PARTE I (12puntos)

1. La función compleja $f(z) = (1-j)e^{-jz}$ con $z = x + jy$, se puede expresar en la forma **(2 puntos)**
$f(z) = u(x;y) + jv(x,y)$.
Siendo $u(x,y) = A + Be^{y}$, $v(x,y) = Ccosx - D$, $A \in \mathbb{R}$
Determine A, B, C, D y relacione correctamente:
Escriba en los espacios en blanco la numeración según corresponda de la **tabla 1**

A es igual a	7
B es igual a	2
C es igual a	3
D es igual a	6

Tabla 1

1	1
2	$cosx - senx$
3	$-e^{y}$
4	$-e^{y}senx$
5	$cosx + senx$
6	$e^{y}senx$
7	0
8	$senx - cosx$
9	e^{-y}
10	$senx$

$(1-j)e^{-j(x+jy)}$ $\quad -j \cdot jy = -(-1)y$
$(1-j)e^{-jx}e^{y}$
$(1-j)e^{y}(cosx - jsenx)$
$(e^{y}cosx - e^{y}senxj)(1-j)$

2

2. Determine el valor de la integral siguiente: **(2 puntos)**

$e^{y}cosx - e^{y}cosxj - e^{y}senxj - e^{y}senx$
$e^{y}(cosx - senx) - e^{y}cosxj - e^{y}senxj$

$$I = \oint_C \frac{z^2 + 2\pi}{(z+3j)^2} dz, \quad C: |z| = 6$$

$2z = -6j$
$z_0 = -3j$
$2\pi j \cdot -6j$
$-12\pi \cdot -1$
12π

A) 8π B) -12π C) -8π D) 12π E) 16π F) NA

$(1-j)e^{-j(x+yj)}$
$(1-j)e^{-jx}e^{y}$
$(1-j)e^{y}(cosx - jsenx)$
$e^{y}cosx - e^{y}senxj - e^{y}cosxj - e^{y}senx$
$e^{y}(cosx - senx) + (-e^{y}cosx - e^{y}senx)j$
$(1-j)e^{-j(x+jy)}$
$(1-j)e^{-jx}e^{y}$
$(1-j)e^{y}(cosx - jsenx)$
$e^{y}cosx - e^{y}senxj - e^{y}cosxj - e^{y}senx$
$e^{y}\underbrace{(cosx - senx)}_{B} \underbrace{-e^{y}}_{C}cosx - \underbrace{e^{y}senx}_{D}$

2

$f(z) = z^2 + 2\pi$
$f'(z) = 2z$
$f'(-3j) = -6j$
$2\pi j \cdot \frac{-6j}{1!} = 12\pi$
$\frac{f(z)}{z - z_0}$
$f(z) = z^2 + 2\pi$
$f'(z) = 2z$
$z_0 = -3j$
$f'(-3j) = 2 \cdot (-3j) = -6j$

$z^2 + 2\pi$
$2z = -6j$
$2\pi j - 6j = -12\pi(-$
$\boxed{12\pi}$
$2\pi j \cdot -6j = -12\pi(-1)$
12π

(2 puntos)

3. Dada la función compleja.

$$f(z) = \begin{cases} \dfrac{z^2 - 3zj - 2}{z - 2j}, & z \neq 2j \\ -j \quad , & z = 2j \end{cases}$$

$\frac{(z-2j)(z-j)}{(z-2j)}$ $\quad z^2 - 2j - 2jz - 2$

$\lim_{z \to 2j} 2j - j = j \neq -j \quad z_0 = 2j$

Marque, si las hubiera, la(s) opción(es) correcta(s).

1.4 $\quad \frac{(z-2j)(z-j)}{z-2j} \quad 2j - j = j \neq -j$

A) f es continua en el plano complejo X

B) f no es continua en $z = 2j$. ✓

C) La función es derivable en $z \neq 2j$ ✓

D) f no es analítica en $z = 2j$

Respuesta: La(s) opción(es) correcta(s): B y C Faltó D

(3 puntos)

4. Dada las señales: $x_1[n] = 3^{-n}u[n], \quad x_2[n] = u[n]$

Relacione correctamente las **proposiciones** con las **posibles respuestas.**

Escriba en los espacios en blanco la numeración según corresponda de la **tabla 1**

La convolución $x_1[n] * x_2[n]$ es igual a …	4
El ROC de la convolución de las señales dadas es …	8

