Facultad de Ingeniería

Carrera de Ingeniería Electrónica
Carrera de Telecomunicaciones y Redes
Carrera de Ingeniería Mecatrónica

CURSO

Señales y Sistemas

TEMA

Transformada de Laplace

PROFESOR

Ing. Christian del Carpio Damián

LA TRANSFORMADA DE LAPLACE

La respuesta de un sistema LTI en el tiempo con respuesta al impulso h(t) a una exponencial compleja con forma e^{-st} es:

$$y(t) = H(s)e^{st}$$

Donde

$$H(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t)e^{-st}dt$$

La transformada de Laplace de una señal general x(t) se define como:

$$X(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-st}dt$$

Se puede observar que, es una función de la variable independiente s, la cual corresponde a la variable compleja en el exponente de e^{-st}. La variable compleja s puede escribirse como $s = \sigma + j\omega$

LA TRANSFORMADA DE LAPLACE

La transformada de Laplace se denotará como

$$x(t) \xrightarrow{L} X(s)$$

La relación directa de la transformada de Laplace con la transformada de Fourier se da cuando la variable compleja s no es puramente imaginaria

$$X(\sigma + j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-(\sigma + j\omega)t} dt$$

o

$$X(\sigma + j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} [x(t) e^{-\sigma t}] e^{-j\omega t} dt$$

LA TRANSFORMADA DE LAPLACE

Ejemplo 1

Obtener la transformada de Laplace de:

$$x(t) = e^{-at}u(t), \qquad a > 0$$

Ejemplo 2

Obtener la transformada de Laplace de:

$$x(t) = -e^{-at}u(-t), \qquad a > 0$$

Cuando se especifica la transformada de Laplace de una señal, se requiere tanto de la expresión algebraica como el intervalo de valores de s, para el cual esta expresión es valida.

El intervalo de valores de s para el cual la integral de Laplace converge se conoce como la región de convergencia (**ROC**) .

LA TRANSFORMADA DE LAPLACE

Ejemplo 3

Obtener la transformada de Laplace de:

$$x(t) = 3e^{-2t}u(t) - 2e^{-t}u(t)$$

Ejemplo 4

Obtener la transformada de Laplace de:

$$x(t) = e^{-2t}u(t) + e^{-t}(\cos(3t))u(t)$$

En los ejemplos anteriores, la transformada de Laplace es racional, es decir, una relación de polinomios de la variable compleja *s* tal que:

$$X(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$$

Donde N(s) y D(s) son el polinomio del numerador y el polinomio del denominador, respectivamente.

LA TRANSFORMADA DE LAPLACE

Como sugieren los problemas 3 y 4, *X(s)* será racional siempre que *x(t)* sea una combinación lineal de exponenciales reales o complejas.

Excepto por un factor de escala, los polinomios del numerador y del denominador en una transformada racional de Laplace pueden especificarse por sus raíces, por lo tanto, marcar la localización de las raíces de N(s) y D(s) en el plano *s* indicando la ROC proporciona una forma gráfica conveniente para describir la transformada de Laplace.

