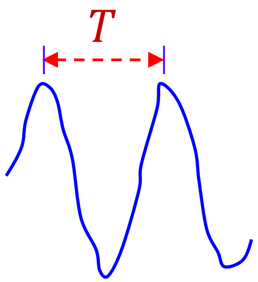
Respuesta en Frecuencia

Ing. Eddie Sobrado

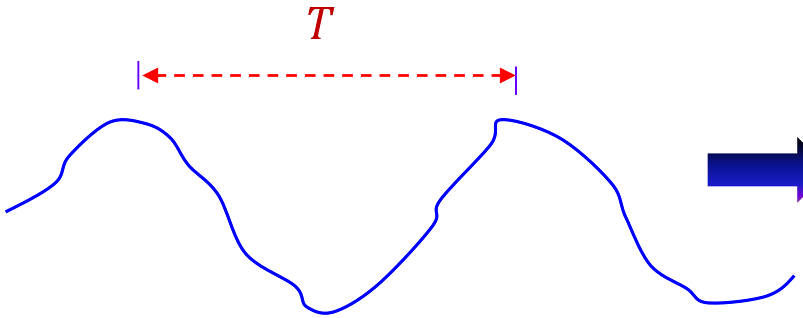
Objetivos

- ¿Cómo responden los sistemas ante entradas de distinta velocidad de cambio o cualquier tipo de entrada?
- Las señales se pueden expresar como valores en el tiempo, o como suma de señales sinusoidales de distinta frecuencia.
- Analizar el comportamiento dinámico desde el punto de vista de la frecuencia.
- En los diferentes métodos de análisis de respuesta en frecuencia, variamos la frecuencia de la señal de entrada en un cierto rango y estudiamos la respuesta resultante.

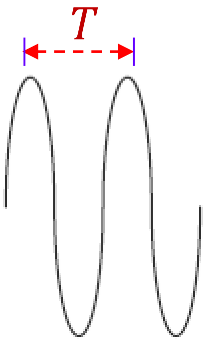
Objetivos



Alta frecuencia: cambio rápido



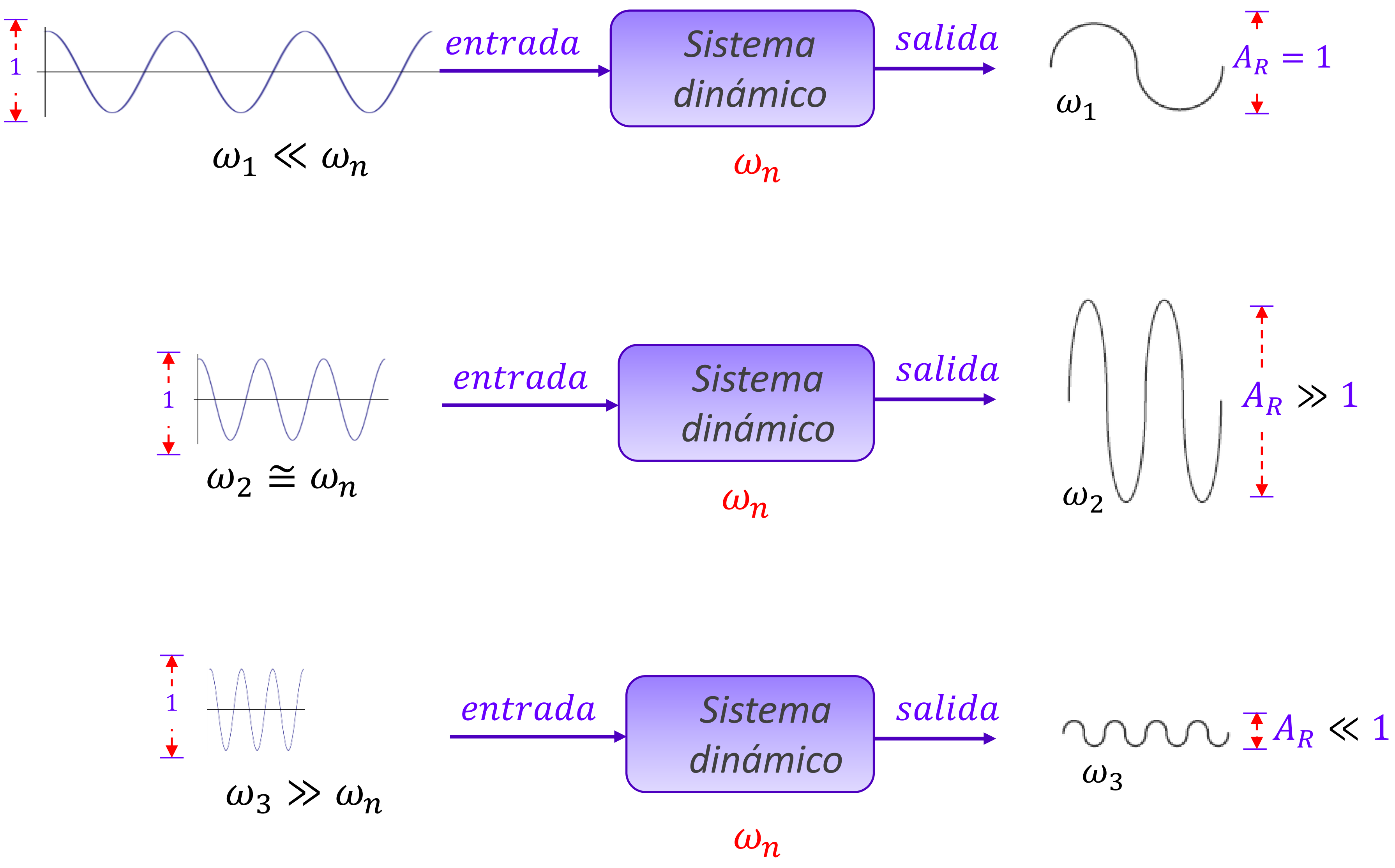
Baja frecuencia: cambio lento



$$U = A\sin(\omega t)$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T}[rad/s]$$

