Facultad de Ingeniería

Carrera de Ingeniería Electrónica
Carrera de Telecomunicaciones y Redes
Carrera de Ingeniería Mecatrónica

CURSO

Señales y Sistemas

TEMA

Múltiples variables aleatorias

Operaciones con múltiples variables aleatorias

PROFESOR

Ing. Christian del Carpio Damián

MÚLTIPLES VARIABLES ALEATÓRIAS

DISTRIBUCIÓN CONJUNTA Y SUS PROPIEDADES

Función de distribución conjunta

La función de distribución conjunta se define como

$$F_{XY}(x,y) = P(X \leq x, Y \leq y)$$

Para el caso discreto, se tiene:

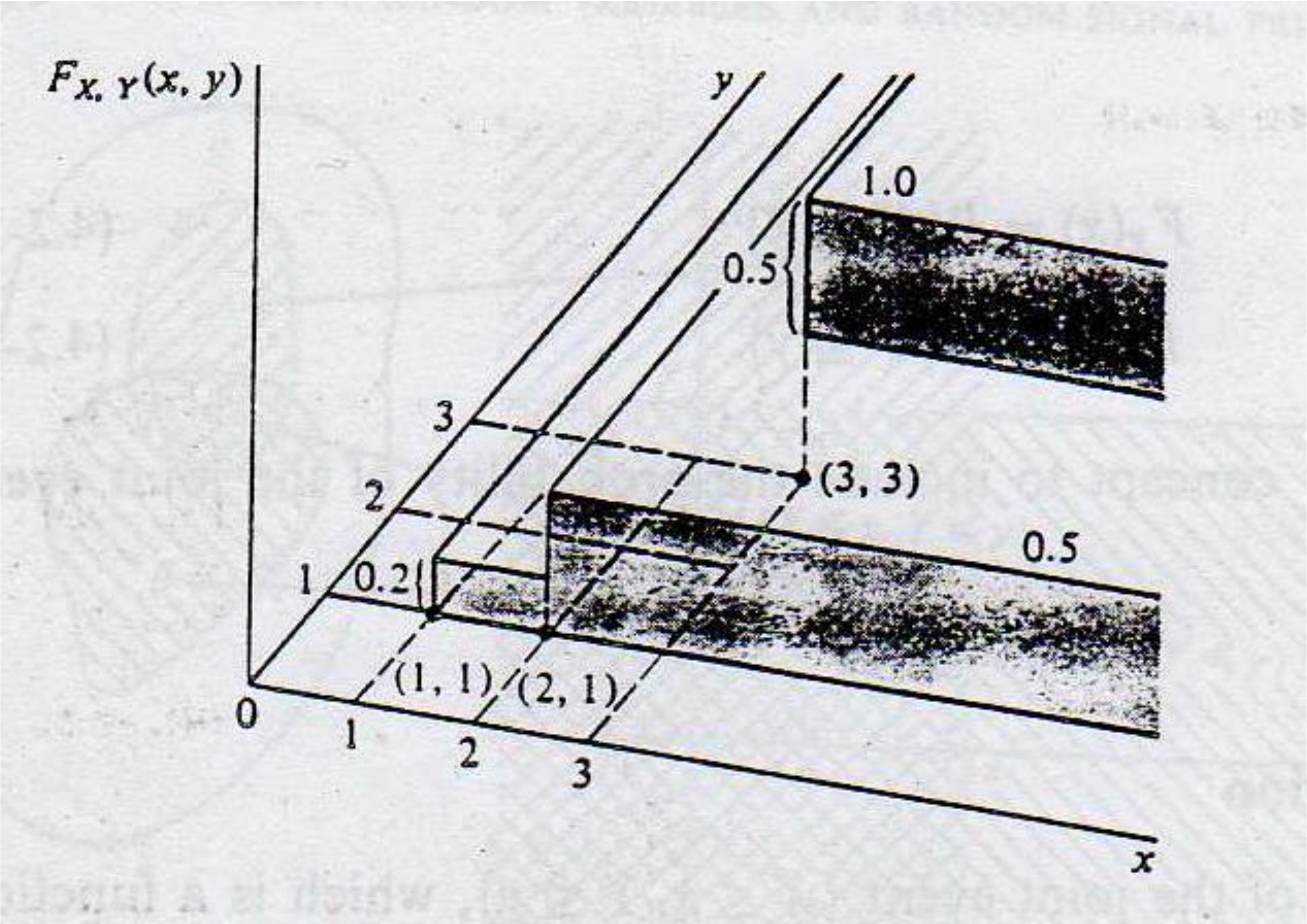
$$F_{XY}(x,y) = \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{M} P(x_i, y_j)u(x-x_i)u(y-y_j)$$

