1. Halle $y(t)$ en el siguiente PVI: $\begin{cases} y'' + 2y' - 15y = \delta(t-3) \\ y(0) = 0\,;\, y'(0) = 4 \end{cases}$ **(2 puntos)**

$$S^2 Y_S - 0 - 4 + 2(S Y_S - 0) - 15 Y_S = e^{-3S}$$

$$Y_S(S^2 + 2S - 15) = e^{-3S} + 4$$

$$Y(S) = e^{-3S} \times \frac{1}{(S+5)(S-3)} + 4 \times \frac{1}{(S+5)(S-3)}$$

$\alpha = -5\,,\, 3$

$$1 = A(S-3) + B(S+5)$$

$$-\frac{1}{8} = A \quad ; \quad B = \frac{1}{8}$$

$$Y(S) = e^{-3S}\left(-\frac{1}{8} \times \frac{1}{(S+5)} + \frac{1}{8} \times \frac{1}{(S-3)}\right) + 4\left(-\frac{1}{8} \times \frac{1}{(S+5)} + \frac{1}{8} \times \frac{1}{(S-3)}\right)$$

$$y(t) = \left(-\frac{1}{8} \times e^{-5(t-3)} + \frac{1}{8} e^{3(t-3)}\right) u(t-3) - \frac{1}{2} \times e^{-5t} + \frac{1}{2} \times e^{3t}$$

2. Halle $g(t)$ si su transformada de Laplace es: **(2,0 puntos)**

$$G(s) = \frac{3s-1}{s^3+s} = \frac{3s-1}{s(s^2+1)}$$

Nota: En su desarrollo use la **fórmula 20** de la tabla de Laplace para el puntaje completo.

$$g(t) = \int_0^t \mathcal{L}\left(\frac{3s-1}{(s^2+1)}\right) du$$

$$3 \times \frac{s}{s^2+1} - \frac{1}{s^2+1}$$

$$3 \times \cos(t) - \operatorname{sen}(t)$$

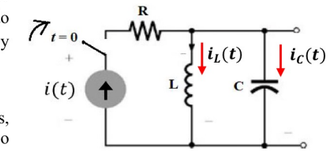
$$g(t) = \int_0^t (3 \times \cos(u) - \operatorname{sen}(u))\, du$$

$$g(t) = 3 \times \operatorname{sen}(u) + \cos(u) \Big|_0^t$$

$$g(t) = 3 \times \operatorname{sen}(t) + \cos(t) - 1$$

3. **PROBLEMA DE RAZONAMIENTO CUANTITATIVO RC**

El siguiente circuito RLC con la fuente de corriente $\boldsymbol{i(t)}$ es un sistema LTI. Antes de su encendido (cerrando el switch en $t = 0$) todos los voltajes y corrientes al inicio son cero.



Siendo $R = 2\Omega$, $L = 8H$, $C = 0.5F$

Donde $i_L(t)$, $i_C(t)$ son las corrientes, en amperios, que pasan por la bobina y el condensador en el tiempo de $\boldsymbol{t}$ segundos, respectivamente.

Se sabe que las ecuaciones que modelan el circuito en términos de las corrientes indicadas son:

$$\begin{cases} i(t) = i_L(t) + i_C(t) \\ L\, i_L'(t) = \frac{1}{C}\int_0^t i_C(\tau)\, d\tau \end{cases}$$

a. Determine la función de transferencia del sistema considerando que la entrada es la fuente de corriente $\boldsymbol{i(t)}$ y la **salida es la corriente por la bobina** $\boldsymbol{i_L(t)}$. **(1,5 puntos)**

b. Halle la respuesta del sistema ante la entrada $i(t) = \delta(t - 3\pi)$ **(2,0 puntos)**

c. Considerando la entrada de la parte b), ¿Se puede afirmar que la corriente que pasa por la bobina para un tiempo de 7 segundos, $i_L(7)$, es menor a 0,5 amperios? **(0,5 puntos)**

