# ¿Qué es un logaritmo?

**Definición:** Un logaritmo es el exponente al que está elevado un número positivo $b$ llamado base, donde $0 < b \neq 1$.

$$b^x = 3$$

$x = \log_b(3)$

$b^x = 3$

**Ejemplo:**

- $30 = 7^x$ : significa que $x$ es el logaritmo en base 7 de 30, sin embargo, en este caso necesitamos usar una calculadora para poder saber el valor de $x$.

$$30 = 7^x \Leftrightarrow x = \log_7(30) = \underline{\quad 1{,}75 \quad}$$

**Conclusión:**

$$\boldsymbol{y = \log_b(x) \Leftrightarrow x = b^y}$$

Donde:

- $b$: se llama base y es $0 < b \neq 1$
- $x$: es un número real positivo, es decir $x > 0$

# Leyes de los logaritmos

- ✓ Si $b = 10$, denotaremos el logaritmo de la siguiente manera: $y = \log(x)$
- ✓ Si $b = e$, denotaremos el logaritmo como: $y = \ln(x)$ y lo llamaremos **logaritmo natural**.
- ✓ $\log_b(1) = 0$ Por ejemplo: $\log_3(1) = \log(1) = \ln(1) = 0$
- ✓ $\log_b(b) = 1$ Por ejemplo: $\log_5(5) = \log(10) = \ln(e) = 1$
- ✓ $\log_b(b^x) = b^{\log_b(x)} = x$

Para las siguientes propiedades consideremos $A, B, c$ números reales con $A > 0$ y $B > 0$

- ✓ **Regla del producto**: $\log_b(A \cdot B) = \log_b(A) + \log_b(B)$
- ✓ **Regla del cociente**: $\log_b(\frac{A}{B}) = \log_b(A) - \log_b(B)$
- ✓ **Regla de la potencia:** $\log_b(A^c) = c \cdot \log_b(A)$

Una ecuación logarítmica es aquella en la cual la variable está en el argumento del logaritmo (este argumento debe ser siempre positivo). Por ejemplo

$$\log_3(x - 2) + 5 = 6$$

1. Determine el conjunto de valores admisibles y el conjunto solución de las siguientes ecuaciones:

a. $3^{2x-1} - 2^{x} = 0$

① C.V.A $= \mathbb{R}$

② $\log_3 \left(3^{2x-1} = 2^{x}\right)$

aplicamos logaritmo

$$\log_{(3)}\left(3^{2x-1}\right) = \log_3\left(2^{x}\right)$$

$$2x - 1 = x . \log_3(2)$$

$$2x - \log_3(2) . x = 1$$

$$[2 - \log_3(2)] . x = 1$$

$$x = \frac{1}{[2-\log_3(2)]}$$

$$C.S = \left\{\frac{1}{[2-\log_3(2)]}\right\}$$

$x = 0{,}73$

b. $3^{x} + 6(3^{-x}) = 5$

$$3^{-x} = \frac{1}{3^{x}}$$

① C.V.A $= \mathbb{R}$

② $3^{x} + \frac{6}{3^{x}} = 5 \Rightarrow 3^{x} . 3^{x} + 3^{x} \frac{6}{3^{x}} = 5 . 3^{x}$

$$3^{2x} + 6 = 5 . 3^{x}$$

$$3^{2x} - 5 . 3^{x} + 6 = 0$$

artificio $\rightarrow 3^{x} = a$ // nota $3^{2x} = (3^{x})^{2}$

$\rightarrow$ de (x)

$$a^2 - 5a + 6 = 0$$

$$\begin{array}{lll} a & -2 & = -2a \\ a & -3 & = -3a \\ & & \overline{-5a} \end{array}$$