Introducción

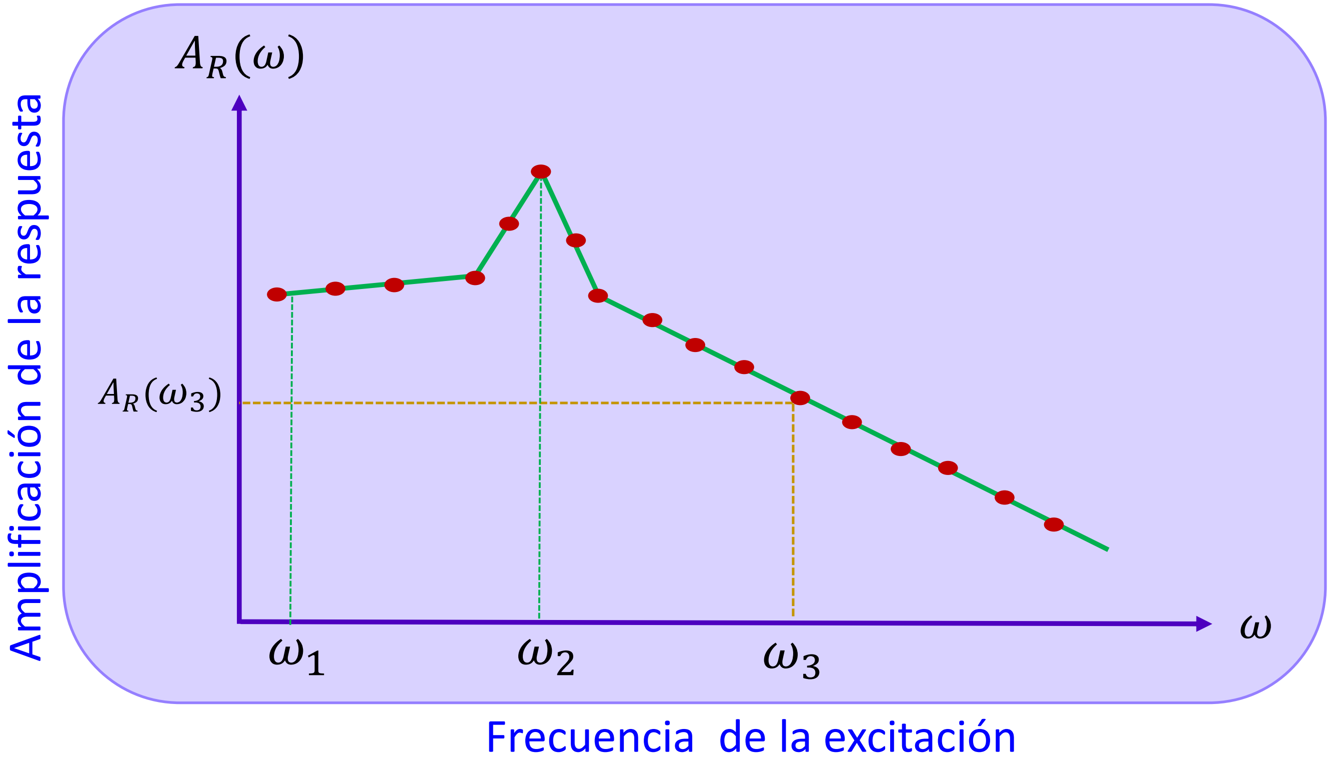


Introducción

- La respuesta en frecuencia es presentada mediante Diagramas de Bode o Diagramas de Nyquist. Ambos presentan la misma información de forma diferente. El primero es logarítmico y el segundo es polar. Nuestro estudio se centrará en los Diagramas de Bode.

Introducción

- Entonces podemos levantar para cada sistema dinámico un diagrama de respuesta en frecuencia…



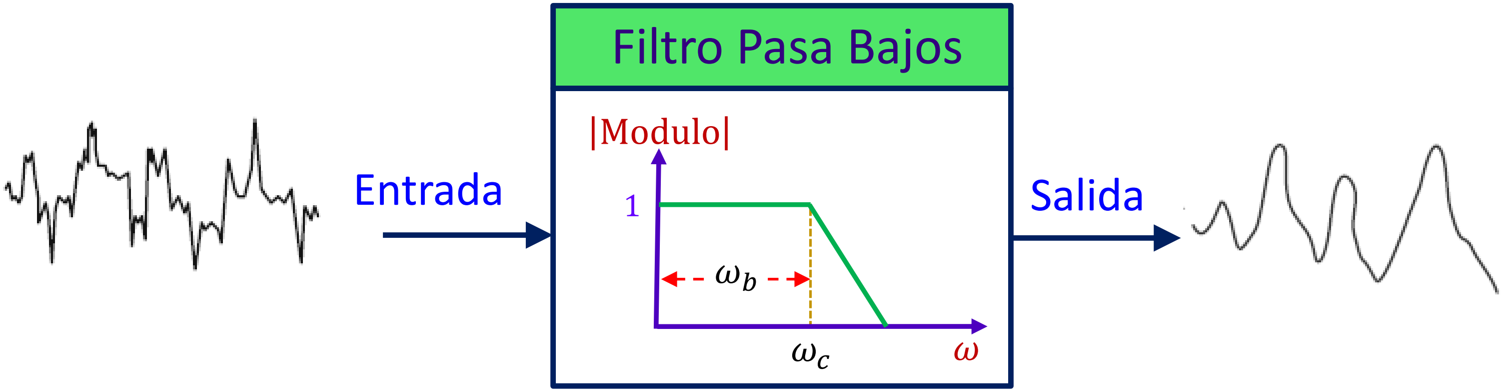
Cabe resaltar que la frecuencia está en escala logarítmica, la fase en grados y la magnitud está dada como ganancia dB.

Los decibelios se definen como: 20log(A)

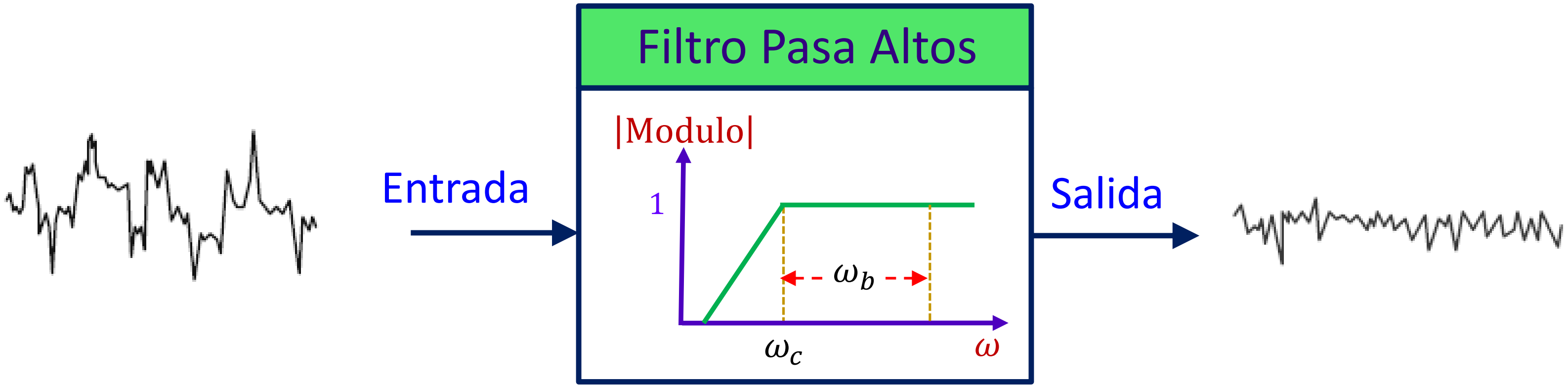
- IMPORTANTE: No todos los sistemas dinámicos son iguales. Cada uno tiene un diagrama diferente.

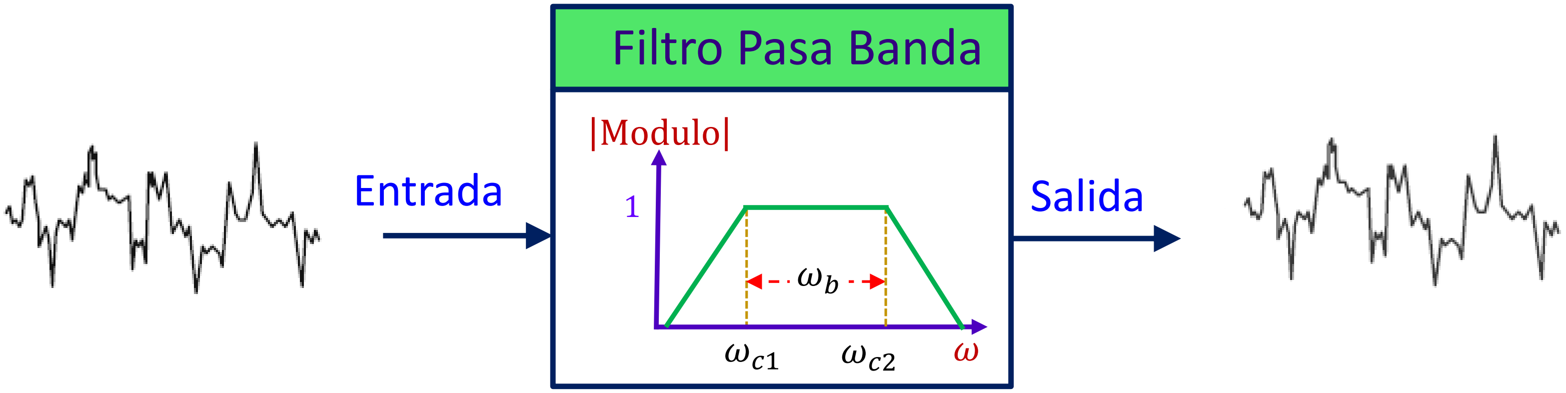
Introducción

- Este DIAGRAMA puede usarse para predecir como será la respuesta del sistema dinámico para otros tipos de entradas que contienen senos de varias frecuencias (Recuerde Fourier):



