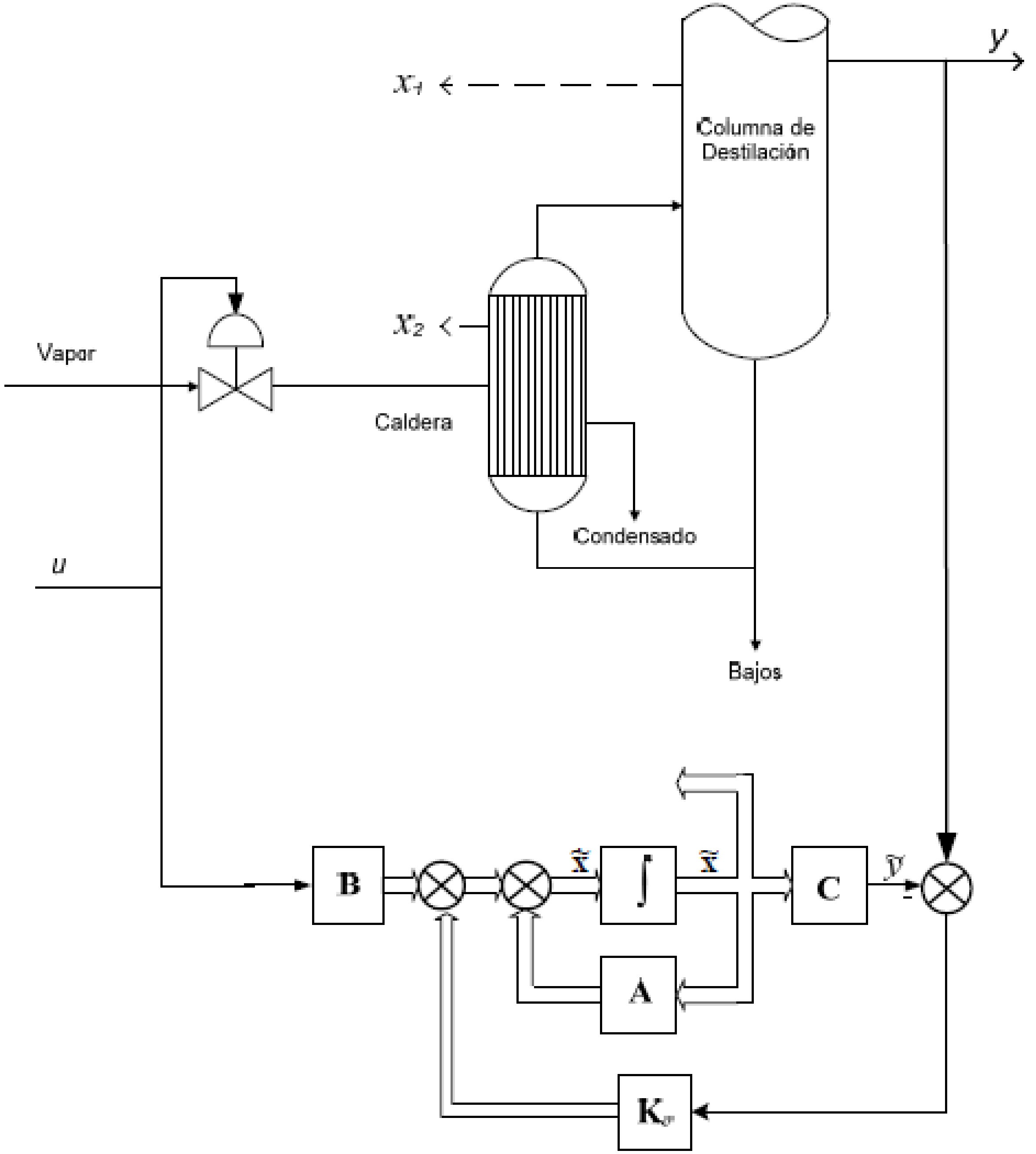
# INGENIERÍA DE CONTROL 2

## Sesión 5

# 3.5 OBSERVADORES LINEALES

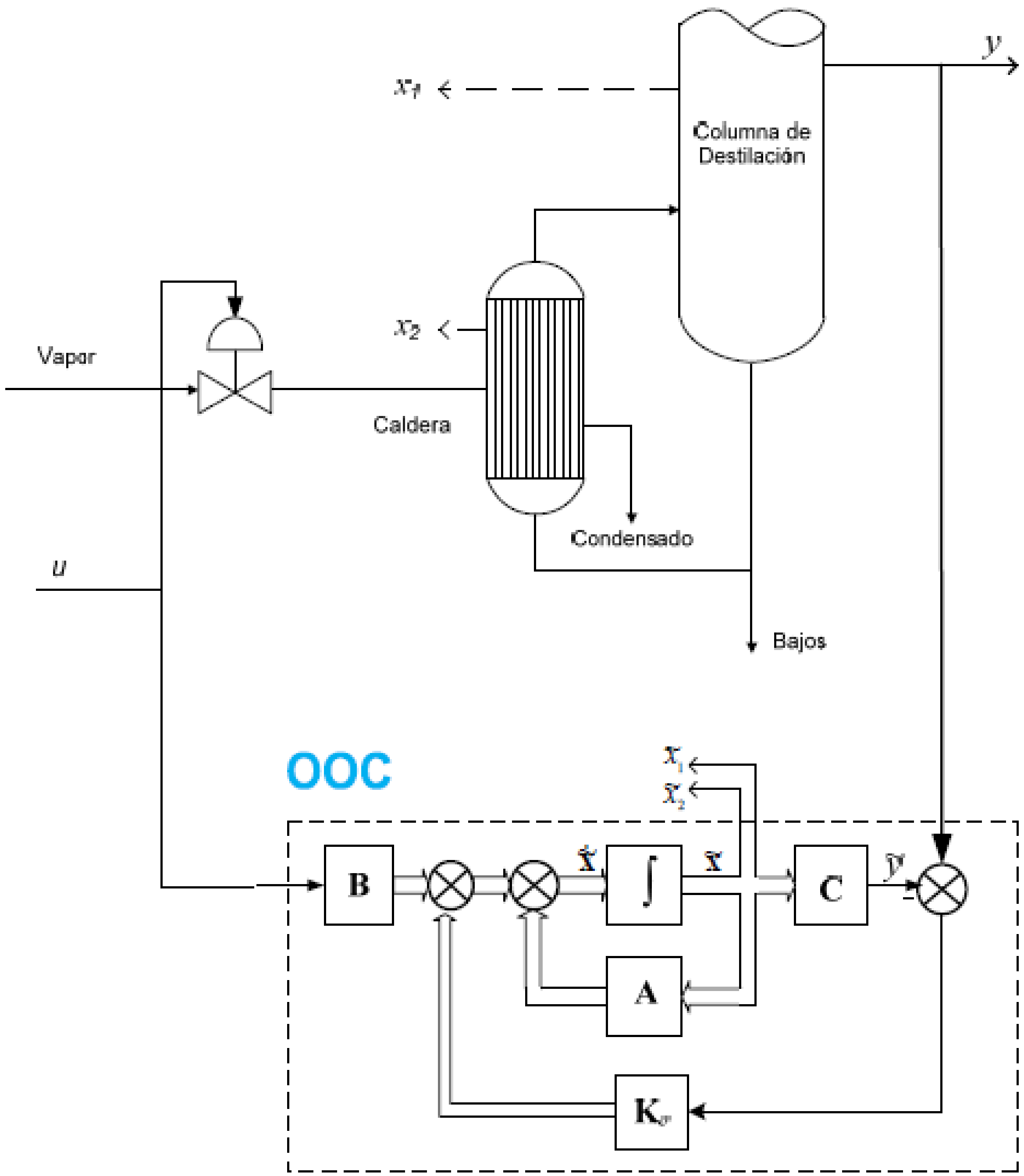
# INTRODUCCIÓN

- En tareas de diseño (por ej. Diseño por Ubicación de Polos), es necesario medir todas las variables de estado.
- En aplicaciones prácticas, **algunas variables no pueden ser medidas**: por razones de costo, carencia de sensores apropiados ó por ser de naturaleza ficticia.
- Si un sistema es observable, se podrá estimar aquellas variables de estado que no pueden ser medidas, empleando un observador.