$\rightarrow (a-2)(a-3) = 0$

$a = 3 \lor a = 2$

$3^{x} = 3 \lor 3^{x} = 2$

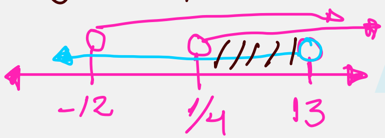
$x = 1 \lor x = \log_3(2)$

$$C.S = \{1; \log_3(2)\}$$

1. Determine el conjunto de valores admisibles y el conjunto solución de las siguientes ecuaciones:

c. $\log_5(4x-1) - \log_5(-x+13) = -\log_5(12+x)$

① C.V.A $\rightarrow$ $4X - 1 > 0 \quad \wedge \quad -X + 13 > 0 \quad \wedge \quad 12 + X > 0$




$X > 1/4 \quad \wedge \quad 13 > X \quad \wedge \quad X > -12$

C.V.A $= \,]1/4\,;\,13[$

$\log_5(4X-1) + \log_5(12+X) = \log_5(-X+13)$

$\log_5[(4X-1).(12+X)] = \log_5[(-X+13)]$

$(4X-1)(12+X) = (-X+13)$

$48X + 4X^2 - 12 - X = -X + 13$

$4X^2 + 48X - 25 = 0$

$X = 1/2 \quad \vee \quad X = -\frac{25}{2} \notin$ C.V.A

$\therefore$ C.S $= \{1/2\}$

# Motivación

Las funciones exponenciales y logarítmicas tienen aplicaciones en todos los campos del quehacer humano. Son particularmente útiles en el estudio de la química, la física, la biología y la ingeniería para describir la forma en que varían las cantidades. Por ejemplo:

En SIDERPERU el proceso de laminación en caliente se inicia en el horno de precalentamiento en donde las palanquillas de acero son llevadas a una cámara que opera a cierta temperatura para la elaboración de sus productos terminados de perfiles de acero y varillas de construcción. La temperatura a la cual se enfrían las palanquillas cuando son sacadas del horno puede ser modelada por una función exponencial, para ser más específicos por la ley de enfriamiento de Newton:

$$\boldsymbol{T(t) = T_m + Ce^{kt}, \qquad t \geq 0}$$

Dónde:

$T(t)$ : Es la temperatura (en °C) del material en el tiempo $t$.

$T_m$: Es la temperatura (en °C) del medio ambiente.

$t$ : Es el tiempo transcurrido (en minutos) en el proceso de enfriamiento.

$C$ : Es la constante del proceso. (en °C)

$k$: Constante que define el ritmo de enfriamiento.

# Función exponencial

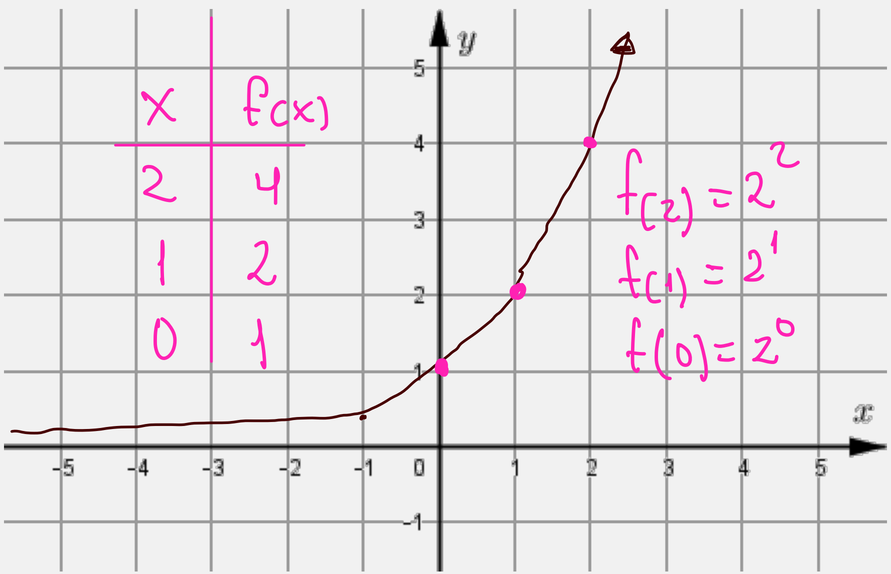
Una función exponencial $f$ es aquella cuya regla de correspondencia es de la forma:

$$f(x) = a \cdot b^x \quad ; \quad \mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R}$$

Donde $a \neq 0$, $b > 0$, $b \neq 1$, se llama función exponencial con base $b$ y valor inicial $f(0) = a$.

