Análisis de Fourier: SERIE DE FOURIER

- Forma compleja de la Serie de Fourier.
- Espectros de frecuencia.
- Potencia y Teorema de Parseval.

Forma compleja de la Serie de Fourier

- Consideremos la serie de Fourier para una función periódica $f(t)$, con periodo $\underbrace{\mathbf{T = 2\pi/\omega_0}}_{\omega_0 = \frac{2\pi}{T}}$

$$\boxed{f(t) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}[a_n \boldsymbol{cos}(\boldsymbol{n\omega_0}t) + b_n\boldsymbol{sen}(\boldsymbol{n\omega_0 t})]}$$

$\underbrace{a_0, a_n, b_n}_{n\geq 1} \in \mathbb{R}$

- Es posible obtener una forma alternativa usando las fórmulas de Euler

$* \; e^{j\theta} = \cos\theta + j\,\mathrm{sen}\,\theta$

$* \; e^{-j\theta} = \cos\theta - j\,\mathrm{sen}\,\theta$

$\cos\theta = \frac{e^{j\theta} + e^{-j\theta}}{2}$; $\mathrm{sen}\,\theta = \frac{e^{j\theta} - e^{-j\theta}}{2j}$

$\theta = n\omega_0 t$

$$\mathbf{cos}(\boldsymbol{n\omega_0 t}) = \frac{1}{2}\left(e^{jn\omega_0 t} + e^{-jn\omega_0 t}\right)$$

$$\mathbf{sen}(\boldsymbol{n\omega_0 t}) = \frac{1}{2j}\left(e^{jn\omega_0 t} - e^{-jn\omega_0 t}\right)$$

Sustituyendo

$$f(t) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}[a_n \frac{1}{2}(\boldsymbol{e^{jn\omega_0 t}} + \boldsymbol{e^{-jn\omega_0 t}}) + b_n \frac{1}{2j}(\boldsymbol{e^{jn\omega_0 t}} - \boldsymbol{e^{-jn\omega_0 t}})]$$

$$f(t) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}[(\frac{1}{2}a_n\boldsymbol{e^{jn\omega_0 t}} + b_n \frac{1}{2j}\boldsymbol{e^{jn\omega_0 t}}) + (\frac{1}{2}a_n\boldsymbol{e^{-jn\omega_0 t}} - b_n \frac{1}{2j}\boldsymbol{e^{-jn\omega_0 t}})$$

Forma compleja de la Serie de Fourier

De lo anterior.

$$f(t) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}[(\frac{1}{2}a_n e^{jn\omega_0 t} + b_n \frac{1}{2j} e^{jn\omega_0 t}) + (\frac{1}{2}a_n e^{-jn\omega_0 t} - b_n \frac{1}{2j} e^{-jn\omega_0 t})]$$

Y usando el hecho de que $j^2 = -1 \rightarrow j.j = -1 \rightarrow j = -\frac{1}{j} \rightarrow$ por (-1): $\mathbf{1/j = -j}$

$$f(t) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}[\underbrace{\frac{1}{2}(a_n - jb_n)}_{c_n} e^{jn\omega_0 t} + \frac{1}{2}(a_n + jb_n) e^{-jn\omega_0 t}] \dots\dots (*)$$

$* \; c_n = \frac{1}{2}(a_n - jb_n)$

en lugar de n: $-n$

$\Rightarrow c_{-n} = \frac{1}{2}(a_{-n} - jb_{-n})$

Y definiendo:

$$\boxed{c_n = \frac{1}{2}(a_n - jb_n)} \Rightarrow c_{-n} = \frac{1}{2}(a_{-n} - jb_{-n})$$

$$\Rightarrow c_{-n} = \frac{1}{2}(a_n + jb_n) \quad \Rightarrow \quad \boxed{c_{-n} = \overline{c_n}}$$

Entonces

$$\boxed{c_0 = \frac{1}{2}a_0, \quad c_n = \frac{1}{2}(a_n - jb_n), \quad c_{-n} = \frac{1}{2}(a_n + jb_n)} \dots\dots (**)$$

$* \; \cos(-u) = \cos u$

$* \; \operatorname{sen}(-u) = -\operatorname{sen} u$

$$a_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\cos(n\omega_0 t)dt$$

$$a_{-n} = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\underbrace{\cos(-n\omega_0 t)}_{\cos(n\omega_0 t)}dt$$

$a_{-n} = a_n$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\operatorname{sen}(n\omega_0 t)dt$$

$$b_{-n} = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\underbrace{\operatorname{sen}(-n\omega_0 t)}_{-\operatorname{sen}(n\omega_0 t)}dt$$

$b_{-n} = -b_n$

Forma compleja de la Serie de Fourier

$C_0 = C_0 \cdot \underbrace{e^{j0\omega_0 t}}_{1}$

De $(**)$ en $(*)$, la serie se puede escribir como:

$$f(t) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(c_n e^{jn\omega_0 t} + c_{-n} e^{-jn\omega_0 t}\right) \Rightarrow f(t) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{jn\omega_0 t} + \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} e^{-jn\omega_0 t}$$

$n = -m$

$-m = \infty \rightarrow m = -\infty$

$\sum C_m e^{jm\omega_0 t}$

$-m = 1 \rightarrow m = -1$

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n e^{jn\omega_0 t} + \sum_{n=-1}^{-\infty} c_n e^{jn\omega_0 t}$$

SERIE COMPLEJA DE FOURIER

$$\boxed{f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega_0 t}}$$

$$c_0 = \frac{1}{2}a_0, \quad c_n = \frac{1}{2}(a_n - jb_n), \quad c_{-n} = \frac{1}{2}(a_n + jb_n)$$

Para pasar de fourier REAL a fourier Complejo.

