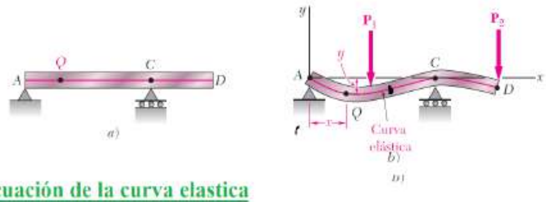
Deflexión de Vigas

El cálculo de deflexión máxima es importante para el diseño de componentes (generalmente existe un valor máximo admisible).

Tambien es una herramienta para analizar vigas indeterminadas.

Deformación de una viga bajo carga transversal

Existe una relación entre la curvatura de la superficie neutra, con el momento flector de una viga.



$$\boxed{\frac{1}{\rho} = \frac{M_{(x)}}{EI}} \quad \ldots (1)$$

ρ = radio de curvatura

Ecuación de la curva elastica

Recordando de matematica:

$$\boxed{\frac{1}{\rho} = \frac{\dfrac{d^2y}{dx^2}}{\left[1 + \left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2\right]^{3/2}}}$$

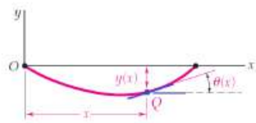
$y_{(x)}$: función de la curva elástica (deflexión)

Simplificando

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 \approx 0 \qquad \boxed{\frac{1}{\rho} = \frac{d^2y}{dx^2}} \quad \ldots (2)$$

Relacionado la ec(1) con la ec(2):

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M(x)}{EI} = \frac{d^2y}{dx^2} \qquad \boxed{\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{M(x)}{EI}} \quad \ldots (3)$$



Nuestro objetivo es encontrar la curva de deflexión y en función de x

$y_{(x)}$

$$\frac{dy}{dx} = \tan\theta$$

$\theta \rightarrow$ pequeño $\quad \tan\theta \approx \theta \qquad \frac{dy}{dx} = \theta_{(x)}$

Integrando la ecuación 3:

$$EI\frac{dy}{dx} = \int_0^x M(x)\,dx + C_1$$

$$EI\,\theta(x) = \int_0^x M(x)\,dx + C_1$$

E.I = rigidez a la flexión

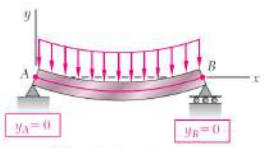
Recordando que $\theta(x)$ es pequeño $\quad \boxed{\frac{dy}{dx} = \tan\theta \simeq \theta(x)}$

Volvemos a integrar la ecuación:

$$EI\,y = \int_0^x \left[\int_0^x M(x)\,dx + C_1\right]dx + C_2$$

C_1 y C_2 : constantes de integración.

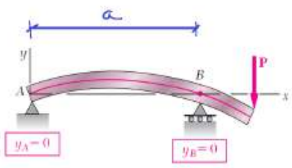
Ejemplos de condiciones de frontera



a) Viga simplemente soportada

$x=0 \quad y=0$

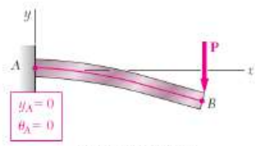
$x=L \quad y=0$



b) Viga de un tramo en voladizo

$x=0 \quad y=0$

$x=a \quad y=0$



c) Viga en voladizo

$x=0 \quad y=0$

$x=0 \quad \theta_{(A)}=0$

Determinación directa de la curva elástica a partir de la distribución de carga

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{M(x)}{EI} \quad \ldots (3)$$

$$\frac{dM}{dx} = V$$

$$\frac{dV}{dx} = -w$$

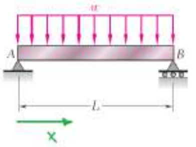
w = Fuerza distribuida sobre la viga

Derivando la ec (3)

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{1}{EI}\cdot\underbrace{\frac{dM_{(x)}}{dx}}_{V_{(x)}} \Rightarrow \frac{d^3y}{dx^3} = \frac{1}{EI}\cdot V_{(x)}$$