Tabla 1	
1	$(3 - 3^n)\frac{u[n]}{2}$
2	$\lvert z\rvert > \frac{1}{3}$
3	$(3 + 3^{-n})\frac{u[n]}{2}$
4	$(3 - 3^{-n})\frac{u[n]}{2}$
5	$\lvert z\rvert < 1$
6	$(3^{-1} - 3^{-n})\frac{u[n]}{2}$
7	$\frac{1}{3} < \lvert z\rvert < 1$
8	$\lvert z\rvert > 1$

3

$x_1[n] = \left(\frac{1}{3}\right)^n u[n] = \frac{1}{1 - \frac{1}{3}z^{-1}}$

$x_2[n] = u[n] = \frac{1}{1 - z^{-1}}$

$\left(\frac{1}{1-\frac{1}{3}z^{-1}}\right)\left(\frac{1}{1-z^{-1}}\right) \qquad 1 = A(1-z^{-1}) + B(1 - \frac{1}{3}z^{-1}) \quad z = 1 \quad z = 1/3$

$\frac{A}{1-\frac{1}{3}z^{-1}} + \frac{B}{1-z^{-1}} \qquad 1 = B(1 - \frac{1}{3}) \quad 1 = A(1-3)$

$1 = \frac{2}{3}B \quad 1 = -2A \quad A = -\frac{1}{2} \quad B = \frac{3}{2}$

$\frac{1}{3}\left(\frac{1}{1-\frac{1}{3}z^{-1}}\right)\left(\frac{1}{(1-z^{-1})}\right)$

$1 = A(1-z^{-1}) + B(1-\frac{1}{3}z^{-1})$

$z = 1 \quad z = 1/3$

$1 = B(1 - \frac{1}{3}) \quad 1 = A(1-3)$

$1 = -\frac{2}{3}B \quad -\frac{1}{2} = A$

$-\frac{3}{2} = B$

$-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-\frac{1}{3}z^{-1}}\right) + \frac{3}{2}\left(\frac{1}{1-z^{-1}}\right)$

$-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^n u[n] + \frac{3}{2}u[n] \Rightarrow \left[-\frac{3^{-n}}{2} + \frac{3}{2}\right] u[n]$

$\left(\frac{3 - 3^{-n}}{2}\right) u[n]$

$-\frac{3}{2}\left(\frac{1}{1-\frac{1}{3}z^{-1}}\right) - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{1-z^{-1}}\right) \qquad -\frac{3}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^n u[n] - \frac{1}{3}u[n]$

$\frac{3}{2} - \frac{3^{-n}}{2} \quad u[n]$

$-\frac{3}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^n u[n] - \frac{1}{3}u[n] \qquad \left[\frac{-3^1 \cdot 3^{-n}}{2} - \frac{3^{-1}}{1}\right] u[n]$

$\lvert z\rvert > 1$

$\left[-\frac{3}{2} \cdot 3^{-n} - \frac{3^{-1}}{1}\right] = u[n] \qquad -3^{-n} - 3^{-1}$

$1 = A(1-z^{-1}) + B(1 - \frac{1}{3}z^{-1})$

$z = 1 \quad z = \frac{1}{3}$

$-\frac{3^{-n+1}}{2} - \frac{1}{3} \qquad -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{3}z^{-1}} + \frac{3}{2}\frac{1}{1-z^{-1}} \qquad 1 = B(1 - \frac{1}{3}) \quad 1 = A(1-3)$

$1 = \frac{2}{3}B \quad 1 = -2A$

$-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^n u[n] + \frac{3}{2}u[n] \qquad \frac{3}{2} = B \quad A = -\frac{1}{2}$

5. $M(z)$ y $Q(z)$ son las transformadas Z de las señales $m(n)$ y $q[n]$, respectivamente. Si se sabe que $M(z) = \frac{4z}{z+4}$ y $Q(z) = \frac{3z}{3z-1}$. **(3 puntos)**

Escriba en los espacios en blanco la numeración según corresponda de la **tabla 1**

La señal *anticausal* que tiene como transformada Z a $M(z)$ es …	2
La señal *causal* que tiene como transformada Z a $Q(z)$ es…	4
Si se sabe que $Y(z) = M(z) + Q(z)$, entonces se puede afirmar que el *ROC* de la señal *bilateral* que tiene por transformada Z a $Y(z)$ es …	10