$2C_n = a_n - jb_n$

$2C_{-n} = a_n + jb_n$

$a_0 = 2C_0$, $a_n = C_n + C_{-n}$, $b_n = \frac{1}{j}(C_{-n} - C_n)$ } PARA PASAR DE COMPLEJO A REAL

Forma compleja de la Serie de Fourier

- La FORMA COMPLEJA DE LA SERIE DE FOURIER queda expresada por :

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega_0 t}$$

- Sus coeficientes c_n pueden obtenerse por:

$$\boxed{c_n = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)e^{-jn\omega_0 t}dt} \quad \text{o} \quad \boxed{c_n = \frac{a_n - jb_n}{2}}$$

c_n es complejo

Para n=0, ±1, ±2, ±3, ...

El intervalo de integración $[-\frac{T}{2};\frac{T}{2}]$ **mide T, pero** no necesita ser simétrico respecto al origen. Puede ser cualquier intervalo que cubra un periodo completo, por ejemplo: $[0;T]$, $\left[\frac{T}{2};\frac{3T}{2}\right]$, ...

Forma compleja de la Serie de Fourier

Los coeficientes c_n son números complejos, y también se pueden escribir **en forma polar:**

$$c_n = |c_n| e^{j\phi_n}$$

* $|C_n|$ módulo de C_n
* ϕ_n ARGUMENTO DE C_n

Obviamente:

$$c_{-n} = c_n^* = \overline{c_n} = |c_n| e^{-j\phi_n} \ldots\ldots (*)$$

$|\overline{C_n}| = |C_n|$

Donde c_n^* representa el conjugado complejo de c_n

Para todo n≠0:

$$\boxed{|c_n| = \frac{1}{2}\sqrt{a_n^2 + b_n^2}} \qquad \boxed{\tan \phi_n = -\frac{b_n}{a_n}}$$

$C_n = \frac{a_n - jb_n}{2}$

$C_n = \frac{a_n}{2} + j\left(-\frac{b_n}{2}\right)$

Cuando $n = 0$: **c_0 es un número real** ➔ $c_0 = \frac{1}{2} a_0$ } # real

NOTA: 1) Dado la Serie real de Fourier ⇒ a_n y b_n se conocen

⇒ La serie compleja es: $C_n = \frac{a_n - jb_n}{2}$, $C_{-n} = \frac{a_n + jb_n}{2}$

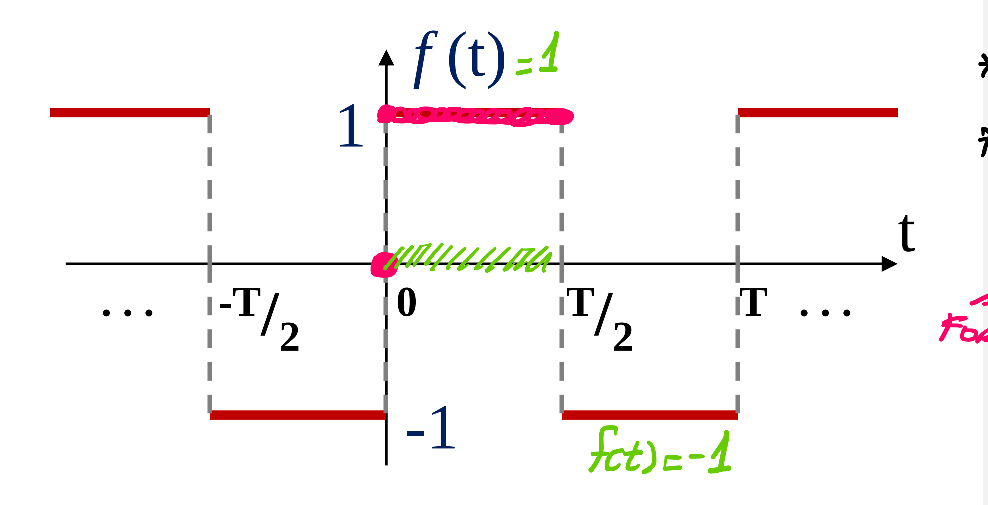
2) Si se tiene la serie compleja ⇒ C_n y C_{-n} serán conocidos

$a_n - jb_n = 2C_n$, $a_n + jb_n = 2C_{-n}$ ⇒ a_n y b_n se hallan.

