Análisis de Fourier: SERIE DE FOURIER

- Propiedades de la TF:
  - La convolución de 2 funciones
- Introducción a sistemas lineales
- Aplicaciones de contexto a sistemas LTI

• $\mathcal{L}(f(t) * g(t)) = L(f(t)).L(g(t))$

Propiedades de la Transformada de Fourier

• $\mathcal{F}(f(t) * g(t)) = \mathcal{F}(f(t)).\mathcal{F}(g(t))$

❑ Propiedades de la transformada de Fourier

* $\mathcal{F}(-jt\,f(t)) = F'_{(w)}$

* $\mathcal{F}(f'(t)) = (jw)\mathcal{F}(w)$

* $\mathcal{F}(f''(t)) = (jw)^2\mathcal{F}(w)$

9. $\boldsymbol{\mathcal{F}[-jtf(t)] = F'(w)} = \dfrac{dF(w)}{dw}$

10. $(f * g)(t) = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)g(t-x)dx$ **Convolución de f(t) y g(t)**

* $f(t) * g(t) = g(t) * f(t)$

a) $f(t) * \boldsymbol{\delta}(\mathbf{t}) = f(t)$

a') $f(t) * \boldsymbol{\delta}(\mathbf{t}-\boldsymbol{T}) = f(t-\boldsymbol{T})$

b) $\Im[f(t) * g(t)] = F(w)\,G(w)$ $\Rightarrow$ $\mathcal{F}(f(t) * g(t)) = \mathcal{F}(f(t)).\mathcal{F}(g(t))$

11. Para $f(t)$ función real tenemos el **teorema de Parseval.**

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |F(w)|^2 dw$$

Propiedades de la Transformada de Fourier

12	$(f*g)(t)=\int_{-\infty}^{\infty} f(u)g(t-u)du$	$F(w)G(w)$
14	$\mathcal{F}(e^{-at}u(t))$ $=$	$\frac{1}{jw+a}$, $a>0$

Ejemplo 1.

$G(w)=\frac{1}{(1+jw)^2}$

Halle la transformada inversa de Fourier empleando la convolución de 2 funciones :

$$G(w)=\frac{1}{1+jw}\cdot\frac{1}{1+jw} = \mathcal{F}(\underbrace{g(t)}_{¿?})$$

$(*)$ $\mathcal{F}(e^{-1t}u(t)) = \frac{1}{jw+1}$

(Con $a=1$)

$(*)$ $(*)$

$$G(w)=\frac{1}{jw+1}\cdot\frac{1}{jw+1}=\mathfrak{I}(e^{-t}u(t))\mathfrak{I}(e^{-t}u(t))$$

$\mathcal{F}(f(t))\cdot\mathcal{F}(g(t)) = \mathcal{F}(f(t) * g(t))$

$$\cancel{\mathfrak{I}}(\underbrace{g(t)}_{¿?}) = \cancel{\mathfrak{I}}(e^{-t}u(t) * e^{-t}u(t))$$

$$g(t)=(e^{-t}u(t))*(e^{-t}u(t))=\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x}u(x).\overbrace{e^{-(t-x)}}^{e^{-t+x}}u(t-x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t}\cdot u(x)\cdot u(t-x)\,dx$$

$\cdot\, u(x) = \begin{cases} 1, & \boxed{x>0} \\ 0, & x\le 0 \end{cases}$ $\quad 0<x<t$

