Facultad de Ingeniería

Carrera de Ingeniería Electrónica
Carrera de Telecomunicaciones y Redes
Carrera de Ingeniería Mecatrónica

CURSO

Señales y Sistemas

TEMA

Representación de señales periódicas en Series de Fourier

PROFESOR

Ing. Christian del Carpio Damián

LA RESPUESTA DE SISTEMAS LTI A EXPONENCIALES COMPLEJAS

LA RESPUESTA DE SISTEMAS LTI A EXPONENCIALES COMPLEJAS

En sistemas LTI, es muy importante representar las señales como combinaciones lineales de señales básicas que posean las siguientes 2 propiedades:

1. El conjunto de señales básicas se puede usar para construir una amplia y útil clase de señales.

2. La respuesta de un sistema LTI a cada una de las señales debe ser lo bastante sencilla en estructura como para proporcionar una representación conveniente de la respuesta del sistema a cualquier señal construida como una combinación lineal de las señales básicas.

LA RESPUESTA DE SISTEMAS LTI A EXPONENCIALES COMPLEJAS

La importancia del análisis de Fourier proviene en gran medida del hecho de que el conjunto de señales exponenciales complejas continuas producen estas propiedades, es decir, señales continuas de la forma e^{st} , donde s son números complejos.

LA RESPUESTA DE SISTEMAS LTI A EXPONENCIALES COMPLEJAS

La importancia de las exponenciales complejas en el estudio de los sistemas LTI radica en el hecho de que la respuesta de un sistema LTI a una entrada exponencial compleja es la misma exponencial compleja con sólo un cambio en amplitud; esto es,

$$\boxed{e^{st} \rightarrow H(s)e^{st}}$$

donde el factor complejo de amplitud H(s) será, en general, una función de la variable compleja s.

LA RESPUESTA DE SISTEMAS LTI A EXPONENCIALES COMPLEJAS

A una señal para la cual la salida del sistema es una constante (probablemente compleja) multiplicada por la entrada se le conoce como una función propia (eigenfunction) del sistema, y el factor de amplitud se conoce como el valor propio (eigenvalue) del sistema.

$$\boxed{y(t) = H(s)e^{st}}$$

LA RESPUESTA DE SISTEMAS LTI A EXPONENCIALES COMPLEJAS

Para el análisis de los sistemas LTI, la utilidad de descomponer señales mas generales en términos de las funciones propias se puede ver que a partir de un ejemplo.

Sea

$$x(t) = a_1 e^{s_1 t} + a_2 e^{s_2 t} + a_3 e^{s_3 t}$$

Por la propiedad de función propia, la respuesta a cada señal por separado es

$$a_1 e^{s_1 t} \rightarrow a_1 H(s_1) e^{s_1 t}$$
$$a_2 e^{s_2 t} \rightarrow a_2 H(s_2) e^{s_2 t}$$
$$a_3 e^{s_3 t} \rightarrow a_3 H(s_3) e^{s_3 t}$$

LA RESPUESTA DE SISTEMAS LTI A EXPONENCIALES COMPLEJAS

Por lo tanto

$$\boxed{y(t) = a_1 H(s_1) e^{s_1 t} + a_2 H(s_2) e^{s_2 t} + a_3 H(s_3) e^{s_3 t}}$$

LA RESPUESTA DE SISTEMAS LTI A EXPONENCIALES COMPLEJAS

En concreto, si la entrada a un sistema LTI continuo se representa como una combinación lineal de exponenciales complejas, esto es, si

$$x(t) = \sum_k a_k e^{s_k t}$$

Entonces la salida será

$$y(t) = \sum_k a_k H(s_k) e^{s_k t}$$

LA RESPUESTA DE SISTEMAS LTI A EXPONENCIALES COMPLEJAS

Ejemplo 1

Considere un sistema LTI para el cual la entrada x(t) y la salida y(t) están relacionadas por un desplazamiento en el tiempo de 3, es decir