Forma compleja de la Serie de Fourier

Ejemplo 1: Encontrar la forma compleja de la serie de Fourier para la función ya tratada

(ya se Resolvió en Sem. 7)



* Periodo T ⇒ $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$

Prop. sesión 7.2

* f(t) es impar: $\boxed{a_0 = 0,\ a_n = 0}$

Formula

$b_n = \frac{4}{T}\int_0^{T/2} f(t)\, \text{sen}(n\omega_0 t)\, dt$, $f(t) = 1$

$b_n = \frac{4}{T}\cdot\left(-\frac{\cos(n\omega_0 t)}{n\omega_0}\right)\Big|_0^{T/2}$

$b_n = \frac{-4}{T.n\omega_0}\left[\cos\left(n.\frac{2\pi}{T}.\frac{T}{2}\right) - \cos 0\right]$, $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$, $\cos(n\pi) = (-1)^n$, $\cos 0 = 1$

* $\cos(n\pi) = (-1)^n$
* $\text{sen}(n\pi) = 0$

Solución 1 – PRIMERA FORMA. (utilizando los coeficiente de la serie de Fourier real)

Usando la expresión de $\boxed{c_n = \frac{a_n - jb_n}{2}}$

Como ya se calcularon los coeficientes de la forma trigonométrica (a_n y b_n)

Recordar: $\boxed{a_n = 0 \text{ para todo } n \in Z}$ ✓ $a_0 = 0$ ✓

Porque f(t) es impar

$\boxed{b_n = \frac{2}{n\pi}[1 - (-1)^n]}$ para todo $\underbrace{n \in Z - \{0\}}_{n \neq 0}$ y $b_0 = 0$

* $c_n = \frac{1}{2}(a_n - jb_n)$ ⟹ $c_n = \frac{0 - j\cdot\frac{2}{n\pi}(1-(-1)^n)}{2} = j\cdot\frac{1}{n\pi}((-1)^n - 1)$

Forma compleja de la Serie de Fourier

Podemos calcular los coeficientes c_n de:

$$c_n = \frac{1}{2}[a_n - jb_n] = \quad \frac{1}{2}\left[0 - j\left(\frac{2}{n\pi}[1-(-1)^n]\right)\right]$$

$$\boldsymbol{c_n = -j\frac{1}{n\pi}[1-(-1)^n]} \quad \text{y} \quad \boldsymbol{c_0 = 0}$$

Entonces la **Serie Compleja de Fourier** queda

$$f(t) = \sum_{\substack{n\neq 0 \\ n=-\infty}}^{\infty} c_n e^{jn\omega_0 t} \quad \Rightarrow \quad \boxed{f(t) = \sum_{\substack{n\neq 0 \\ n=-\infty}}^{\infty} -j\frac{1}{n\pi}[1-(-1)^n]e^{jn\omega_0 t}}$$

$$f(t) = \underset{(n=-4)}{\ldots + 0} + \underset{(n=-3)}{-\frac{j}{3\pi}(2)e^{-3j\omega_0 t}} + \underset{(n=-2)}{0} + \underset{(n=-1)}{\frac{j}{\pi}(2)e^{-j\omega_0 t}} + \underset{(n=1)}{-\frac{j}{\pi}(2)e^{j\omega_0 t}} + \underset{(n=2)}{0} + \underset{(n=3)}{-\frac{j}{3\pi}(2)e^{3j\omega_0 t}} + \underset{(n=4)}{0} + \ldots$$

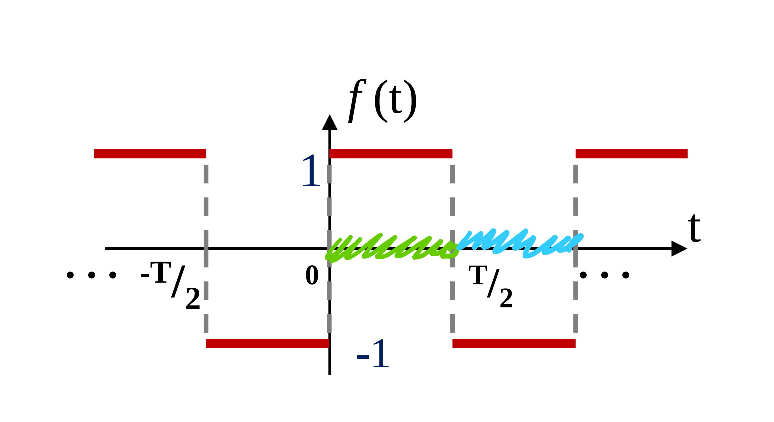
$$f(t) = \frac{2}{\pi}j\left(\ldots + \frac{1}{5}e^{-j5\omega_0 t} + \frac{1}{3}e^{-j3\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t} - e^{j\omega_0 t} - \frac{1}{3}e^{j3\omega_0 t} - \frac{1}{5}e^{j5\omega_0 t} - \ldots\right)$$

Forma compleja de la Serie de Fourier

Solución 1 – SEGUNDA FORMA.

$\int_{-T/2}^{T/2}$

Usando la expresión de $\boxed{c_n = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)e^{-jn\omega_0 t}dt}$



$$c_n = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)e^{-jn\omega_0 t}dt = \frac{1}{T}\left(\int_0^{T/2} 1e^{-jn\omega_0 t}dt + \int_{T/2}^{T} -1e^{-jn\omega_0 t}dt\right)$$

$$c_n = \frac{1}{T}\left(\frac{1}{-jn\omega_o}e^{-jn\omega_0 t}\Big|_0^{T/2} - \frac{1}{-jn\omega_o}e^{-jn\omega_0 t}\Big|_{T/2}^{T}\right)$$

$$c_n = \frac{1}{-jn\omega_o T}[(e^{-jn\omega_0 T/2} - 1) - (e^{-jn\omega_0 T} - e^{-jn\omega_0 T/2})]$$