$\cdot\, u(t-x) = \begin{cases} 1, & \boxed{t>x} \\ 0, & t\le x \end{cases}$

Notar que: $u(x)=1$, si $x>0$

$u(t-x)=1$, si t-x >0 ➔ $x<t$

$0<x<t$

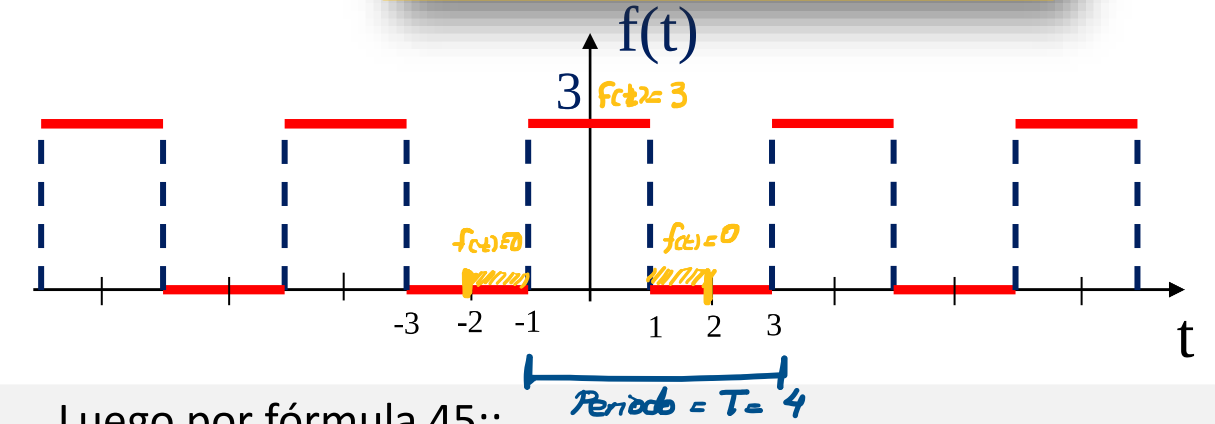
➔ Si $0<x<t$: $u(x)=1$ y $u(t-x)=1$

Luego: $g(t)=\underbrace{\int_0^t e^{-t}(1)(1)dx}_{e^{-t}\cdot x|_0^t = e^{-t}(t-0)} = te^{-t}\cancel{u}$

Ejercicios de la Transformada de Fourier

45	Sea f función periódica: $f(t)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n\cdot e^{jnw_0t}$	$2\pi\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n\cdot\delta(w-nw_0)$

Ejemplo 2. Hallar transformada de Fourier del tren de pulsos



Periodo: T=4: cuando la f(t) es periódica se debe hallar su serie de Fourier de $f(t)$:

$$\boldsymbol{f(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jnw_0t}}$$ SERIE DE FOURIER COMPLETO.

(*) $$c_n=\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)e^{-jn\omega_0 t}dt=\frac{1}{4}\int_{-2}^{2} f(t)e^{-jn\omega_0 t}dt$$

$$c_n=\frac{1}{4}\int_{-1}^{1} 3e^{-jn\omega_0 t}dt=\frac{3}{4}\cdot\frac{e^{-jn\omega_0 t}}{-jnw_o}\Big|_{-1}^{1}$$

$$c_n=\frac{3}{4}\cdot\frac{\overset{t=1}{e^{-jn\omega_0}}-\overset{t=-1}{e^{jn\omega_0}}}{-jnw_o}=\frac{3}{4}\cdot\frac{e^{jn\omega_0}-e^{-jn\omega_0}}{jnw_o}$$

$$c_n=\frac{3}{4}\cdot\frac{2jsen(nw_0)}{jnw_o}=\frac{3}{2}\cdot\frac{sen(nw_0)}{nw_o}$$

$$* \quad \frac{e^{j\theta}-e^{-j\theta}}{2j}=Sen\,\theta \qquad e^{j\theta}-e^{-j\theta}=2j\,Sen\,\theta$$

Luego por fórmula 45::

$$\boxed{\Im(f(t))=2\pi\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n\delta(w-nw_0)}$$

$$\Im(f(t))=2\pi\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{3}{2}\cdot\frac{sen(nw_0)}{nw_o}\delta(w-nw_0)$$

$$\boldsymbol{\Im(f(t))=3\pi\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{sen(nw_0)}{nw_o}\delta(w-nw_0)} \quad (n\neq 0)$$

Siendo $w_0=\frac{2\pi}{T}=\frac{\pi}{2}$.

