EL231 – Señales y Sistemas
Solucionario de la Práctica Calificada 1

César D. Salvador

25 de abril de 2024

1. Integral de Convolución

Un sistema mecánico masa-resorte-amortiguador ha sido modelado como un sistema lineal. Como primer paso, para obtener la respuesta impulsiva $h(t)$ del sistema, se aplicó en la entrada un impacto de fuerza tipo delta de Dirac $x(t) = \delta(t)$, de manera que en la salida se registró el siguiente desplazamiento de la masa:

$$y(t) = h(t) = e^{-at} u \left(t - \frac{1}{a} \right), \tag{1}$$

en donde $1 < a < \infty$ y $u(t)$ denota el escalón unitario.

Como segundo paso, se desea utilizar la $h(t)$ obtenida para calcular el desplazamiento $y(t)$ a la salida del sistema cuando en la entrada se aplica la siguiente fuerza:

$$x(t) = u(t - a). \tag{2}$$

Resolver los siguientes ítems.

a) Utilizando la integral de convolución, hallar $y(t)$ del segundo paso. [4 puntos].

b) Graficar $y(t)$. [1 punto].

Solución

a) Conviene utilizar $y(t) = x(t) * h(t)$ pues es más sencillo desplazar $x(t)$, es decir:

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t-\tau)h(\tau)d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} u(t-\tau-a)e^{-a\tau}u\left(\tau-\frac{1}{a}\right)d\tau \\ &= \int_{\frac{1}{a}}^{t-a} e^{-a\tau}d\tau \\ &= -\frac{1}{a}e^{-a\tau}\Big|_{\frac{1}{a}}^{t-a} \\ &= \frac{1}{a}\left(e^{-1}-e^{-a(t-a)}\right)u(t-a). \end{aligned} \tag{3}$$

b) La figura 1 muestra la gráfica de $y(t)$ en (3) cuando $a = 2, 3, 4$.

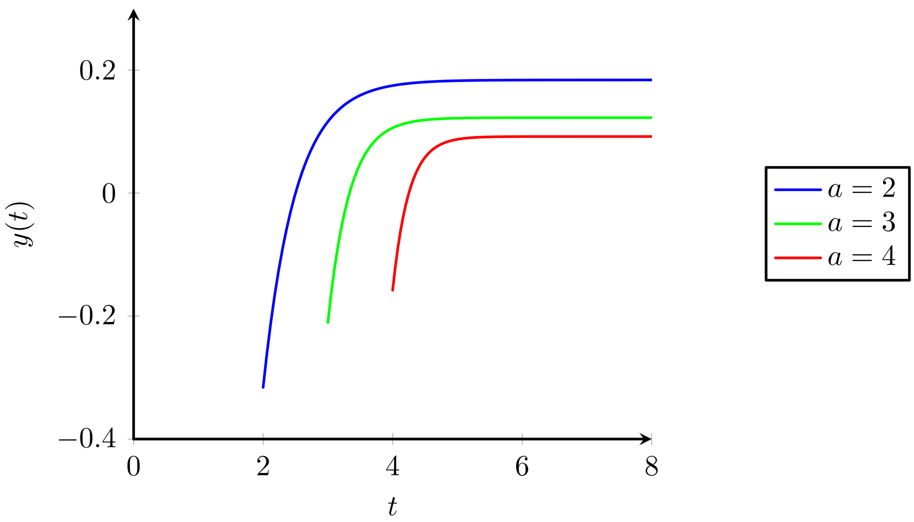

Figura 1: Gráfica de la convolución $y(t)$.

2. Sistemas Realimentados

2.1. EL61

La señal de entrada $x_1(t)$ y la señal de salida $y(t)$ de un sistema amplificador de audio están relacionadas según la siguiente expresión:

$$y(t) = ax_1(t), t \geq 0, \tag{4}$$

en donde $0 < a < \infty$ representa la ganancia.

La señal de entrada $y(t)$ y la señal de salida $x_2(t)$ de un sistema retardador de audio están relacionadas según la siguiente expresión:

$$x_2(t) = y(t-t_0), t \geq t_0, \tag{5}$$

en donde $0 < t_0 < \infty$ representa el retardo en segundos.