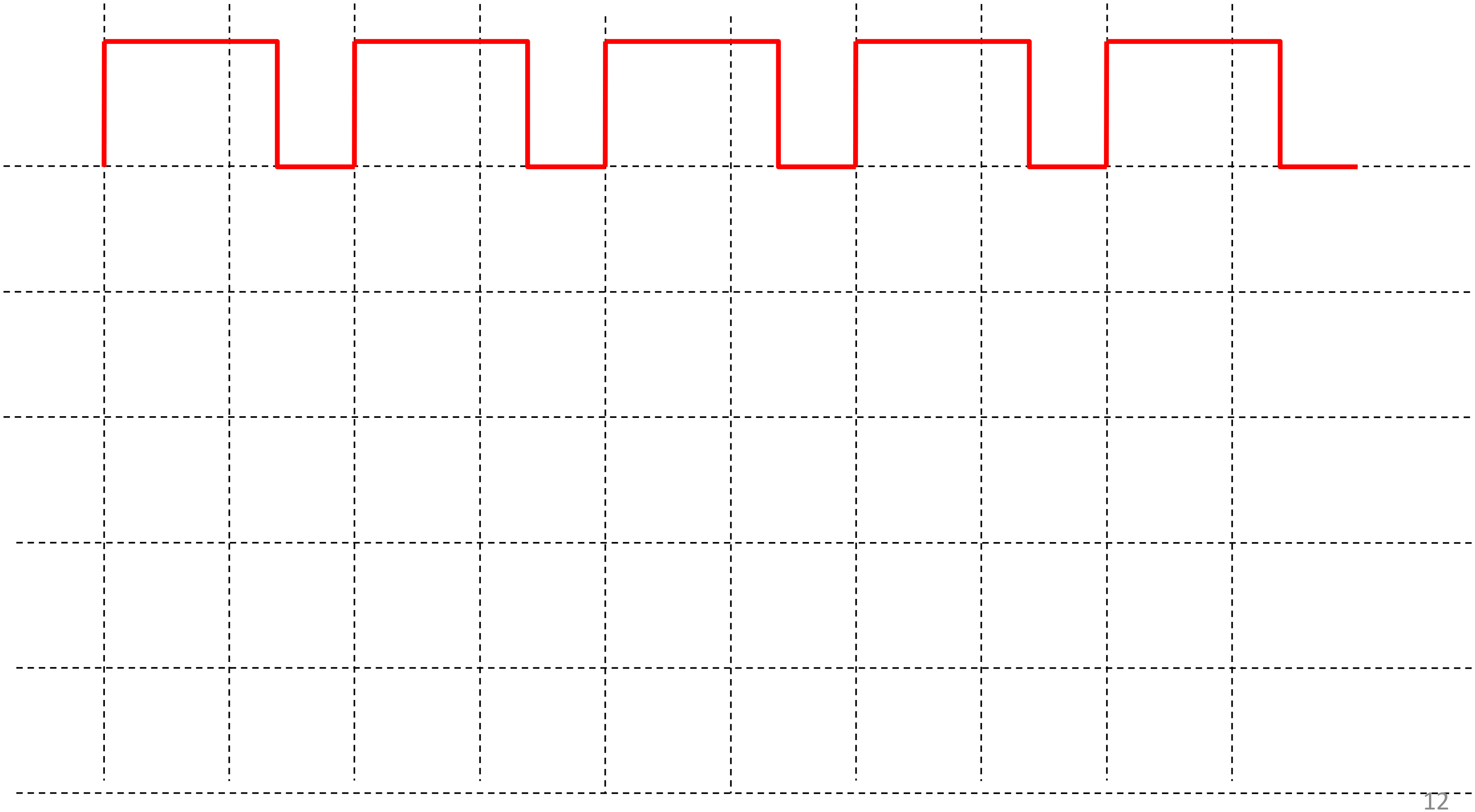
$$y(t) = x(t-3)$$

Si la entrada a este sistema es la exponencial compleja $x(t) = e^{j2t}$. Hallar H(s)