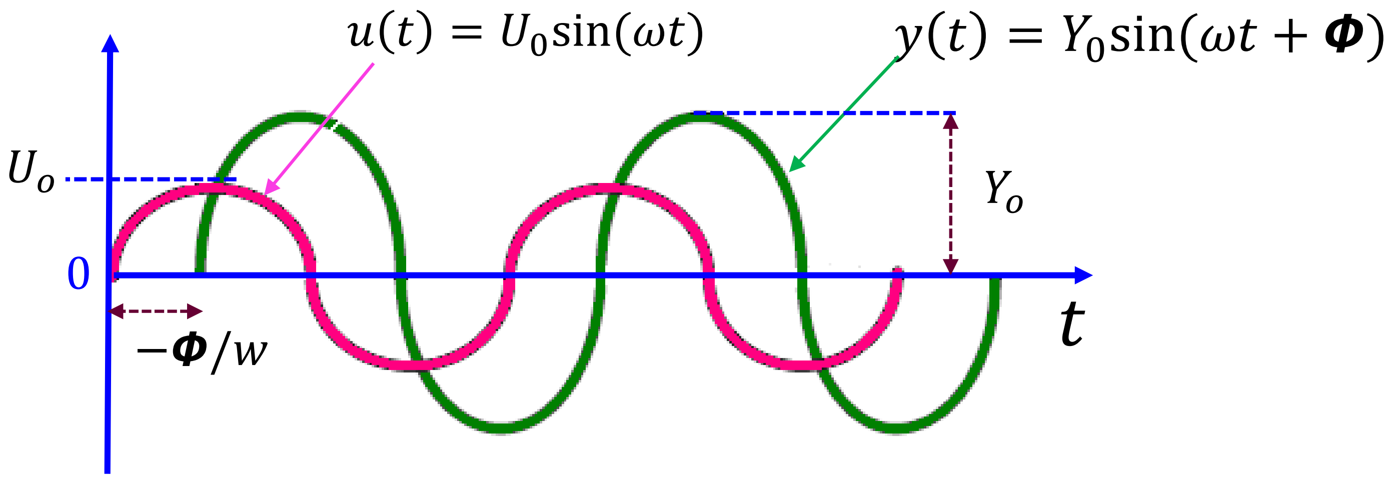
Introducción





La Respuesta en Frecuencia

- La Respuesta en Frecuencia de un sistema dinámico queda definida por dos funciones: la Amplificación (Módulo) y la Fase. Ambas son funciones dependientes de la frecuencia (ω) de la señal de entrada.

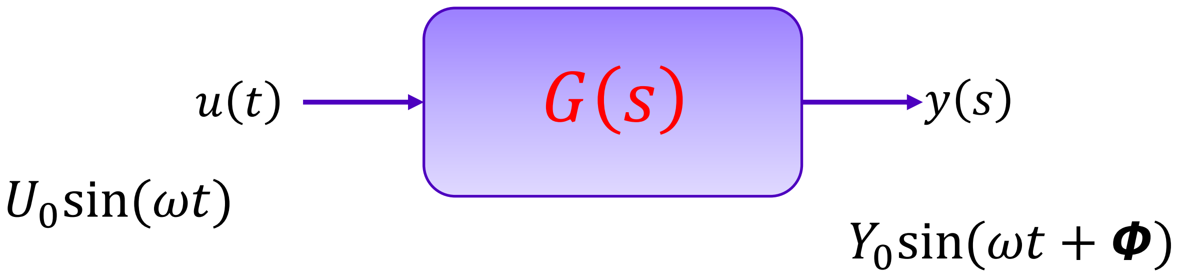


MODULO de la respuesta en frecuencia: $\dfrac{Y_o}{U_o}$

FASE de la respuesta en frecuencia: $\boldsymbol{\Phi}$

La Respuesta en Frecuencia

- Deseamos determinar una expresión para la Respuesta en Frecuencia en módulo y fase, partiendo de lo que conocemos, es decir, de la F.T. del sistema.



Modulo: $$\frac{Y_o}{U_o} = ?$$

Fase: $$\boldsymbol{\Phi} = ?$$

Hallando la respuesta en Frecuencia

- Partimos de la Función de Transferencia Estable:

$$U(s) \longrightarrow \boxed{G(s)} \longrightarrow Y(s)$$

$$G(s) = \frac{num(s)}{den(s)} = \frac{num(s)}{(s+\rho_1)(s+\rho_2)\ldots(s+\rho_n)} \qquad \rho_1 > 0, \rho_2 > 0, \ldots$$

- La señal de entrada en el tiempo: $u(t) = U_0 \operatorname{sen}(\omega t)$, entonces en dominio de Laplace:

$$U(s) = U_0 \frac{\omega}{(s^2 + \omega^2)}$$

Hallando la respuesta en Frecuencia

- Larespuesta $\mathbf{y(s) = G(s)U(s)}$

$$y(s) = G(s)\frac{U_0\omega}{(s^2+\omega^2)} = \frac{num(s)}{(s+\rho_1)(s+\rho_2)\dots(s+\rho_n)} \cdot \frac{U_0\omega}{(s-j\omega)(s+j\omega)}$$

- Descomponiendo en fracciones parciales:

$$y(s) = G(s)\frac{U_0\omega}{(s^2+\omega^2)} = \frac{b_1}{s+\rho_1} + \dots + \frac{b_n}{s+\rho_1} + \frac{a}{s-j\omega} + \frac{\bar{a}}{s+j\omega}$$

- Aplicando la transformada inversa de Laplace:

$t \to \infty$

$$y(t) = b_1 e^{-\rho_1 t} + \dots + b_n e^{-\rho_n t} + a e^{j\omega t} + \bar{a} e^{-j\omega t}$$

- Como es un sistema estable, luego del transitorio, todos los exponenciales negativos decaerán a cero entonces tendremos que:

$$\boxed{y(t) = a e^{j\omega t} + \bar{a} e^{-j\omega t}}$$

en el régimen estacionario

calcular calcular

Hallando la respuesta en Frecuencia

- Los coeficientes de a y $\bar{a}$ se determinan de la descomposición en fracciones parciales

$$a = \left[G(s)\frac{U_0\omega}{\cancel{(s-j\omega)}(s+j\omega)}\cancel{(s-j\omega)}\right]_{s=j\omega} = \frac{U_0 G(j\omega)}{2j}$$

$$\bar{a} = \left[G(s)\frac{U_0\omega}{(s-j\omega)\cancel{(s+j\omega)}}\cancel{(s+j\omega)}\right]_{s=-j\omega} = \frac{U_0 G(-j\omega)}{-2j}$$

- Como $G(j\omega)$ es una función compleja, también puede ser escrita en su forma polar

$$G(j\omega) = |G(j\omega)|e^{j\boldsymbol{\Phi}} \qquad \boldsymbol{\Phi} = \angle G(j\omega)$$

$$G(-j\omega) = \bar{G}(j\omega) = |G(j\omega)|e^{-j\boldsymbol{\Phi}}$$

- Entonces:

$$a = \frac{U_0|G(j\omega)|e^{j\boldsymbol{\Phi}}}{2j} \qquad \bar{a} = \frac{U_0|G(j\omega)|e^{-j\boldsymbol{\Phi}}}{-2j}$$