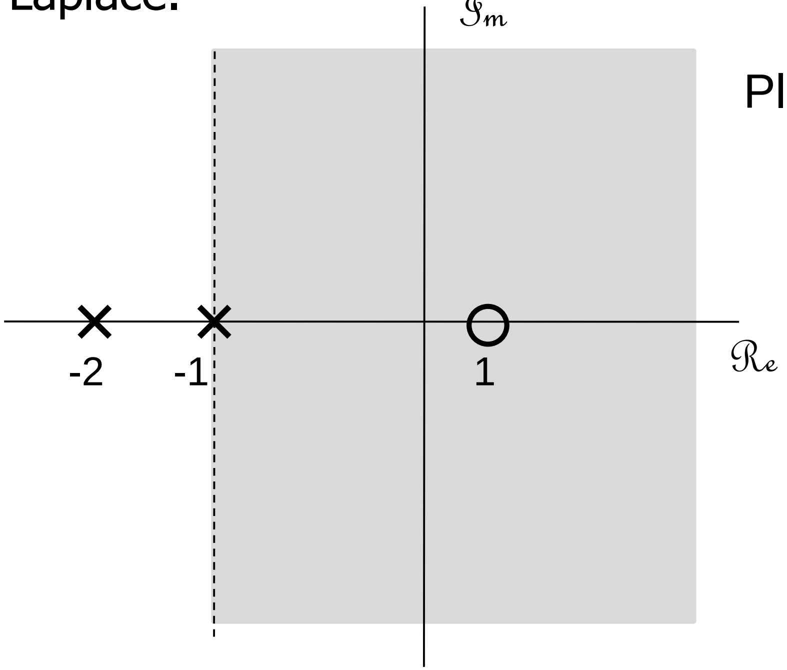


Diagrama de polos y ceros y ROC del ejemplo 3

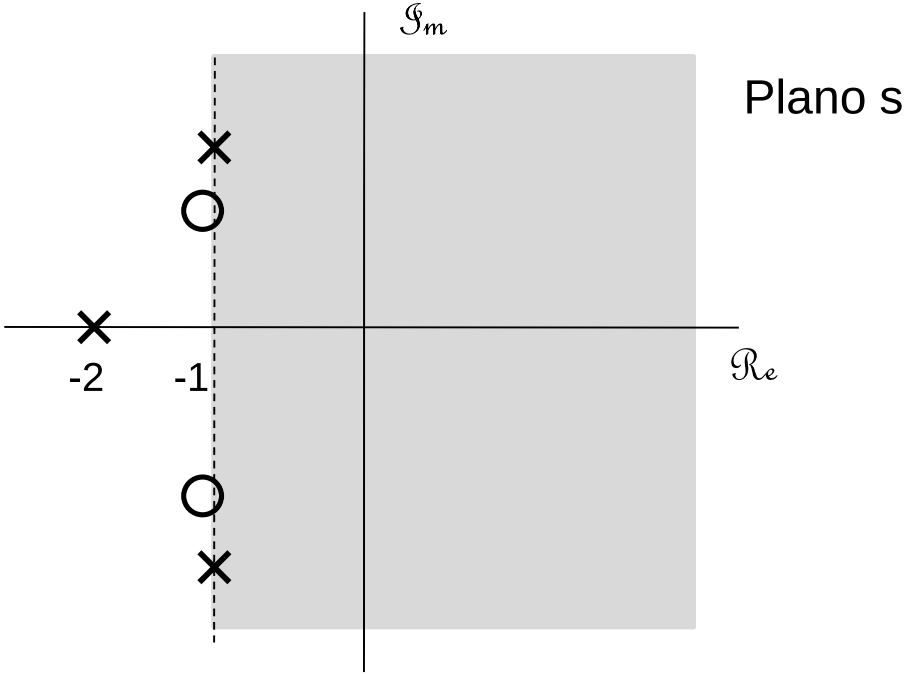


Diagrama de polos y ceros y ROC del ejemplo 4

LA TRANSFORMADA DE LAPLACE

Para la transformada racional de Laplace, las raíces del polinomio del denominador son comúnmente llamados polos de *X(s).* Las raíces del polinomio del numerador se conocen como los ceros de *X(s)* .

La representación de *X(s)* mediante sus polos y ceros en el plano *s* se conoce como el diagrama de polos y ceros.

<u>Ejemplo 5</u>

Obtener la transformada de Laplace de:

