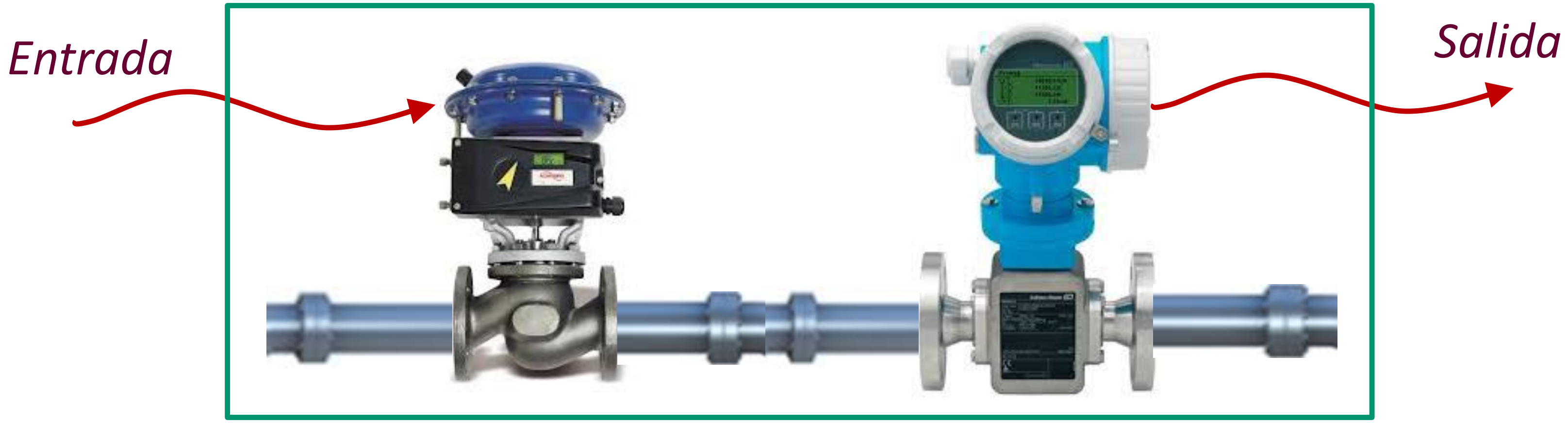
Análisis de estabilidad de sistemas y de sistemas de control

Ing. Eddie Sobrado

Estabilidad: en base a la respuesta del Sistema

- Estabilidad BIBO (Entrada-Acotada, Salida-Acotada): Con condiciones iniciales cero, un sistema es estable **BIBO** o simplemente estable (estabilidad absoluta), sí para *cada entrada acotada resulta una salida acotada*.
- Un sistema es inestable sí para *cualquier entrada acotada* resulta una *salida no acotada.*