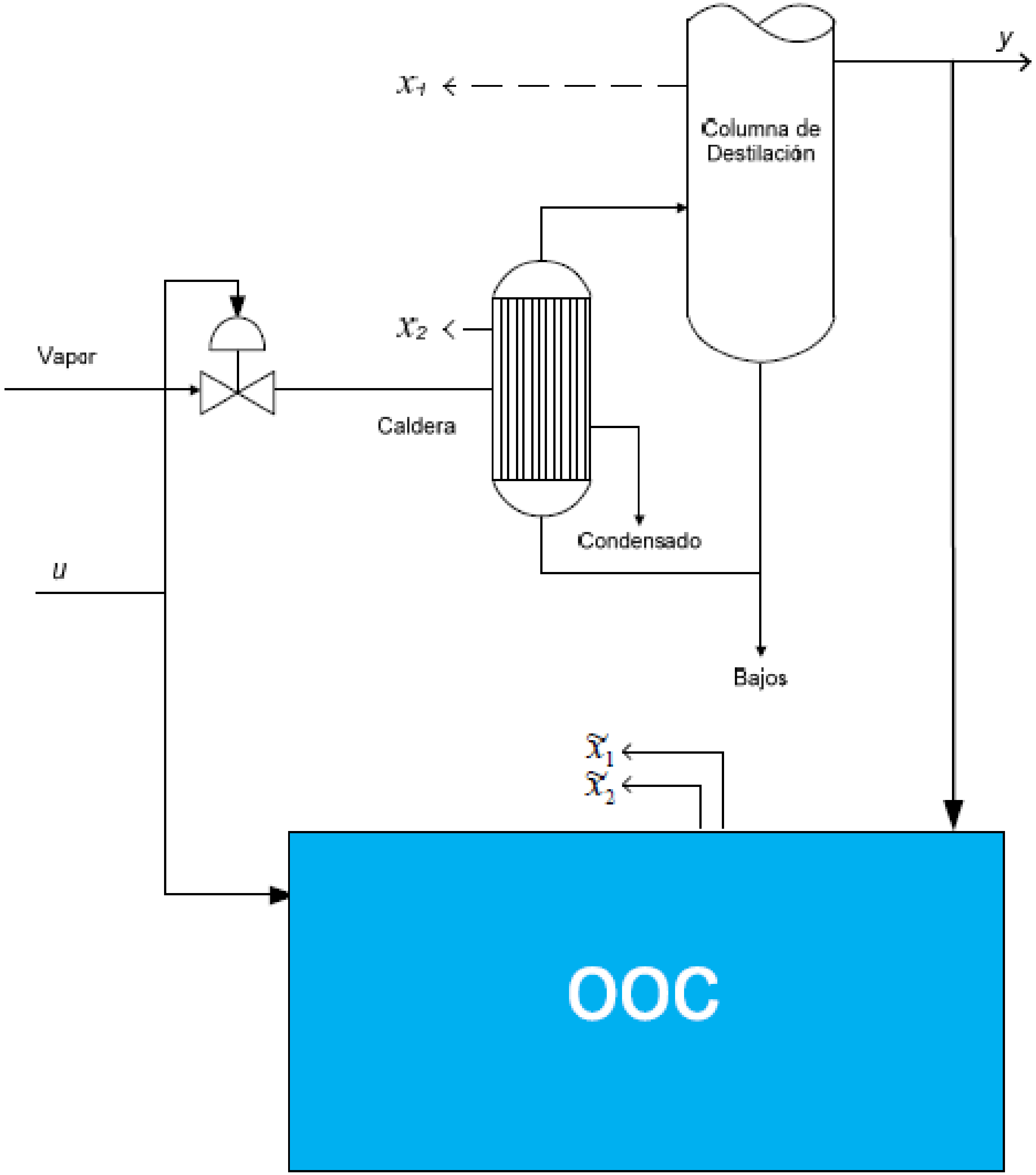


y
$x_1$
Columna de Destilación
$x_2$
Vapor
Caldera
Condensado
u
Bajos
B
$\tilde{x}$
∫
$\tilde{x}$
C
$\tilde{y}$
A
$K_e$