Hallando la respuesta en Frecuencia

- Ahora reemplazamos las expresiones de a y $\bar{a}$ en la respuesta estacionaria y_{ss} del sistema:

$$y_{ss} = \frac{U_0|G(j\omega)|e^{j\boldsymbol{\Phi}}}{2j}e^{j\omega t} - \frac{U_0|G(j\omega)|e^{-j\boldsymbol{\Phi}}}{2j}e^{-j\omega t}$$

$$y_{ss} = U_0|G(j\omega)|\frac{e^{j(\omega t+\boldsymbol{\Phi})} - e^{-j(\omega t+\boldsymbol{\Phi})}}{2j}$$

$$y_{ss} = U_0|G(j\omega)|\frac{\cancel{\cos(\omega t + \boldsymbol{\Phi})} + j\mathrm{sen}(\omega t + \boldsymbol{\Phi}) - \cancel{\cos(\omega t + \boldsymbol{\Phi})} + j\mathrm{sen}(\omega t + \boldsymbol{\Phi})}{2j}$$

$$\boxed{y_{ss} = U_0|G(j\omega)|\mathrm{sen}(\omega t + \boldsymbol{\Phi})}$$

Y_0

$$\boxed{\boldsymbol{\Phi} = \angle G(j\omega)}$$

Hallando la respuesta en Frecuencia

- CONCLUSIÓN: Hemos demostrado que La Respuesta en Frecuencia de un sistema dinámico $G(s)$ está dada por el Módulo y la Fase de la Función Compleja $G(j\omega)$. Es decir :

$$\frac{Y_o}{U_o} = |G(j\omega)|$$

Modulo

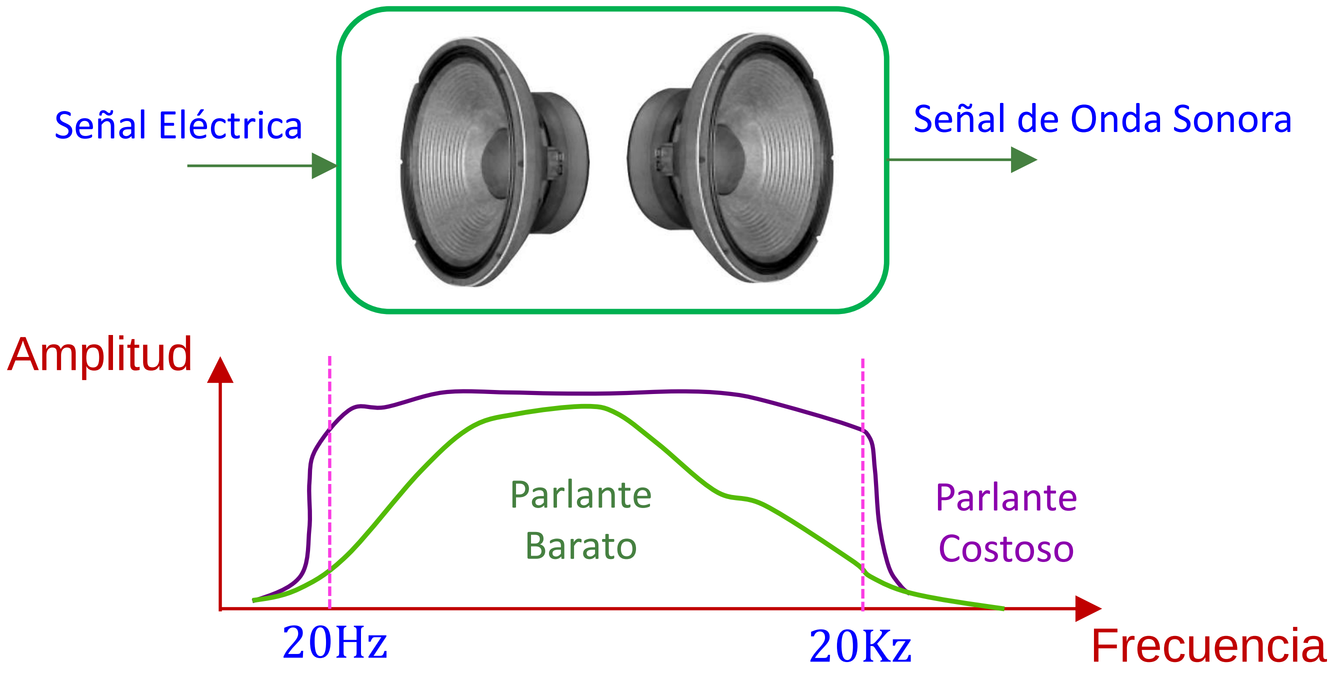
$$\boldsymbol{\Phi} = \angle\, G(j\omega)$$

Fase

Porque el estudio de respuesta en Frecuencia?

- Para muchos sistemas electromecánicos, la respuesta en frecuencia son representaciones informativa y natural de sistemas dinámicos (expresa ciertas características)

- Ejemplo: sistema de audio

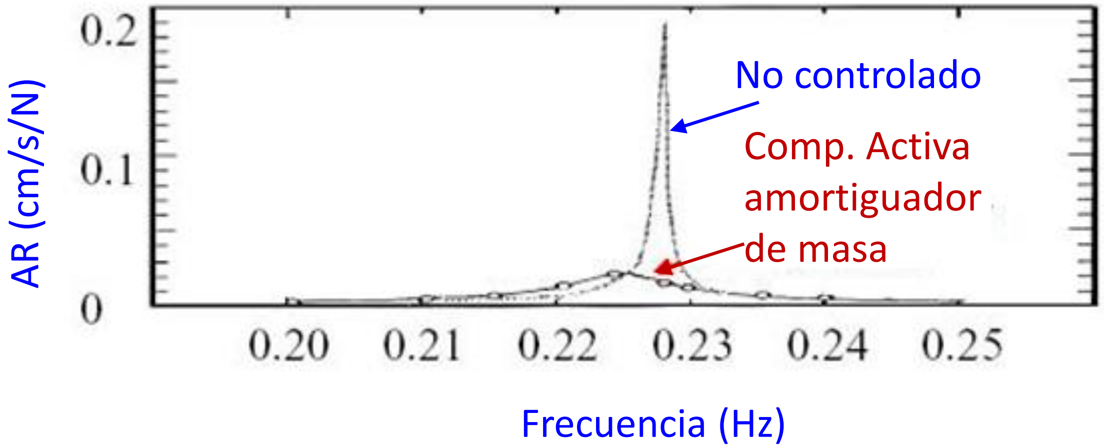


Porque el estudio de respuesta en Frecuencia?

- Estructuras mecánicas

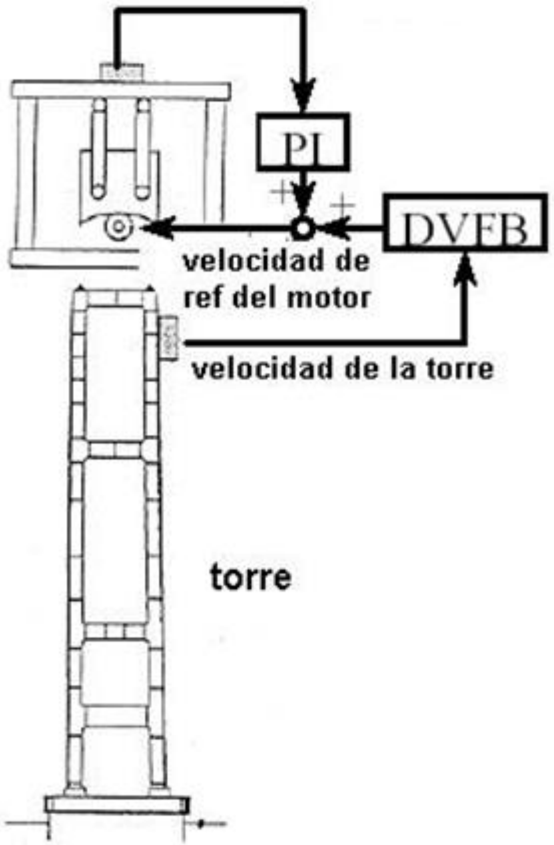
Velocidad del viento

Desplazamiento de la torre



Porque el estudio de respuesta en Frecuencia?