(*) Con $n=0$: $C_0=\frac{1}{4}\int_{-2}^{2} f(t)e^{0}dt$

$C_0=\frac{1}{4}\int_{-1}^{1} 3dt=\frac{3}{2}$

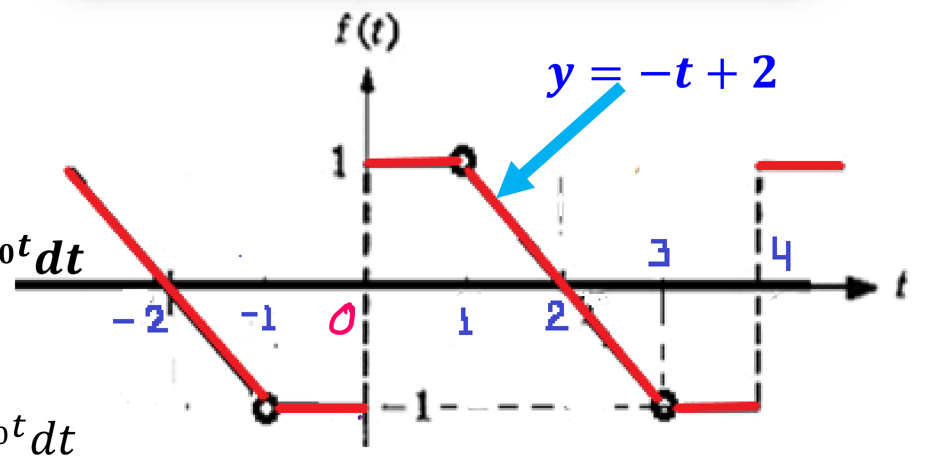
Rpta:

$$\Im(f(t))=\frac{3}{2}+2\pi\sum_{\substack{n=-\infty\\ n\neq 0}}^{\infty} c_n\delta(w-nw_0)$$

Ejercicios de la Transformada de Fourier

7	$\int te^{bt}dt = \frac{e^{bt}(bt-1)}{b^2} + C$

Ejemplo 3. Hallar transformada de Fourier de la señal



Hallemos la serie de Fourier de f(t) **con T=4**: $f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jnw_o t}$

$$c_n = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)e^{-jn\omega_0 t}dt = \frac{1}{4}\int_{-2}^{2} f(t)e^{-jn\omega_0 t}dt = \frac{1}{4}\int_{-1}^{3} f(t)e^{-jn\omega_0 t}dt$$

$$c_n = \frac{1}{4}\int_{-1}^{0}(-1)e^{-jn\omega_0 t}dt + \frac{1}{4}\int_{0}^{1}(1)e^{-jn\omega_0 t}dt + \frac{1}{4}\int_{1}^{3}(-t+2)e^{-jn\omega_0 t}dt$$

$$* \; c_n = \frac{1}{4}\left[\frac{2 - e^{jn\omega_0} + e^{-3jn\omega_0}}{jn\omega_0} + \frac{e^{-3jn\omega_0} - e^{-jn\omega_0}}{j^2n^2{w_o}^2}\right]$$

$$c_n = \frac{1}{4}\left[-\frac{e^{-jn\omega_0 t}}{-jnw_o}\Big|_{-1}^{0} + \frac{e^{-jn\omega_0 t}}{-jnw_o}\Big|_{0}^{1} + 2\frac{e^{-jn\omega_0 t}}{-jnw_o}\Big|_{1}^{3} - \int_{1}^{3} te^{-jn\omega_0 t}dt\right]$$

$$c_n = \frac{1}{4}\left[\frac{1 - e^{jn\omega_0}}{jn\omega_0} - \frac{e^{-jn\omega_0} - 1}{jnw_o} - 2\frac{e^{-3jn\omega_0} - e^{-jn\omega_0}}{jnw_o} - \frac{e^{-jn\omega_0 t}(-jn\omega_0 t - 1)}{j^2n^2{w_o}^2}\Big|_{1}^{3}\right]$$

$$c_n = \frac{1}{4}\left[\frac{2 - e^{jn\omega_0} + e^{-jn\omega_0} - 2e^{-3jn\omega_0}}{jn\omega_0} - \frac{e^{-3jn\omega_0}(-3jn\omega_0 - 1)}{j^2n^2{w_o}^2} + \frac{e^{-jn\omega_0}(-jn\omega_0 - 1)}{j^2n^2{w_o}^2}\right]$$

Luego: Reemplazar c_n.

$$\Im(f(t)) = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \delta(w - nw_0)$$

Introducción a sistemas lineales

- Denotamos por $x_i(t)$ a las entradas arbitrarias, $y_i(t)$ sus respectivas respuestas, donde i=1 , 2, …

  Un sistema se llama lineal si por ejemplo **para la entrada**

  $\boldsymbol{x(t) = a_1x_1(t) + a_2x_2(t)}$ la respuestas es $\boldsymbol{y(t) = a_1y_1(t) + a_2y_2(t)}$

- Sea $x(t)$ una entrada arbitraria, $y(t)$ su respectiva respuesta.