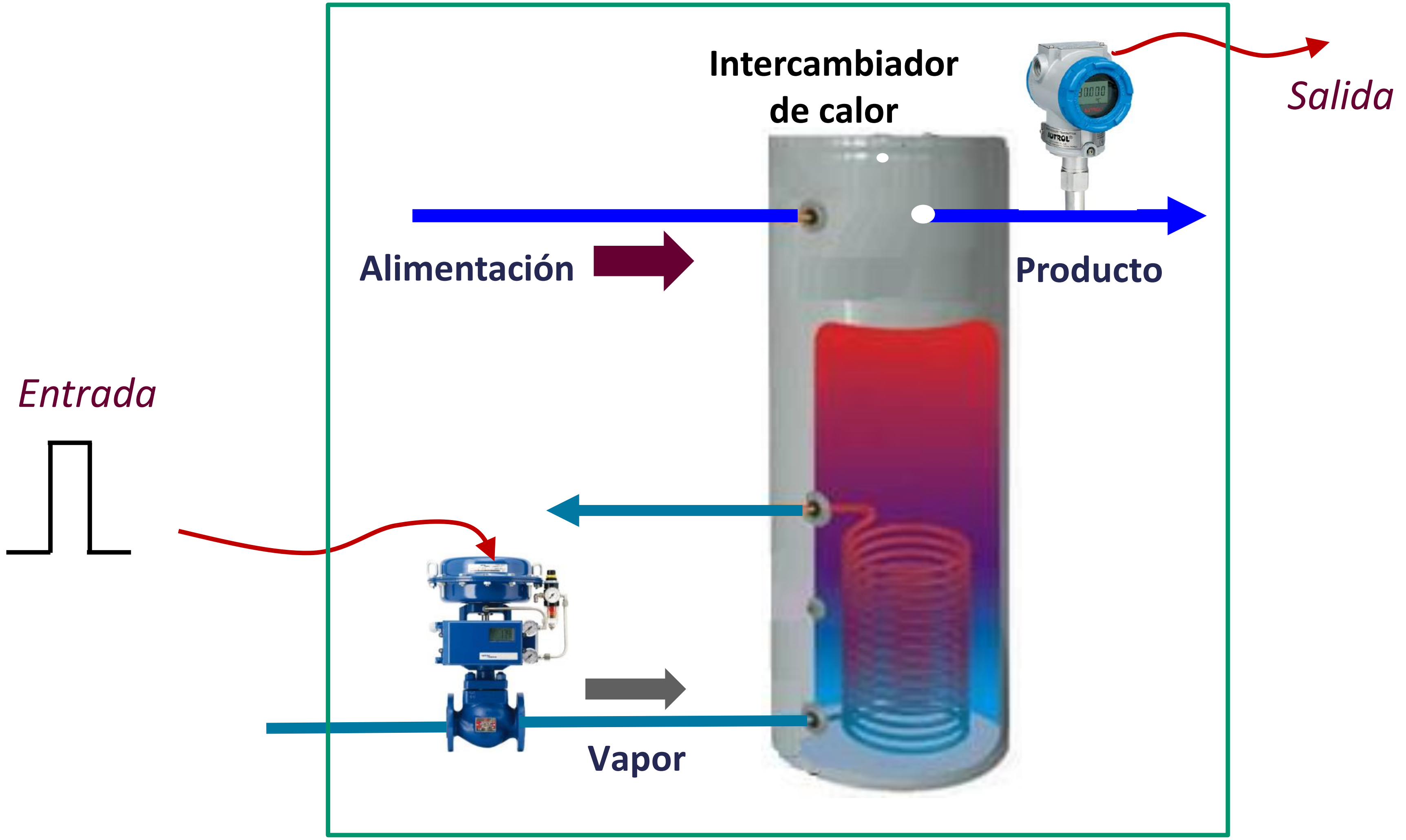


Estabilidad: en base a la respuesta del Sistema

- Un sistema de control inestable no se puede tolerar y una de las primeros razones en el análisis y diseño de los sistemas de control es determinar y asegurar la estabilidad.
- Para estabilidad BIBO, los polos de $G(s)$, o raíces de la ecuación característica, no pueden estar en el semiplano derecho o sobre el eje $j\omega$.

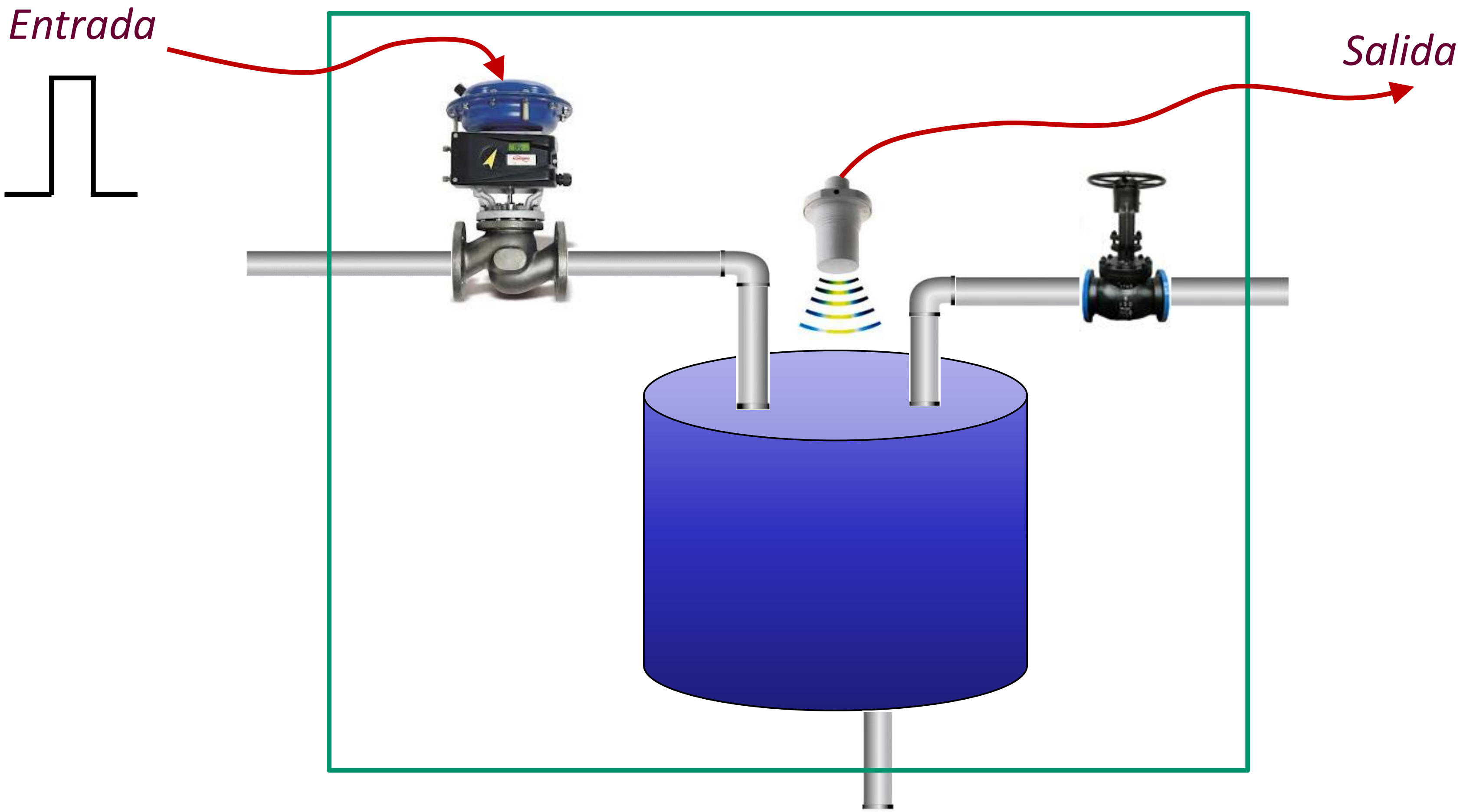
Estabilidad: en base a la respuesta del Sistema