SERIES DE FOURIER DE SEÑALES PERIÓDICAS CONTINUAS

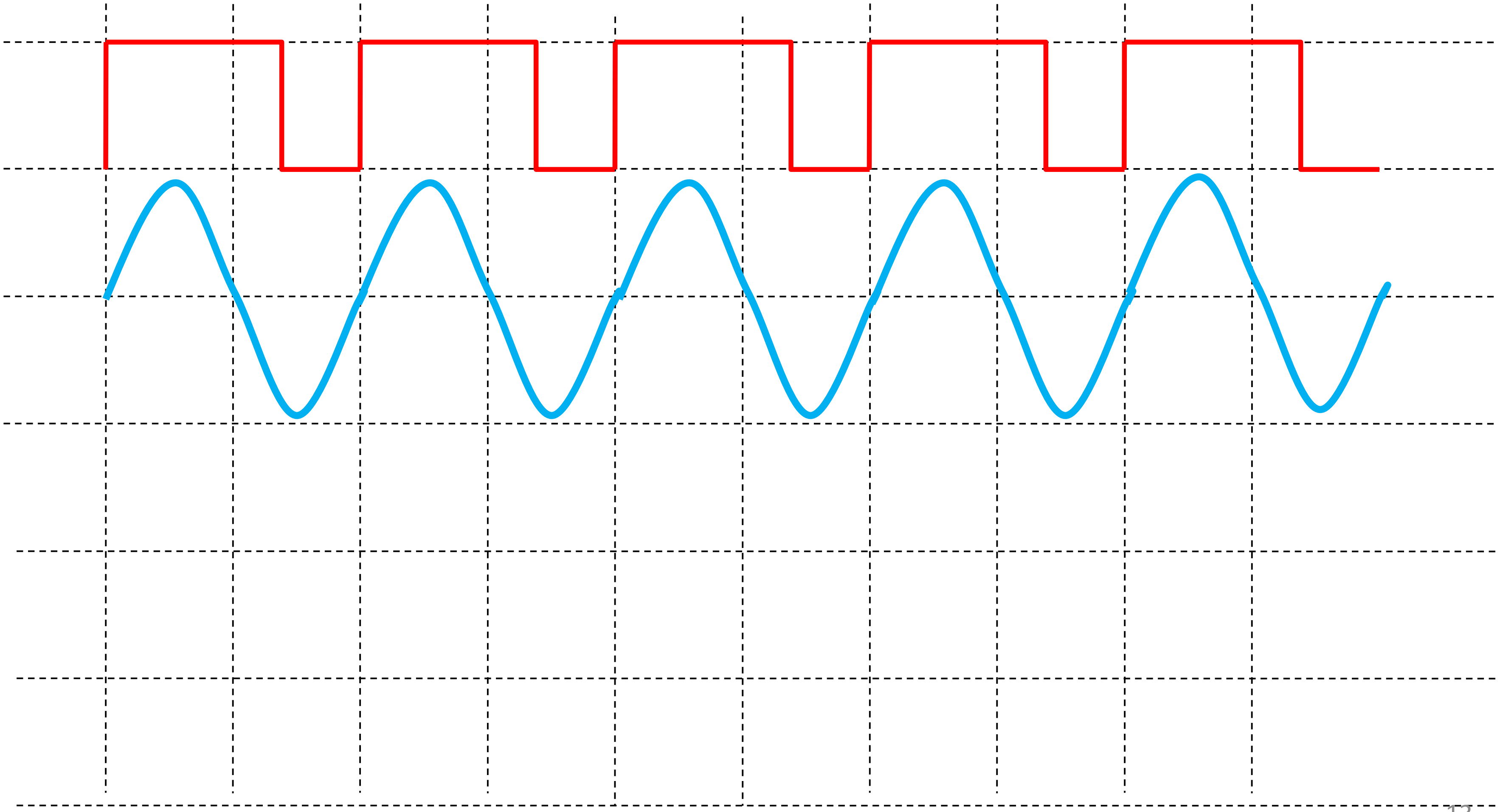
REPRESENTACIÓN EN SERIES DE FOURIER DE SEÑALES PERIÓDICAS CONTINUAS

Sea la señal x(t) de periodo T_0=1



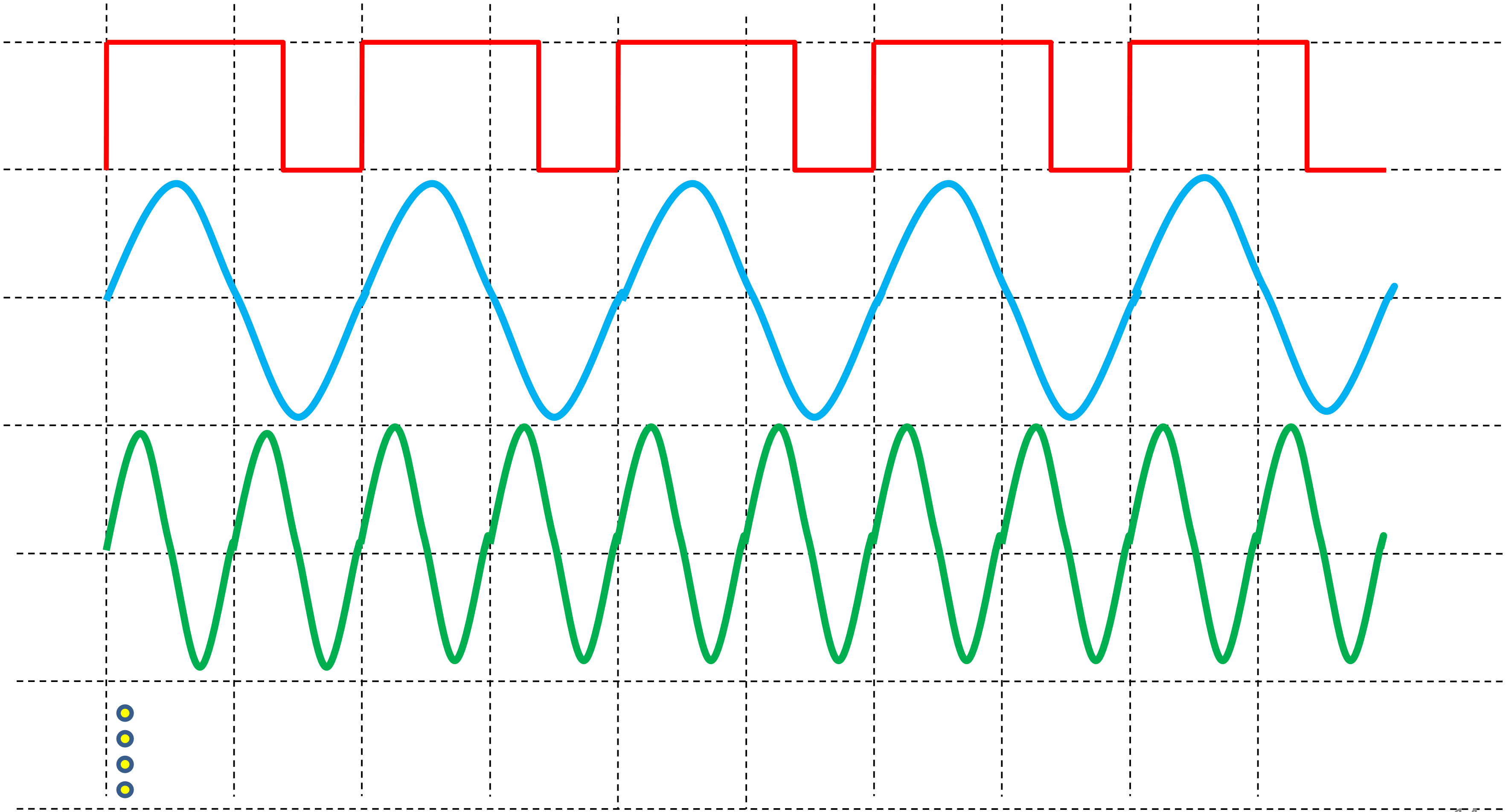
REPRESENTACIÓN EN SERIES DE FOURIER DE SEÑALES PERIÓDICAS CONTINUAS

Sea la señal x(t) de periodo T_0=1

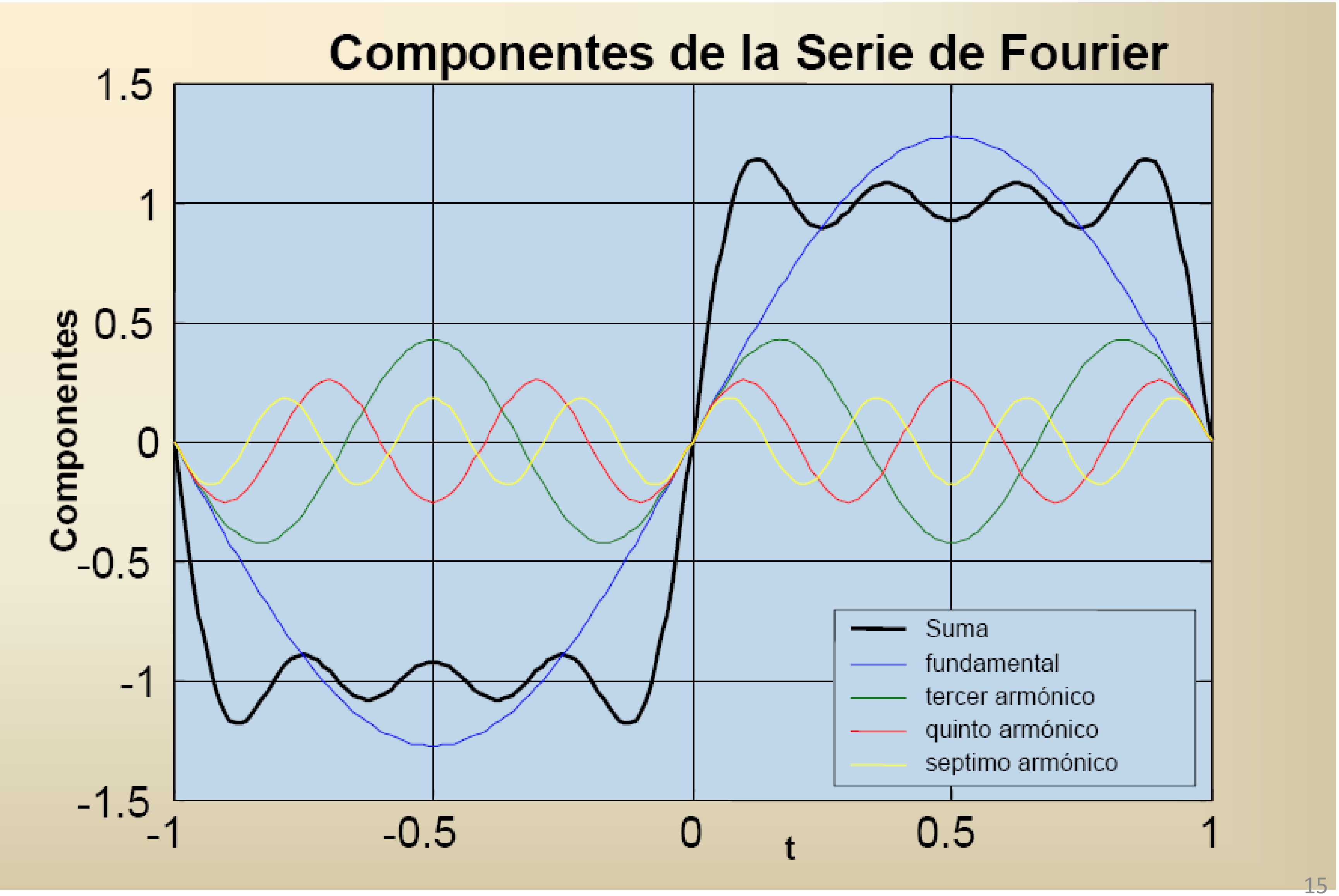


REPRESENTACIÓN EN SERIES DE FOURIER DE SEÑALES PERIÓDICAS CONTINUAS

Sea la señal x(t) de periodo T_0=1



REPRESENTACIÓN EN SERIES DE FOURIER DE SEÑALES PERIÓDICAS CONTINUAS



REPRESENTACIÓN EN SERIES DE FOURIER DE SEÑALES PERIÓDICAS CONTINUAS

Una señal es periódica si, para algún valor positivo de T,

$$\boxed{x(t) = x(t+T) \quad \text{para todo } t}$$

El periodo fundamental de *x(t)* es el valor mínimo positivo de **T** diferente de cero para el cual, la ecuación anterior se satisface, y el valor $w_0 = 2\pi / T$ se conoce como la frecuencia angular fundamental.

REPRESENTACIÓN EN SERIES DE FOURIER DE SEÑALES PERIÓDICAS CONTINUAS

Se tiene dos señales periódicas básicas, la señal senoidal

$$x(t) = \cos(w_0 t)$$

y la exponencial compleja periódica

$$x(t) = e^{jw_0 t}$$

REPRESENTACIÓN EN SERIES DE FOURIER DE SEÑALES PERIÓDICAS CONTINUAS

Serie trigonométrica de Fourier

Se tiene una señal g(t) formada por la suma de senoides de frecuencias

$$0, f_0, 2f_0, \ldots\ldots kf_0$$

$$\boxed{g(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{k} a_n \cos(nw_0 t) + b_n sen(nw_0 t)}$$

donde

$$a_0 = \frac{1}{T_0} \int_{t_0}^{t_0+T_0} g(t)dt$$

$$a_n = \frac{2}{T_0} \int_{t_0}^{t_0+T_0} g(t)\cos(nw_0 t)dt \,, \qquad w_0 = 2\pi f_0 = \frac{2\pi}{T_0}$$

$$b_n = \frac{2}{T_0} \int_{t_0}^{t_0+T_0} g(t)sen(nw_0 t)dt \,, \qquad w_0 = 2\pi f_0 = \frac{2\pi}{T_0}$$

REPRESENTACIÓN EN SERIES DE FOURIER DE SEÑALES PERIÓDICAS CONTINUAS

Serie compacta de Fourier

La serie trigonométrica de Fourier de la expresión anterior, se puede expresar de una manera más compacta y significativa como sigue