# OOC



y
$x_1$
Columna de Destilación
$x_2$
Vapor
Caldera
Condensado
u
Bajos
$\hat{x}_1$
$\hat{x}_2$
B
$\dot{\hat{x}}$
∫
$\hat{x}$
C
$\hat{y}$
A
$K_e$



y
$x_1$
Columna de Destilación
$x_2$
Vapor
Caldera
Condensado
u
Bajos
$\tilde{x}_1$
$\tilde{x}_2$
OOC

## INTRODUCCIÓN (cont.)

- Una variable "estimada" puede en algunos casos ser más confiable que una variable "medida", esto debido a que el "error en la medición" producido por el sensor podría ser mayor que el "error de estimación" del observador.
- El observador de un SLI-t, debe ser diseñado teniendo la propiedad de que el error de estimación tienda a cero tan rápido como se desea.

## ESTRUCTURA DEL OOC

Considere el modelo de espacio – estado de un SLI-t:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}u(t) \qquad (1)$$

$$y(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) \qquad (2)$$

Se supone que el vector de estado $\mathbf{x}$ es estimado por $\tilde{\mathbf{x}}$, así se tiene el modelo del observador de estado:

$$\dot{\tilde{\mathbf{x}}} = \mathbf{A}\tilde{\mathbf{x}} + \mathbf{B}u + \mathbf{K}_e\left(y - \tilde{y}\right) \qquad (3)$$

El OOC tiene a $u$ e $y$ como entradas y $\tilde{\mathbf{x}}$ como salida.

La realimentación a través de $\mathbf{K}_e$ funciona como una señal de corrección para el modelo de la planta, que incorpora los factores desconocidos en planta.

## ECUACIÓN DEL ERROR DEL OOC

La ec. del error del observador se obtiene de (3)-(1)

$$\mathbf{x} - \dot{\tilde{\mathbf{x}}} = \mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{A}\tilde{\mathbf{x}} - \mathbf{K}_e\left(\mathbf{C}\mathbf{x} - \mathbf{C}\tilde{\mathbf{x}}\right)$$

$$\dot{\mathbf{e}}(t) = \left(\mathbf{A} - \mathbf{K}_e\mathbf{C}\right)\mathrm{e}(t)$$

Si los valores propios de $\mathbf{A}$-$\mathbf{K}_e\mathbf{C}$ corresponden a un sistema estable: $\mathbf{e}(\mathrm{t}) \rightarrow 0$, para cualquier $\mathbf{e}(0)$.

Es decir $\tilde{\mathbf{x}}$ (t) $\rightarrow \mathbf{x}(\mathrm{t})$ sin importar los valores de $\mathbf{x}(0)$ y $\tilde{\mathbf{x}}$ (0)

Por lo anterior los valores propios de $\mathbf{A}$-$\mathbf{K}_e\mathbf{C}$ se deberán eligir de tal manera que el sistema sea estable y $\mathbf{e}(\mathrm{t}) \rightarrow 0$ con la velocidad deseada.

# ECUACIÓN CARACTERÍSTICA DEL OOC

La ec. característica del OOC es

$$\Delta_e(s) = \left| s\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{K}_e\mathbf{C} \right| = 0 \qquad (4)$$

Las posiciones deseadas de las raíces de la ec. característica (valores propios de $\mathbf{A}$-$\mathbf{K}_e\mathbf{C}$ ) son dadas o seleccionadas de acuerdo a los requerimientos de la respuesta del error.

Si la respuesta del error requiere que las raíces de $\Delta_e(s)$ se ubiquen en $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$; entonces la ec. característica deseada es

$$\Delta_{ed}(s) = (s - \mu_1)(s - \mu_2)\ldots(s - \mu_n) = 0$$

## ECUACIÓN CARACTERÍSTICA DEL OOC (cont.)

Expandiendo

$$\Delta_{ed}(s) = s^n + \alpha_{n-1}s^{n-1} + \alpha_{n-2}s^{n-2} + \ldots + \alpha_1 s + \alpha_0 = 0 \qquad (5)$$

De (4)=(5), se obtiene el vector de ganancias $\mathbf{K}_e$.