$$x(t) = \delta(t) - \frac{4}{3}e^{-t}u(t) + \frac{1}{3}e^{2t}u(t)$$

LA TRANSFORMADA DE LAPLACE

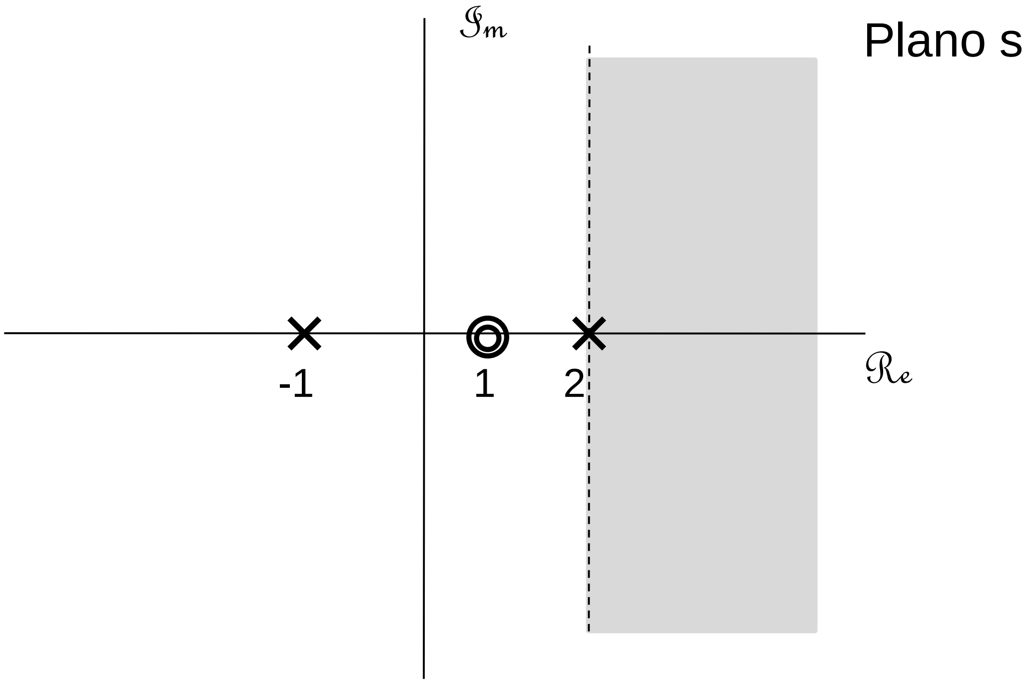


Diagrama de polos y ceros y ROC del ejemplo 5

LA TRANSFORMADA DE LAPLACE

La región de convergencia para las transformadas de Laplace

Propiedad 1

La ROC de *X(s)* consiste en bandas paralelas al eje $j\omega$ en el plano *s*

Propiedad 2

Para transformadas racionales de Laplace, la ROC no contiene ningún polo.

Propiedad 3

Si *x(t)* es de duración finita y es absolutamente integrable, entonces la ROC es el plano *s* completo

Propiedad 4

Si *x(t)* es de derecha y si la línea $\mathrm{Re}\{s\} = \sigma_0$ está en la ROC, entonces todos los valores de s para los cuales $\mathrm{Re}\{s\} > \sigma_0$ también estarán en la ROC.

LA TRANSFORMADA DE LAPLACE

La región de convergencia para las transformadas de Laplace

Propiedad 5

Si *x(t)* es de izquierda y si la línea $\mathrm{Re}\{s\} = \sigma_0$ está en la ROC, entonces todos los valores de s para los cuales $\mathrm{Re}\{s\} < \sigma_0$ también estarán en la ROC.

Propiedad 6

Si *x(t)* es bilateral y si la línea $\mathrm{Re}\{s\} = \sigma_0$ está en la ROC, entonces la ROC consistirá de una banda en el plano s que incluya la línea $\mathrm{Re}\{s\} = \sigma_0$

Propiedad 7

Si la transformada de Laplace *X(s)* de *x(t)* es racional, entonces su ROC está limitada por los polos o se extienden al infinito. Además, ningún polo de *X(s)* esta contenido en la ROC.

Propiedad 8

Si la transformada de Laplace *X(s)* de *x(t)* es racional, entonces si *x(t)* es de derecha, la ROC será la región en el plano s que se encuentra a la derecha del polo localizado más hacia la derecha. Para una señal *x(t)* de izquierda, la ROC será la región en el plano *s* que se encuentra a la izquierda del polo localizado más hacia la izquierda.