DISTRIBUCIÓN CONJUNTA Y SUS PROPIEDADES

Ejemplo 1

Supongamos que el espacio muestra conjunto solo tiene tres elementos posibles: (1,1), (2,1) y (3,3). Las probabilidades de estos elementos son P(1,1)=0.2; P(2,1)=0.3 y P(3,3)=0.5. Hallar $F_{XY}(x,y)$

DISTRIBUCIÓN CONJUNTA Y SUS PROPIEDADES



Gráfica de la función de distribución conjunta del problema 1

DISTRIBUCIÓN CONJUNTA Y SUS PROPIEDADES

Propiedades de la función de distribución conjunta

(1) $F_{XY}(-\infty,-\infty)=0 \quad F_{XY}(-\infty,y)=0 \quad F_{XY}(x,-\infty)=0$

(2) $F_{XY}(\infty,\infty)=1$

(3) $0\leq F_{XY}(x,y)\leq 1$

(4) $F_{XY}(x,y)$ *es una función no decreciente según x e y*

(5) $$F_{XY}(x_2,y_2)+F_{XY}(x_1,y_1)-F_{XY}(x_1,y_2)-F_{XY}(x_2,y_1)$$
$$=P\{x_1<X\leq x_2, y_1<Y\leq y_2\}\geq 0$$