**Gráfica de funciones exponenciales**

**Caso I**: si $b > 1$, $f(x) = 2^x$




$2^{x-4} = 1$

$x - 4 = \log_2(1)$

$x = 4$

**Propiedades**:

Dominio: $\mathbb{R}$

Rango: $]0; +\infty[$

Ecuación de su asíntota:

$y = 0$

¿Es creciente o decreciente?

creciente de $]-\infty; +\infty[$

¿Dónde es positiva?

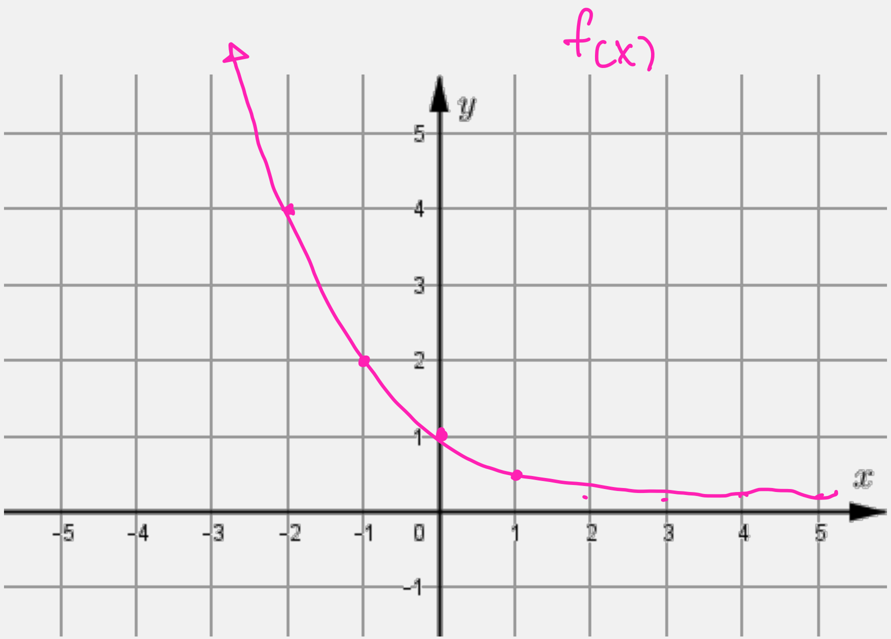
$\mathbb{R}$ o $]-\infty; +\infty[$

¿Es inyectiva?

Sí; por el C.R.H

# Gráfica de funciones exponenciales

**Caso II:** Si $0 < b < 1$, $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x = 2^{-x}$




**Propiedades**:

Dominio: $\mathbb{R}$

Rango: $]0, +\infty[$

Ecuación de su asíntota:

$y = 0$

¿Es creciente o decreciente?

decreciente $= ]-\infty; +\infty[$

¿Dónde es positiva?

$\mathbb{R}$

¿Es inyectiva?