LA TRANSFORMADA DE LAPLACE

Ejemplo 6

Obtener la transformada de Laplace de:

$$x(t) = e^{-b|t|}$$

Ejemplo 7

De la siguiente función, indicar cuales serían las posibles ROC

$$X(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)}$$

LA TRANSFORMADA INVERSA DE LAPLACE

Es posible recuperar x(t) a partir de su transformada de Laplace evaluada para un conjunto de valores de $s = \sigma + j\omega$ en la ROC, teniendo una σ fija y con una ω que varía de $-\infty \; a \; \infty +$. Si se cambia la variable de integración en la ecuación:

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\infty}^{\infty} X(\sigma + j\omega) e^{(\sigma + j\omega)t} d\omega$$

de $\omega \; a \; s$, y nos valemos del hecho de que σ es constante , de manera que $ds = jd\omega$. El resultado es la ecuación básica de la transformada inversa de Laplace:

$$x(t) = \int_{\sigma - j\infty}^{\sigma + j\infty} X(s) e^{st} ds$$

LA TRANSFORMADA INVERSA DE LAPLACE

Es posible recuperar x(t) a partir de su transformada de Laplace evaluada para un conjunto de valores de $s = \sigma + j\omega$ en la ROC, teniendo una σ fija y con una ω que varía de $-\infty \; a \; \infty +$. Si se cambia la variable de integración en la ecuación:

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\infty}^{\infty} X(\sigma + j\omega) e^{(\sigma + j\omega)t} d\omega$$

de $\omega \; a \; s$, y nos valemos del hecho de que σ es constante , de manera que $ds = jd\omega$. El resultado es la ecuación básica de la transformada inversa de Laplace:

$$x(t) = \int_{\sigma - j\infty}^{\sigma + j\infty} X(s) e^{st} ds$$

NO UTILIZAR!!!!!!!!!!

LA TRANSFORMADA INVERSA DE LAPLACE

Ejemplo 7

Obtener la transformada inversa de Laplace de:

$$X(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)}, \qquad Re > \{-1\}$$

PROPIEDADES DE LA TRANSFORMADA DE LAPLACE

Linealidad de la transformada de Laplace

Si

$$x_1(t) \overset{L}{<------>} X_1(s), \qquad ROC = R_1$$

y

$$x_2(t) \overset{L}{<------>} X_2(s), \qquad ROC = R_2$$

entonces

$$ax_1(t) + bx_2(t) \overset{L}{<------>} aX_1(s) + bX_2(s), \quad ROC = R_1 \cap R_2$$

PROPIEDADES DE LA TRANSFORMADA DE LAPLACE

Desplazamiento en el tiempo

Si

$$x(t) \overset{L}{<------>} X(s), \qquad ROC = R$$

entonces

$$x(t-t_0) \overset{L}{<------>} e^{-st_0} X(s), \qquad ROC = R$$

Desplazamiento en el dominio de s

Si

$$x(t) \overset{L}{<------>} X(s), \qquad ROC = R$$

entonces

$$e^{s_0 t} x(t) \overset{L}{<------>} X(s-s_0), \qquad ROC = R + Re\{s_0\}$$

PROPIEDADES DE LA TRANSFORMADA DE LAPLACE

Escalamiento en el tiempo

Si

$$x(t) \overset{L}{<------>} X(s), \qquad ROC = R$$

entonces

$$x(at) \overset{L}{<------>} \frac{1}{|a|} X\left(\frac{s}{a}\right), \qquad ROC\ R_1 = \frac{R}{a}$$

Conjugación

Si

$$x(t) \overset{L}{<------>} X(s), \qquad ROC = R$$

entonces

$$x^*(t) \overset{L}{<------>} X^*(s^*), \qquad ROC = R$$

PROPIEDADES DE LA TRANSFORMADA DE LAPLACE

Propiedad de convolución

Si

$$x_1(t) \overset{L}{<-----} > X_1(s), \qquad ROC = R_1$$

y

$$x_2(t) \overset{L}{<-----} > X_2(s), \qquad ROC = R_2$$

entonces

$$x_1(t) * x_2(t) \overset{L}{<-----} > X_1(s) X_2(s), \qquad ROC = R_1 \cap R_2$$

PROPIEDADES DE LA TRANSFORMADA DE LAPLACE

Diferenciación en el dominio del tiempo

Si

$$x(t) \overset{L}{<-----\!>} X(s), \qquad ROC = R$$

entonces

$$\frac{dx(t)}{dt} \overset{L}{<-----\!>} sX(s), \qquad ROC \text{ contenido en } R$$