$$H_S = \frac{I_L}{I}$$

Salida

entrada

$$I = I_L + I_C$$

$$8(S I_L) = 2 \times \frac{I_C}{S}$$

$$\frac{8 \times S^2 I_L}{2} = I_C$$

$$4 \times S^2 \times I_L = I_C$$

$$I = I_L + 4S^2 \times I_L$$

$$I = (1 + 4S^2) \times I_L$$

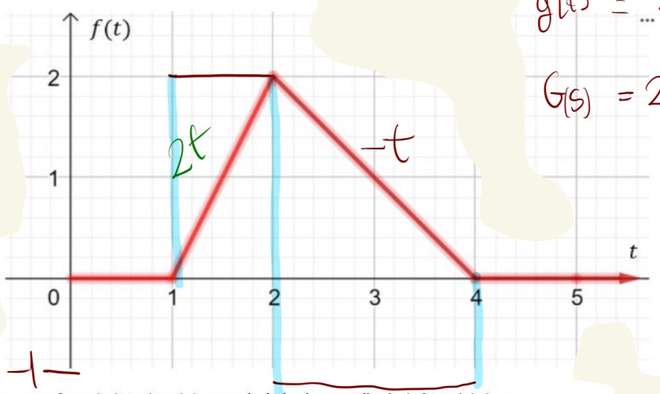
$$\frac{1}{(1+4S^2)} = \frac{I_L}{I} = H(S)$$

$$e^{-3\pi} \times \frac{1}{(1+4S^2)} = I_L$$

$$\frac{e^{-3\pi}}{4\sqrt{\frac{1}{4}}} \times \frac{1 \times \sqrt{\frac{1}{4}}}{\left(S^2 + \sqrt{\frac{1}{4}}^2\right)} = I_L$$

$$\frac{1}{4 \times \sqrt{\frac{1}{4}}} \times \operatorname{sen}\left(\sqrt{\frac{1}{4}} \times (t - 3\pi)\right) u(t - 3\pi) = I_L$$

Dada la gráfica de la función *f*(t) de la figura adjunta



$g(t) = 2\delta(t-1) - 3\delta(t-2) + 1\delta(t-4)$

$G(s) = 2e^{-s} - 3e^{-2s} + 1e^{-4s} - 1 + 1$

$A = 2$

$B = -3$

$C = 1$

$D = -1$

Se sabe que transformada de Laplace de la **segunda derivada generalizada** de *f*(t) está dado por:

$G(s) = Ae^{-s} + Be^{-2s} + Ce^{-4s} + D + 1$

Determine los valores de *A,B,C* y *D*

Halle la convolución $f(t) * g(t)$, donde:

$f(t) = e^{-t}u(t)$, $g(t) = u(t)$

- (A) $(1-e^{t})\,u(t)$
- (B) $(1-e^{-t})\,u(t)$
- (C) $(1+e^{-t})\,u(t)$
- (D) $(e^{-t}-1)\,u(t)$
- (E) $(e^{t}-1)\,u(t)$

$F(s) = \frac{1}{(s+1)} \times \frac{1}{s}$

$f(t) = \int_0^t e^{-u}\,du$

$f(t) = -e^{-u}\Big|_0^t = (-e^{-t}+1)\,u(t)$

$f(t) = (1-e^{-t})\,u(t)$

Halle la transformada inversa de laplace de:

$\frac{s^2-1}{(s+1)^3}$

- (A) $e^{-t}+2te^{-t}$
- (B) $e^{-t}(1-2t)$
- (C) $(2t+1)e^{t}$
- (D) $(2t-1)e^{-t}$

$s^2-1 = A(s+1)^2 + B(s+1) + C$

$s^2-1 = As^2 + 2As + A + Bs + B + C$

$s^2-1 = As^2 + s(2A+B) + A + B + C$

$s^2-1 = (1)s^2 + s(2(1)-2) + (1)-(2)+0$

$s^2-1 = s^2-1$

$A = 1$

$B = -2$

$C = 0$

$F(s) = \frac{1}{(s+1)} - 2 \times \frac{1}{(s+1)^2} + 0$

$f(t) = e^{-t} - 2 \times t \times e^{-t}$

$f(t) = (1-2t) \times e^{-t}$

Se sabe que la transformada inversa el Laplace de $\frac{6s^2-7s-2}{(s-1)(s^2-4)}$ es

$f(t) = Ae^{t} + Be^{2t} + Ce^{-2t}$

Mensajes

El valor de *A* es:

El valor de *B* es:

El valor de *C* es:

En el siguiente PVI $\begin{cases} y'' - 4y = u(t) \\ y(0) = 0 \;,\; y'(0) = 1 \end{cases}$, al resolverlo seobtiene que:

$Y(s) = \frac{A+s}{s(s^2+B)}$ y $y(t) = Ce^{2t} - \frac{1}{8}D$

Donde Y(s) es la transforrmada de Laplace de y(t).