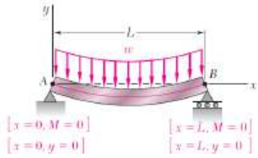
Derivando una vez mas:

$$\frac{d^4y}{dx^4} = \frac{1}{EI} \cdot \underbrace{\frac{dV(x)}{dx}}_{-\omega} \Rightarrow \frac{d^4y}{dx^4} = -\frac{\omega}{EI}$$



$$\boxed{EI\,\frac{d^4y}{dx^4} = -w}$$

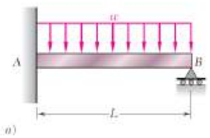
$$\boxed{y = \frac{w}{24EI}(-x^4 + 2Lx^3 - L^3x)}$$



$y_{máx}$ $\quad x = L/2$

$$\boxed{|y|_{máx} = \frac{5wL^4}{384EI}}$$

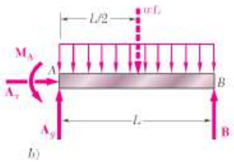
Vigas estáticamente indeterminadas

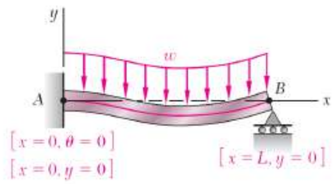


Por condición de equilibrio

$$\Sigma F_x = 0 \qquad \Sigma F_y = 0 \qquad \Sigma M_A = 0$$

Como sólo A_x puede determinarse mediante estas ecuaciones, se dice que la viga es *estáticamente indeterminada*.





Cap.5 - Beer - Funciones de Singularidad

$$\langle x - a\rangle^0 = \begin{cases} 1 & \text{cuando } x \geq a \\ 0 & \text{cuando } x < a \end{cases}$$

Las expresiones $\langle x - a\rangle^0$, $\langle x - a\rangle$, $\langle x - a\rangle^2$ se conocen como *funciones de singularidad*. Por definición se tiene, para $n \geq 0$,

$$\langle x - a\rangle^n = \begin{cases} (x-a)^n & \text{cuando } x \geq a \\ 0 & \text{cuando } x < a \end{cases} \qquad (5.14)$$

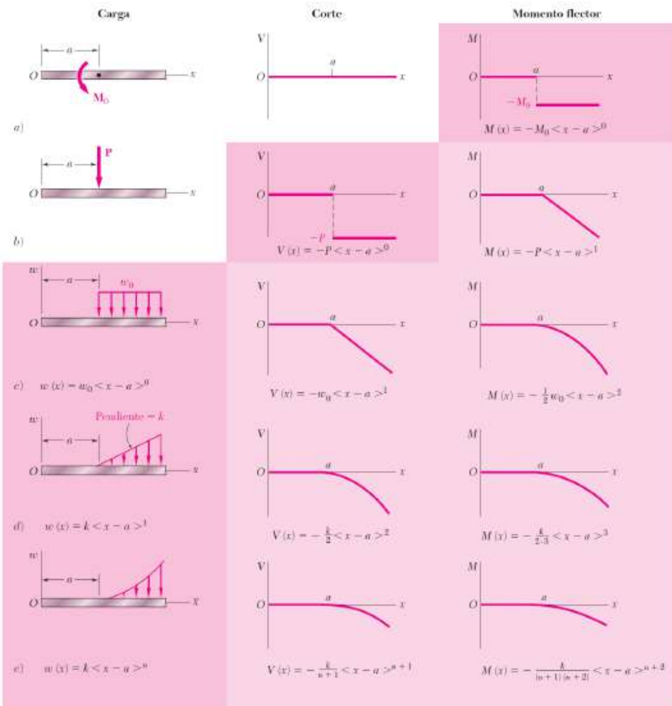


Figura 5.18 Cargas básicas y sus correspondientes cortes y momentos flectores expresados en términos de funciones de singularidad.