Diferenciación en el dominio de s

Si

$$x(t) \overset{L}{<-----\!>} X(s), \qquad ROC = R$$

entonces

$$-tx(t) \overset{L}{<-----\!>} \frac{dX(s)}{ds}, \qquad ROC = R$$

PROPIEDADES DE LA TRANSFORMADA DE LAPLACE

Integración en el dominio del tiempo

Si

$$x(t) \overset{L}{<----->} X(s), \qquad ROC = R$$

entonces

$$\int_{-\infty}^{t} x(\tau) d\tau \overset{L}{<----->} \frac{1}{s} X(s), \qquad ROC \text{ contenido en } R \cap \left\{ \mathrm{Re}\{s\} > 0 \right\}$$

PROPIEDADES DE LA TRANSFORMADA DE LAPLACE

Ejemplo 8

Obtener la transformada de Laplace de

$$x(t) = te^{-at}u(t)$$

PARES BÁSICOS DE TRANSFORMADA DE LAPLACE

SEÑAL	TRANSFORMADA DE LAPLACE	ROC
$\delta(t)$	1	$todo\ s$
$u(t)$	$\frac{1}{s}$	$\mathrm{Re}\{s\} > 0$
$-u(-t)$	$\frac{1}{s}$	$\mathrm{Re}\{s\} < 0$
$\frac{t^{(n-1)}}{(n-1)!}u(t)$	$\frac{1}{s^n}$	$\mathrm{Re}\{s\} > 0$
$\frac{-t^{(n-1)}}{(n-1)!}u(-t)$	$\frac{1}{s^n}$	$\mathrm{Re}\{s\} < 0$

PARES BÁSICOS DE TRANSFORMADA DE LAPLACE

SEÑAL	TRANSFORMADA DE LAPLACE	ROC
$e^{-at}u(t)$	$\frac{1}{s+a}$	$\mathrm{Re}\{s\} > -a$
$-e^{-at}u(-t)$	$\frac{1}{s+a}$	$\mathrm{Re}\{s\} < -a$
$\frac{t^{(n-1)}e^{-at}}{(n-1)!}u(t)$	$\frac{1}{(s+a)^n}$	$\mathrm{Re}\{s\} > -a$
$\frac{-t^{(n-1)}e^{-at}}{(n-1)!}u(-t)$	$\frac{1}{(s+a)^n}$	$\mathrm{Re}\{s\} < -a$
$[\cos(\omega_0 t)]u(t)$	$\frac{s}{s^2+\omega_o^2}$	$\mathrm{Re}\{s\} > 0$

PARES BÁSICOS DE TRANSFORMADA DE LAPLACE

SEÑAL	TRANSFORMADA DE LAPLACE	ROC
$[\sin(\omega_0 t)]u(t)$	$\frac{\omega_o}{s^2+\omega_o^2}$	$\mathrm{Re}\{s\}>0$
$[e^{-at}\cos(\omega_0)]u(t)$	$\frac{s+a}{(s+a)^2+\omega_o^2}$	$\mathrm{Re}\{s\}>-a$
$[e^{-at}\sin(\omega_0)]u(t)$	$\frac{\omega_o}{(s+a)^2+\omega_o^2}$	$\mathrm{Re}\{s\}>-a$
$u_n(t)=\frac{d^n\delta(t)}{dt^n}$	s^n	$Toda\ s$

ANÁLISIS Y CARACTERIZACIÓN DE LOS SISTEMAS LTI USANDO LA TRANSFORMADA DE LAPLACE

Las transformadas de Laplace de la entrada y de la salida de un sistema LTI están relacionadas a través de la multiplicación por la transformada de Laplace de la respuesta al impulso del sistema.

$$X(s) \longrightarrow \boxed{\quad H(s) \quad} \longrightarrow Y(s)$$

$$Y(s) = H(s)X(s)$$

Así mismo, si la entrada de un sistema LTI es $x(t) = e^{st}$, entonces la salida será $H(s)e^{st}$,es decir, e^{st} es una función propia del sistema con valor propio igual a la transformada de Laplace de la respuesta al impulso.

ANÁLISIS Y CARACTERIZACIÓN DE LOS SISTEMAS LTI USANDO LA TRANSFORMADA DE LAPLACE

Muchas propiedades de los sistemas LTI pueden estar asociadas con las características de la función del sistema en el plano s

Causalidad

Para un sistema LTI causal, la respuesta al impulso es cero para $t<0$ y por tanto se encuentra en el lado derecho. Por lo tanto:

La ROC asociada con la función del sistema para un sistema causal es un semiplano derecho.