Posición de la masa

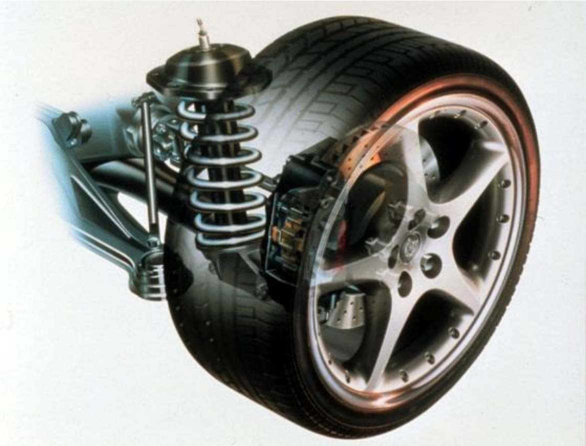


El amortiguador de masa activa se enciende aquí

Respuesta a la torre del puente con el disturbio

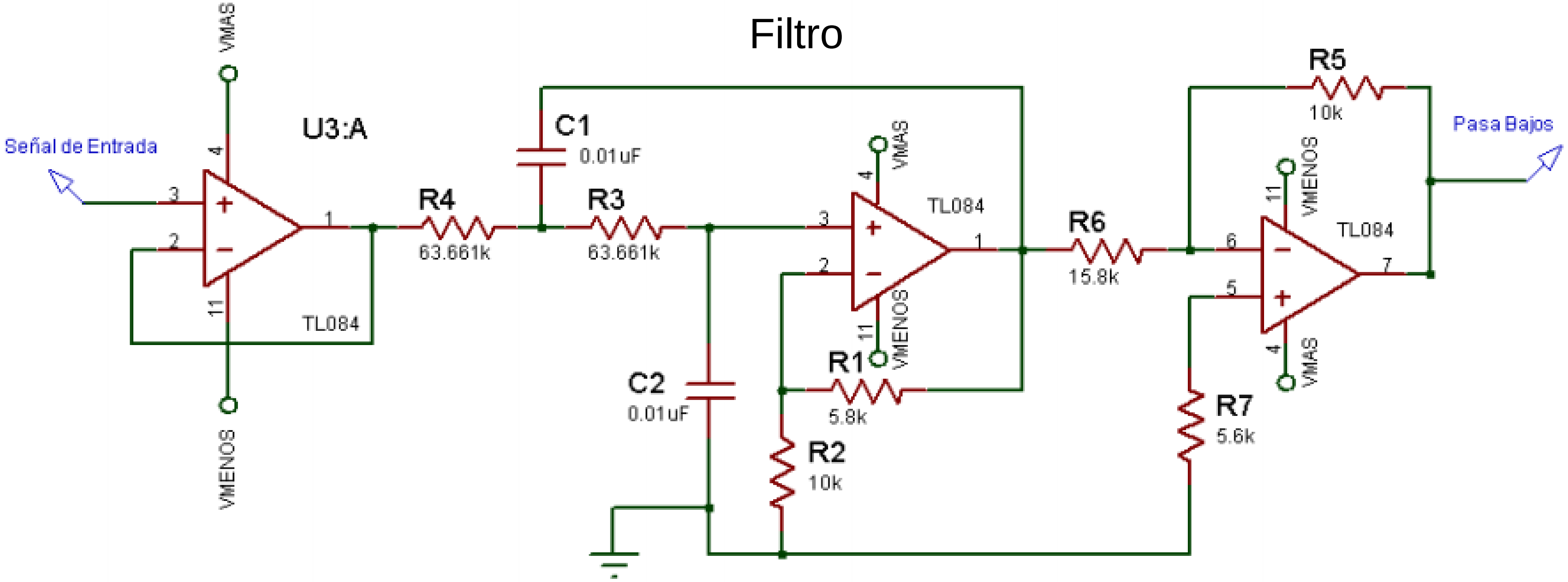
Porque el estudio de respuesta en Frecuencia?

- Sistemas Mecánicos:



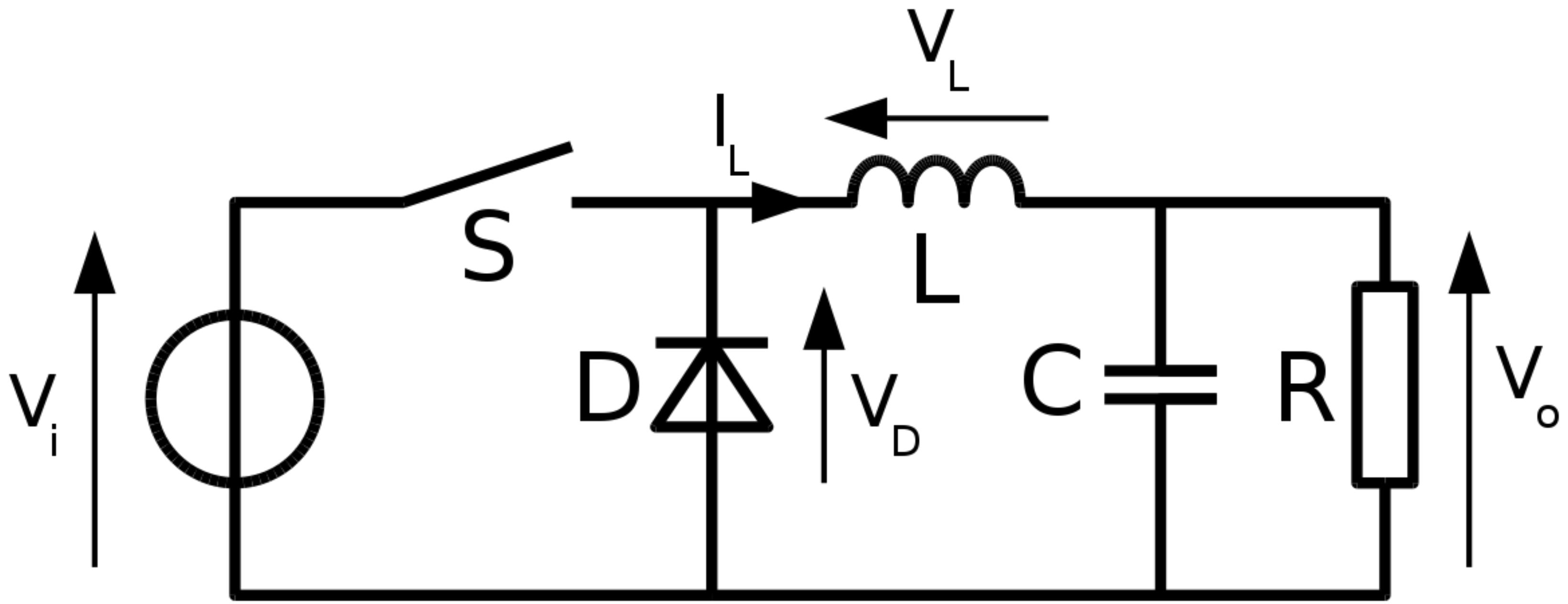
Porque el estudio de respuesta en Frecuencia?

- Sistemas Electrónicos:



Porque el estudio de respuesta en Frecuencia?