Si; por el C.R.H

# Función exponencial natural

**Definición:** La función $f$ definida con regla de correspondencia $f(x) = e^x;\ x \in \mathrm{R}$,

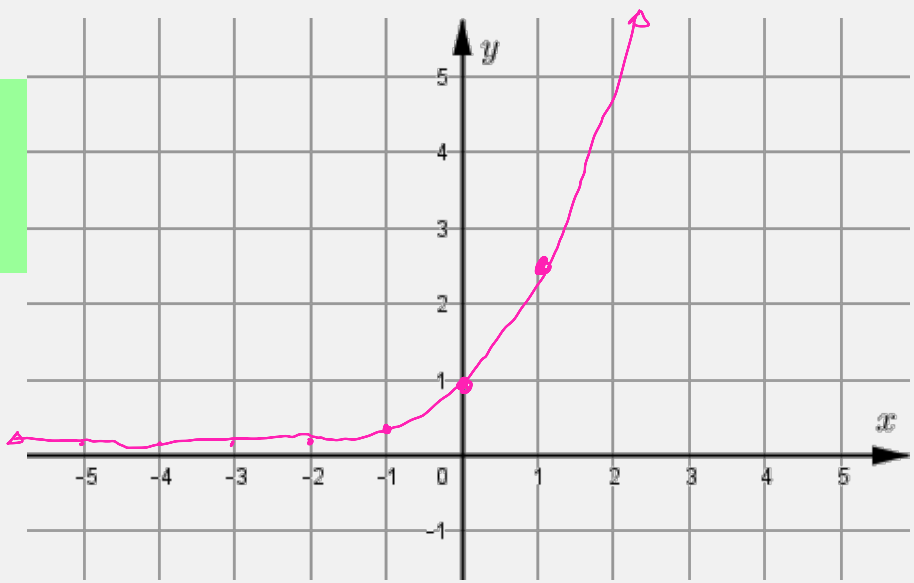
con base $e$ se llama función **exponencial natural**.

El número $e$ se define como el valor al que se aproxima $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ cuando $n$ se vuelve grande. El cálculo de esta idea se hace más preciso por el concepto de límite. Se define:

$$e = 2{,}718281828459045235 36\ldots$$

**NOTA:** Observe que este número se encuentra en todas las calculadoras y lo usaremos en adelante

**Gráfica de la función exponencial natural**
$f(x) = e^x$




**Propiedades**:

Dominio: $\mathbb{R}$

Rango: $]0, +\infty[$

Ecuación de su asíntota:

$y = 0$

¿Es creciente o decreciente?

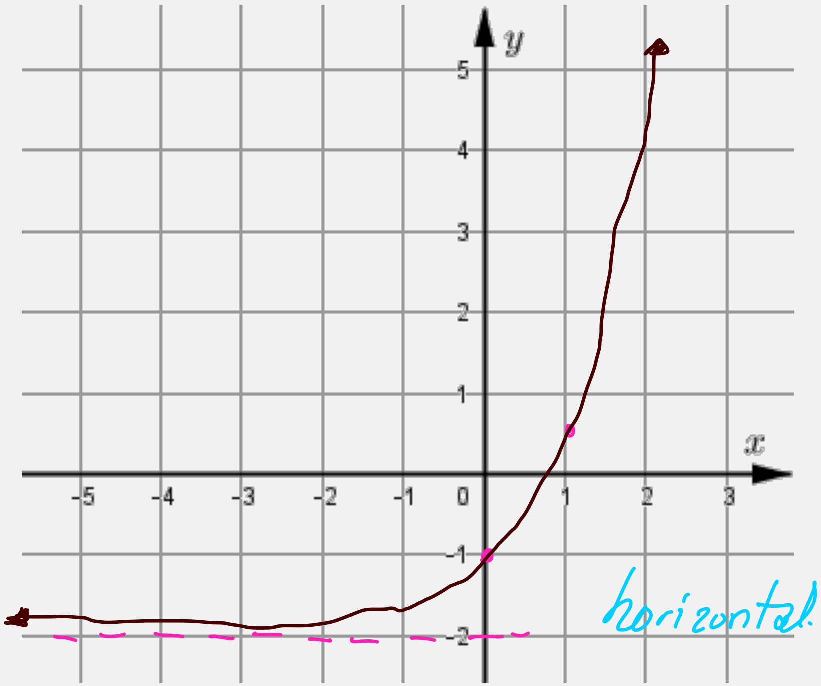
sí es creciente

¿Es inyectiva?