$$\boxed{g(t) = C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos(n w_o t + \theta(n))}$$

donde

$$C_0 = a_0$$

$$C_n = \sqrt{a^2{}_n + b^2{}_n}$$

$$\theta_n = -\tan^{-1}\left(\frac{b_n}{a_n}\right)$$

REPRESENTACIÓN EN SERIES DE FOURIER DE SEÑALES PERIÓDICAS CONTINUAS

Serie compacta de Fourier

De la serie compacta de Fourier se deduce que g(t) consta de señales senoidales de $0, f_0, 2f_0, ...nf_0$ frecuencias.

La n-ésima armónica, $C_n \cos(nw_0 t + \theta_n)$,tiene amplitud C_n, y fase θ_n

Se puede trazar la gráfica del **espectro de magnitud** (C_n versus ω) y del **espectro de fase** (θ_n versus ω) para una señal periódica dada.

REPRESENTACIÓN EN SERIES DE FOURIER DE SEÑALES PERIÓDICAS CONTINUAS

Serie Exponencial de Fourier

Una señal senoidal de frecuencia nw_o se puede expresar en términos de las señales exponenciales $e^{jnw_o t}$ y $e^{-jnw_o t}$, una señal periódica g(t) con un periodo T_0 se puede también representar mediante una serie que consta de componentes exponenciales en la forma

$$g(t) = G_o + G_1 e^{jw_o t} + G_2 e^{j2w_o t} + \ldots\ldots + G_n e^{jnw_o t} + \ldots\ldots\ldots$$
$$+ G_{-1} e^{-jw_o t} + G_{-2} e^{-j2w_o t} + \ldots\ldots + G_{-n} e^{-jnw_o t} + \ldots\ldots\ldots$$

REPRESENTACIÓN EN SERIES DE FOURIER DE SEÑALES PERIÓDICAS CONTINUAS

Serie Exponencial de Fourier

$$g(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} G_n e^{jnw_o t} \qquad w_0 = 2\pi f_0 = \frac{2\pi}{T_0}$$

donde

$$G_n = \frac{1}{T_0} \int_{t_o}^{t_o+T_o} g(t) e^{-jnw_o t} dt$$

REPRESENTACIÓN EN SERIES DE FOURIER DE SEÑALES PERIÓDICAS CONTINUAS

Serie Exponencial de Fourier

Así mismo se tiene que

$$a_0 = G_0$$

$$\left.\begin{aligned} a_n &= G_n + G_{-n} \\ b_n &= j(G_n - G_{-n}) \end{aligned}\right\} n \neq 0$$

$$\left.\begin{aligned} G_n &= \frac{1}{2}(a_n - jb_n) \\ G_{-n} &= \frac{1}{2}(a_n + jb_n) \end{aligned}\right\} n \geq 1$$