Los sistemas anteriormente definidos se unen mediante una conexión de realimentación de tal manera que el amplificador está en la etapa directa y el retardador está en la etapa realimentada. La entrada al sistema realimentado es $x(t)$ y la salida es $y(t)$. La conexión de realimentación es tal que

$$x(t) = x_1(t) - x_2(t). \tag{6}$$

Resolver los siguientes ítems en términos de a y t_0, según corresponda.

a) Sean $h_1(t)$ y $h_2(t)$ las respuestas impulsivas de los sistemas de amplificación y retardo, respectivamente. Formular $h_1(t)$ y $h_2(t)$ por separado. [2 puntos].

b) Graficar el diagrama de bloques del sistema realimentado. [1 punto].

c) Formular la respuesta impulsiva $h(t)$ del sistema realimentado. [2 puntos].

Solución

a) La respuesta impulsiva de cada sistema se obtiene en la salida cuando en la entrada se aplica un impulso delta de Dirac. La respuesta impulsiva $h_1(t)$ del amplificador se obtiene de (4) de la siguiente manera:

$$x_1(t) = \delta(t) \implies y(t) = h_1(t) = a\delta(t). \tag{7}$$

La respuesta impulsiva $h_2(t)$ del retardador se obtiene de (5) de la siguiente manera:

$$y(t) = \delta(t) \implies x_2(t) = h_2(t) = \delta(t - t_0). \tag{8}$$

b) La figura 2 muestra el diagrama de bloques del sistema realimentado.

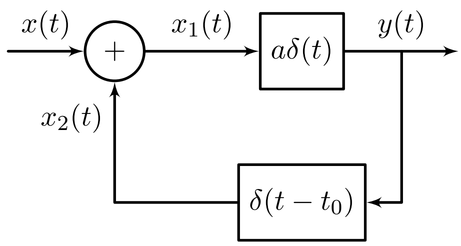

Figura 2: Diagrama de bloques del sistema realimentado.

c) Las ecuaciones que describen al sistema realimentado son las siguientes:

$$\begin{aligned} y(t) &= a\delta(t) * x_1(t), \\ x_1(t) &= x(t) + x_2(t), \\ x_2(t) &= \delta(t - t_0) * y(t). \end{aligned} \tag{9}$$

Combinando las ecuaciones en (9) obtenemos:

$$\begin{aligned} y(t) &= a\delta(t) * [x(t) + \delta(t - t_0) * y(t)], \\ y(t) &= a\delta(t) * x(t) + a\delta(t) * \delta(t - t_0) * y(t). \end{aligned} \tag{10}$$

Como $\delta(t)$ es la identidad del operador de convolución, podemos escribir:

$$\begin{aligned}\delta(t) * y(t) &= ax(t) + a\delta(t-t_0) * y(t),\\ [\delta(t) - a\delta(t-t_0)] * y(t) &= ax(t).\end{aligned} \tag{11}$$

Invirtiendo $[\delta(t)-a\delta(t-t_0)]$ según el operador inverso de la convolución, obtenemos:

$$y(t) = [\delta(t) - a\delta(t-t_0)]^{-1} * ax(t), \tag{12}$$

en donde reconocemos finalmente la respuesta impulsiva del sistema realimentado:

$$h(t) = a[\delta(t) - a\delta(t-t_0)]^{-1}. \tag{13}$$

2.2. EL63

La señal de entrada $x_1(t)$ y la señal de salida $y(t)$ de un sistema retardador de audio están relacionadas según la siguiente expresión:

$$y(t) = x_1(t-t_0), t \geq t_0, \tag{14}$$

en donde $0 < t_0 < \infty$ representa el retardo en segundos.

La señal de entrada $y(t)$ y la señal de salida $x_2(t)$ de un sistema amplificador de audio están relacionadas según la siguiente expresión:

$$x_2(t) = ay(t), t \geq 0, \tag{15}$$

en donde $0 < a < \infty$ representa la ganancia.

Los sistemas anteriormente definidos se unen mediante una conexión de realimentación de tal manera que el retardador está en la etapa directa y el amplificador está en la etapa realimentada. La entrada al sistema realimentado es $x(t)$ y la salida es $y(t)$. La conexión de realimentación es tal que

$$x(t) = x_1(t) - x_2(t). \tag{16}$$

Resolver los siguientes ítems en términos de a y t_0, según corresponda.

a) Sean $h_1(t)$ y $h_2(t)$ las respuestas impulsivas del retardador y el amplificacor, respectivamente. Formular $h_1(t)$ y $h_2(t)$ por separado. [2 puntos].

b) Graficar el diagrama de bloques del sistema realimentado. [1 punto].

c) Formular la respuesta impulsiva $h(t)$ del sistema realimentado. [2 puntos].