- Respuesta al impulso: será estable si la respuesta tiende a cero en un tiempo infinito



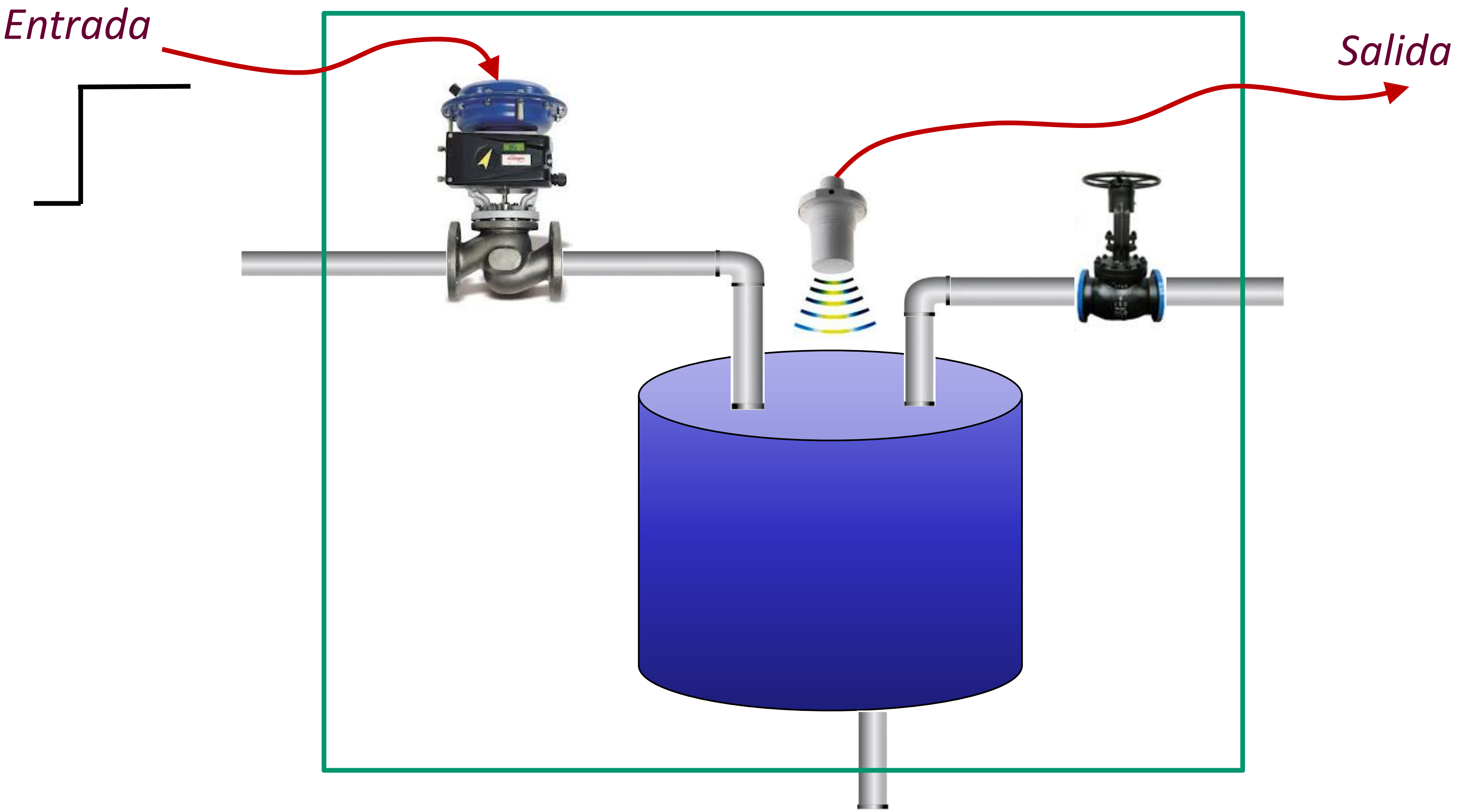
Estabilidad: en base a la respuesta del Sistema