(6) $F_{XY}(x,\infty)=F_X(x) \qquad F_{XY}(\infty,y)=F_Y(y)$

DISTRIBUCIÓN CONJUNTA Y SUS PROPIEDADES

Ejemplo 2

Sea

$$F_{XY}(x,y) = 0.2u(x-1)u(y-1) + 0.3u(x-2)u(y-1) + 0.5u(x-3)u(y-3)$$

Determinar $F_X(x)$ y $F_Y(y)$

DENSIDAD CONJUNTA Y SUS PROPIEDADES

Función de densidad de probabilidad conjunta

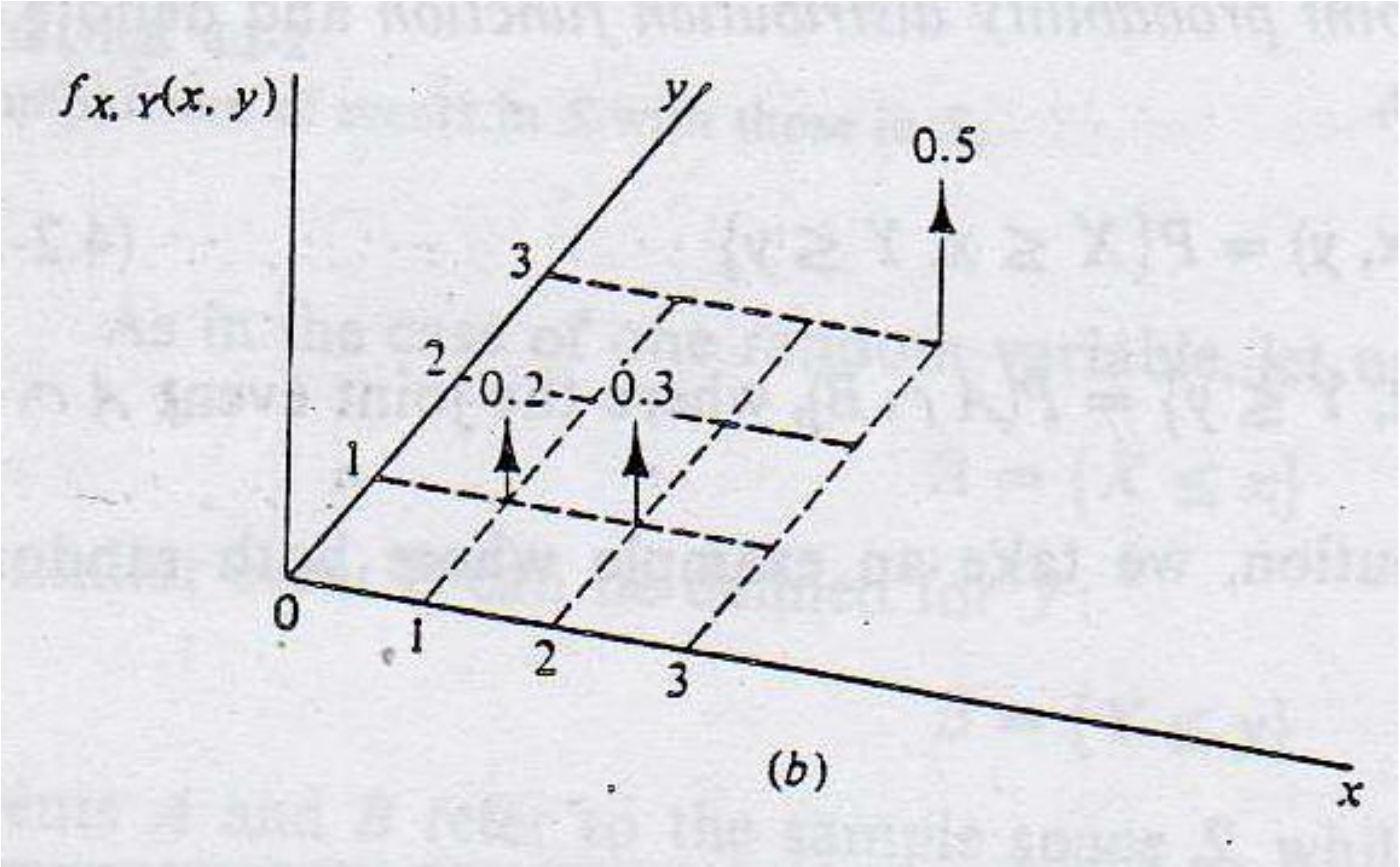
La función de densidad conjunta se define como

$$f_{XY}(x,y) = \frac{\partial^2 F_{XY}(x,y)}{\partial x \partial y}$$

Para el caso discreto, se tiene:

$$f_{XY}(x,y) = \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{M} P(x_i, y_j)\delta(x - x_i)\delta(y - y_j)$$

DENSIDAD CONJUNTA Y SUS PROPIEDADES



Gráfica de la función de densidad conjunta del problema 1

DENSIDAD CONJUNTA Y SUS PROPIEDADES

Propiedades de la función de densidad conjunta

(1) $0 \leq f_{XY}(x,y)$

(2) $\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x,y)dxdy = 1$

(3) $F_{XY}(x,y) = \int_{-\infty}^{y}\int_{-\infty}^{x} f_{XY}(p,s)dpds$

(4) $P(x_1 < X \leq X_2, y_1 < Y \leq y_2) = \int_{y1}^{y2}\int_{x1}^{x2} f_{XY}(x,y)dxdy$

(5) $F_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{x} f_{XY}(p,y)dpdy$

(6) $F_Y(y) = \int_{-\infty}^{y}\int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x,s)dxds$

DENSIDAD CONJUNTA Y SUS PROPIEDADES

Propiedades de la función de densidad conjunta

$$(7)\quad f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x,y)\,dy$$

$$(8)\quad f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x,y)\,dx$$

DENSIDAD CONJUNTA Y SUS PROPIEDADES

Ejemplo 3

En el desarrollo de un nuevo receptor para la transmisión de información digital, cada bit recibido se clasifica como aceptable, dudoso o inaceptable dependiendo de la calidad de la señal recibida, con probabilidades 0.9, 0.08 y 0.02, respectivamente. Suponga que la clasificación de cada bit es independiente.

En los primeros cuatro bits transmitidos, sea que *X* denote el número de bits aceptables y *Y* el número de bits dudosos.