Solución

a) La respuesta impulsiva de cada sistema se obtiene en la salida cuando en la entrada se aplica un impulso delta de Dirac. La respuesta impulsiva $h_1(t)$ del retardador se obtiene de (14) de la siguiente manera:

$$x_1(t) = \delta(t) \implies y(t) = h_1(t) = \delta(t-t_0). \tag{17}$$

La respuesta impulsiva $h_2(t)$ del amplificador se obtiene de (15) de la siguiente manera:

$$y(t) = \delta(t) \implies x_2(t) = h_2(t) = a\delta(t). \tag{18}$$

b) La figura 3 muestra el diagrama de bloques del sistema realimentado.

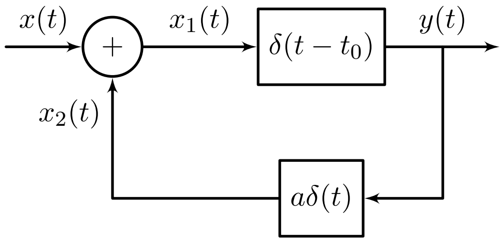

Figura 3: Diagrama de bloques del sistema realimentado.

c) Las ecuaciones que describen al sistema realimentado son las siguientes:

$$\begin{aligned} y(t) &= \delta(t-t_0) * x_1(t), \\ x_1(t) &= x(t) + x_2(t), \\ x_2(t) &= a\delta(t) * y(t). \end{aligned} \tag{19}$$

Combinando las ecuaciones en (19) obtenemos:

$$\begin{aligned} y(t) &= \delta(t-t_0) * [x(t) + a\delta(t) * y(t)], \\ y(t) &= \delta(t-t_0) * x(t) + \delta(t-t_0) * a\delta(t) * y(t). \end{aligned} \tag{20}$$

Como $\delta(t)$ es la identidad del operador de convolución, podemos escribir:

$$\begin{aligned} \delta(t) * y(t) &= \delta(t-t_0) * x(t) + a\delta(t-t_0) * y(t), \\ [\delta(t) - a\delta(t-t_0)] * y(t) &= \delta(t-t_0) * x(t). \end{aligned} \tag{21}$$

Invirtiendo $[\delta(t)-a\delta(t-t_0)]$ según el operador inverso de la convolución, obtenemos:

$$y(t) = [\delta(t) - a\delta(t-t_0)]^{-1} * \delta(t-t_0) * x(t), \tag{22}$$

en donde reconocemos finalmente la respuesta impulsiva del sistema realimentado:

$$h(t) = [\delta(t) - a\delta(t-t_0)]^{-1} * \delta(t-t_0). \tag{23}$$

2.3. LS6D

La señal de entrada $x_1(t)$ y la señal de salida $y(t)$ de un sistema retardador de audio están relacionadas según la siguiente expresión:

$$y(t) = x_1(t-t_1), t \geq t_1, \tag{24}$$

en donde $0 < t_1 < \infty$ representa el retardo en segundos.

La señal de entrada $y(t)$ y la señal de salida $x_2(t)$ de un sistema amplificador-retardador de audio están relacionadas según la siguiente expresión:

$$x_2(t) = -ay(t-t_2), t \geq t_2, \tag{25}$$

en donde $0 < t_2 < \infty$ representa el retardo en segundos y $0 < a < \infty$ representa la ganancia.

Los sistemas anteriormente definidos se unen mediante una conexión de realimentación de tal manera que el retardador está en la etapa directa y el amplificador-retardador está en la etapa realimentada. La entrada al sistema realimentado es $x(t)$ y la salida es $y(t)$. La conexión de realimentación es tal que

$$x(t) = x_1(t) - x_2(t). \tag{26}$$

Resolver los siguientes ítems en términos de a, t_1 y t_2, según corresponda.

a) Sean $h_1(t)$ y $h_2(t)$ las respuestas impulsivas del retardador y el amplificacor-retardador, respectivamente. Formular $h_1(t)$ y $h_2(t)$ por separado. [2 puntos].

b) Graficar el diagrama de bloques del sistema realimentado. [1 punto].

c) Formular la respuesta impulsiva $h(t)$ del sistema realimentado. [2 puntos].