2π 2π 2π

$* \ \underbrace{\omega_0 = \frac{2\pi}{T}}_{\omega_0 T = 2\pi}$

$\int e^{\alpha t}dt = \frac{e^{\alpha t}}{\alpha}$

Como $\omega_0 T = 2\pi$ y además $e^{\pm j\theta} = \cos\theta \pm j sen\theta$

$* \ e^{jn\pi} = (-1)^n$

$* \ e^{jn2\pi} = 1$

$$c_n = \frac{1}{-jn2\pi}[(e^{-jn\pi} - 1) - (e^{-jn2\pi} - e^{-jn\pi})]$$ ✓

Forma compleja de la Serie de Fourier

De la expresión anterior

$$c_n = \frac{1}{-jn2\pi}\left[\left(e^{-jn\pi} - 1\right) - \left(e^{-jn2\pi} - e^{-jn\pi}\right)\right]$$

Entonces

$$\boldsymbol{c_n = \frac{1}{-jn2\pi}\left[\left((-1)^n - 1\right) - \left(1 - (-1)^n\right)\right]}$$

$$c_n = -j\frac{2}{n2\pi}\left[1 - (-1)^n\right]$$

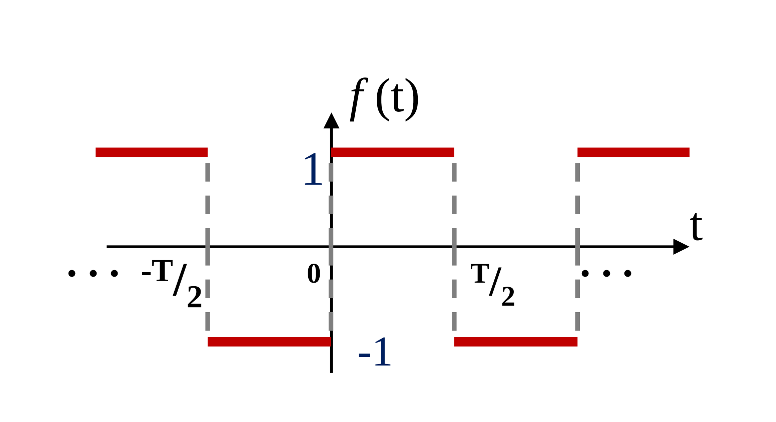
$$\boldsymbol{c_n = -j\frac{1}{n\pi}\left[1 - (-1)^n\right]} \quad , n \in \mathrm{Z} - \{0\} \quad \text{y} \quad c_0 = 0$$

ojo:

$e^{-jn\pi} = \cos(n\pi) - j\mathrm{sen}(n\pi)$

$e^{-jn\pi} = \cos(n\pi)$

$e^{-jn\pi} = (-1)^n$



La serie compleja de fourier

$$\boxed{f(t) = \sum_{\substack{n=-\infty \\ n\neq 0}}^{\infty} -j\frac{1}{n\pi}\left[1 - (-1)^n\right]e^{jn\omega_0 t}}$$

Lo cual coincide con el resultado ya obtenido en la solución anterior.

Forma compleja de la Serie de Fourier

Ejemplo 2: Halle la serie compleja de Fourier para $f(t)$, si f es una señal periódica con periodo $\mathrm{T} = 2\pi$

$$f(\mathrm{t}) = \begin{cases} 0 & , -\pi < t \leq 0 \\ t & , 0 < t < \pi \end{cases}$$

7	$\int te^{bt}dt = \dfrac{e^{bt}(bt-1)}{b^2} + C$

$$* \; C_0 = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t).e^{-jn\omega_0 t}\,dt = \frac{1}{2\pi}\left[\int_{-\pi}^{0} 0 + \int_0^{\pi} t.dt\right] = \frac{1}{2\pi}\cdot\frac{\pi^2}{2} = \frac{\pi}{4}$$

$$* \; C_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t).e^{-jn\omega_0 t}\,dt = \frac{1}{2\pi}\left[\cancel{\int_{-\pi}^{0} 0\,dt}^{\,0} + \int_0^{\pi} t.e^{-jnt}.dt\right]$$

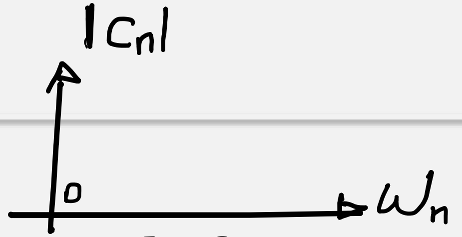
$$C_n = \frac{1}{2\pi}\left[e^{-jnt}\frac{(-jnt-1)}{(jn)^2}\right]_0^{\pi} = \frac{1}{-2\pi n^2}\left[e^{-jn\pi}(-jn\pi-1) - (-1)\right]$$

$$C_n = -\frac{1}{2\pi n^2}\left[(-1)^n(-jn\pi-1)+1\right] \Rightarrow \quad C_n = \frac{1}{2\pi n^2}\left[(-1)^n(jn\pi+1)-1\right]$$

$$f(t) = \underbrace{\frac{\pi}{4}}_{C_0} + \sum_{\substack{n\neq 0 \\ n=-\infty}}^{\infty} \frac{1}{2\pi n^2}\left[(-1)^n jn\pi + (-1)^n - 1\right]e^{jnt}$$

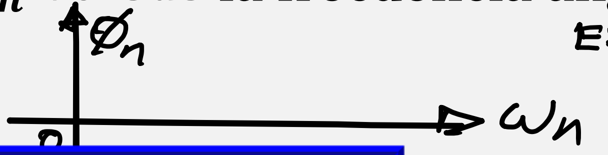
$c_n = |c_n| . e^{j\phi_n}$

Espectros de frecuencia discreta



ESPECTRO DE AMPLITU.