Mensajes

(A+B) es igual a: -3

(A+C) es igual a: $11/8$

C es igual a: $3/8$

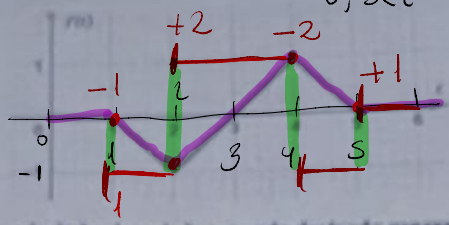
D es igual a: $2 + e^{-2t}$

$0 \; ; 0<t<1$
$-t \; ; 1<t<2$
$t \; ; 2<t<4$
$-t \; ; 4<t<5$
$0 \; ; 5<t$

$0; 0<t<1$
$-1; 1<t<2$
$1; 2<t<4$
$-1; 4<t<5$
$0; 5<t$

PARTE I (12puntos) **(3 puntos)**

1. Dada la gráfica de la función $f(t)$ de la figura adjunta.



$-\delta(t-1)$
$+2\delta(t-2)$
$-2\delta(t-4)$
$+1\delta(t-5)$

Se sabe que la transformada de Laplace de **la segunda derivada generalizada** de $f(t)$ está dada por:

$G(x) = Ae^{-s} + Be^{-2s} + Ce^{-4s} + De^{-5s}$

$-1e^{-s} + 2e^{-2s} - 2\times e^{-4s} + 1\times e^{-5s}$
$= Ae^{-s} + Be^{-2s} + Ce^{-4s} + De^{-5s}$

Determine los valores de A, B, C, D.

Complete los espacios en blanco, de la tabla del lado izquierdo, según corresponda los valores de la **tabla 1**

A es igual a	-1
B es igual a	2
C es igual a	-2
D es igual a	1

Tabla 1

−1	−2
0	2
−3	4
−4	5
3	1

30

2. Halle la transformada inversa de $\frac{s}{(s-2)^2}$: **(2 puntos)**

A) $(1+t)e^{2t}$ B) $e^{-2t} + 2te^{-2t}$ C) $(1+2t)e^{2t}$ D) $(2t-1)e^{2t}$ E) $2t + e^{2t}$

#10 #11

$\frac{s}{(s-2)^2} = s \times \frac{1}{(s-2)^2} = s(te^{2t}) = e^{2t} + 2te^{2t} = (1+2t)e^{2t}$

$s \times F(s)$

20

3. Se sabe que la transformada de Laplace inversa de $F(s) = \frac{4s^2-s+1}{s^3-s}$ es: **(2 puntos)**

$f(t) = (A + Be^{t} + Ce^{-t})\,u(t)$

$f(t) = (- \quad 3e^{-t})\,u(t)$

$F(s) = \frac{4s^2-s+1}{s(s^2-1)}$

α

Complete los espacios en blanco, de la tabla del lado izquierdo, según corresponda los valores de la **tabla 1**

El valor de A es:	-1
El valor de B es:	2
El valor de C es:	3

Tabla 1

4	0
−2	2
3	−3
1	−1

$\frac{4s^2-s+1}{s(s^2-1)} = \frac{A}{s} + \frac{Bs+C}{s^2-1}$

$4s^2-s+1 = A(s^2-1) + s(Bs+C)$

$4s^2-s+1 = As^2 + Bs^2 - A + sC$

$\therefore = (A+B)s^2 + sC - A$
$= (-1+5)s^2 - (-1)s - (-1)$

$A=-1$
$B=5$
$C=-1$

$\therefore = -\frac{1}{s} + \frac{5s-1}{s^2-1}$

20

$s^2 Y_s - sY_0 - Y_0' + 4Y_s = \frac{1}{s}$

$s^2 Y_s + 1 + 4Y_s = \frac{1}{s}$

$Y_s(s^2+4) = \frac{1-s}{s}$

$Y_s = \frac{1-s}{(s^2+4)(s)}$

4. En el siguiente PVI: $\begin{cases} y'' + 4y = u(t) \\ y(0) = 0\,;\, y'(0) = -1 \end{cases}$ **(3 puntos)**

Se obtiene que:

$$Y(s) = \frac{1 + As}{s(s^2 + B)} \quad , \quad y(t) = \left(C\,\mathrm{sen}(2t) + \frac{1}{2}D\right)u(t)$$

Donde $Y(s)$ es la transformada de Laplace de $y(t)$.