También se advierte que siempre que la cantidad entre los corchetes sea positiva o cero, los corchetes deberán reemplazarse por paréntesis ordinarios; en cambio, si la cantidad es negativa, el corchete mismo es igual a cero.

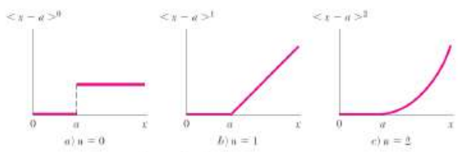
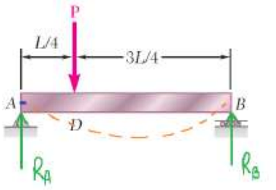


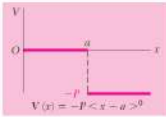
Figura 5.17 Funciones de singularidad.

Uso de funciones de singularidad para determinar la pendiente y la deflexión de una viga

Es un metodo conveniente y efectivo de calcular la pendiente y la deflexión en cualquier punto de la viga.



$R_A = \frac{3P}{4}$ $\quad R_B = \frac{P}{4}$



$V(x) = \frac{3P}{4} - P\langle x-a\rangle^0$

$\frac{dM}{dx} = V \Rightarrow \int dM = \int V\,dx + C$

Condición de frontera

$M = \int\left(\frac{3P}{4} - P\langle x-a\rangle^0\right)dx + C = \frac{3P.x}{4} - P\langle x-a\rangle^1 + C$

$\left.\begin{array}{l} X=0 \\ M=0 \end{array}\right\} C=0$

$$\boxed{M(x) = \frac{3Px}{4} - P\left\langle x-\frac{L}{4}\right\rangle^1}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{M(x)}{EI} \Rightarrow E.I.\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{3Px}{4} - P\left\langle x-\frac{L}{4}\right\rangle^1$$

Integrando

$$\underbrace{E.I.\frac{dy}{dx}}_{\text{pendiente}} = \frac{3Px^2}{8} - \frac{P}{2}\left\langle x-\frac{L}{4}\right\rangle^2 + C_1$$

pendiente $\quad \tan\theta \approx \theta$

Volviendo a integrar

$$E.I.\,y(x) = \frac{P.x^3}{8} - \frac{P}{6}\left\langle x-\frac{L}{4}\right\rangle^3 + C_1.x + C_2.$$

Condiciones de frontera

$X=0 \quad y=0$

$X=L \quad y=0$

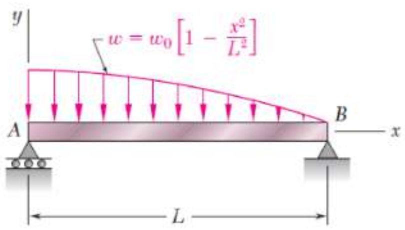
$\left.\begin{array}{l} X=0 \\ y=0 \end{array}\right\} C_2=0$

$\left.\begin{array}{l} X=L \\ y=0 \end{array}\right\} 0 = \frac{P.L^3}{8} - \frac{P}{6}\cdot\frac{27L^3}{64} + C_1.L + 0$

$C_1 = -\frac{7.P.L^2}{128} \Rightarrow \boxed{y(x) = \frac{1}{EI}\left(\frac{Px^3}{8} - \frac{P}{6}\left\langle x-\frac{L}{4}\right\rangle^3 - \frac{7P.L^2}{128}.x\right)}$

Problema 05

Para la viga y la carga que se muestran en la figura, determine a) la ecuación de la curva elástica, b) la pendiente en el extremo A, c) la deflexión en el punto medio del claro.