  Un sistema se llama invariante en el tiempo si **para la entrada**

  $\boldsymbol{x(t + t_0)}$ se tiene la respuesta $\boldsymbol{y(t + t_0)}$

Introducción a sistemas lineales

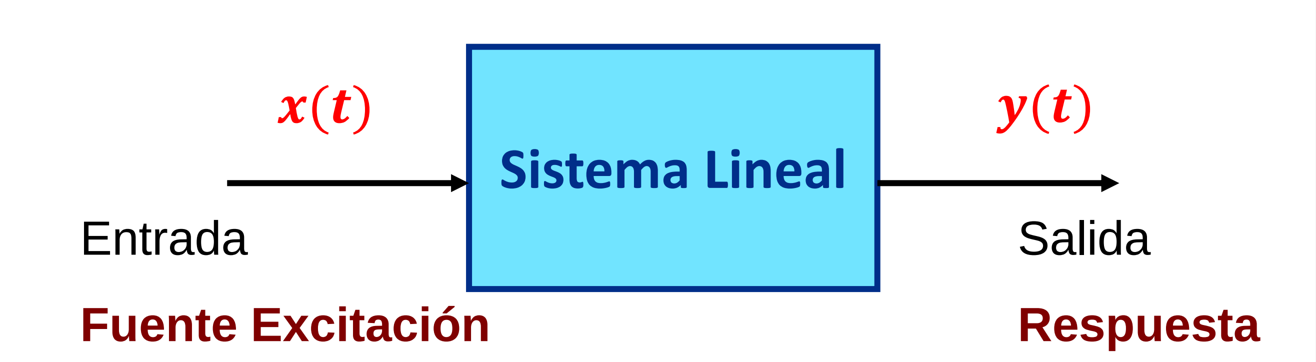
SISTEMA LINEAL INVARIANTE EN EL TIEMPO

Un sistema se llama lineal si la función de entrada(o función de excitación) y la función de salida(o función de respuesta) están relacionadas por una ecuación diferencia lineal con coeficientes constantes. Es decir:

$$a_n \frac{d^n y(t)}{dt^n} + \ldots + a_0 y(t) = b_m \frac{d^m x(t)}{dt^m} + \ldots + b_0 x(t)$$

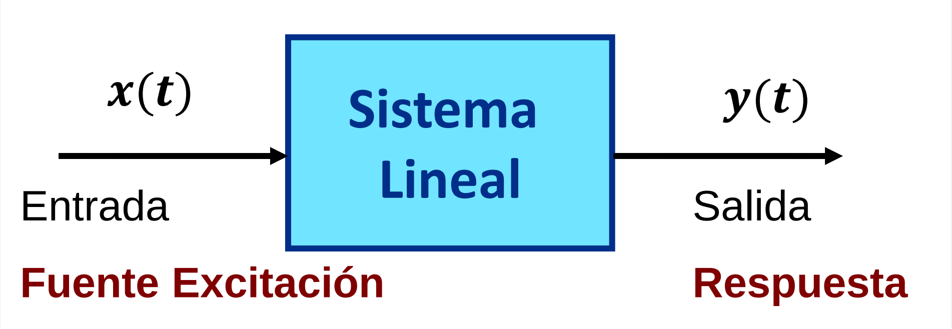
Y bajo la condición de **reposo inicial** (sistema causal). Es decir, si $x(t) = 0$,para $t \le t_0$, entonces suponemos que $y(t) = 0$ para $t \le t_0$

Diremos que este sistema lineal es llamado, también, **sistema LTI** (**lineal invariante en el tiempo**) continuo.



Introducción a sistemas lineales

- Vamos a suponer que los sistemas LTIs **son sistemas estables** de entrada acotada/salida acotada (bounded-input/bounded output-**BIBO**) de manera que su respuesta en frecuencia exista.