Tabla 1	
1	$4^{n+1}u[-n-1]$
2	$(-4)^{n+1}u[-n-1]$
3	$3^{n+1}u[n]$
4	$\left(\frac{1}{3}\right)^n u[n]$
5	$\left(-\frac{1}{4}\right)^n u[n]$
6	$\frac{1}{4} < \|z\| < 3$
7	$\|z\| > 3$
8	$-\frac{1}{4} < \|z\| < 3$
9	$-\left(-\frac{1}{4}\right)^n u[-n-1]$
10	$\frac{1}{3} < \|z\| < 4$

3

$M(z) = \frac{4z}{z+4} = \frac{4}{1+4z^{-1}} = 4\left(\frac{1}{1+4z^{-1}}\right)$

$\cancel{4(-4)^n u[n]}$

$-4 \cdot \frac{-1}{1+4z^{-1}} \quad (-4)(-4)^n u[-n-1]$

$(-4)^{n+1} u[-n-1]$

$Q(z) = \frac{3z}{3z-1} = \frac{1}{1-\frac{1}{3}z^{-1}} = \left(\frac{1}{3}\right)^n u[n]$

$\frac{1}{3} < |z| < 4$

ROC

$M(z) = \frac{4z}{z+4} = \frac{4}{1+4z^{-1}} = 4\left(\frac{1}{1+4z^{-1}}\right)$

$-4\left(\frac{-1}{1+4z^{-1}}\right) = (-4)(-4)^n u[-n-1] \quad \frac{1}{3} < |z| < 4$

$(-4)^{n+1} u[-n-1]$

$Q(z) = \frac{3z}{3z-1} = \frac{1}{1-\frac{1}{3}z^{-1}} \quad \left(\frac{1}{3}\right)^n u[n]$

$M(z) = \frac{4z}{z+4} = 4\left(\frac{1}{1+4z^{-1}}\right) \quad -4\left(\frac{-1}{1+4z^{-1}}\right) \quad (-4)(-4)^n [-n-1]$

$(-4)^{n+1} [$

$\frac{3z}{3z-1} = \frac{1}{1-\frac{1}{3}z^{-1}} \quad \left(\frac{1}{3}\right)^n u[n]$

PARTE II (8 puntos)

1. Dada la función compleja $f(z) = \underbrace{(3x^2y + 2xy)}_{u} + j\underbrace{(3xy^2 - x^3 + y^2 + 4x)}_{v}$ donde $z = x + jy$

   a. Determine los valores complejos z donde la función tiene derivada. **(2 puntos)**

   b. En caso de existir halle $f'(-7/2 + j)$ y $f'(1 + j)$. **(2 puntos)**

a) C. R:

$u_x = 6xy + 2y$ $\quad V_x = 3y^2 - 3x^2 + 4$

$u_y = 3x^2 + 2x$ $\quad V_y = 6xy + 2y$

$u_x = V_y$

$u_y = -V_x$

$\cancel{3x^2} + 2x = -3y^2 + \cancel{3x^2} \cdot 4$

$3y^2 = -2x - 4$

$\boxed{y^2 = -\frac{2}{3}x - \frac{4}{3}}$

La función tiene derivada para todos los puntos que conforman la parábola: $y^2 = -\frac{2}{3}x - \frac{4}{3}$

2

b) 1er caso: $(-7/2; 1)$ pertenece a la parábola?

$1 = -\frac{2}{3} \cdot \frac{-7}{2} - \frac{4}{3}$

$1 = 1$ ✓ $\Rightarrow$ Sí existe

$\Rightarrow f'(-7/2 + j) = V_y - j\,u_y$

$x = -\frac{7}{2}$

$y = 1$

$6xy + 2y - j(3x^2 + 2x)$

$6 \cdot -\frac{7}{2} \cdot 1 + 2 \cdot 1 - j\left(3\left(-\frac{7}{2}\right)^2 + 2\left(-\frac{7}{2}\right)\right)$

$\boxed{-19 - j\left(\frac{119}{4}\right)}$

2do caso: $(1;1)$ pertenece a la parábola?

$1 = -\frac{2}{3} - \frac{4}{3}$

$1 \neq -2$

Ese punto no pertenece a la parábola y por lo tanto no existe derivada.