- Respuesta al impulso: será estable si la respuesta tiende a cero en un tiempo infinito



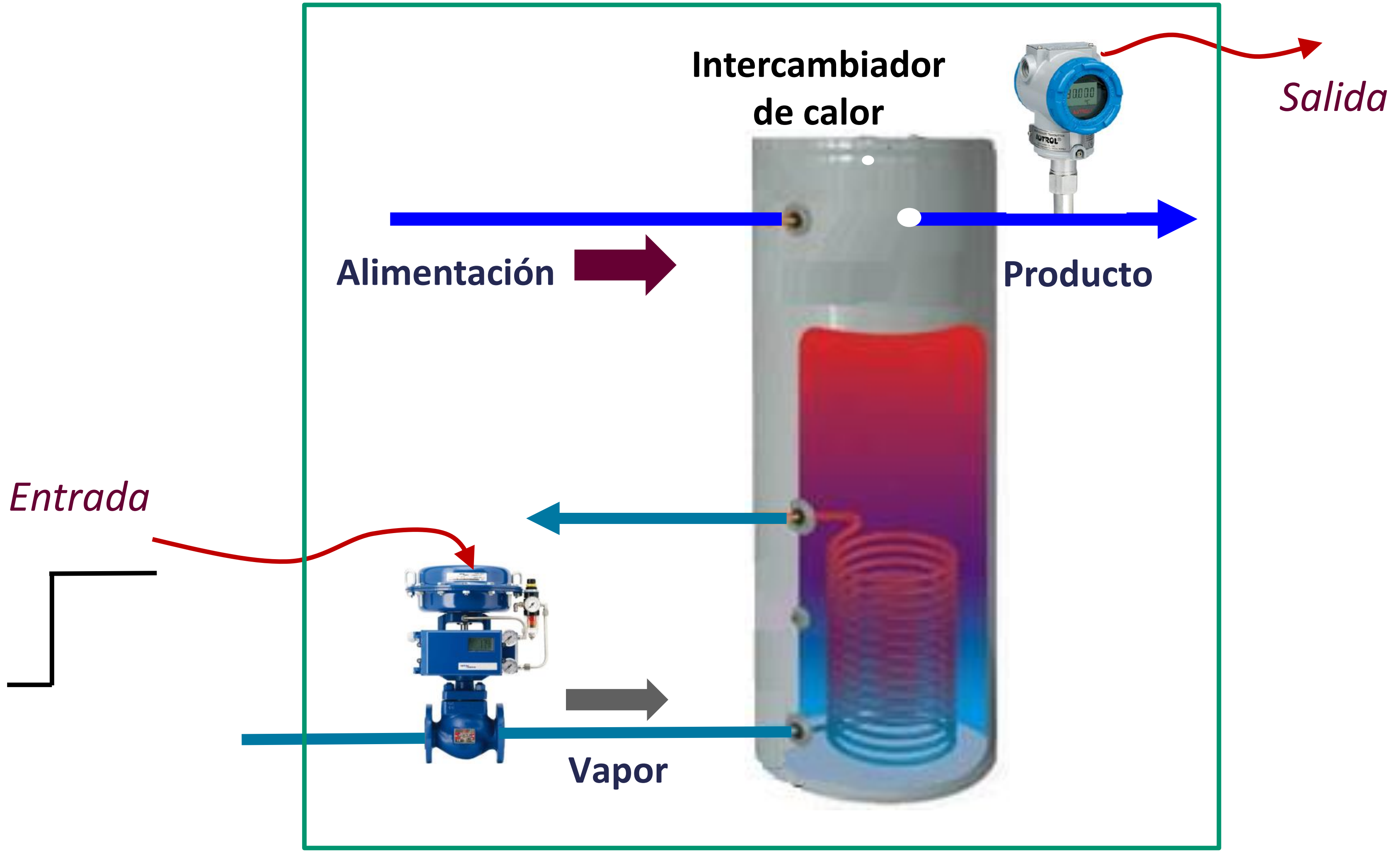
Estabilidad: en base a la respuesta del Sistema