- Sistemas Electrónicos:



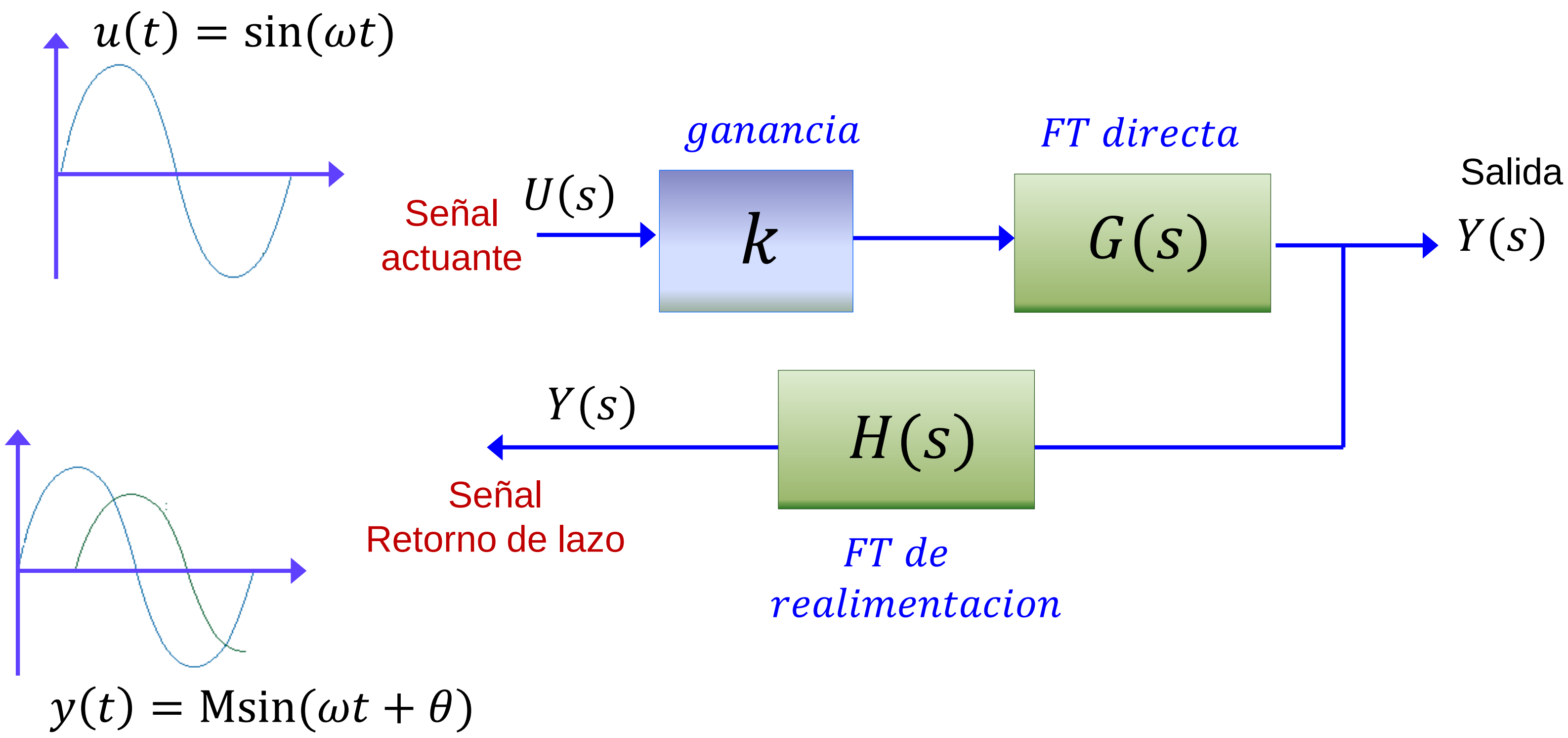
Conversor AC/DC

Porque el estudio de respuesta en Frecuencia?

- La respuesta en frecuencia NO se usa solamente para predecir la respuesta de salida a cambios senoidales, esto puede ser usado para predecir la respuesta de salida para cualquier tipo de cambio a la entrada

- La representación de la respuesta en frecuencia de un sistema dinámico es muy conveniente para diseñar un controlador feedback y analizar sistemas en lazo cerrado

Respuesta en frecuencia – Lazo Abierto



$$\mathrm{M} = |KG(j\omega)H(j\omega)|$$

$$\theta = KG(j\omega)H(j\omega)$$

Porque diseñamos controladores en BODE?

Información que se obtiene de la respuesta en frecuencia en lazo abierto

- La región de bajas frecuencia (la que esta muy por debajo de la frecuencia de cruce de ganancia) indica el comportamiento en estado estacionario del sistema en lazo cerrado.
- La región de frecuencias medias, cercanas al punto de cruce de ganancia muestra la estabilidad relativa.
- La región de altas frecuencias (la que esta por encima de la frecuencia de cruce de ganancia) informa sobre la complejidad del sistema

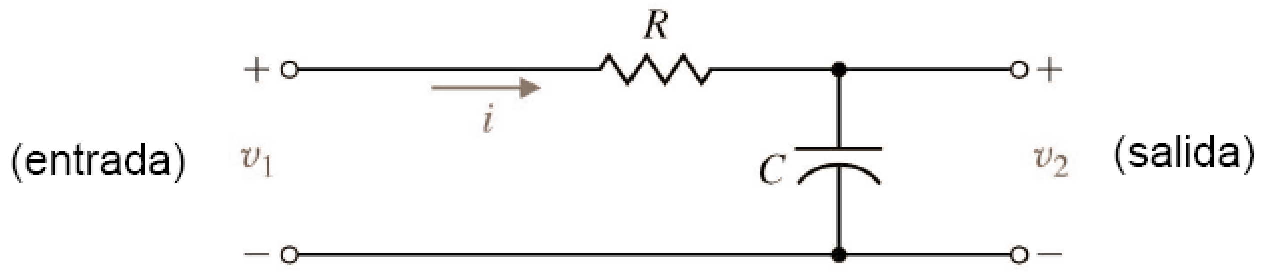
Porque diseñamos controladores en BODE?

Requisitos sobre la respuesta en frecuencia en lazo abierto

- Se puede decir que en muchos caso prácticos, la compensación es, en esencia, un compromiso entre precisión en estado estacionario y estabilidad relativa
- Para obtener un valor alto de la constante de error de velocidad, y todavía tener una estabilidad relativa satisfactoria, es necesario volver a dar forma a la curva de respuesta en frecuencia en lazo abierto

Ejemplo 1

Para el circuito RC que se muestra:



a. Determine la respuesta en frecuencia (modulo y la fase).

b. Considerando RC=1

c. Determine la respuesta estacionaria cuando la señal de entrada es $v_1(t) = sen(\omega t)$. Para $\omega = 0.5\text{rad}/s$ y para $\omega = 10\text{rad}/s$

Ejemplo 1

a. Para obtener la respuesta en frecuencia primero determinamos la FT del sistema. Luego reemplazamos $s = j\omega$ y determinamos el modulo y la fase.