Solución

a) La respuesta impulsiva de cada sistema se obtiene en la salida cuando en la entrada se aplica un impulso delta de Dirac. La respuesta impulsiva $h_1(t)$ del retardador se obtiene de (24) de la siguiente manera:

$$x_1(t) = \delta(t) \implies y(t) = h_1(t) = \delta(t - t_1). \tag{27}$$

La respuesta impulsiva $h_2(t)$ del amplificador se obtiene de (25) de la siguiente manera:

$$y(t) = \delta(t) \implies x_2(t) = h_2(t) = -a\delta(t - t_2). \tag{28}$$

b) La figura 4 muestra el diagrama de bloques del sistema realimentado.

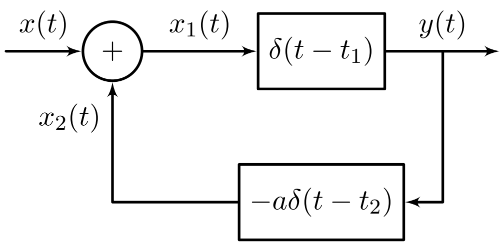

Figura 4: Diagrama de bloques del sistema realimentado.

c) Las ecuaciones que describen al sistema realimentado son las siguientes:

$$\begin{aligned} y(t) &= \delta(t - t_1) * x_1(t), \\ x_1(t) &= x(t) + x_2(t), \\ x_2(t) &= -a\delta(t - t_2) * y(t). \end{aligned} \tag{29}$$

Combinando las ecuaciones en (29) obtenemos:

$$\begin{aligned} y(t) &= \delta(t-t_1) * [x(t) - a\delta(t-t_2) * y(t)], \\ y(t) &= \delta(t-t_1) * x(t) - \delta(t-t_1) * a\delta(t-t_2) * y(t). \end{aligned} \tag{30}$$

Como $\delta(t)$ es la identidad del operador de convolución y además la convolución con $\delta(t-t_1)$ equivale a un retardo de t_1, podemos escribir:

$$\begin{aligned} \delta(t) * y(t) &= \delta(t-t_1) * x(t) - a\delta(t-t_1-t_2) * y(t), \\ [\delta(t) + a\delta(t-t_1-t_2)] * y(t) &= \delta(t-t_1) * x(t). \end{aligned} \tag{31}$$

Invirtiendo $[\delta(t) + a\delta(t-t_1-t_2)]$ según el operador inverso de la convolución, obtenemos:

$$y(t) = [\delta(t) + a\delta(t-t_1-t_2)]^{-1} * \delta(t-t_1) * x(t), \tag{32}$$

en donde reconocemos finalmente la respuesta impulsiva del sistema realimentado:

$$h(t) = [\delta(t) + a\delta(t-t_1-t_2)]^{-1} * \delta(t-t_1). \tag{33}$$

3. Ecuaciones Diferenciales

3.1. EL61

Se desea modelar el circuito RL en serie de la figura 5 mediante un sistema lineal. En el dominio del tiempo t, la señal de entrada $x(t)$ es el voltaje de la fuente y la señal de salida $y(t)$ es la corriente del circuito.

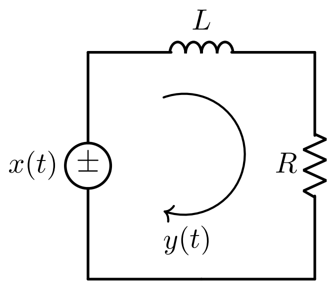

Figura 5: Circuito RL

Resolver los siguientes ítems detallando cada paso del procedimiento y formular los resultados en términos de R y L.

a) Formular la ecuación diferencial del sistema. [2 puntos].

b) Graficar el diagrama de bloques de la ecuación diferencial. [1 punto].

c) Sea la condición inicial $y(t_0) = y_0$. Calcular la respuesta natural del sistema, es decir, la solución a la ecuación diferencial cuando $x(t) = 0$. Utilizar el método de diferenciales e integrales en el dominio del tiempo. [2 puntos].

Solución

a) Aplicando la ley del voltaje de Kirchhoff en el circuito tenemos:

$$x(t) = L\frac{d}{dt}y(t) + Ry(t). \tag{34}$$

Organizando los términos en (34) obtenemos la siguiente ecuación diferencial del circuito en la forma estándar de los sistemas lineales:

$$y(t) = \frac{1}{R}x(t) - \frac{L}{R}\frac{d}{dt}y(t). \tag{35}$$

b) La figura 6 muestra el diagrama de bloques de la ecuación diferencial (35).