Graficar la función de densidad conjunta de "*X*" e "*Y* "

INDEPENDENCIA ESTADÍSTICA

Dos variables aleatorias son independientes si se cumple:

$$f_{XY}(x,y) = f_X(x)\, f_Y(y)$$

$$F_{XY}(x,y) = F_X(x) F_Y(y)$$

INDEPENDENCIA ESTADÍSTICA

Ejemplo 4

Sea la función de densidad conjunta

$$f_{XY}(x, y) = \frac{1}{12} u(x) u(y) e^{-(x/4)-(y/3)}$$

Determinar

a. P{2<X ≤ 4, -1<Y≤5}

b. si son independientes

INDEPENDENCIA ESTADÍSTICA

Ejemplo 5

Una función de densidad de probabilidad conjunta es dada por

$$\mathrm{f}_{X,Y}(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{ab} & 0<x<a \quad \wedge \quad 0<y<b\\[2ex] 0 & otra\ \ forma\end{cases}$$

Determinar

a. $F_{XY}(xy)$

b. si son independientes

INDEPENDENCIA ESTADÍSTICA

SUMA DE DOS VARIABLES ALEATORIAS

Se define “X” e “Y” dos variables aleatorias independientes

$$W = X + Y$$

La función de distribución seria

$$F_W(w) = P\{W \le w\} = P\{X + Y \le w\}$$

Así mismo:

$$F_W(w) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{x=-\infty}^{w-y} f_{XY}(x, y)dxdy$$

INDEPENDENCIA ESTADÍSTICA

Debido a que *"X"* y *"Y"* son independientes se tiene:

$$F_W(w) = \int_{-\infty}^{\infty} f_Y(y) \int_{x=-\infty}^{w-y} f_X(x)dxdy$$

La función de densidad sería

$$f_W(w) = \int_{-\infty}^{\infty} f_Y(y) f_X(w-y)dy$$

INDEPENDENCIA ESTADÍSTICA

Ejemplo 6

Hallar la función de densidad de $W = X + Y$, donde las funciones de densidad de *X* e *Y* son

$$f_X(x) = \frac{1}{a}[u(x) - u(x-a)]$$

$$f_Y(y) = \frac{1}{b}[u(y) - u(y-b)]$$

A demás se sabe que $0 < a < b$

TEOREMA DE LÍMITE CENTRAL

Sean "N" variables aleatorias independientes:

$$X_1, X_2, ...X_n$$

Se define

$$W = X_1 + X_2 + ... + X_n$$

Luego se tiene que

$$f_W(w) = f_{X_1}(x_1) * f_{X_2}(x_2) * .... * f_{X_N}(x_N)$$

$$Si \quad N \to \infty \quad \text{entonces} \quad f_W(w) \quad es\ Gaussiana$$

OPERACIONES CON MÚLTIPLES VARIABLES ALEATÓRIAS

CORRELACIÓN

Sean 2 variables aleatorias *"X"* e *"Y"*, entonces

$$R_{XY} = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} xy\, f_{XY}(x, y)\,dx\,dy = E[XY]$$

Si la correlación es

$$R_{XY} = E[X]E[Y]$$

entonces se dice que *"X"* e *"Y"* son no correlacionados.

Dos variables aleatorias independientes son **NO** correlacionadas.

CORRELACIÓN

Dos variables aleatorias no correlacionadas no necesariamente son independientes (excepción Gaussiana)

Para el caso discreto la correlación es

$$\boxed{R_{XY} = E[XY] = \sum_{i=0}^{M} \sum_{j=0}^{N} x_i y_j f_{XY}(x_i, y_i)}$$

CORRELACIÓN

Si para dos variables aleatorias *“X”* e *“Y”*

$$\boxed{R_{XY} = 0}$$

Se dice que son ortogonales

<u>Ejemplo 7</u>

Sea X una variable aleatoria que tiene $\overline{X} = 3$ y $\sigma_x^2 = 2$

Se define “Y” como $Y = -6X + 22$

Determinar R_{XY}

COVARIANZA

Si para dos variables aleatorias “X” e “Y”

$$C_{XY} = E\left[\left(X - \overline{X}\right)\left(Y - \overline{Y}\right)\right] = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} (x - \overline{x})(y - \overline{y}) f_{XY}(x, y)\,dxdy$$

Así mismo se tiene que

$$C_{XY} = R_{XY} - E[X]E[Y]$$

COEFICIENTE DE CORRELACIÓN

$$\rho_{XY} = \frac{C_{XY}}{\sigma_x \sigma_y}, \qquad -1 \leq \rho_{XY} \leq 1$$