- Respuesta a entrada finita: será estable si la respuesta también corresponde a un valor finito en un tiempo infinito



Estabilidad: en base a la respuesta del Sistema

- Respuesta a entrada finita: será estable si la respuesta también corresponde a un valor finito en un tiempo infinito



Estabilidad sobre el plano S por verificación de los polos

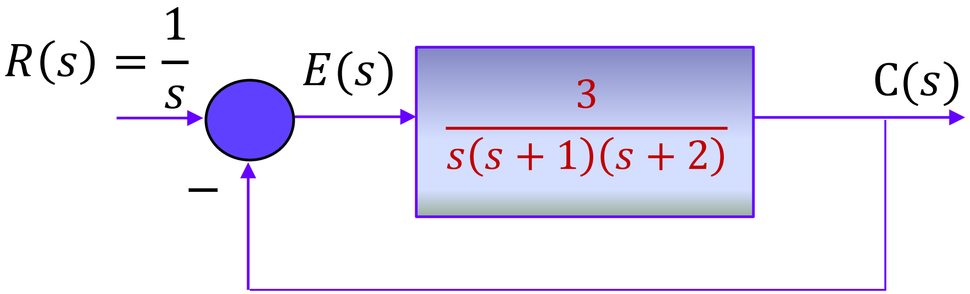
Estabilidad: sobre el plano S

- La estabilidad de un sistema dinámico se puede determinar la por la ubicación de los polos de lazo cerrado en el dominio de Laplace (Plano S).
- Sistema estable tiene polos solamente en el semiplano izquierdo. En este caso la respuesta transitoria alcanza el equilibrio.
- Sistemas Inestables tiene al menos un polo o polos en el semiplano derecho o polos de multiplicidad mayor que uno sobre el eje imaginario. Aquí la respuesta transitoria oscila con amplitud creciente.
- Sistemas Marginalmente estable (marginalmente inestable) tienen solamente polos de multiplicidad uno sobre el eje imaginario y polos en el semiplano izquierdo.
- Un polo en el eje imaginario produce oscilaciones de amplitud constante.

Estabilidad y Polos de Lazo cerrado

- Para analizar la estabilidad es suficiente con verificar los polos de la función de transferencia de un sistema en lazo cerrado, es decir las raíces de la ecuación característica.
- Típicamente, conocemos los polos de la función de transferencia de lazo abierto. Debemos evaluar la característica de lazo cerrado y resolver por sus raíces (los polos de lazo cerrado). El comando ‘roots’ de MATLAB puede ayudar en este proceso.