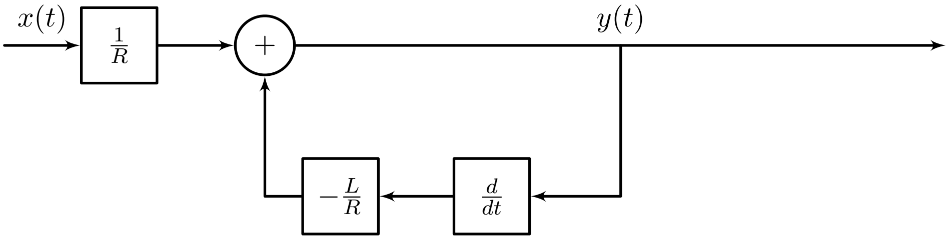

Figura 6: Diagrama de bloques de la ecuación diferencial (35).

c) Cuando $x(t) = 0$ en (35) obtenemos la siguiente ecuación diferencial homogenea:

$$y(t) = -\frac{L}{R}\frac{dy(t)}{dt}. \tag{36}$$

Utilizando diferenciales, (36) se expresa equivalentemente de la siguiente manera:

$$\frac{dy(t)}{y(t)} = -\frac{R}{L}dt. \tag{37}$$

Integrando (37) según las condiciones iniciales dadas obtenemos:

$$\int_{y_0}^{y(t)} \frac{dy(\tau)}{y(\tau)} = -\frac{R}{L}\int_{t_0}^{t} d\tau, \tag{38}$$

de donde obtenemos finalmente la solución homogenea:

$$y(t) = y_0 e^{-\frac{R}{L}(t-t_0)}u(t-t_0). \tag{39}$$

3.2. EL63

Se desea modelar el circuito RL en serie de la figura 7 mediante un sistema lineal. En el dominio del tiempo t, la señal de entrada $x(t)$ es el voltaje de la fuente y la señal de salida $y(t)$ es el voltaje de la resistencia.

Resolver los siguientes ítems detallando cada paso del procedimiento y formular los resultados en términos de R y L.

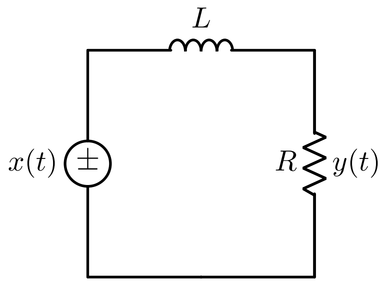

Figura 7: Circuito RL

a) Formular la ecuación diferencial del sistema. [2 puntos].

b) Graficar el diagrama de bloques de la ecuación diferencial. [1 punto].

c) Sea la condición inicial $y(t_0) = y_0$. Calcular la respuesta natural del sistema, es decir, la solución a la ecuación diferencial cuando $x(t) = 0$. Utilizar el método de diferenciales e integrales en el dominio del tiempo. [2 puntos].

Solución

a) Aplicando la ley del voltaje de Kirchhoff en el circuito tenemos:

$$x(t) = L\frac{d}{dt}\left(\frac{y(t)}{R}\right) + y(t). \tag{40}$$

Organizando los términos en (40) obtenemos la siguiente ecuación diferencial del circuito en la forma estándar de los sistemas lineales:

$$y(t) = x(t) - \frac{L}{R}\frac{d}{dt}y(t). \tag{41}$$

b) La figura 6 muestra el diagrama de bloques de la ecuación diferencial (41).

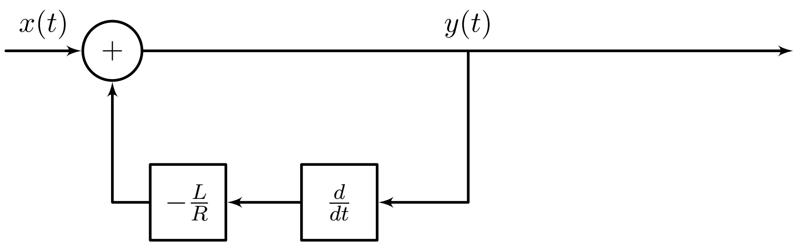

Figura 8: Diagrama de bloques de la ecuación diferencial (41).