Para un sistema con una función del sistema racional, la causalidad del sistema es equivalente a la ROC que es el semiplano derecho a la derecha del polo ubicado más hacia la derecha.

ANÁLISIS Y CARACTERIZACIÓN DE LOS SISTEMAS LTI USANDO LA TRANSFORMADA DE LAPLACE

Estabilidad

La estabilidad de un sistema LTI es equivalente a que su respuesta al impulso sea absolutamente integrable, en cuyo caso la transformada de Fourier de la respuesta al impulso converge.

Un sistema LTI es estable si y sólo si la ROC de su función del sistema *H(s)* incluye al eje *jw* (es decir, $\mathcal{Re}\{s\}=0$)

Para una clase particular y muy importante de sistemas, la estabilidad se puede caracterizar en forma muy simple en términos de la localización de los polos.

Un sistema causal con función del sistema H(s) racional es estable si y sólo si todos los polos de H(s) caen en la parte izquierda del plano s, es decir, todos los polos tienen parte real negativa.

ANÁLISIS Y CARACTERIZACIÓN DE LOS SISTEMAS LTI USANDO LA TRANSFORMADA DE LAPLACE

Ejemplo 9

Obtener la transformada inversa de Laplace del siguiente sistema

$$H(s) = \frac{e^{s}}{s+1}, \qquad Re > \{-1\}$$

Ejemplo 10

Considere el siguiente sistema LTI

$$H(s) = \frac{s-1}{(s+1)(s-2)}$$

Obtenga su ROC cuando:

- El sistema es causal
- El sistema es estable
- El sistema es anticausal e inestable

ANÁLISIS Y CARACTERIZACIÓN DE LOS SISTEMAS LTI USANDO LA TRANSFORMADA DE LAPLACE

Sistemas LTI caracterizados por ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes

Las propiedades de la transformada de Laplace se pueden utilizar para obtener directamente la función del sistema para un sistema LTI caracterizado por una ecuación diferencial lineal con coeficientes constantes.

Considere una ecuación diferencial lineal con coeficientes constantes de la forma

$$\sum_{k=0}^{N} a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k} = \sum_{k=0}^{M} b_k \frac{d^k x(t)}{dt^k}$$

Aplicando la transformada de Laplace en ambos miembros y usando propiedades de linealidad y diferenciación repetidamente, se obtiene:

$$\left(\sum_{k=0}^{N} a_k s^k\right) Y(s) = \left(\sum_{k=0}^{M} b_k s^k\right) X(s)$$

ANÁLISIS Y CARACTERIZACIÓN DE LOS SISTEMAS LTI USANDO LA TRANSFORMADA DE LAPLACE

O

$$H(s)=\frac{\sum_{k=0}^{M} b_k s^k}{\sum_{k=0}^{N} a_k s^k}$$

Por lo tanto, la función del sistema para un sistema especificado por una ecuación diferencial siempre es racional, con ceros en las soluciones de

$$\sum_{k=0}^{M} b_k s^k = 0$$

Y polos en las soluciones de

$$\sum_{k=0}^{N} a_k s^k = 0$$

ANÁLISIS Y CARACTERIZACIÓN DE LOS SISTEMAS LTI USANDO LA TRANSFORMADA DE LAPLACE

Una ecuación diferencial con coeficientes constantes por si mismo no define o limita la región de convergencia. Sin embargo, esta región se inferir, si se cuenta con información adicional, tal como la estabilidad o causalidad del sistema.