2

2. Dada la función de transferencia de un sistema L.T.I. en tiempo discreto, dada por

$$H(z) = \frac{-\frac{5}{3} + \frac{1}{3}z^{-1}}{\left(1 - \frac{1}{3}z^{-1}\right)(4 - z^{-1})}$$

a. Considerando que el sistema es anticausal, halle la respuesta del sistema si la señal de entrada es el impulso unitario ($x[n] = \delta[n]$). **(2 puntos)**

Nota: la respuesta del sistema es una señal anticausal

b. Considerando que el sistema es causal, halle la señal de entrada si la respuesta al sistema es $y(n) = 3^{-n}u[n]$. **(2 puntos)**

a) $x[n] = \delta[n] \Rightarrow X(z) = 1$ T.Z #22

$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)}$ $\quad H(z) = Y(z)$

$-\frac{5}{3} + \frac{1}{3}z^{-1} = A(4 - z^{-1}) + B(1 - \frac{1}{3}z^{-1})$

$Y(z) = \frac{A}{1 - \frac{1}{3}z^{-1}} + \frac{B}{4 - z^{-1}}$

$z = 1/4$ $\quad z = 1/3$

$-\frac{5}{3} + \frac{1}{3}.4 = B(1 - \frac{4}{3})$ $\quad -\frac{5}{3} + 1 = A(4-3)$

$-\frac{1}{3} = B(-\frac{1}{3})$ $\quad -\frac{2}{3} = A$

$B = 1$

$Y(z) = -\frac{2}{3}\left(\frac{1}{1 - \frac{1}{3}z^{-1}}\right) + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{1 - \frac{1}{4}z^{-1}}\right)$

2

$z^{-1}\{Y(z)\} = z^{-1}\left\{\frac{2}{3}\left(\frac{-1}{1 - \frac{1}{3}z^{-1}}\right) - \frac{1}{4}\left(\frac{-1}{1 - \frac{1}{4}z^{-1}}\right)\right\}$ T.Z #27

$y[n] = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^n u[-n-1] - \frac{1}{4}\left(\frac{1}{4}\right)^n [-n-1]$

$\boxed{y[n] = \left[\frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^n - \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}\right][-n-1]}$

b) $H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)}$ $\quad y(n) = 3^{-n}u[n] = \left(\frac{1}{3}\right)^n u[n]$ T.Z #25

$Y(z) = \frac{1}{1 - \frac{1}{3}z^{-1}}$

$X(z) = \frac{Y(z)}{H(z)}$

$X(z) = \frac{1}{\cancel{(1 - \frac{1}{3}z^{-1})}} \cdot \frac{\cancel{(1 - \frac{1}{3}z^{-1})}(4 - z^{-1})}{-\frac{5}{3} + \frac{1}{3}z^{-1}}$

$X(z) = \frac{4 - z^{-1}}{-\frac{5}{3} + \frac{1}{3}z^{-1}} = \frac{4}{-\frac{5}{3} + \frac{1}{3}z^{-1}} - \frac{z^{-1}}{-\frac{5}{3} + \frac{1}{3}z^{-1}}$

2

$X(z) = 4 \cdot -\frac{3}{5}\left(\frac{1}{1 - \frac{1}{5}z^{-1}}\right) - \frac{3}{5} \cdot \frac{-z^{-1}}{1 - \frac{1}{5}z^{-1}}$

$X(z) = 4 \cdot -\frac{3}{5}\left(\frac{1}{1 - \frac{1}{5}z^{-1}}\right) - \frac{3}{5} \cdot 5\left(\frac{-z^{-1}}{5 - z^{-1}}\right)$

$X(z) = -\frac{12}{5}\left(\frac{1}{1 - \frac{1}{5}z^{-1}}\right) - 3\left(\frac{-z^{-1} + 5 - 5}{5 - z^{-1}}\right) = -\frac{12}{5}\left(\frac{1}{1 - \frac{1}{5}z^{-1}}\right) - 3 + 3\left(\frac{5}{5 - z^{-1}}\right)\frac{\frac{1}{5}}{\frac{1}{5}}$

$z^{-1}\{X(z)\} = \left\{-\frac{12}{5}\left(\frac{1}{1 - \frac{1}{5}z^{-1}}\right) - 3 + 3\left(\frac{1}{1 - \frac{1}{5}z^{-1}}\right)\right\} z^{-1}$ z inversa #25

6

$x[n] = -\frac{12}{5}\left(\frac{1}{5}\right)^n u[n] - 3\delta[n] + 3\left(\frac{1}{5}\right)^n u[n]$

$\boxed{x[n] = -3\,\delta[n] + \left(3\left(\frac{1}{5}\right)^n - \frac{12}{5}\left(\frac{1}{5}\right)^n\right)u[n]}$