$\omega = \omega_0.\left(1 - \frac{x^2}{L^2}\right)$

$\frac{dV}{dx} = -\omega \qquad \frac{dV}{dx} = -\omega_0.\left(1-\frac{x^2}{L^2}\right)$ integrando $\quad V(x) = -\frac{\omega_0}{L^2}\left(L^2.x - \frac{x^3}{3}\right) + C_1$

$\frac{dM}{dx} = V \qquad \frac{dM}{dx} = -\frac{\omega_0}{L^2}\left(L^2.x - \frac{x^3}{3}\right) + C_1$

Integrando

$$M(x) = -\frac{\omega_0}{L^2}\left(\frac{L^2.x^2}{2} - \frac{x^4}{12}\right) + C_1.x + C_2$$

Condiciones de frontera

$X=0 \quad X=L$

$M=0 \quad M=0$

$\left.\begin{array}{l} X=0 \\ M=0 \end{array}\right\} C_2=0$

$\left.\begin{array}{l} X=L \\ M=0 \end{array}\right\} 0 = -\frac{\omega_0}{L^2}\left(\frac{L^4}{2} - \frac{L^4}{12}\right) + C_1.L + 0$

$C_1 = \frac{5}{12}\omega_0.L$

$$\boxed{M(x) = -\frac{W_0}{L^2}\left(\frac{L^2.x^2}{2} - \frac{x^4}{12}\right) + \frac{5}{12}w_0.L.x}$$

Resolviendo la siguiente ec. diferencial

$$\boxed{\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{M(x)}{EI}} \qquad E.I.\frac{d^2y}{dx^2} = M(x)$$

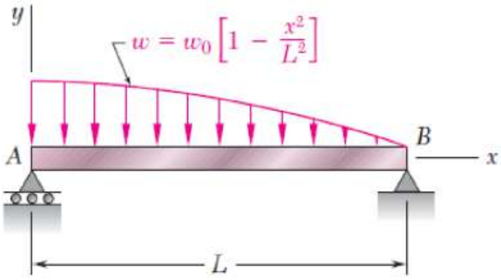
$$E.I.\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{W_0}{L^2}\left(\frac{L^2.x^2}{2} - \frac{x^4}{12}\right) + \frac{5}{12}w_0.L.x$$

Integrando:

$$E.I.\frac{dy}{dx} = -\frac{W_0}{L^2}\left(\frac{L^2.x^3}{6} - \frac{x^5}{60}\right) + \frac{5}{24}w_0.L.x^2 + C_3$$

Integrando:

$$E.I\,y(x) = -\frac{W_0}{L^2}\left(\frac{L^2.x^4}{24} - \frac{x^6}{360}\right) + \frac{5}{72}.W_0.L.x^3 + C_3.x + C_4$$



Evaluando nuestra condiciones de frontera:

$X=0 \quad y=0$

$X=L \quad y=0$

$\left.\begin{matrix}X=0\\ y=0\end{matrix}\right\} C_4=0 \qquad \begin{matrix}X=L\\ y=0\end{matrix}$

$$0 = -\frac{W_0}{L^2}\left(\frac{L^6}{24} - \frac{L^6}{360}\right) + \frac{5}{72}.W_0L^4 + C_3.L + 0$$

$$C_3 = -\frac{11}{360}.W_0.L^3$$

a)

$$y = \frac{W_0}{360EIL^2}\left(x^6 - 15L^2x^4 + 25.L^3.x^3 - 11L^5.x\right)$$

Ec. de la curva elastica

b)

$$\underbrace{E.I.\frac{dy}{dx}}_{\text{pendiente}} = -\frac{W_0}{L^2}\left(\frac{L^2.x^3}{6} - \frac{x^5}{60}\right) + \frac{5}{24}W_0.L.x^2 - \frac{11}{360}.W_0.L^3$$

$$\theta(x) = \frac{1}{E.I}*\left(-\frac{W_0}{L^2}\left(\frac{L^2.x^3}{6} - \frac{x^5}{60}\right) + \frac{5}{24}W_0.L.x^2 - \frac{11}{360}.W_0.L^3\right)$$

Ec. de la pendiente de la curva elastica

$$\theta(x=L) = \frac{-11}{360}.W_0.L^3$$

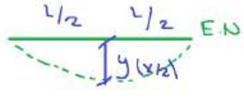
(horario)

c) la deflexión en el punto medio del claro.