Sí, por el C.R.H

2. Trace la gráfica de las siguientes funciones exponenciales calculando e indicando los puntos de corte con los ejes coordenados. Además, escriba la ecuación de la asíntota, indicando si es vertical u horizontal.

a. $f(x) = e^x - 2$




tabolación

| x | f(x) |
|---|---|
| 0 | -1 |
| 1 | 0,718 |

asíntota

$y = e^x - 2$

$y = -2$

Corte con el eje X (y=0)

$0 = e^x - 2$

$2 = e^x$

$\log_2(2) = x$

$\ln(2) = x \rightarrow 0,693$

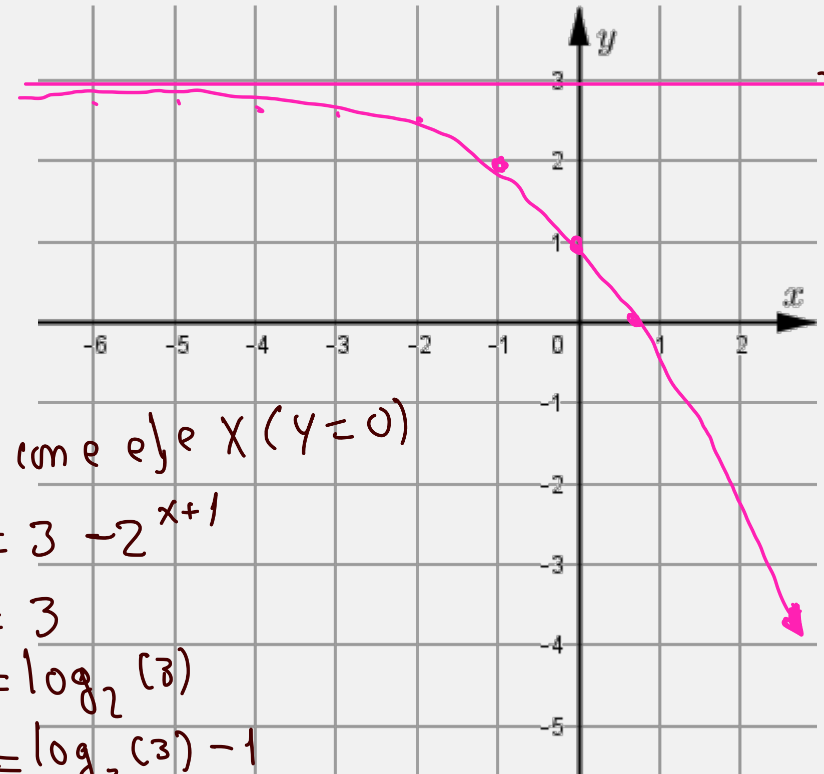
Corte con el eje Ye (x=0)

$y = f(0) = -1$

$\rightarrow B(0; -1$

2. Trace la gráfica de las siguientes funciones exponenciales calculando e indicando los puntos de corte con los ejes coordenados. Además, escriba la ecuación de la asíntota, indicando si es vertical u horizontal.

b. $h(x) = 3 - 2^{x+1}$




tabulacion

| $x$ | $h(x)$ |
|---|---|
| $-1$ | $2$ |
| $0$ | $1$ |

asintota

$y = 3 - 2^{x+1}$

$y = 3$

* Corte con el eje y ($x=0$)

$y = f(x) \rightarrow y = f(0)$

$y = 1$

$B(0; 1)$

* Corte con eje X ($y=0$)