REPRESENTACIÓN EN SERIES DE FOURIER DE SEÑALES PERIÓDICAS CONTINUAS

Serie Exponencial de Fourier

Para una g(t) real, a_n y b_n son números reales, y los coeficientes G_n y G_{-n} son conjugados

$$G_n = G_n^{\,*}$$

Por lo tanto, si

$$G_n = \left|G_n\right| e^{j\theta_n}$$

$$G_{-n} = \left|G_n\right| e^{-j\theta_n}$$

REPRESENTACIÓN EN SERIES DE FOURIER DE SEÑALES PERIÓDICAS CONTINUAS

Serie Exponencial de Fourier

$|G_n|$ es la magnitud y θ_n es el ángulo o la fase de Gn. En consecuencia, para una g(t) real, $|G_{-n}| = |G_n|$, y el **espectro de magnitud** $|G_n|$ contra ω es una función par de ω. En forma similar, el **espectro de fase** θ_n contra ω es una función impar de ω ya que $\theta_{-n} = -\theta_n$

PROPIEDADES DE LA SERIE CONTINUA DE FOURIER

Los coeficientes de la serie de Fourier de *x(t)* se denotan como a_k, la notación a usar será

$$x(t) \overset{FS}{\leftrightarrow} a_k$$

Para indicar la correspondencia de una señal periódica con sus coeficientes de la serie de Fourier.

Linealidad

Sea

$$x(t) \overset{FS}{\leftrightarrow} a_k \qquad y(t) \overset{FS}{\leftrightarrow} b_k$$

$$z(t) = Ax(t) + By(t) \overset{FS}{\leftrightarrow} C_k = Aa_k + Bb_k$$

PROPIEDADES DE LA SERIE CONTINUA DE FOURIER

Desplazamiento en el Tiempo

Sea

$$x(t) \overset{FS}{\leftrightarrow} a_k$$

$$\boxed{x(t-t_0) \overset{FS}{\leftrightarrow} e^{-jkw_0 t_0} a_k = e^{-jk\left(\frac{2\pi}{T_0}\right)t_0} a_k}$$

Inversión de Tiempo

Sea

$$x(t) \overset{FS}{\leftrightarrow} a_k$$

$$\boxed{x(-t) \overset{FS}{\leftrightarrow} a_{-k}}$$

PROPIEDADES DE LA SERIE CONTINUA DE FOURIER

Escalamiento de Tiempo

Sea

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jkw_o t} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\left(\frac{2\pi}{T_0}\right)t}$$

entonces

$$\boxed{x(\alpha t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk(\alpha w_o)t}}$$

Es la representación de serie de Fourier de $x(\alpha t)$. Se debe enfatizar que, mientras que los coeficientes de Fourier no sufren cambio, la representación en serie de Fourier si cambia debido a la variación de la frecuencia fundamental.

PROPIEDADES DE LA SERIE CONTINUA DE FOURIER

Multiplicación

Sea

$$x(t) \overset{FS}{\longleftrightarrow} a_k \qquad\qquad y(t) \overset{FS}{\longleftrightarrow} b_k$$

entonces

$$\boxed{x(t)y(t) \overset{FS}{\longleftrightarrow} h_k = \sum_{l=-\infty}^{\infty} a_l b_{k-l}}$$

Observar que la suma del miembro derecho de la ecuación se puede interpretar como la convolución discreta de las secuencias que representan los coeficientes de Fourier de x(t) y y(t).

PROPIEDADES DE LA SERIE CONTINUA DE FOURIER

Conjugación y simetría conjugada

Sea

$$x(t) \overset{FS}{\leftrightarrow} a_k$$

entonces

$$x^*(t) \overset{FS}{\leftrightarrow} a^*_{-k}$$

Relación de Parseval para señales periódicas continuas

$$\boxed{\frac{1}{T_0}\int_{T_0} \left|x(t)\right|^2 dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left|a_k\right|^2}$$

SERIE DE FOURIER Y SISTEMAS LTI

La respuesta de un sistema LTI a una combinación lineal de exponenciales complejas toma una forma particularmente sencilla

$$x(t) = e^{st} \quad \rightarrow \quad y(t) = H(s)e^{st}$$

donde

$$\boxed{H(s) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)e^{-st}d\tau}$$

En la cual h(t) es a respuesta al impulso del sistema LTI.

SERIE DE FOURIER Y SISTEMAS LTI

Cuando "s" es en general un número complejo, *H(s)* se conoce como la función del sistema. Para señales y sistemas continuos, se tomará el caso específico en el que $s = jw$ y, en consecuencia, e^{st} es de la forma e^{jwt}. Esta entrada es una exponencial compleja a la frecuencia ω. La función del sistema de la forma $s = jw$, se conoce como la respuesta en frecuencia del sistema y esta dada por

$$H(jw) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{-jwt} d\tau$$

SERIE DE FOURIER Y SISTEMAS LTI

Sea x(t) una señal periódica cuya representación en serie de Fourier está dada por

$$x(t)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jkw_0 t}$$

Si se aplica esta señal como la entrada a un sistema LTI con respuesta al impulso h(t). Entonces, debido a que cada exponencial compleja que forma la señal de entrada, es una función propia del sistema, con $s_k = jkw_0$, se desprende que la salida es de la forma

$$\boxed{y(t)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k H(jkw_o) e^{jkw_o}}$$

Así, *y(t)* también es periódica con la misma frecuencia fundamental *que x(t).*

FILTRADO

FILTRADO

En diversas aplicaciones, resulta de interés cambiar las amplitudes relativas de las componentes de frecuencia de una señal, o quizás eliminar por completo algunas componentes de frecuencia, proceso conocido como filtrado.

Los sistemas LTI que cambian la forma del espectro se conocen como **filtros conformadores de frecuencia**.