El diseño del OOC consiste en la determinación del $\mathbf{K}_e$ apropiado tal que $\mathbf{A}$-$\mathbf{K}_e\mathbf{C}$ tenga las raíces deseadas.

## DISEÑO DEL OOC

Si una planta es completamente observable, sus variables podrán ser estimadas, en este caso existirá un vector $\mathbf{K}_e$ que permitirá que las raíces de $\Delta_e(s)$ puedan ser ubicadas en las posiciones deseadas.

## DISEÑO DEL OOC

Haciendo una comparación con el método de diseño por ubicación de polos:

La determinación de

$\mathbf{K}'_e$ para el OOC con A´ y C´ dados,

es el mismo problema que la determinación de

$\mathbf{K}^*$ en el diseño por ubicación de polos con $\mathbf{A}^*$ y $\mathbf{B}^*$ dados.

## DISEÑO DEL OOC (cont.)

Se tiene una planta con

$$\Delta(\mathrm{s}) = \mathrm{s}^{n} + a_{n-1}\mathrm{s}^{n-1} + \ldots + a_1\mathrm{s} + a_0 = 0$$

y la ec. característica deseada

$$\Delta_d(s) = (s+\lambda_1)(s+\lambda_2)\ldots(s+\lambda_n) = 0$$

$$\Delta_{ed}(s) = (s-\mu_1)(s-\mu_2)\ldots(s-\mu_n) = 0$$

| **Diseño por Ubicación de Polos** | **Diseño del OOC** |
| --- | --- |
| *Controlabi lidad* | *Observabil idad* |
| $K_i^* = \alpha_{i-1} - a_{i-1}$ | $K'_{ei} = \alpha_{i-1} - a_{i-1}$ |
| $\mathbf{K}^*$ | $\mathbf{K}'_e$ |
| $\mathbf{K} = \mathbf{K}^*\mathbf{P}^{-1}$ | $\mathbf{K}_e = \mathbf{Q}\mathbf{K}'_e$ |

## METODOLOGÍA 1

Considere una planta :

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}u(t) \qquad (1)$$

$$y(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) \qquad (2)$$

La ec. característica deseada del OOC:

$$\Delta_{ed}(s) = (s-\mu_1)(s-\mu_2)\ldots(s-\mu_n) = 0 \qquad (5)$$

**Solución**

- Analizar la observabilidad de la planta: rango(**V**)=n
- Determinar: $\Delta(\mathrm{s}) = \mathrm{s}^n + a_{n-1}\mathrm{s}^{n-1} + \ldots + a_1\mathrm{s} + a_0 = 0$
- Expandir (5): $\Delta_{ed}(\mathrm{s}) = \mathrm{s}^n + \alpha_{n-1}\mathrm{s}^{n-1} + \ldots + \alpha_1\mathrm{s} + \alpha_0 = 0$
- Hallar: $K'_{ei} = \alpha_{i-1} - a_{i-1}\,; \qquad i = 1,2,\ldots n$
- Determinar para la planta original

$$\mathbf{K}_e = \mathbf{Q}\mathbf{K}'_e$$

## METODOLOGÍA 2

Considere una planta :

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}u(t) \qquad (1)$$

$$y(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) \qquad (2)$$

La ec. característica deseada del OOC:

$$\Delta_{ed}(s) = (s-\mu_1)(s-\mu_2)\ldots(s-\mu_n) = 0 \qquad (5)$$

**Solución**

- Analizar la observabilidad de la planta: rango(**V**)=n
- Expandir (5): $\Delta_{ed}(\mathrm{s}) = \mathrm{s}^n + \alpha_{n-1}\mathrm{s}^{n-1} + \ldots + \alpha_1\mathrm{s} + \alpha_0 = 0$
- Determinar $\mathbf{K}_e$ empleando la **Formula de Akermman**

# METODOLOGÍA 2 (cont.)

$$\mathbf{K}_e = \Delta_{ed}(\mathbf{A}) \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CA} \\ \vdots \\ \mathbf{CA}^{n-2} \\ \mathbf{CA}^{n-1} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

donde

$$\Delta_{ed}(\mathbf{A}) = \mathbf{A}^n + \alpha_{n-1}\mathbf{A}^{n-1} + \ldots + \alpha_1\mathbf{A} + \alpha_0\mathbf{I}$$

## SELECCIÓN DE LAS RAÍCES DE LA EC. CARACTERÍSTICA DESEADA

Las posiciones deseadas de las raíces de la ec. característica del OOC, deben elegirse de tal manera que su respuesta sea por lo menos cinco veces más rápida que la respuesta del sistema de lazo cerrado considerado.