VARIABLES ALEATORIAS CONJUNTAMENTE GAUSSIANAS

Se dice que dos variables aleatorias "*X*" e "*Y*" son conjuntamente gaussianas si su función de densidad conjunta tiene la forma

$$f_{XY}(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma_X\sigma_Y\sqrt{1-\rho_{XY}{}^2}}\,e^{\frac{-1}{2(1-\rho_{XY}{}^2)}\left[\frac{\left(x-\overline{X}\right)^2}{\sigma_X^2}-\frac{2\rho_{XY}\left(x-\overline{X}\right)\left(y-\overline{Y}\right)}{\sigma_X\sigma_Y}+\frac{\left(y-\overline{Y}\right)^2}{\sigma_Y^2}\right]}$$

VARIABLES ALEATORIAS CONJUNTAMENTE GAUSSIANAS

Sean 2 variables aleatorias “X” e “Y” Gaussianas con coeficiente de correlación ρ_{XY} .

Se definen las siguientes variables obtenidas por rotación de “X” e “Y”

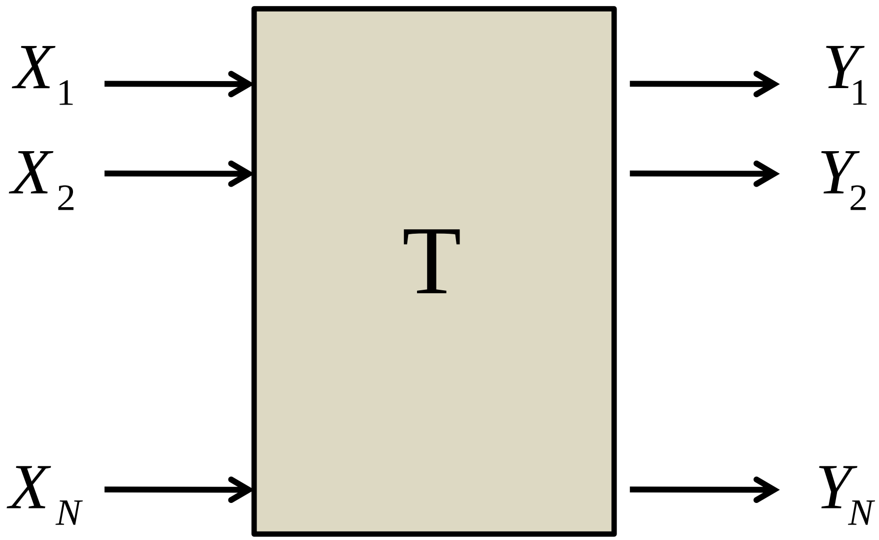
$$\begin{aligned} Y_1 &= X\cos(\theta) + Ysen(\theta) \\ Y_2 &= -Xsen(\theta) + Y\cos(\theta) \end{aligned}$$

Si

$$\theta = \frac{1}{2} tg^{-1}\left(\frac{2\rho_{XY}\sigma_X\sigma_Y}{\sigma_X^2 - \sigma_Y^2} \right)$$

Entonces “Y1” e “Y2” son no correlacionadas e independientes

TRANSFORMACIÓN LINEAL DE VARIABLES GAUSSIANAS



$$Y_1 = a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + \ldots + a_{1N}X_N$$

$$Y_2 = a_{21}X_1 + a_{22}X_2 + \ldots + a_{2N}X_N$$

$$Y_N = a_{N1}X_1 + a_{N2}X_2 + \ldots + a_{NN}X_N$$

$a_{ij}\,, i \ y \ j = 1, 2, \ldots, N$

son números reales

TRANSFORMACIÓN LINEAL DE VARIABLES GAUSSIANAS

Se definen las siguientes matrices

$$[Y]=\begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ . \\ Y_N \end{bmatrix} \qquad [\overline{Y}]=\begin{bmatrix} \overline{Y}_1 \\ \overline{Y}_2 \\ . \\ \overline{Y}_N \end{bmatrix} \qquad [X]=\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ . \\ X_N \end{bmatrix} \qquad [\overline{X}]=\begin{bmatrix} \overline{X}_1 \\ \overline{X}_2 \\ . \\ \overline{X}_N \end{bmatrix}$$

$$[T]=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & & a_{1N} \\ a_{21} & a_{22} & & \\ & & & \\ a_{N1} & a_{N2} & & a_{NN} \end{bmatrix}$$