La FT del circuito puede ser obtenida a través de las técnicas de modelado

$$G(s) = \frac{v_2(s)}{v_1(s)} = \frac{1}{\tau s + 1} \qquad \tau = RC$$

Entonces la respuesta en frecuencia es:

$$G(j\omega) = \frac{1}{j\omega\tau + 1}$$

$$|G(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{(\omega\tau)^2 + 1}}$$

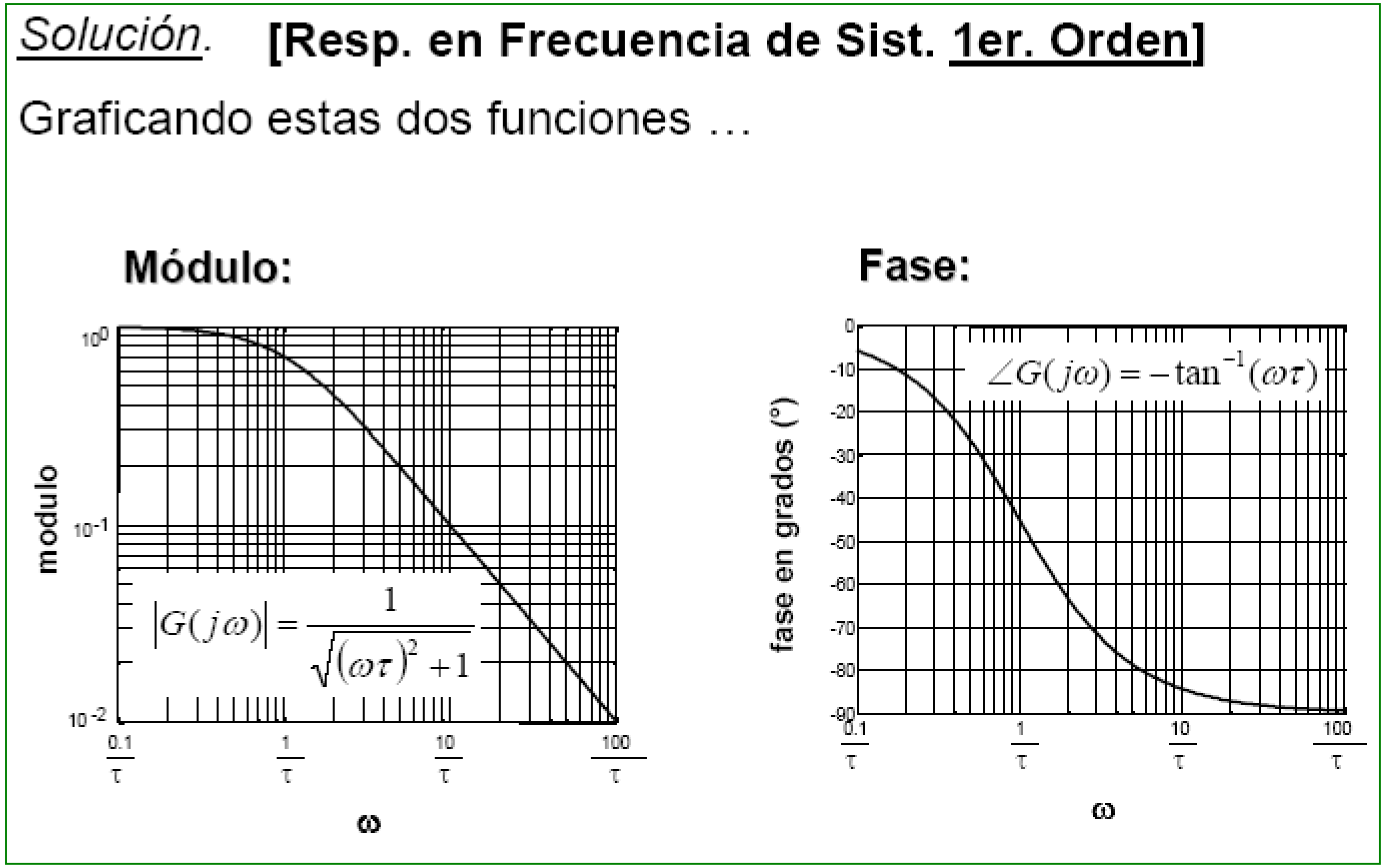
Modulo

$$\angle G(j\omega) = -tan^{-1}(\omega\tau)$$

Fase

Ejemplo 1

Graficando estas dos funciones…



Ejemplo 1

b. Reemplazamos el valor de la frecuencia de la excitación en las expresiones del modulo y fase de la respuesta en frecuencia. Consideremos $\tau = 1$

$\omega = 0.5\, rad/s$ ➡

$$|G(j0.5)| = \frac{1}{\sqrt{[0.5]^2 + 1}} = 0.8944$$

$$\angle G(j0.5) = -tan^{-1}[0.5] = -0.46\, rad \quad (27°)$$

$$\boxed{v_2(t) = 0.89 sen(\omega t - 0.46)}$$

$\omega = 10 rad/s$ ➡

$$|G(j10)| = \frac{1}{\sqrt{[10]^2 + 1}} = 0.0995$$

$$\angle G(j10) = -tan^{-1}[10] = -1.47\, rad \quad (-84°)$$

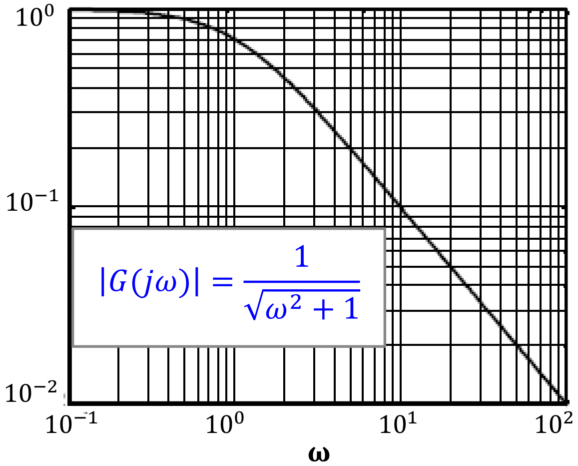
$$\boxed{v_2(t) = 0.1 sen(\omega t - 1.47)}$$

Ejemplo 1

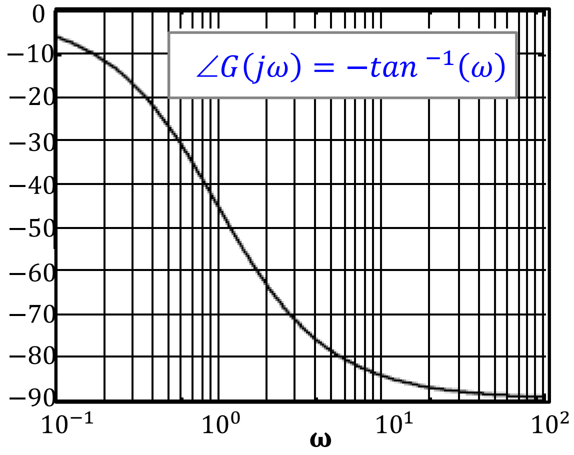
Graficando con ayuda del matlab tenemos:

Respuesta en la frecuencia

Modulo

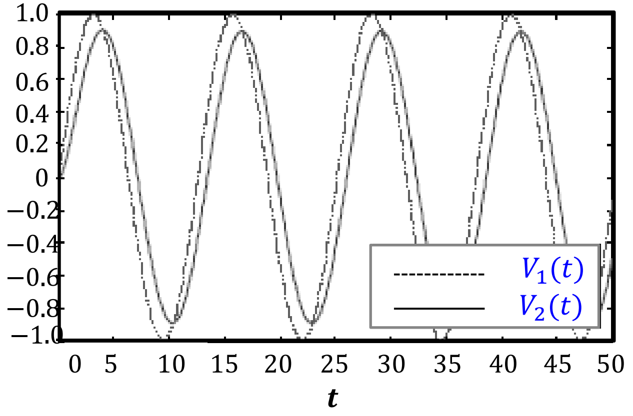


Fase (en grados)