$0 = 3 - 2^{x+1}$

$2^{x+1} = 3$

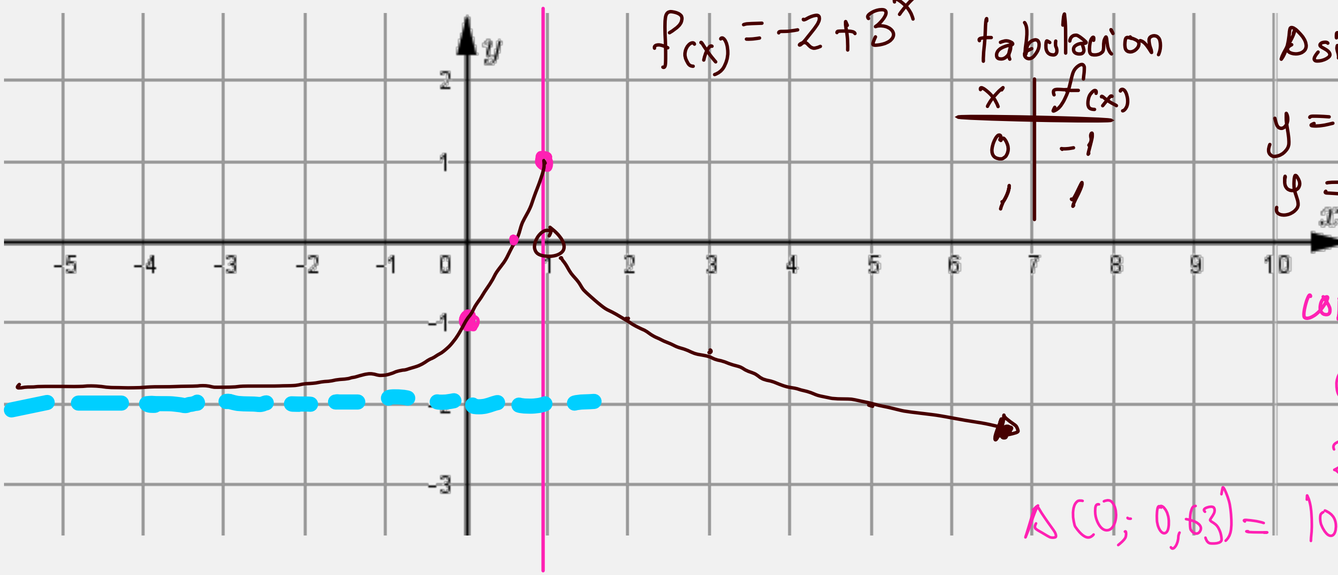
$x + 1 = \log_2(3)$

$x = \log_2(3) - 1$

$x = 0{,}584 \rightarrow A(0{,}584; 0)$

3. Dada la función $f$ con regla de correspondencia $f(x) = \begin{cases} -2+3^x \ ; \ x \leq 1 \\ -\sqrt{x-1} \ ; \ 1 < x \end{cases}$. Trace su gráfica y determine analíticamente los puntos de corte con los ejes coordenados e indíquelos como pares ordenados en su gráfica. Además, escriba la ecuación de la asíntota, indicando si esta es vertical u horizontal.

**Nota:** La gráfica se considera correcta, si pasa por lo menos por tres puntos de referencia.



$f(x) = -2+3^x$

tabulacion

| $x$ | $f(x)$ |
|---|---|
| 0 | -1 |
| 1 | 1 |

Asintota

$y = -2+3^x$

$y = -2$

corte con el eje X ($y=0$)

$0 = -2+3^x$

$2 = 3^x$

$\Delta(0; 0,63) = \log_3(2) = x = 0,63$

Corte con el eje Y ($x=0$)

$y=-1$

1.Determine el conjunto de valores admisibles (CVA) y conjunto de solución (CS) de las siguientes ecuaciones:

a. $4^{x+2} - 7^{x-1} = 0$

b. $e^{2x} + 4e^{x} - 21 = 0$

c. $6^{x} - 6^{1-x} = 1$

d. $e^{2x} - 2e^{x} - 15 = 0$

2. Determine el conjunto de valores admisibles (CVA) y conjunto solución (CS) de las siguientes ecuaciones.

a. $\log_3 2x - 2\log_3 x = 15$

b. $\log_9(x-5) + \log_9(x+3) = 1$

$c.$ $\ln(x+1) - \ln(x) + \ln 2 = \ln(x+3)$

d. $\ln(x) - \ln(6-x) = \ln(7-x)$

3. Trace la gráfica de las siguientes funciones exponenciales calculando e indicando los puntos de corte con los ejes coordenados. Además, escriba la ecuación de la asíntota, indicando si es vertical u ho izontal.