# APLICACIÓN DE LOS OBSERVADORES

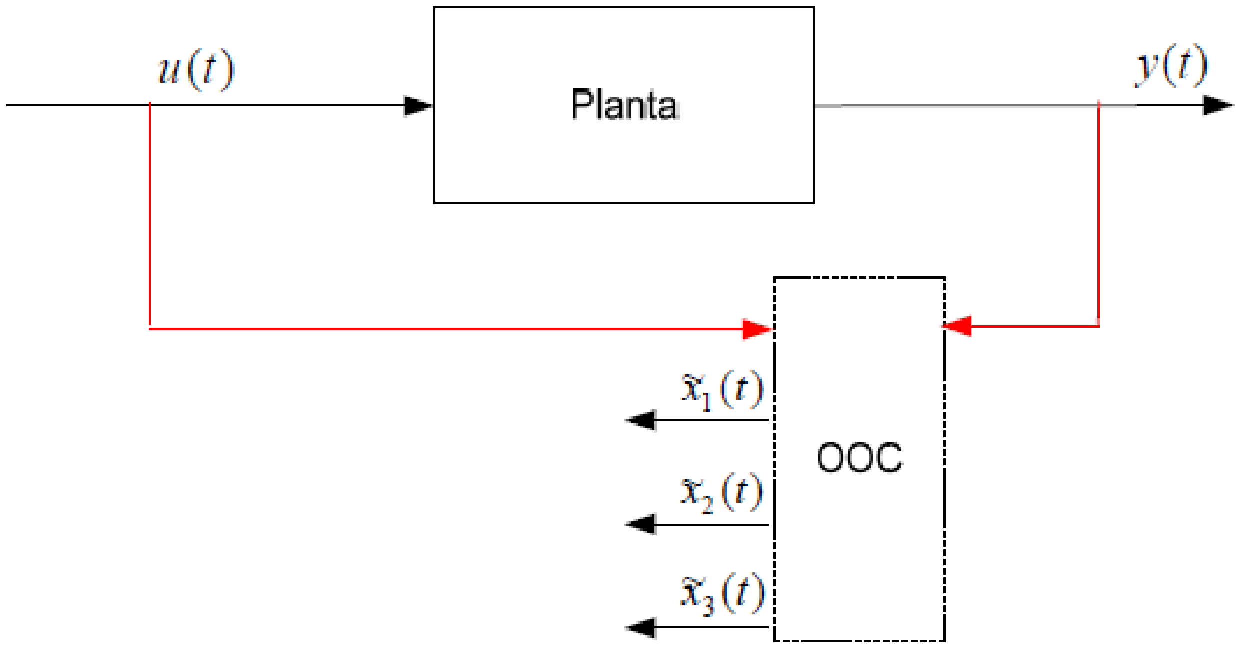
# INTRODUCCIÓN

El observador puede ser empleado:

- Estimación de variables.
- Diseño por ubicación de polos.
- Sistemas de detección de fallos