- A la gráfica de **la magnitud de los coeficientes c_n** versus **la frecuencia angular ω** de la componente correspondiente se le denomina **espectro de amplitud de $f(t)$.**
- A la gráfica del **ángulo de fase ϕ_n de los coeficientes c_n** versus **la frecuencia angular ω**, se le denomina **espectro de fase** de $f(t)$.



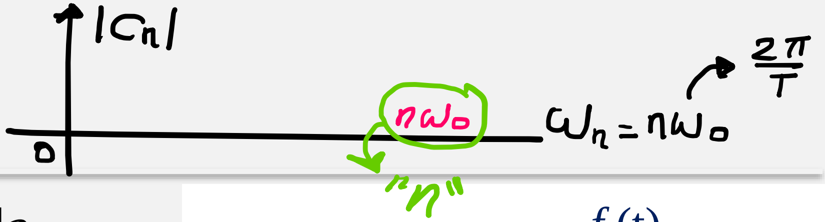
ESPECTRO DE FASE.

- Como n sólo toma valores enteros, $\boxed{\text{la frecuencia angular } \omega_n = n\omega_o}$ es una variable discreta y a los espectros mencionados le corresponde *gráficas discretas*.

$\omega_o = \frac{2\pi}{T}$

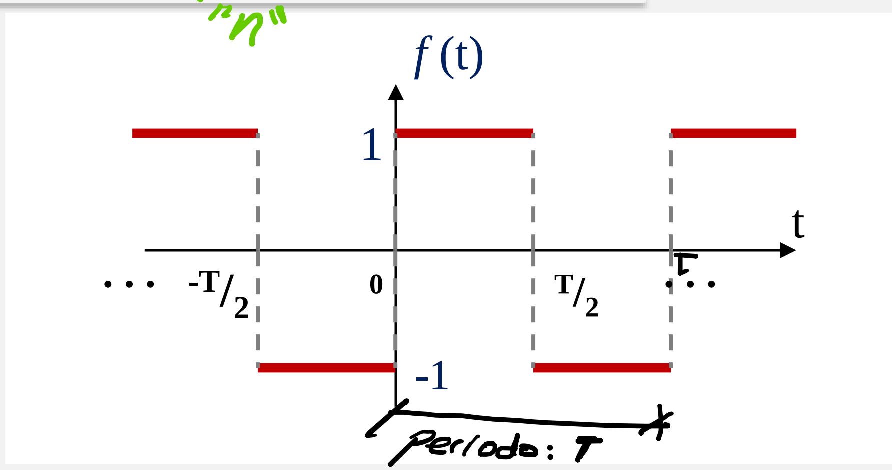
- La representación de los coeficientes c_n versus la variable discreta $n\omega_o$ representa a la función $f(t)$ en el **dominio de la frecuencia** de la misma manera que $f(t)$ versus t representa a la función en el **dominio del tiempo**.

Espectros de frecuencia discreta



Ejemplo. Graficar **el espectro de amplitud** para la función $f(t)$

$\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$



Del prob. 1

Solución. De un ejemplo anterior $\overbrace{c_n = -j\frac{1}{n\pi}[1-(-1)^n]}^{\text{Del prob. 1}}$

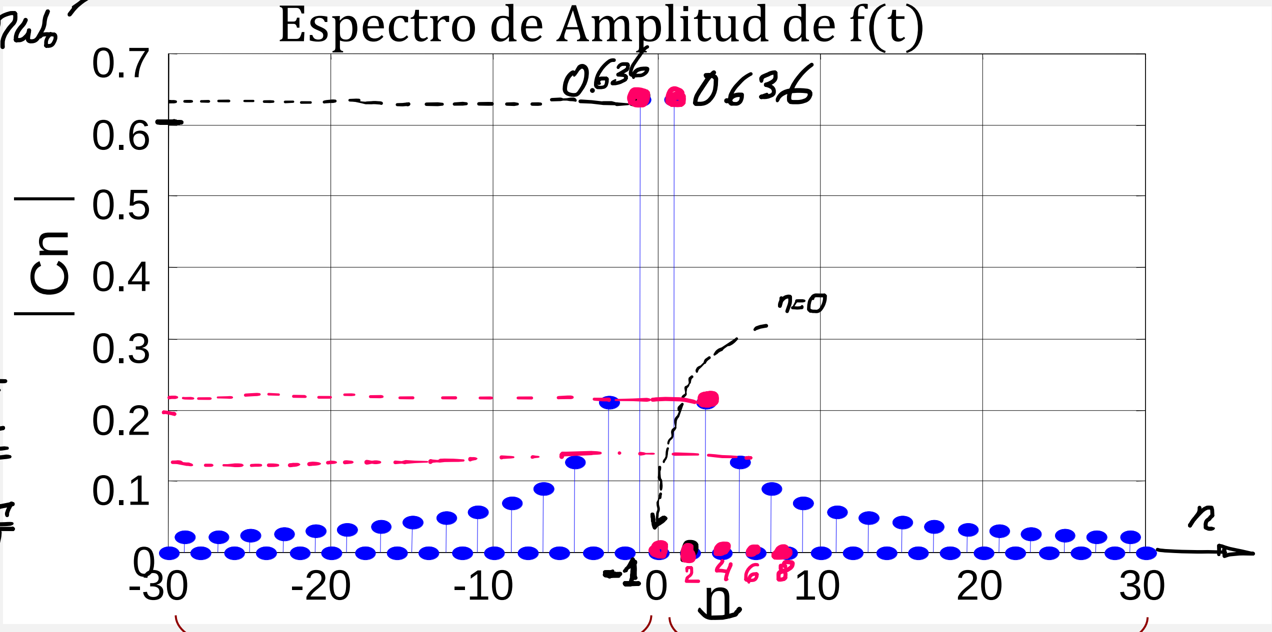
Su módulo:

$$|c_n| = \frac{1}{|n|\pi}[1-(-1)^n]$$

n	$\lvert C_n \rvert$	$\omega_n = n\omega_0$
-1	$2/\pi = 0{,}636$	$-\frac{2\pi}{T}$
0	0	0
1	$2/\pi = 0{,}636$	$\frac{2\pi}{T}$
2	0	$\frac{4\pi}{T}$
3	$2/3\pi = 0{,}212$	$\frac{6\pi}{T}$
4	0	$\frac{8\pi}{T}$
5	$2/5\pi = 0{,}127$	$\frac{10\pi}{T}$

$\omega_n = \frac{2\pi n}{T}$

* En el prob, se tenía que:
$n = 0 \to C_n = C_0 = 0$

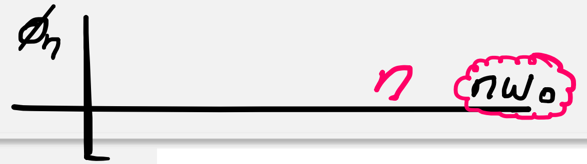


Frecuencia negativa

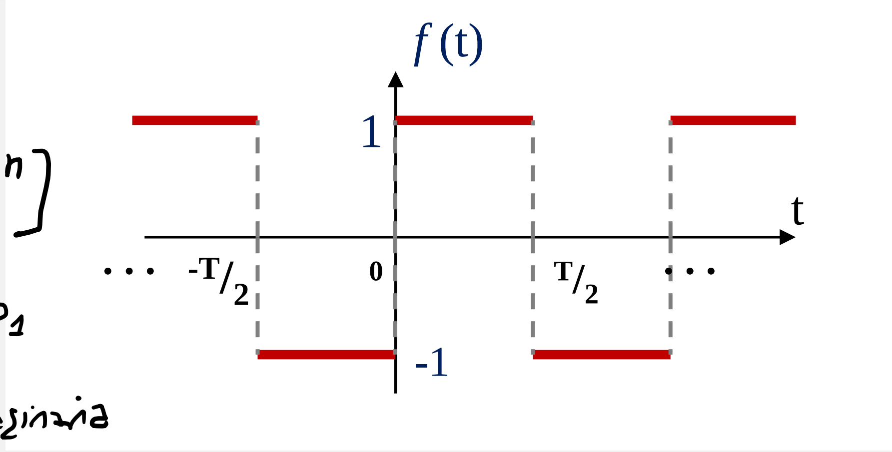
Frecuencia

Observación: El eje horizontal es un eje de frecuencia, (n=número de armónico o n=múltiplo de ω_0).

Espectros de frecuencia discreta



Ejemplo. Graficar el **espectro de fase** para la función $f(t)$.