FILTRADO

Los sistemas LTI que dejan pasar algunas componentes de frecuencia sin distorsionarlas y atenúan significativamente o eliminan por completo otras se conocen como **filtros selectivos en frecuencia.**

FILTRADO

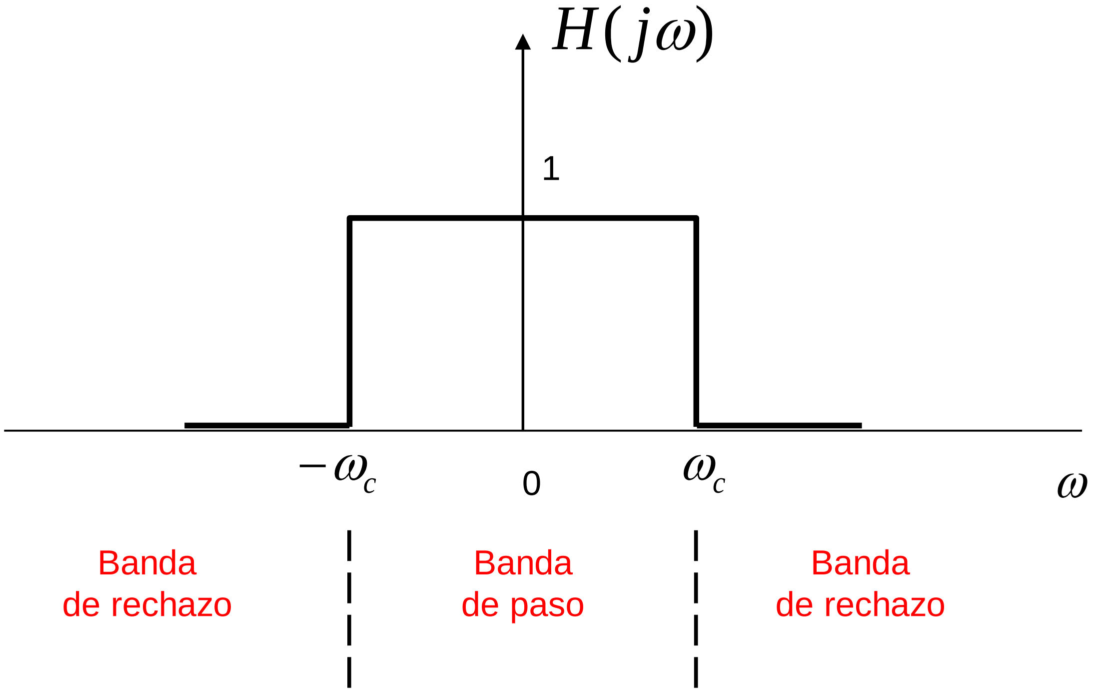
Filtros selectivos en frecuencia

Filtros destinados específicamente a seleccionar con exactitud o muy aproximadamente algunas bandas de frecuencias y rechazar otras.

Existen varios tipos de filtros básicos, y estos son:

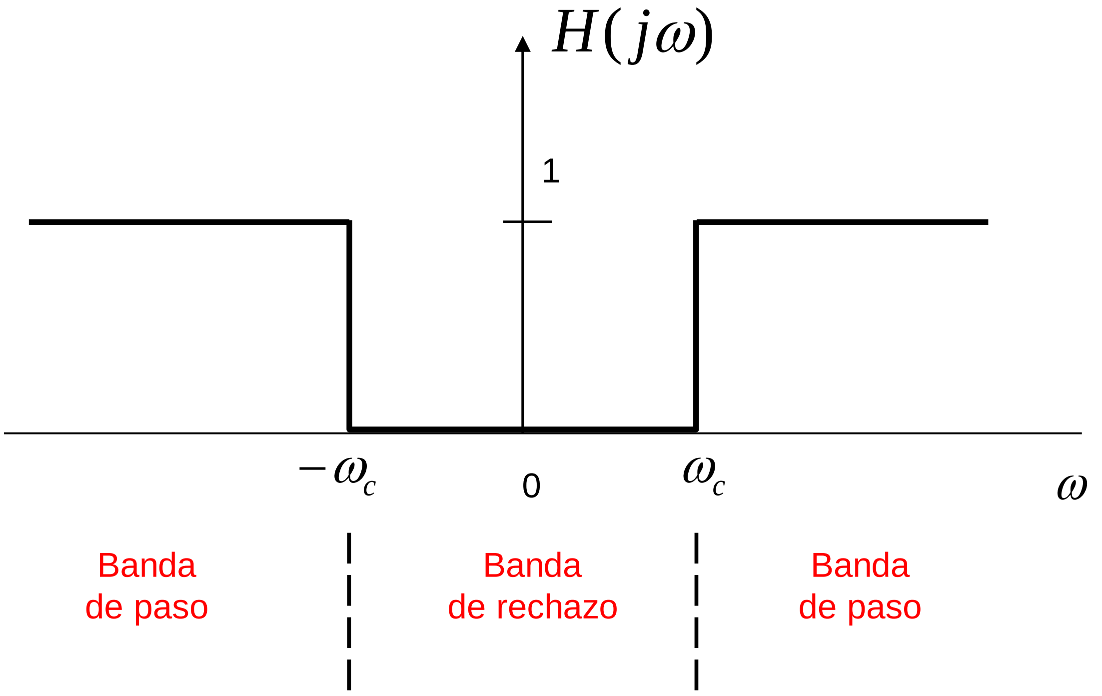
- Filtro pasa bajas
- Filtro pasa altas
- Filtro pasa banda
- Filtro rechaza banda