# ESTIMACIÓN DE VARIABLES

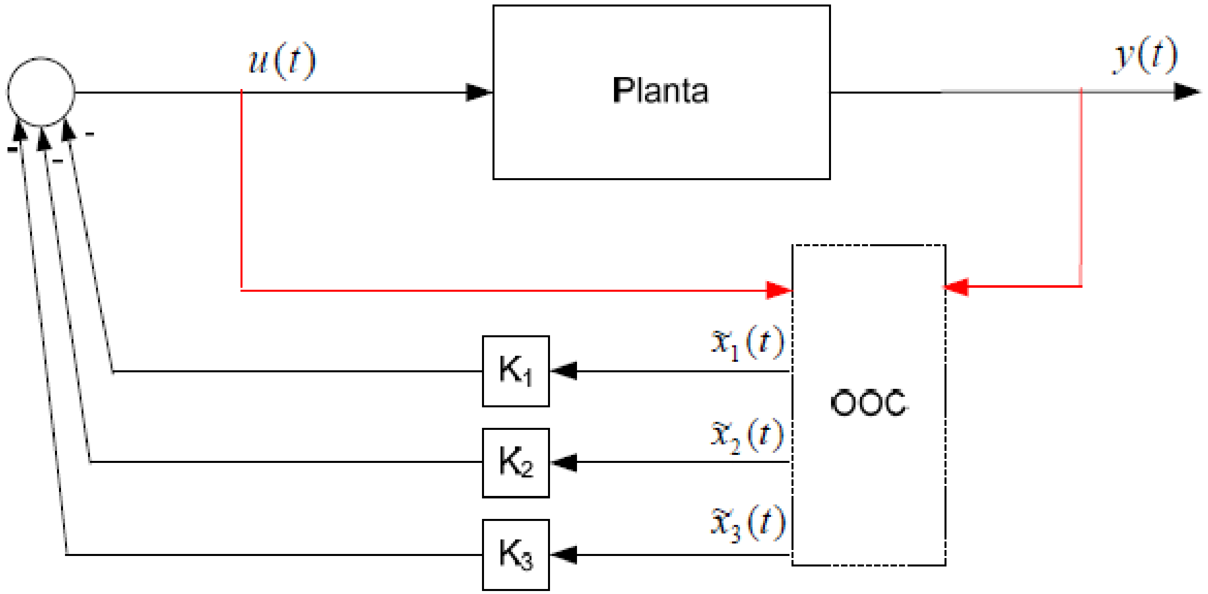
Los observadores pueden emplearse como sensores virtuales, los cuales permiten estimar variables de estado.



# INTEGRACIÓN DE OBSERVADORES EN DISEÑO POR UBICACIÓN DE POLOS

Cuando en la planta se tienen variables no medibles, se podrían emplear las variables estimadas por un OOC (en vez de las variables reales) a fin de elaborar la variable de control.

Por ejemplo en un sistema de regulación, como se muestra en la figura:



## EFECTOS DE LA ADICIÓN DEL OOC A UN SISTEMA DE LAZO CERRADO

En los casos en los que no pueda medirse $\mathbf{x}(\mathrm{t})$, se empleará un OOC y en base a $\tilde{\mathbf{x}}(\mathrm{t})$ se realizará la realimentación

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}u(t) \qquad (1)$$

$$y(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) \qquad (2)$$

$$u(t) = -\mathbf{K}\tilde{\mathbf{x}}(t) \qquad (3)$$

sustituyendo (3) en (1)

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{B}\mathbf{K}\tilde{\mathbf{x}} = (\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K})\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{K}(\mathbf{x} - \tilde{\mathbf{x}})$$

de donde

# EFECTOS DE LA ADICIÓN DEL OOC A UN SISTEMA DE LAZO CERRADO (cont.)

$$\dot{\mathbf{x}} = (\mathbf{A} - \mathbf{BK})\mathbf{x} + \mathbf{BKe} \qquad (5)$$

además

$$\dot{\mathbf{e}} = (\mathbf{A} - \mathbf{K}_e\mathbf{C})\mathbf{e} \qquad (6)$$

De (5) y (6)

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}} \\ \dot{\mathbf{e}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} - \mathbf{BK} & \mathbf{BK} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A} - \mathbf{K}_e\mathbf{C} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{e} \end{bmatrix}$$

La ec. característica del sistema

$$\Delta(s) = \left| s\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{BK} \right| \left| s\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{K}_e\mathbf{C} \right| = 0$$

"El diseño por ubicación de polos y el diseño del observador son independientes uno del otro".

## CONCLUSIÓN

El diseño del control de regulación de una planta cuyas variables de estado no puedan medirse, consiste de dos etapas

- Determinación del vector de ganancias **K**, que permite ubicar las raíces de $\Delta_c(s)$ en las posiciones deseadas.
- Determinación del vector de ganancias $\mathbf{K}_e$ , que permite ubicar las raíces de $\Delta_e(s)$ en las posiciones deseadas.