Ejemplo 10

Si la entrada a un sistema LTI es

$$x(t) = e^{-3t}u(t)$$

Y la salida es

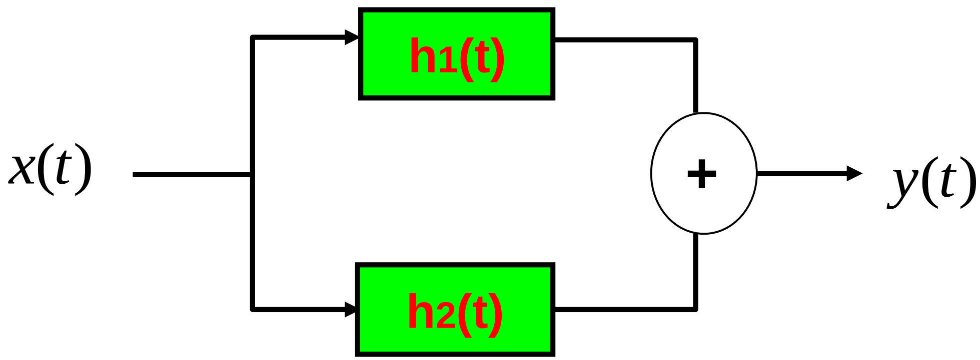
$$y(t) = [e^{-t} - e^{-2t}]u(t)$$

Encontrar la ecuación diferencial que caracteriza al sistema

ÁLGEBRA DE LA FUNCIÓN DEL SISTEMA Y REPRESENTACIÓN EN DIAGRAMAS DE BLOQUES

Funciones del sistema para interconexiones de sistemas LTI

La interconexión en paralelo de dos sistemas, se muestra en la siguiente figura



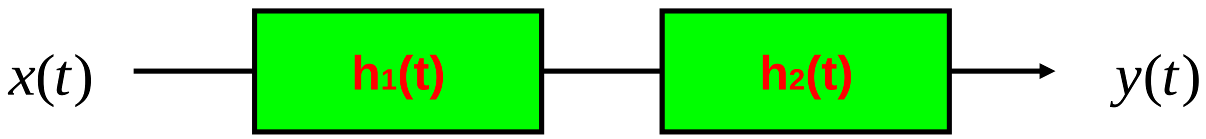
Entones

$$h(t) = h_1(t) + h_2(t)$$

$$H(s) = H_1(s) + H_2(s)$$

ÁLGEBRA DE LA FUNCIÓN DEL SISTEMA Y REPRESENTACIÓN EN DIAGRAMAS DE BLOQUES

La interconexión en serie de dos sistemas, se muestra en la siguiente figura



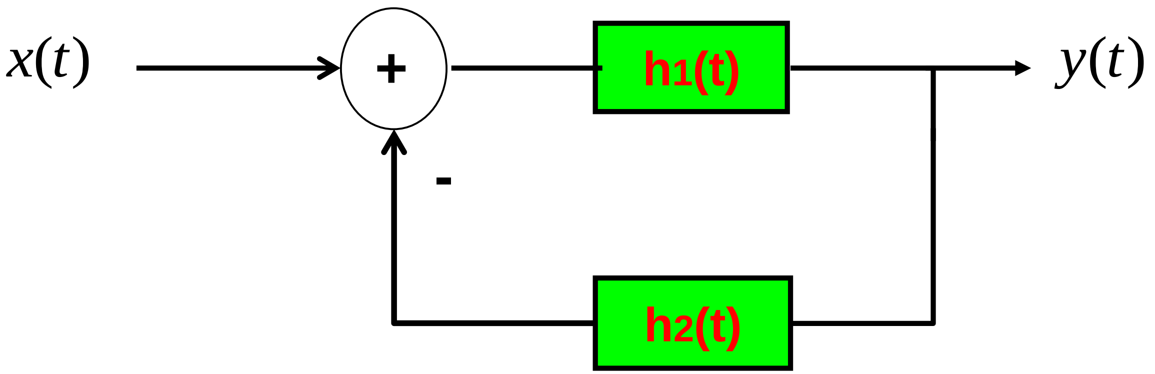
Entones

$$h(t) = h_1(t) * h_2(t)$$

$$H(s) = H_1(s) H_2(s)$$

ÁLGEBRA DE LA FUNCIÓN DEL SISTEMA Y REPRESENTACIÓN EN DIAGRAMAS DE BLOQUES

La interconexión retroalimentada de dos sistemas, se muestra en la siguiente figura