Donde $X(w)$, $Y(w)$ y $H(w)$ son las transformadas de Fourier de $x(t)$, $y(t)$ y $h(t)$, respectivamente.

$H(w)$ (**función de transferencia**) es la respuesta en frecuencia y $h(t)$ es la respuesta **al impulso unitario.**

$$\frac{\mathcal{F}(f(t))}{1 \leftarrow \mathcal{F}(\delta(t))} = \boxed{H(w) = \frac{Y(w)}{X(w)}} \begin{matrix} \rightarrow \text{SALIDA} \\ \rightarrow \text{Entrada} \end{matrix} \Big\} \text{ con Transformada de Fourier.}$$

Sistemas LTI

Ejemplo 4: En el sistema LTI caracterizado por su función de transferencia H(w), se pide:

a. Escribir la ecuación diferencial que define el sistema.

b. Halle la respuesta al impulso unitario.

$$\boldsymbol{H(w) = \frac{jw}{(jw)^2 + 5jw + 6}}$$

a)

$$H(w) = \frac{jw}{(jw)^2+5jw+6} = \frac{\boldsymbol{Y(w)}}{\boldsymbol{X(w)}} \Rightarrow \boldsymbol{(jw)X(w)} = \boldsymbol{(jw)^2Y(w)} + 5\boldsymbol{(jw)Y(w)} + 6\boldsymbol{Y(w)}$$

Usando fórmula 9: $\boldsymbol{\Im(x'(t))} = \boldsymbol{\Im(y''(t))} + 5\boldsymbol{\Im(y'(t))} + 6\boldsymbol{\Im(y(t))}$

$\Rightarrow x'(t) = y''(t) + 5y'(t) + 6y(t).$

9	$\mathcal{F}\left(f^{(n)}(t)\right)$ =	$(jw)^n F(w)$

$\mathcal{F}(f(t)) = F(\omega)$

$\mathcal{F}(f'(t)) = (j\omega)\mathcal{F}(\omega)$

$\mathcal{F}(f''(t)) = (j\omega)^2 \cdot \mathcal{F}(\omega)$

b) **La respuesta al impulso unitario es** tal que

$$\frac{\boldsymbol{Y(w)}}{\boldsymbol{\Im(\delta(t))}} = \boldsymbol{H(t)} = \frac{jw}{\underbrace{(jw)^2+5jw+6}_{(jw+2)(jw+3)}} = \frac{A}{(jw)+2} + \frac{B}{(jw)+3}$$

Fracciones parciales:

$jw = A(jw+3) + B(jw+2) \Rightarrow A = -2,\ B = 3$

$$\boldsymbol{Y(w) = \frac{-2}{(jw)+2} + \frac{3}{(jw)+3} = -2\Im\left(e^{-2t}u(t)\right) + 3\Im(e^{-3t}u(t))}$$

14	$\mathcal{F}\left(e^{-at}u(t)\right)$ =	$\frac{1}{jw+a}$, $a>0$

$$\boldsymbol{y(t) = -2e^{-2t}u(t) + 3e^{-3t}u(t).}$$

$* \ \mathcal{F}(\delta(t)) = 1$

Sistemas LTI

Ejemplo 5. Sea un sistema LTI definido por la siguiente ecuación diferencial que relaciona la entrada $x(t)$ con la salida $y(t)$. $\qquad y'(t) + 3y(t) = x'(t) + 2x(t)$

a. Halle la función de transferencia del sistema.

b. Halle la respuesta a la entrada $x(t) = e^{-2t}u(t-1)$.

14	$e^{-at}u(t)$	$\frac{1}{jw+a}\ ,\ a>0$

a) $\Im(y'(t)) + 3\Im(y(t)) = \Im(x'(t)) + 2\Im(x(t))$ ➔ $(jw)Y(w) + 3Y(w) = (jw)X(w) + 2X(w)$

$[jw+3]Y(w) = [jw+2]X(w)$ ➔ $\frac{Y(w)}{X(w)} = \frac{jw+2}{jw+3}$ ➔ $\boldsymbol{H(w)} = \frac{jw+2}{jw+3}$