FILTRADO



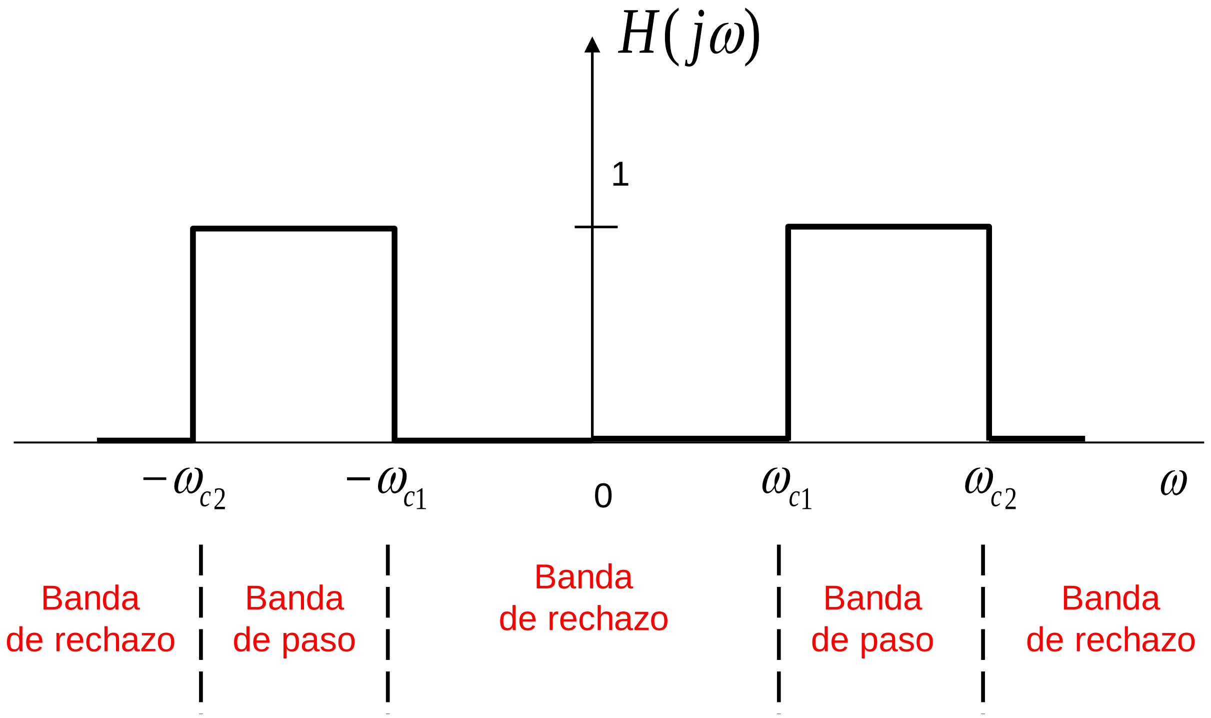
Respuesta en frecuencia de un filtro pasa bajas ideal

FILTRADO



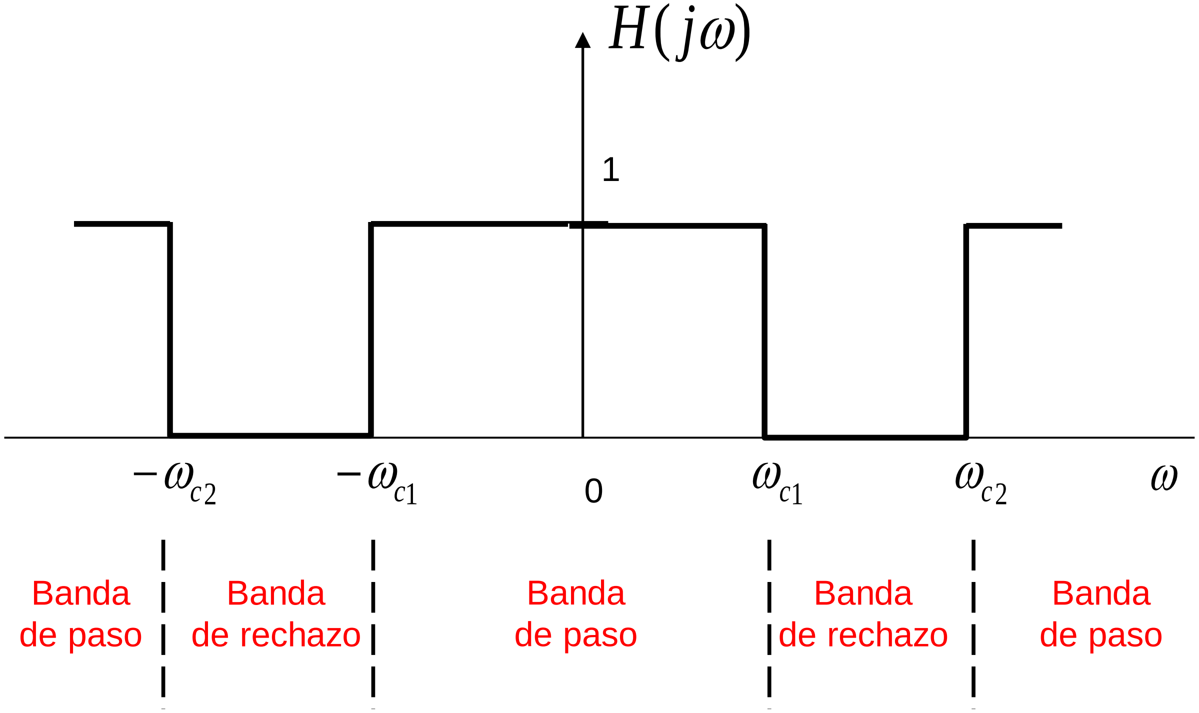
Respuesta en frecuencia de un filtro pasa altas ideal

FILTRADO



Respuesta en frecuencia de un filtro pasa banda ideal

FILTRADO



Respuesta en frecuencia de un filtro rechaza banda ideal

FILTRADO

Ejemplos de filtros continuos descritos mediante ecuaciones diferenciales

- Un filtro pasa bajas RC sencillo
- Un filtro pasa altas RC sencillo

DISTORSIÓN ARMÓNICA TOTAL

DISTORSIÓN ARMÓNICA TOTAL

Si se tiene una señal que se supone es una onda sinusoidal pura de amplitud A, se encuentra distorsionada, como se muestra en la figura 1.

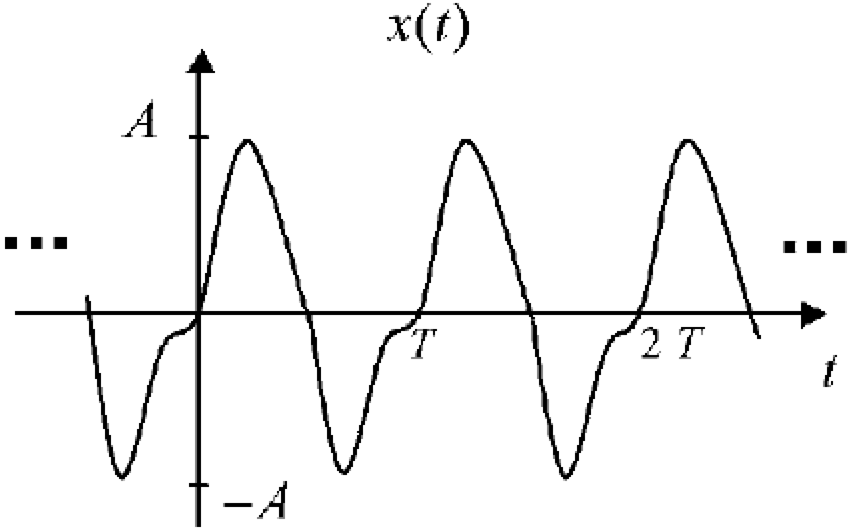


Figura 1. Onda senoidal distorsionada

DISTORSIÓN ARMÓNICA TOTAL

Esto puede ocurrir en los voltajes de línea de una planta industrial que hacen un uso intensivo de las cargas no lineales, tales como hornos de arco eléctrico, relés de estado solido, motores de accionamiento, etc.