Entones

$$\frac{Y(s)}{X(s)} = H(s) = \frac{H_1(s)}{1 + H_1(s)H_2(s)}$$

ÁLGEBRA DE LA FUNCIÓN DEL SISTEMA Y REPRESENTACIÓN EN DIAGRAMAS DE BLOQUES

Ejemplo 11

Obtener su diagrama de bloques del siguiente sistema LTI causal

$$H(s) = \frac{s+2}{s+3}$$

Ejemplo 12

Obtener su diagrama de bloques del siguiente sistema LTI causal

$$H(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)}$$

LA TRANSFORMADA UNILATERAL DE LAPLACE

La transformada unilateral de Laplace de una señal continua está definida por la siguiente ecuación

$$\chi(s) \triangleq \int_{0-}^{\infty} x(t)e^{-st}dt$$

Está transformada es muy útil en el análisis de sistemas causales y en particular, en los sistemas especificados por ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes y con condiciones iniciales diferentes de cero.

Ejemplo 13

Obtener la transformada unilateral de Laplace de

$$x(t) = e^{-a(t+1)}u(t+1)$$

LA TRANSFORMADA UNILATERAL DE LAPLACE

Ejemplo 13

Obtener la transformada unilateral de Laplace de

$$x(t) = e^{-a(t+1)}u(t+1)$$

PROPIEDADES DE LA TRANSFORMADA UNILATERAL DE LAPLACE

Linealidad de la transformada de Laplace

Si

$$x_1(t) \overset{L}{<\!-\!-\!-\!-\!-\!-\!>} X_1(s),$$

y

$$x_2(t) \overset{L}{<\!-\!-\!-\!-\!-\!-\!>} X_2(s),$$

entonces

$$ax_1(t) + bx_2(t) \overset{L}{<\!-\!-\!-\!-\!-\!-\!>} aX_1(s) + bX_2(s)$$

PROPIEDADES DE LA TRANSFORMADA UNILATERAL DE LAPLACE

Desplazamiento en el dominio de s

Si

$$x(t) \overset{L}{<----->} X(s)$$

entonces

$$e^{s_0 t} x(t) \overset{L}{<----->} X(s - s_0)$$

Escalamiento en el tiempo

Si

$$x(t) \overset{L}{<----->} X(s)$$

entonces

$$x(at) \overset{L}{<----->} \frac{1}{a} X\left(\frac{s}{a}\right), \qquad \text{a>0}$$

PROPIEDADES DE LA TRANSFORMADA UNILATERAL DE LAPLACE

Diferenciación en el dominio del tiempo

Si

$$x(t) \overset{L}{<------>} X(s)$$

entonces

$$\frac{dx(t)}{dt} \overset{L}{<------>} sX(s) - x(0^{-})$$

Diferenciación en el dominio de s

Si

$$x(t) \overset{L}{<------>} X(s)$$

entonces

$$-tx(t) \overset{L}{<------>} \frac{dX(s)}{ds}$$

PROPIEDADES DE LA TRANSFORMADA UNILATERAL DE LAPLACE

Integración en el dominio del tiempo

Si

$$x(t) \overset{L}{<----->} X(s), \qquad ROC = R$$

entonces

$$\int_{-0}^{t} x(\tau)d\tau \overset{L}{<----->} \frac{1}{s} X(s)$$

PROPIEDADES DE LA TRANSFORMADA UNILATERAL DE LAPLACE

Propiedad de convolución

Si

$$x_1(t) \overset{L}{<\!-\!-\!-\!-\!-\!>} X_1(s), \qquad x_1(t) = 0 \qquad t < 0$$

y

$$x_2(t) \overset{L}{<\!-\!-\!-\!-\!-\!>} X_2(s), \qquad x_2(t) = 0 \qquad t < 0$$

entonces

$$x_1(t) * x_2(t) \overset{L}{<\!-\!-\!-\!-\!-\!>} X_1(s) X_2(s)$$

SOLUCIÓN DE ECUACIONES DIFERENCIALES USANDO E LA TRANSFORMADA UNILATERAL DE LAPLACE

Ejemplo 14

Considerar el siguiente sistema causal caracterizado por la ecuación

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2}+3\frac{dy(t)}{dt}+2y(t)=x(t)$$

cuyas condiciones iniciales son:

$$y(0+)=3, \qquad \frac{dy(0+)}{dt}=-5$$

FUENTE:

OPPENHEIM, A.- WILLSKY, A. “Señales y Sistemas” Pearson Education, 2ª ed., 1998