c) Cuando $x(t) = 0$ en (41) obtenemos la siguiente ecuación diferencial homogenea:

$$y(t) = -\frac{L}{R}\frac{dy(t)}{dt}. \tag{42}$$

Utilizando diferenciales, (42) se expresa equivalentemente de la siguiente manera:

$$\frac{dy(t)}{y(t)} = -\frac{R}{L}dt. \tag{43}$$

Integrando (43) según las condiciones iniciales dadas obtenemos:

$$\int_{y_0}^{y(t)} \frac{dy(\tau)}{y(\tau)} = -\frac{R}{L}\int_{t_0}^{t} d\tau, \tag{44}$$

de donde obtenemos finalmente la solución homogenea:

$$y(t) = y_0 e^{-\frac{R}{L}(t-t_0)} u(t-t_0). \tag{45}$$

3.3. LS6D

Se desea modelar el circuito RL en serie de la figura 9 mediante un sistema lineal. En el dominio del tiempo t, la señal de entrada $x(t)$ es el voltaje de la fuente y la señal de salida $y(t)$ es el voltaje de la bobina.

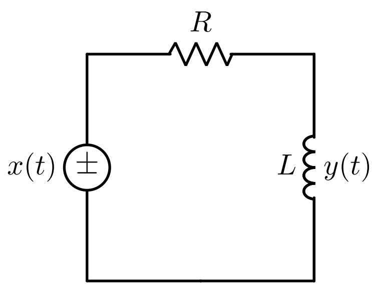

Figura 9: Circuito RL

Resolver los siguientes ítems detallando cada paso del procedimiento y formular los resultados en términos de R y L.

a) Formular la ecuación diferencial del sistema. [2 puntos].

b) Graficar el diagrama de bloques de la ecuación diferencial. [1 punto].

c) Sea la condición inicial $y(t_0) = y_0$. Calcular la respuesta natural del sistema, es decir, la solución a la ecuación diferencial cuando $x(t) = 0$. Utilizar el método de diferenciales e integrales en el dominio del tiempo. [2 puntos].

Solución

a) Como la corriente en la resistencia y en la bobina es la misma, entonces la relación voltage-corriente en la bobina se expresa de la siguiente manera:

$$y(t) = L\frac{d}{dt}\left(\frac{x(t)-y(t)}{R}\right). \tag{46}$$

Organizando los términos en (46) obtenemos la siguiente ecuación diferencial del circuito en la forma estándar de los sistemas lineales:

$$y(t) = \frac{L}{R}\frac{d}{dt}x(t) - \frac{L}{R}\frac{d}{dt}y(t). \tag{47}$$

b) La figura 10 muestra el diagrama de bloques de la ecuación diferencial (47).

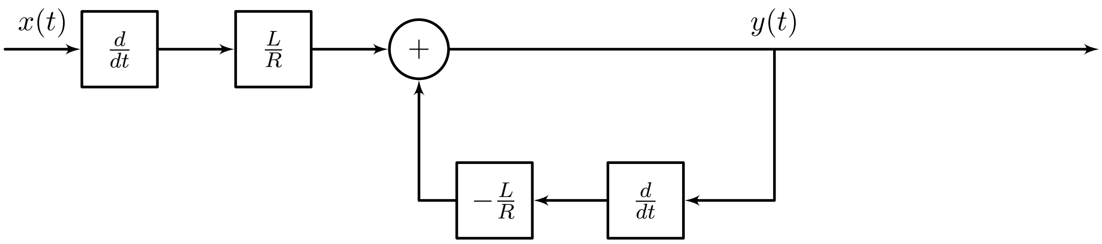

Figura 10: Diagrama de bloques de la ecuación diferencial (47).

c) Cuando $x(t) = 0$ en (47), entonces $\frac{d}{dt}x(t) = 0$, por tanto obtenemos la siguiente ecuación diferencial homogenea:

$$y(t) = -\frac{L}{R}\frac{dy(t)}{dt}. \tag{48}$$

Utilizando diferenciales, (48) se expresa equivalentemente de la siguiente manera:

$$\frac{dy(t)}{y(t)} = -\frac{R}{L}dt. \tag{49}$$

Integrando (49) según las condiciones iniciales dadas obtenemos:

$$\int_{y_0}^{y(t)} \frac{dy(\tau)}{y(\tau)} = -\frac{R}{L}\int_{t_0}^{t} d\tau, \tag{50}$$

de donde obtenemos finalmente la solución homogenea:

$$y(t) = y_0 e^{-\frac{R}{L}(t-t_0)}u(t-t_0). \tag{51}$$