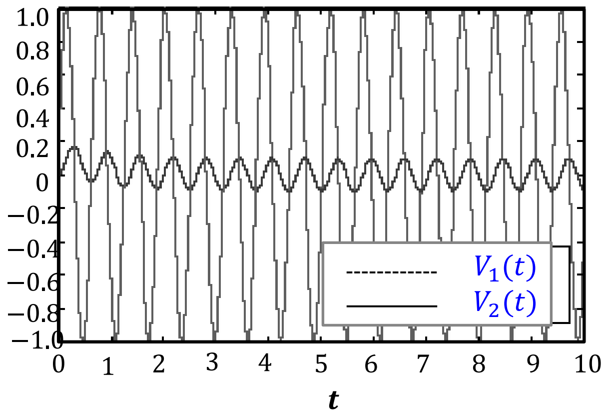


Respuesta en el tiempo

Para $u(t) = sen(0.5t)$

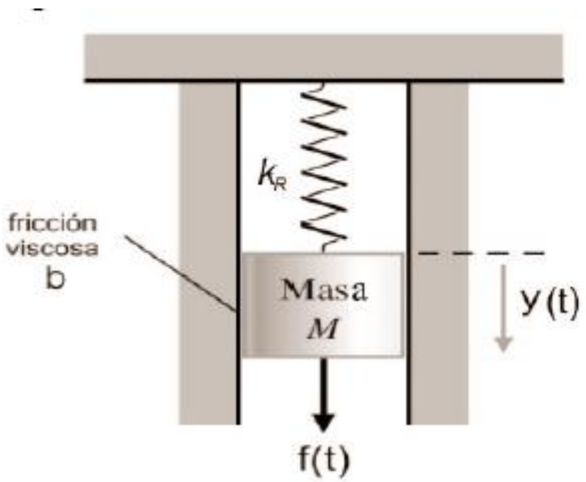


Para $u(t) = sen(10t)$



Ejemplo 2

La figura muestra un sistema masa resorte



$$G(s) = \frac{Y(s)}{F(s)} = \frac{K{\omega_n}^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + {\omega_n}^2}$$

donde

$$\omega_n = \sqrt{\frac{K_R}{M}} \qquad \zeta = \frac{b}{2\sqrt{K_R M}} \qquad K = \frac{1}{K_R}$$

Considere $K = 1$

a. Determine la expresión de la respuesta en Frecuencia (modulo y fase) en función de ζ y ω / ω_n

Para $\zeta = 0.2$

b. Determine la respuesta estacionaria cuando la señal de entrada es: $\mathrm{f(t)} = \mathrm{sen}(\omega \mathrm{t})$.

$$\textit{Para} \;\; \omega = 0.1\omega_n,\; \omega = \omega_n,\; \omega = 10\omega_n$$

Ejemplo 2

Solución:

a. En la FT del sistema reemplazamos $s = j\omega$ y determinamos el modulo y fase

$$G(j\omega) = \frac{{\omega_n}^2}{-\omega^2 + j2 \ \ \omega\omega_n + {\omega_n}^2}$$

Dividiendo entre ${\omega_n}^2$ arriba y abajo

$$G(j\omega) = \frac{1}{-\left[\frac{\omega}{\omega_n}\right]^2 + j2 \ \ \left[\frac{\omega}{\omega_n}\right] + 1}$$

Separando entre partes reales e imaginarias en el denominador

$$G(j\omega) = \frac{1}{\left[1 - \left[\frac{\omega}{\omega_n}\right]^2\right] + j2 \ \ \left[\frac{\omega}{\omega_n}\right]}$$

Ejemplo 2

Solución:

Finalmente podemos obtener el modulo de fase de $G(j\omega)$

$$|G(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{\left[1 - \left[\frac{\omega}{\omega_n}\right]^2\right]^2 + \left[2\zeta\left[\frac{\omega}{\omega_n}\right]\right]^2}}$$

Modulo

$$G(j\omega) = -tan^{-1}\left[\frac{2\zeta\left[\frac{\omega}{\omega_n}\right]}{1 - \left[\frac{\omega}{\omega_n}\right]^2}\right]$$

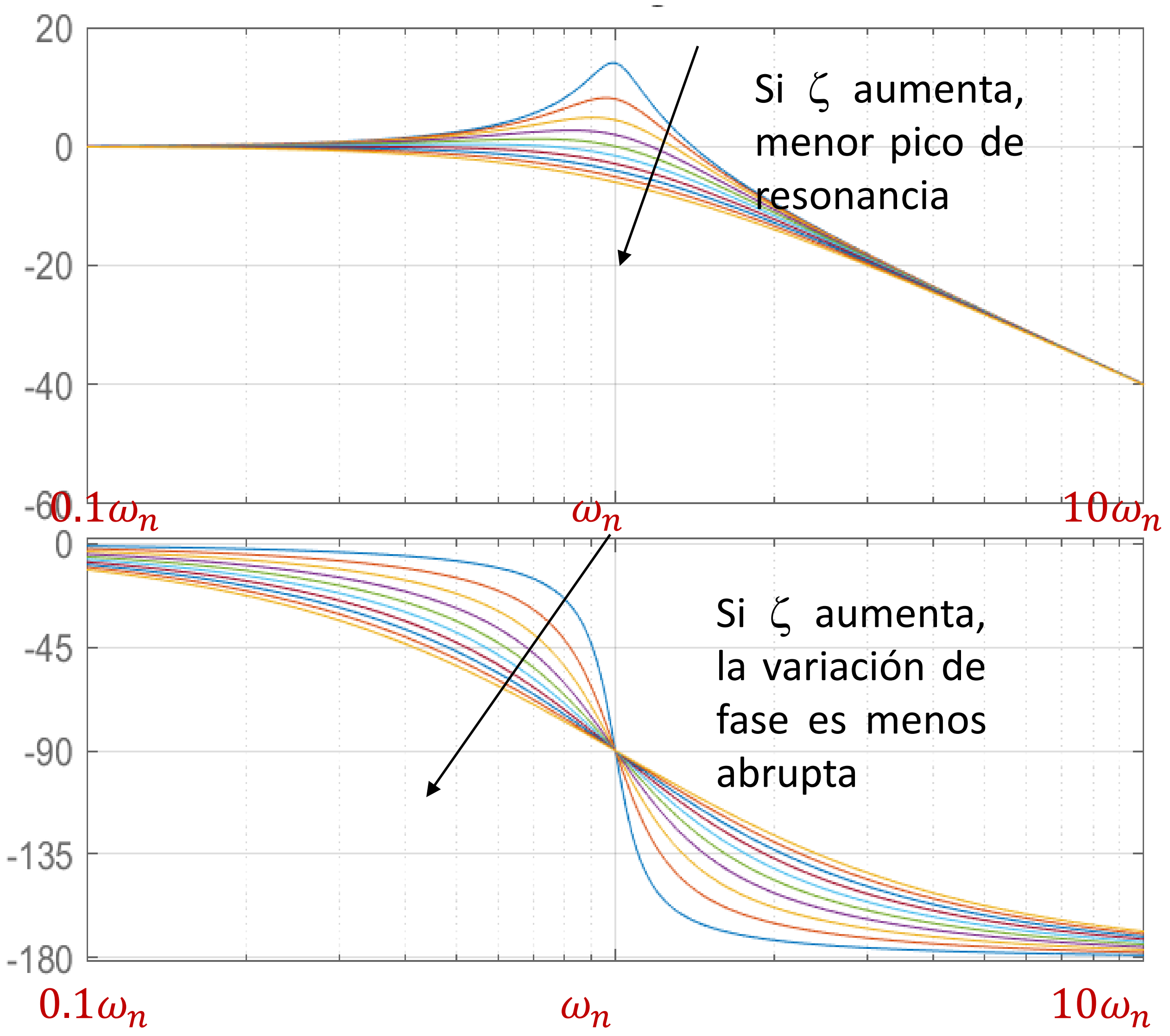
Fase

Ejemplo 2

Solución: graficamos estas dos funciones….

Modulo (db)

Fase (en grados)



Ejemplo 2

Solución:

Reemplazamos el valor de la frecuencia de la excitación en las expresiones del modulo y fase de la respuesta en frecuencia. Consideramos ζ=0.2

$$\frac{\omega}{\omega_n} = 0.1 \quad \Rightarrow \quad |G(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{[1-0.1^2]^2 + [0.4 * 0.1]^2}} = 1.008$$

$$\angle G(j\omega) = -tan^{-1}\left[\frac{0.04}{1-0.1^2}\right] = 0.04rad = -2.31°$$

$$y(t) = 1.008sen(\omega t - 0.04)$$

Continuar para: $\omega = \omega_n$ y $\omega = 10\omega_n$