Solución. De un ejemplo anterior: a_n $\frac{b_n}{2}$

$$c_n = \frac{a_n}{2} - j\frac{b_n}{2} = 0 - j\frac{1}{n\pi}[1-(-1)^n]$$

$* \; b_n = \frac{2}{n\pi}[1-(-1)^n]$

si $n=1 \Rightarrow \frac{4}{\pi} = b_1$

parte imaginaria

$$tan\phi_n = -\frac{b_n}{a_n} = -\frac{b_n}{0}$$

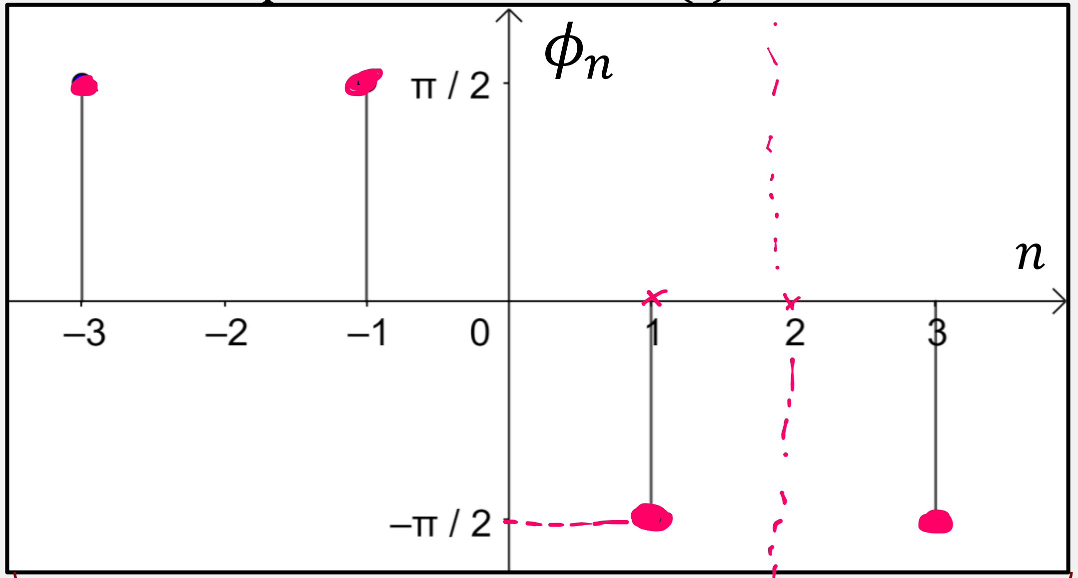
$a_n = 0$

$b_n =$

$tan\phi_n = -\frac{4/\pi}{0}$

n	ϕ_n
-3	$\pi/2$
-2	–
-1	$+\pi/2$
0	–
1	$-\pi/2$
2	–
3	$-\pi/2$

Espectro de fase de f(t)

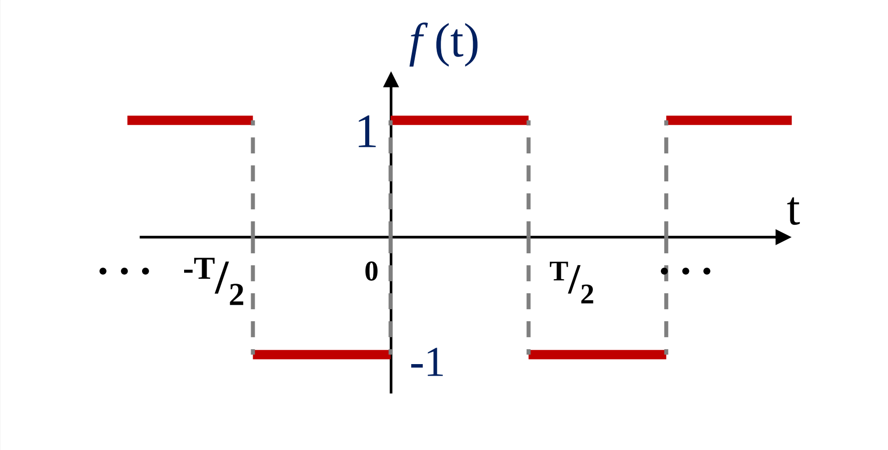


Frecuencia

Observación: El eje horizontal es un eje de frecuencia, (n=número de armónico o n=múltiplo de ω_0).

Espectros de frecuencia discreta

Ejemplo. Construir la serie a partir de el espectro de amplitud y fase para la función $f(t)$.



n	$\lvert C_n \rvert$
-1	$2/\pi = 0{,}636$
0	0
1	$2/\pi = 0{,}636$
2	0
3	$2/3\pi = 0{,}212$
4	0
5	$2/5\pi = 0{,}127$

n	ϕ_n
-3	$\pi/2$
-2	–
-1	$\pi/2$
0	–
1	$-\pi/2$
2	–
3	$-\pi/2$

$$f(t) = \frac{2}{\pi} j \left(\ldots + \frac{1}{5} e^{-j5\omega_0 t} + \frac{1}{3} e^{-j3\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t} - e^{j\omega_0 t} - \frac{1}{3} e^{j3\omega_0 t} - \frac{1}{5} e^{j5\omega_0 t} - \cdots \right)$$

Potencia y Teorema de Parseval

- **DEFINICIÓN**

El contenido de **potencia de una función periódica** $\boldsymbol{f(t)}$ **en un período** $\boldsymbol{T}$ está definido por:

potencia de función periódica :

$$\boxed{\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}[f(t)]^2 dt} = V.C.M. = (\boldsymbol{Valor\ efic}\acute{a}\boldsymbol{z})^2$$

A esta expresión, se le conoce como el valor cuadrático medio de $f(t)$.

Si la función $\boldsymbol{f(t)}$ representa una señal de voltaje o corriente, entonces el valor cuadrático medio representa la ***potencia promedio*** entregada a una carga resistiva de 1 ohm.

$$c_o = \frac{a_o}{2}$$

$$|c_n| = \frac{1}{2}\sqrt{a_n^2 + b_n^2}$$

coeficiente complejo de fourier

Potencia y Teorema de Parseval

TEOREMA DE PARSEVAL

El teorema de Parseval establece que si $\boldsymbol{f(t)}$ **es una función real y periódica con periodo T,** se cumple:

$$\left(V_{eficaz}\right)^2 = VCM = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}[f(t)]^2 dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty}|c_n|^2$$

⇒ Se usa cuando se tiene la serie compleja de Fourier.

Donde c_n **son los coeficientes complejos de la serie de Fourier** de la función periódica $f(t)$.