DISTORSIÓN ARMÓNICA TOTAL

Claramente, algunos de los armónicos para “k” diferente de ±1, son distintos de cero para la señal x(t) que se muestra en la Figura 1. Una forma de caracterizar la distorsión de la señal es calcular la relación de la potencia media en todos los armónicos que "no deberían estar ahí", es decir, para k> 1, y la potencia media total de la onda senoidal, es decir, la potencia en sus componentes fundamentales.

DISTORSIÓN ARMÓNICA TOTAL

La raíz cuadrada de este cociente se llama la distorsión armónica total (THD) de la señal. Primero se va definir una cantidad clásica en ingeniería, llamada el valor RMS de una señal periódica (RMS representa la raíz cuadrada media):

$$X_{RMS} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T |\,x(t)\,|^2 \, dt}$$

DISTORSIÓN ARMÓNICA TOTAL

El valor RMS es una medida de la potencia de la señal, pero la raíz cuadrada se tiene que volver a las unidades de voltios o amperios cuando se trabaja con señales de tensión o de corriente.

Observe que la cantidad dentro de la raíz cuadrada no es más que la potencia media total P_{∞}.

DISTORSIÓN ARMÓNICA TOTAL

Por el teorema de Parseval, se tiene que

$$X_{RMS} = \sqrt{\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |a_k|^2}$$

Por lo tanto, asumiendo que la señal es real y $a_0=0$, se tiene

$$X_{RMS} = \sqrt{\sum_{k=0}^{+\infty} 2|a_k|^2}$$

DISTORSIÓN ARMÓNICA TOTAL

Se puede definir la **distorsión armónica total** en esta señal periódica como la relación del valor RMS de todos los armónicos más altos que k>1 (distorsión) y el valor RMS de la fundamental (onda seno pura) la cual es $\sqrt{2|a_1|^2}$:

$$THD = 100\sqrt{\frac{\sum_{k=2}^{+\infty}|a_k|^2}{|a_1|^2}}\%$$

DISTORSIÓN ARMÓNICA TOTAL

Esta definición de THD es la generalmente adoptada en ingeniería eléctrica, y en otras áreas de la ingeniería, aunque los ingenieros de sonido suelen usar una definición diferente, la cual compara el valor RMS de la distorsión y el valor RMS de la onda senoidal distorsionada

$$THD_a = 100\sqrt{\frac{\sum_{k=2}^{+\infty} |a_k|^2}{\sum_{k=1}^{+\infty} |a_k|^2}}\%$$

DISTORSIÓN ARMÓNICA TOTAL

Ejemplo

Para la onda senoidal distorsionada de la figura 1, suponga que su espectro de potencia es tal como se da en la figura 2, donde $|a_k|^2 = 0, |k| \geq 5$. La figura 2 ilustra cómo se calcula el THD.

DISTORSIÓN ARMÓNICA TOTAL

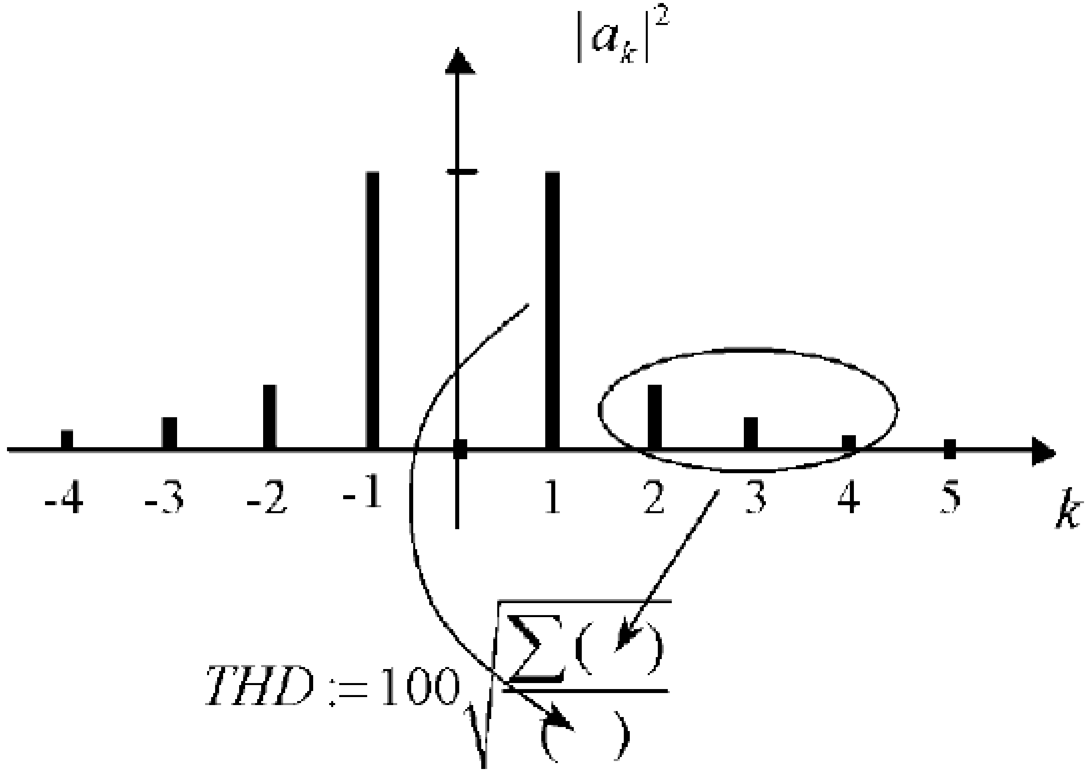


Figura 2. Espectro de potencia de la señal de la figura 1

FUENTE:

OPPENHEIM, A.- WILLSKY, A. “Señales y Sistemas” Pearson Education, 2ª ed., 1998