$$y = \frac{W_0}{360E.I.L^2}\left(x^6 - 15L^2x^4 + 25.L^3.x^3 - 11L^5.x\right)$$

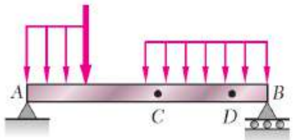
Para $\quad x = L/2$

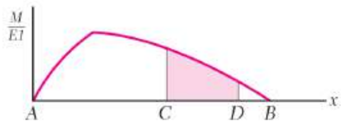
$$y = \frac{-211}{23040}*\frac{W_0.L^4}{EI}$$



Teorema de momento de área

Consideremos una viga AB sometida a cargas





E.I = Rigidez a la flexión

$$\frac{dy}{dx} = \text{Pendiente} \approx \theta \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \theta$$

Derivando

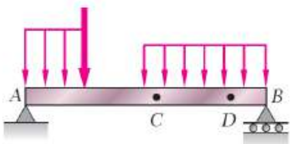
$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d\theta}{dx}$$

$$\frac{M}{EI} = \frac{d\theta}{dx} \Rightarrow \frac{M}{EI}\,dx = d\theta$$

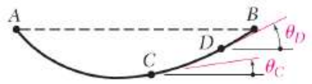
Integrando

$$\int_{x_C}^{x_D} \frac{M}{EI}\,dx = \int_{\theta_C}^{\theta_D} d\theta \Rightarrow \int_{x_C}^{x_D} \frac{M}{EI}\,dx = \theta_D - \theta_C$$

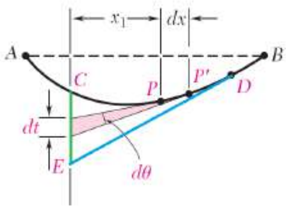
Deflexión



$\theta_D - \theta_C$ = **Area debajo del diagrama (M/EI) entre C y D**



Considerando otra curva elastica



$$dt = x_1\,d\theta$$

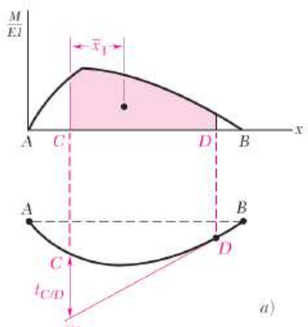
Sabemos

$$\frac{M}{EI} = \frac{d\theta}{dx} \Rightarrow \frac{M}{EI}\,dx = d\theta$$

$$\int dt = \int x_1\,d\theta$$

$$t_{C/D} = \int_{x_C}^{x_D} x_1 \cdot \frac{M}{EI} \cdot dx$$

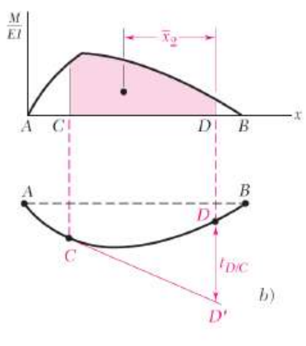
$t_{C/D}$ = **Desviación tangencial de C con respecto a D**



$$\int_{x_C}^{x_D} \frac{M}{EI}\,dx = \theta_D - \theta_C$$

$$t_{C/D} = \int_{x_C}^{x_D} x_1 \cdot \frac{M}{EI} \cdot dx$$

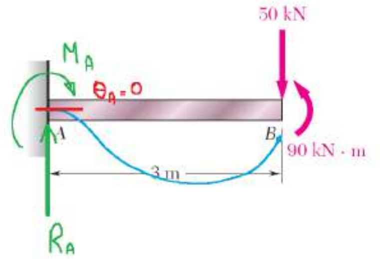
$$t_{C/D} = (\text{area entre } C \text{ y } D) \cdot \bar{x}_1$$