TRANSFORMACIÓN LINEAL DE VARIABLES GAUSSIANAS

Se cumple que:

$$[Y] = [T][X]$$

$$[X] = [T]^{-1}[Y]$$

$$\left[Y - \overline{Y}\right] = [T]\left[X - \overline{X}\right]$$

$$\left[X - \overline{X}\right] = [T]^{-1}\left[Y - \overline{Y}\right]$$

TRANSFORMACIÓN LINEAL DE VARIABLES GAUSSIANAS

Se define la matriz de covarianza como:

$$[C_X] = \begin{bmatrix} \sigma_{X_1}^2 & C_{X_1X_2} & & C_{X_1X_N} \\ C_{X_2X_1} & \sigma_{X_2}^2 & & \\ & & & \\ C_{X_NX_1} & C_{X_NX_2} & & \sigma_{X_N}^2 \end{bmatrix}$$

$$C_{X_iX_j} : \text{covarianza } \mathit{entre}\ X_i\ y\ X_j$$

$$C_{X_iX_j} = \overline{\left(X_i - \overline{X}_i\right)\left(X_j - \overline{X}_j\right)}$$

TRANSFORMACIÓN LINEAL DE VARIABLES GAUSSIANAS

Se define la matriz de covarianza como:

$$[C_Y] = \begin{bmatrix} \sigma_{Y_1}^2 & C_{Y_1Y_2} & & C_{Y_1Y_N} \\ C_{Y_2Y_1} & \sigma_{Y_2}^2 & & \\ & & & \\ C_{Y_NY_1} & C_{Y_NY_2} & & \sigma_{Y_N}^2 \end{bmatrix}$$

$$C_{Y_iY_j} : \text{covarianza } \textit{entre } Y_i \ y \ Y_j$$

$$C_{Y_iY_j} = \overline{\left(Y_i - \overline{Y}_i\right)\left(Y_j - \overline{Y}_j\right)}$$

FUNCIÓN DE DENSIDAD GAUSSIANA CONJUNTA DE N-ESIMO ORDEN

$$f_{X_1,X_2,\ldots,X_N}(x_1,x_2,\ldots,x_N)=\frac{\left|\left[C_X\right]^{-1}\right|^{1/2}}{(2\pi)^{N/2}}\,e^{-\left[\frac{\left(X-\overline{X}\right)^T(C_X)^{-1}(X-\overline{X})}{2}\right]}$$

$$[X]\longrightarrow\boxed{[T]}\longrightarrow[Y]$$

FUNCIÓN DE DENSIDAD GAUSSIANA CONJUNTA DE N-ESIMO ORDEN

$$f_{Y_1,Y_2,....,Y_N}(y_1,y_2,....,y_N)=\frac{\left|[C_Y]^{-1}\right|^{1/2}}{(2\pi)^{N/2}}e^{-\left[\frac{\left(Y-\overline{Y}\right)^T(C_Y)^{-1}(Y-\overline{Y})}{2}\right]}$$

$$[C_Y]=[T][C_X][T]^T$$

$$\left[\overline{Y}\right]=[T]\left[\overline{X}\right]$$

FUNCIÓN DE DENSIDAD GAUSSIANA CONJUNTA DE N-ESIMO ORDEN

Ejemplo 8

Dos variables aleatorias X_1 y X_2 tienen media cero y varianzas 4 y 9 respectivamente. Su covarianza es 3. Si X_1 y X_2 son linealmente transformadas a nuevas variables Y_1 e Y_2 de acuerdo a:

$$Y_1 = X_1 - 2X_2$$
$$Y_2 = 3X_1 + 4X_2$$

Determinar la matriz de covarianza $[C_Y]$

FUENTE:

PEYTON Z. PEEBLES, Jr. “Principios de probabilidad, variables aleatorias y señales aleatorias” McGraw-Hill/INTERAMERICANA DE ESPAÑA, 4ª ed., 2006