Escriba en los espacios en blanco la numeración según corresponda de la **tabla 1**

$(A+B)$ es igual a:	I
$(A+C)$ es igual a:	II
$(B+C)$ es igual a:	III
D es igual a:	IV

Tabla 1

I	3
II	$-\frac{3}{2}$
III	$\frac{7}{2}$
IV	$\frac{1-\cos(2t)}{2}$
V	$\frac{3}{2}$
VI	2
VII	$\frac{5}{2}$
VIII	$1-\cos(2t)$
IX	$1+\cos(2t)$

$A = -1$

$B = 4$

$C = -\frac{1}{2}$

$A + C = -\frac{3}{2}$

$B + C = \frac{7}{2}$

$(A+B) = -1 + 4 = 3$

$1 - s = \frac{A}{s} + \frac{Bs + C}{s^2+4}$

$1 - s = A(s^2+4) + Bs^2 + Cs$

$1 - s = As^2 + A4 + Bs^2 + Cs$

$1 - s = (A+B)s^2 + Cs + A4$

$= \frac{1}{4} - \frac{1}{4})$

$-(-1)s$

$C = -1$

$A = \frac{1}{4}$

$B = -\frac{1}{4}$

$-\frac{1}{4} \times \frac{s}{s^2+2^2}$

$-\frac{1}{s^2+2^2}$

$\frac{1}{4s}$

$y(t) = \frac{1}{4}u(t) - \frac{1}{4}\cos(2t) - \frac{1}{2}\,\mathrm{sen}(2t)$

5. Halle la convolución $f(t) * g(t)$ **(2 puntos)**

Si se sabe que: $f(t) = u(t)$, $g(t) = e^{-t}u(t)$

$\frac{1}{2} \times \boxed{\frac{1}{2}(1 - \cos(2t))}$

A) $(1 + e^{t})u(t)$ B) $(1 - e^{-t})\,u(t)$ C) $(1 + e^{-t})\,u(t)$ D) $e^{-t}u(t)$ E) $e^{t}\,u(t)$

$\frac{1}{s+1}$

$f * g = \frac{1}{s} \times \frac{1}{s+1}$

$\int_0^t e^{-z}\,dz = -e^{-z}\Big|_0^t = (-e^{-t} + 1)\,u(t)$

$f * g = (1 - e^{-t})\,u(t)$

PARTE II **8 puntos**

1. Halle la transformada de Laplace $F(s)$ de la función $f(t) = (t+1)\,u(t-2)$. **(1,5 puntos)**

$f(t) = (t-2+3)\cdot u(t-2)$

$\mathcal{L}\{f(t)\} = \underbrace{\mathcal{L}\{(t-2)\,u(t-2)\}}_{\text{Fórmula 15}} + \underbrace{3\,u(t-2)\}}_{\text{Fórmula 24}}$

$F(s) = e^{-2s}\cdot\frac{1}{s^2} + 3\frac{e^{-2s}}{s}$

$F(s) = e^{-2s}\left(\frac{1}{s^2}+\frac{3}{s}\right)$

(13) $f(t-a)\cdot u(t-a) = e^{-as}F(s)$

$\boxed{f(t)=t} \longrightarrow e^{-2s}\cdot\frac{1}{s^2}$

$F(s) = \frac{1}{s^2}$

1.5

2. Halle la transformada inversa $f(t)$ de: **(2,0 puntos)**

$$F(s) = \frac{s+4}{s^3+9s}$$

Nota: En su desarrollo use la **fórmula 20** de la tabla de Laplace para el puntaje completo.

