} = \frac{lim_{s\to 0}[s^{2}a_0/s]}{K_1} = 0$ Error cero

Para $R(s) = \frac{a_1}{s^2}$ $\quad e_{ss}{}^{r} = \frac{lim_{s\to 0}[s^{2}a_1/s^{2}]}{K_1} = \frac{a_1}{K_1}$ Error ACOTADO

Para $R(s) = \frac{2a_2}{s^3}$ $\quad e_{ss}{}^{r} = \frac{lim_{s\to 0}[s^{2}2a_2/s^{3}]}{K_1}$ Error No ACOTADO

e_{ss} para sistemas TIPO 2

- Relación entre el Tipo de C(s)G(s) y el e_{ss}

$$e_{ss}{}^{r} = \frac{lim_{s\to 0}[s^{k+1}R(s)]}{lim_{s\to 0}\left[s^{k} + \frac{num(s)}{den^{*}(s)}\right]}$$

$Si\ k = 2$

$$e_{ss}{}^{r} = \frac{lim_{s\to 0}[s^{3}R(s)]}{lim_{s\to 0}[s^{2}C(s)G(s)]}$$

Se define Constante de error de **ACELERACIÓN**:

$$K_A = K_2 = lim_{s\to 0}[s^{2}C(s)G(s)] \Rightarrow \boxed{e_{ss}{}^{r} = \frac{lim_{s\to 0}[s^{3}R(s)]}{K_2}}$$

Para $\mathrm{R(s)} = \frac{a_0}{s}$ $\quad e_{ss}{}^{r} = \frac{lim_{s\to 0}[s^{3}a_0/s]}{K_2} = 0$ Error cero

Para $\mathrm{R(s)} = \frac{a_1}{s^2}$ $\quad e_{ss}{}^{r} = \frac{lim_{s\to 0}[s^{3}a_1/s^{2}]}{K_2} = 0$ Error cero

Para $\mathrm{R(s)} = \frac{2a_2}{s^3}$ $\quad e_{ss}{}^{r} = \frac{lim_{s\to 0}[s^{3}2a_2/s^{3}]}{K_2} = \frac{2a_2}{K_2}$ Error ACOTADO

e_{ss} para SP ESCALON – RAMPA - PARABOLA

	Señal de Referencia(SP)		
Tipo de C(s)G(s)	*Escalón* $r(t) = a_0$	*Rampa* $r(t) = a_1 t$	*Parábola* $r(t) = a_2 t^2$
0	$\frac{a_0}{1 + K_0}$	NO ACOTADO	NO ACOTADO
1	0	$\frac{a_1}{K_1}$	NO ACOTADO
2	0	0	$\frac{2a_2}{K_2}$

¡ Formulas validas, si el sistema es estable en lazo cerrado !

Constante de error de **POSICION**: $K_p = K_0 = lim_{s\to 0}[C(s)G(s)]$

Constante de error de **VELOCIDAD**: $K_V = K_1 = lim_{s\to 0}[sC(s)G(s)]$

Constante de error de **ACELERACION**: $K_A = K_2 = lim_{s\to 0}[s^2C(s)G(s)]$