a. $f(x) = e^{x} - 4$

b. $h(x) = 4 - 2^{x}$

4. Dada la función $f$ con regla de correspondencia $f(x) = \begin{cases} e^{x+1} - 2, & \text{si } x < 0 \\ |x-3| - 1, & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$. Trace su gráfica, calcule e indique las coordenadas de los puntos de corte con los ejes. Además, escriba la ecuación de la asíntota, indicando si es vertical u horizontal.

5. Dada la función $r$ con regla de correspondencia $r(x) = \begin{cases} e^{x+1} - 3 & ; \quad x < -1 \\ -2^{x-2} + 1 & ; \quad -1 \leq x < 3 \\ (x-3)^2 - 4; & \quad x > 3 \end{cases}$. Trace su gráfica, calcule e indique las coordenadas de los puntos de corte con los ejes. Además, escriba la ecuación de la asíntota, indicando si es vertical u horizontal.

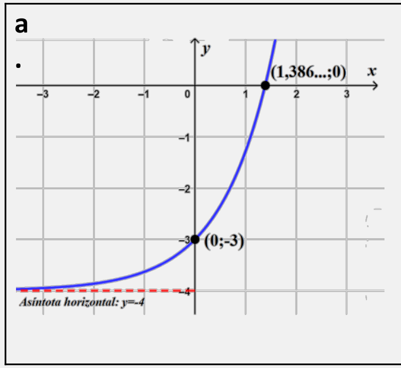
**Pregunta 1.** El conjunto de valores admisibles (CVA) en esta pregunta es todos los números reales.

a. $CS = \{8{,}43\ldots\}$ **b.** $CS = \{1{,}09\ldots\}$ **c.** $CS = \{0{,}61\ldots\}$ **d.** $CS = \{1{,}61\ldots\}$

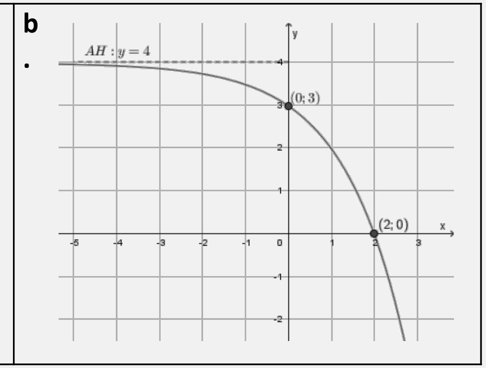
**Pregunta 2.** a. $CVA = ]0;+\infty[$ y $CS = \left\{\frac{2}{3^{15}}\right\}$ **b.** $CVA = [5;+\infty[$ y $CS = \{6\}$ **c.** $CVA = ]0;+\infty[$ y $CS = \{1\}$ **d.** $CVA = ]0;6[$ y $CS = \{4{,}35\ldots\}$

**Pregunta 3.**

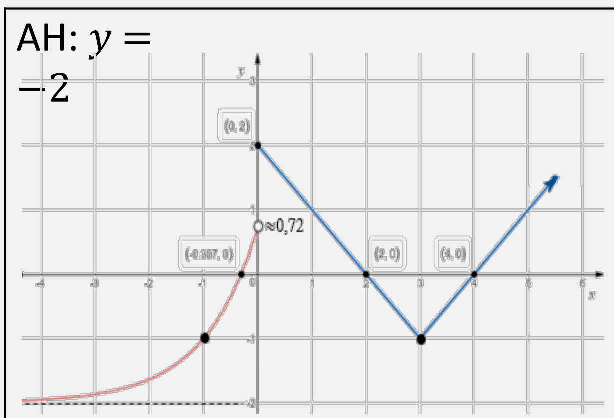
a.




b.




**Pregunta 4.**




**Pregunta 5.**