4	$f(t-a)$	$e^{-jwa}F(w)$

b) Entrada $x(t) = e^{-2t}u(t-1)$ ➔ $\frac{Y(w)}{X(w)} = \frac{jw+2}{jw+3}$ ➔ $Y(w) = \frac{jw+2}{jw+3}.\Im(e^{-2t}u(t-1))$... (*)

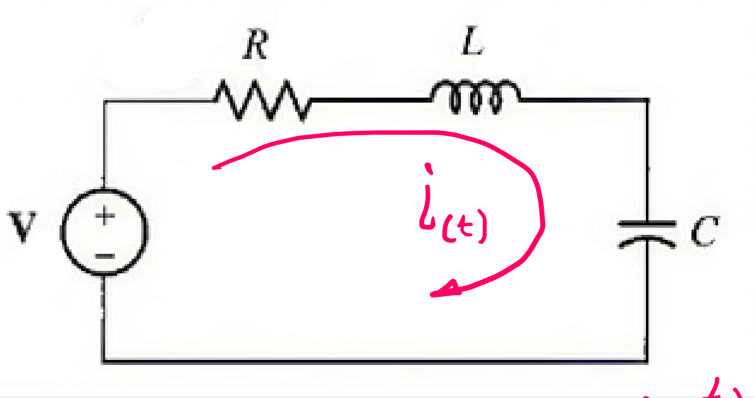
Aquí primero hallamos: $\Im(e^{-2t}u(t)) = \frac{1}{jw+2}$ (fórmula 14) ➔ por fórmula 4: $\Im\left(e^{-2(t-1)}u(t-1)\right) = e^{-jw}.\frac{1}{jw+2}$

$\Im\left(e^{-2t}u(t-1)\right) = \frac{1}{e^2}.e^{-jw}.\frac{1}{jw+2}$ y se reemplaza en (*): $Y(w) = \frac{jw+2}{jw+3}.\frac{1}{e^2}.e^{-jw}.\frac{1}{jw+2} = \frac{1}{e^2}.e^{-jw}.\frac{1}{jw+3}$

$Y(w) = \frac{1}{e^2}.e^{-jw}.\Im\left(e^{-3t}u(t)\right)$ ➔ $\Im(y(t)) = \frac{1}{e^2}.\Im\left(e^{-3(t-1)}u(t-1)\right)$ ➔ $y(t) = \frac{e^3}{e^2}.e^{-3t}u(t-1)$

Sistema LTI

Ejemplo 6. El siguiente circuito es un sistema LTI , donde la señal de entrada es $v(t)$ y la de salida es corriente $i(t)$ que circula por el circuito. L=1H, R=3Ω , C=0,5F.
Halle la respuesta en frecuencia del sistema. $\Rightarrow I(w) = ????$



Nota. Para la corriente $i(t)$ que pasa por el capacitor se cumple que: $I(0) = 0$, donde $I(\mathrm{w}) = \mathcal{F}(i(t))$

En el circuito RLC en serie se cumple: $\boldsymbol{Ri(t) + L\frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} i(\tau)d\tau = v(t)}$

* EC. INTEGRO – DIFERENCIAL

$\boldsymbol{3i(t) + 1i'(t) + 2\int_{-\infty}^{t} i(\tau)d\tau = v(t)}$ ➔ Lo derivamos: $\mathbf{3i'(t) + i''(t) + 2i(t) = v'(t)}$

* EDO

$3\mathfrak{I}(i'(t)) + \mathfrak{I}(i''(t)) + 2\mathfrak{I}(i(t)) = \mathfrak{I}(v'(t))$

$3(jw)I(w) + (jw)^2 I(w) + 2I(w) = (jw)V(w)$

$I(w)[(jw)^2 + 3(jw) + 2] = (jw)V(w)$

Rpta: $$I(w) = \frac{(jw)}{[(jw)^2 + 3(jw) + 2]}.V(w)$$

(Respuesta)
entrada → [ ] → salida
$v(t)$ $\quad$ (t: tiempo) $\quad$ $i(t)$
↓ $\qquad$ ↓
$V(w)$ $\qquad$ $I(w)$
(w: frecuencia)

$\mathcal{F}(f(t)) = F(w)$

$\mathcal{F}(f'(t)) = (jw)F(w)$

$\mathcal{F}(f''(t)) = (jw)^2 F(w)$