$$t_{D/C} \neq t_{C/D}$$

$$t_{D/C} = (\text{área entre } C \text{ y } D)\,\bar{x}_2$$

Determinar la pendiente y deflexión en el extremo B

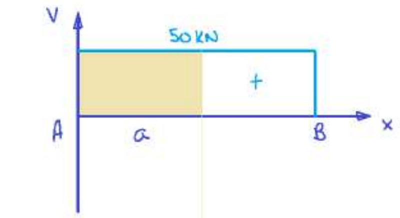


$E.I = 10\ MN.m^2$

$\circlearrowleft + \ \Sigma M_A = 0$

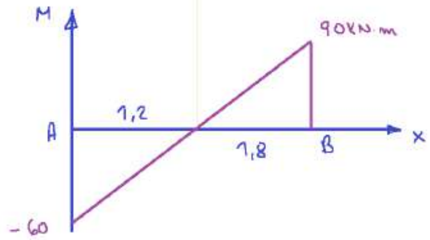
$-M_A + 90 - 150 = 0 \qquad M_A = -60\ kN.m$

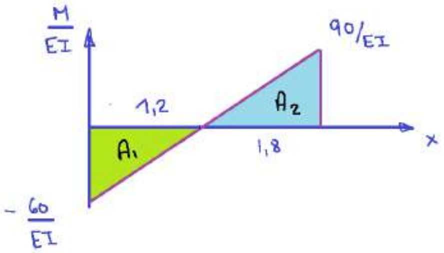
$\Sigma F_y = 0 \qquad R_A - 50 = 0 \qquad R_A = 50\ kN$



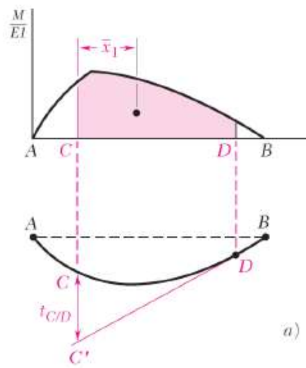
Área = $50.a$

$50.a = 60 \qquad a = 1{,}2\ m$





Referencia



$E.I = 10\ MN.m^2$

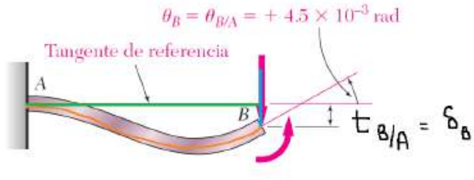
$$A_1 = -\frac{1}{2} \times \frac{1{,}2\ m \times 60 \times 10^3\ N.m}{10 \times 10^6\ N.m^2}$$

$$A_2 = +\frac{1}{2} \times \frac{1{,}8\ m \times 90 \times 10^3\ N.m}{10 \times 10^6\ N.m^2}$$

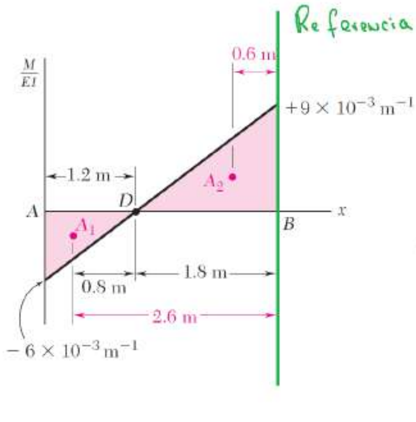
Sumando $A_1 + A_2 = 4{,}5 \times 10^{-3}\ rad$

$$\int_{x_A}^{x_B} \frac{M}{EI}\, dx = \cancel{\theta_A}^{\,0} - \theta_B = 4{,}5 \times 10^{-3}\ rad \ \Rightarrow \ \theta_B = -4{,}5 \times 10^{-3}\ rad$$

La deflexión en B



$t_{B/A}$ = **Desviación tangencial de B con respecto a A**



$$t_{B/A} = \underbrace{-\frac{1}{2} \times \frac{1{,}2\ m \, . \, 60 \times 10^3\ N.m}{10 \times 10^6\ N.m^2}}_{A_1} \times 2{,}6\ m + \underbrace{\frac{1}{2} \times \frac{1{,}8\ m \times 90 \times 10^3\ N.m}{10 \times 10^6\ N.m^2}}_{A_2} \times 0{,}6\ m$$

$t_{B/A} = -4{,}50\ mm$

$\delta_B = -4{,}50\ mm$ ✓