O bien, en términos de los **coeficientes** a_n **y** b_n **de la serie trigonométrica de Fourier**:

$$VCM = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}[f(t)]^2 dt = \frac{1}{4}a_0^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2)$$

⇒ Se usa cuando se tiene la serie real de Fourier.

$$f(t) = C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n[\cos(n\omega_0 t - \theta_n)]$$

Llamada forma trigonométrica compacta

Donde:

$$C_0 = \frac{a_0}{2}, \quad C_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}, \quad \underbrace{\theta_n = \tan^{-1}\left(\frac{b_n}{a_n}\right)}_{\tan\theta_n = \frac{b_n \to \text{coef. de seno}}{a_n \to \text{coef. de coseno}}} \to \tan\theta_n = \frac{b_n}{a_n}$$

$$\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}[f(t)]^2 dt = C_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{C_n}{\sqrt{2}}\right|^2$$

⇒ se usa cuando se tiene la forma Armónica

$$f(t) = C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos(n\omega_0 t - \theta_n)$$

$C_0 \to \left(\frac{a_0}{2}\right)$

Componente de directa.

$$C_0^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}|C_n|^2 \to |a_n|^2 + |b_n|^2$$

Lo más usado en Parseval es:

$$c_o = \frac{a_o}{2}$$
$$|c_n| = \frac{1}{2}\sqrt{a_n^2 + b_n^2}$$

❑ TEOREMA DE PARSEVAL

El teorema de Parseval establece que si $f(t)$ **es una función real y periódica con periodo T, se cumple:**

SI: $f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega_0 t}$ ⇒ $(V_{eficaz})^2 = V_{CM} = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} [f(t)]^2 dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2$

Donde c_n **son los coeficientes complejos de la serie de Fourier** de la función periódica $f(t)$.

O bien, en términos de los **coeficientes a_n y b_n de la serie trigonométrica de Fourier:**

SI: $f(t) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}[a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n sen(n\omega_0 t)]$ ⇒ $V_{CM} = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} [f(t)]^2 dt = \frac{1}{4}a_0^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2)$

Potencia y Teorema de Parseval

Consecuencia del Teorema de Parseval

El valor cuadrático medio de una función periódica $f(t)$ es igual a la suma de los valores cuadráticos medios de sus armónicos, es decir,

$$\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}[f(t)]^2 dt = C_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{C_n}{\sqrt{2}}\right|^2$$

Donde C_n es la amplitud del armónico n-ésimo y C_0 es la componente de directa . **Ambos obtenidos de forma armónica de la serie de Fourier:**

* Valor cuadrático medio $= (V_{rms})^2$

La componente de directa.

$$f(t) = C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n[\cos(n\omega_0 t - \theta_n)]$$

* Valor rms = Valor eficáz

Donde C_n es la amplitud del armónico n-ésimo y C_0 es la componente de directa.

Para C_n, su valor rms es $C_n/\sqrt{2}$, por lo tanto su valor cuadrático medio es ${C_n}^2/2$.

Para la componente de directa C_0, su valor rms es $|C_0|$, por lo tanto su valor cuadrático medio será ${C_0}^2$.

Potencia y Teorema de Parseval

Para aclarar el resultado anterior es conveniente encontrar la relación entre los **coeficientes complejos** c_n de la serie

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega_0 t}$$

Y los **coeficientes reales** C_n de la serie en su forma compacta

$$f(t) = C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \boldsymbol{C_n}[\cos(n\omega_0 t - \theta_n)]$$

$$\boldsymbol{f(t) = C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n[\cos(n\omega_0 t - \theta_n)]}$$

Llamada forma trigonométrica compacta

Donde:

$Tan\,\theta_n = \dfrac{b_n \to \text{coef. de seno}}{a_n \to \text{coef. de coseno}}$

$C_0 = \dfrac{a_0}{2}$, $C_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$, $\underbrace{\theta_n = tan^{-1}\left(\dfrac{b_n}{a_n}\right)} \rightarrow Tan\,\theta_n = \dfrac{b_n}{a_n}$

Por un lado $\boldsymbol{C_n} = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$,

Mientras que $|c_n| = \frac{1}{2}\sqrt{a_n^2 + b_n^2}$

$$|c_n| = \frac{1}{2}\boldsymbol{C_n} \;\Rightarrow\; |c_n|^2 = \frac{\boldsymbol{C_n}^2}{4} \;\Rightarrow\; \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}[f(t)]^2 dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty}|c_n|^2 = C_0^2 + 2\sum_{n=1}^{\infty}|c_n|^2 = C_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{\boldsymbol{C_n}}{\sqrt{2}}\right|^2$$

Cálculo de los coeficientes de la serie trigonométrica de Fourier

Ejemplo 1: Halle el valor cuadrático medio y el valor eficaz de:

$$f(t) = 2 + 3\text{sen}(3t) + \cos(4t)$$

$$f(t) = \underbrace{2}_{\frac{a_0}{2}} + \underbrace{3}_{b}\cdot \text{sen}\,3t + \underbrace{0}_{a}\cdot \cos 3t + \underbrace{1}_{a}\cos 4t + \underbrace{0}_{b}\cdot \text{sen}\,4t + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 \ldots$$

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos(w_0 n t) + b_n \text{sen}(w_0 n t)\right)$$

$$VCM = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} (f(t))^2 dt = (2)^2 + \frac{1}{2}\left[(0^2+3^2) + (1^2+0^2)\right] = 9$$

$$V_{eficaz} = \sqrt{9} = 3.$$

$$\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} [f(t)]^2 dt = \underbrace{\frac{1}{4}a_0^2}_{\left(\frac{a_0}{2}\right)^2} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2)$$

$$\left(\frac{a_0}{2}\right)^2$$