Formula 20: $\int_0^t f(u)\,du = \frac{F(s)}{s}$

$F(s) = \frac{s+4}{s(s^2+9)} \rightarrow \frac{1}{s}\left(\frac{s}{s^2+9}+\frac{4}{s^2+9}\right) \rightarrow \frac{1}{s}\left(\frac{s}{s^2+9}+\frac{4}{3}\times\frac{3}{s^2+9}\right)$

$= \frac{1}{s}\left(\mathcal{L}\{\cos 3t\}+\frac{4}{3}\mathcal{L}\{\operatorname{sen} 3t\}\right)$

Formula 20

$F(s) = \frac{1}{s}\overbrace{\left(\mathcal{L}\{\cos 3t+\frac{4}{3}\operatorname{sen} 3t\}\right)}^{F(s)}$

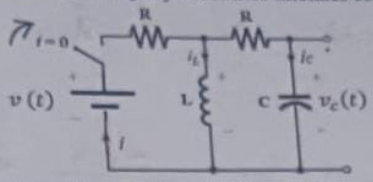
$f(t) = \int_0^t \left(\cos 3u+\frac{4}{3}\operatorname{sen} 3u\right)du = \left[\frac{\operatorname{sen} 3u}{3}-\frac{4}{9}\cos 3u\right]\Big|_0^t$

$f(t) = \left[\frac{\operatorname{sen} 3t}{3}-\frac{4}{9}\cos 3t\right. - \left(\frac{\operatorname{sen} 0}{3}-\frac{4}{9}\cos 0\right)$

$f(t) = \frac{\operatorname{sen} 3t}{3}-\frac{4}{9}\cos 3t+\frac{4}{9}$

2.0

3. En el siguiente circuito RLC, antes de su encendido con la fuente de voltaje $v(t)$ mostrada (cerrando el switch en $t = 0$), todos los voltajes y corrientes iniciales son cero.



Siendo los parámetros eléctricos $R = 2\Omega$, $L = 1H$, $C = 0.25F$.
Si se sabe que modelan el circuito son:

$$\begin{cases} v(t) = i_L(t)\,R + i_C(t)\,R + L\,i_L'(t) \\ L\,i_L'(t) = \dfrac{1}{C}\displaystyle\int_0^t i_C(\tau)d\tau + R\,i_C(t) \end{cases}$$

Donde $i_L(t)$, $i_C(t)$ son las corrientes, en amperios, que pasan por la bobina el condensador, respectivamente. Se pide:

a. Halle las ecuaciones en la variable de Laplace que modelan al circuito **(1 punto)**

b. Considerando un sistema LTI con entrada $v(t)$ y salida $i_L(t)$ (corriente por la bobina). Halle la función de transferencia del sistema. **(2 puntos)**

c. Halle la respuesta ante la entrada $v(t) = \delta(t-2)$ **(1,5 puntos)**

(a)

① $v(t) = i_L(t)\,(2) + i_C(t) \times 2 + 1 \times i_L'(t)$

$\hookrightarrow V_S = 2I_{LS} + 2I_{CS} + (S I_{LS} - 0)$

$V_S = (S+2) I_{LS} + 2I_{CS}$ ... (1)

② $1\, i_L'(t) = \frac{1}{1/4}\int_0^t i_C(t)\,dt + 2\, i_C(t)$

$\hookrightarrow S I_{LS} = 4\left(\frac{I_{CS}}{S}\right) + 2 I_{CS}$

$S I_{LS} = \frac{(4+2S)}{S} I_{CS}$

$\frac{S^2}{4+2S} I_{LS} = I_{CS}$ ... (2)

(b)

LTI: entrada

$H(S) = \frac{I_{L(S)}}{V(S)}$ => (2) en (1)

salida

$V_S = (S+2) I_{LS} + \frac{S^2}{(4+2S)} I_{LS} \rightarrow V_S = \left(\frac{(S+2)^2 + S^2}{S+2}\right) I_{LS}$

$V_S = \left(\frac{2S^2+4S+4}{S+2}\right) I_{LS}$

$\left(\frac{I_{LS}}{V_S} = \frac{S+2}{2S^2+4S+4}\right)$

$$\boxed{H(S) = \frac{S+2}{2S^2+4S+4}}$$

(c)

ATRÁS →