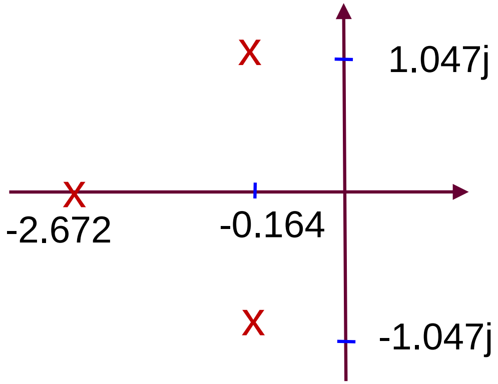
Polos de Lazo cerrado y respuesta

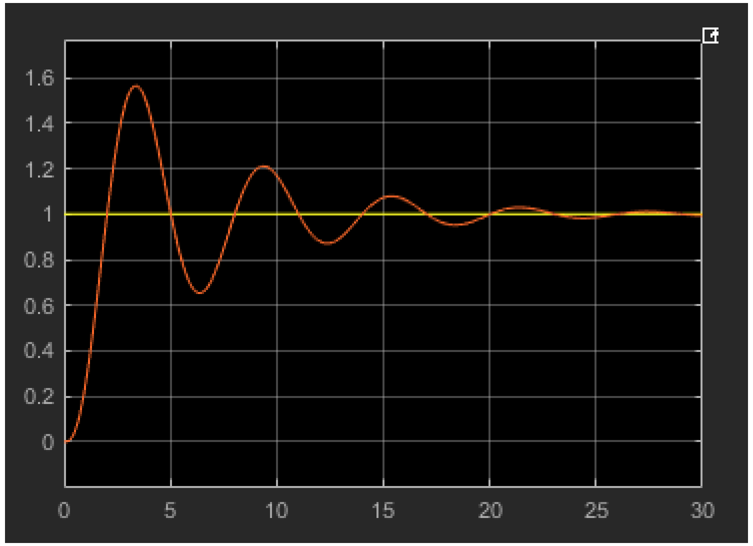


Sistema estable

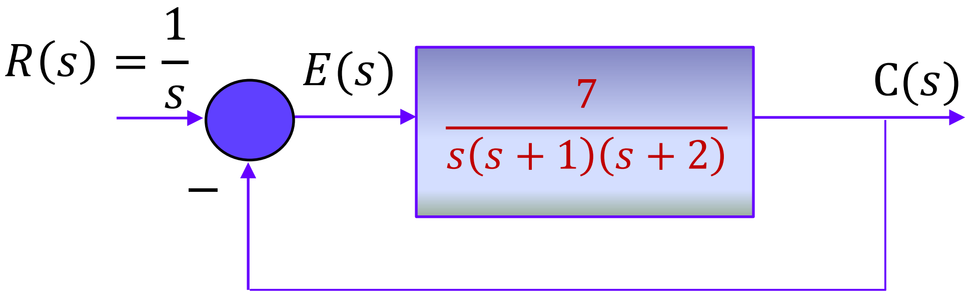
$$D(s) = 1 + \frac{3}{[s(s+1)(s+2)]} = 0$$

$$D(s) = s(s+1)(s+2) + 3 = 0$$





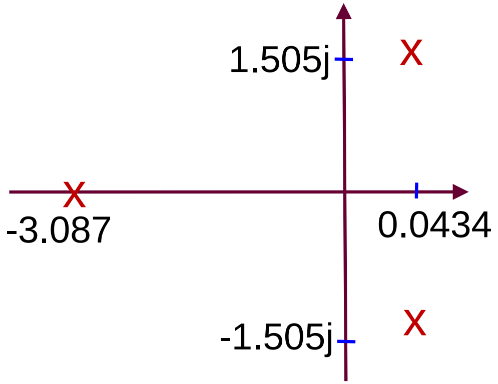
Polos de Lazo cerrado y respuesta

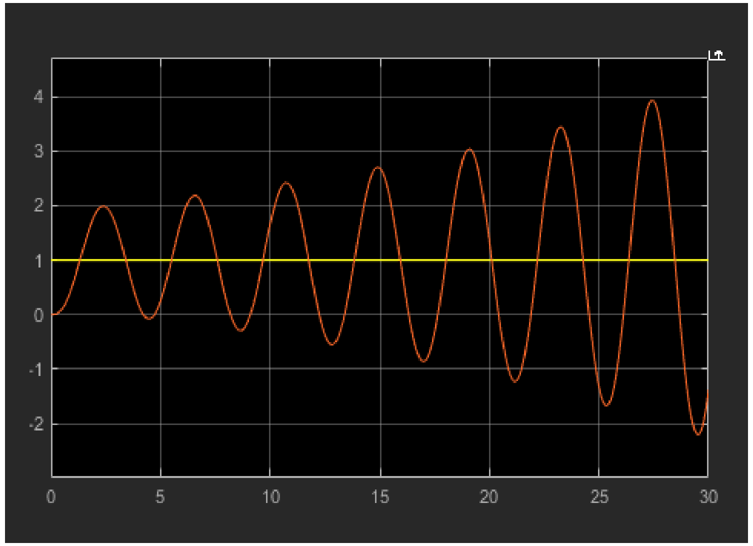


Sistema inestable

$$D(s) = 1 + \frac{7}{[s(s+1)(s+2)]} = 0$$

$$D(s) = s(s+1)(s+2) + 7 = 0$$



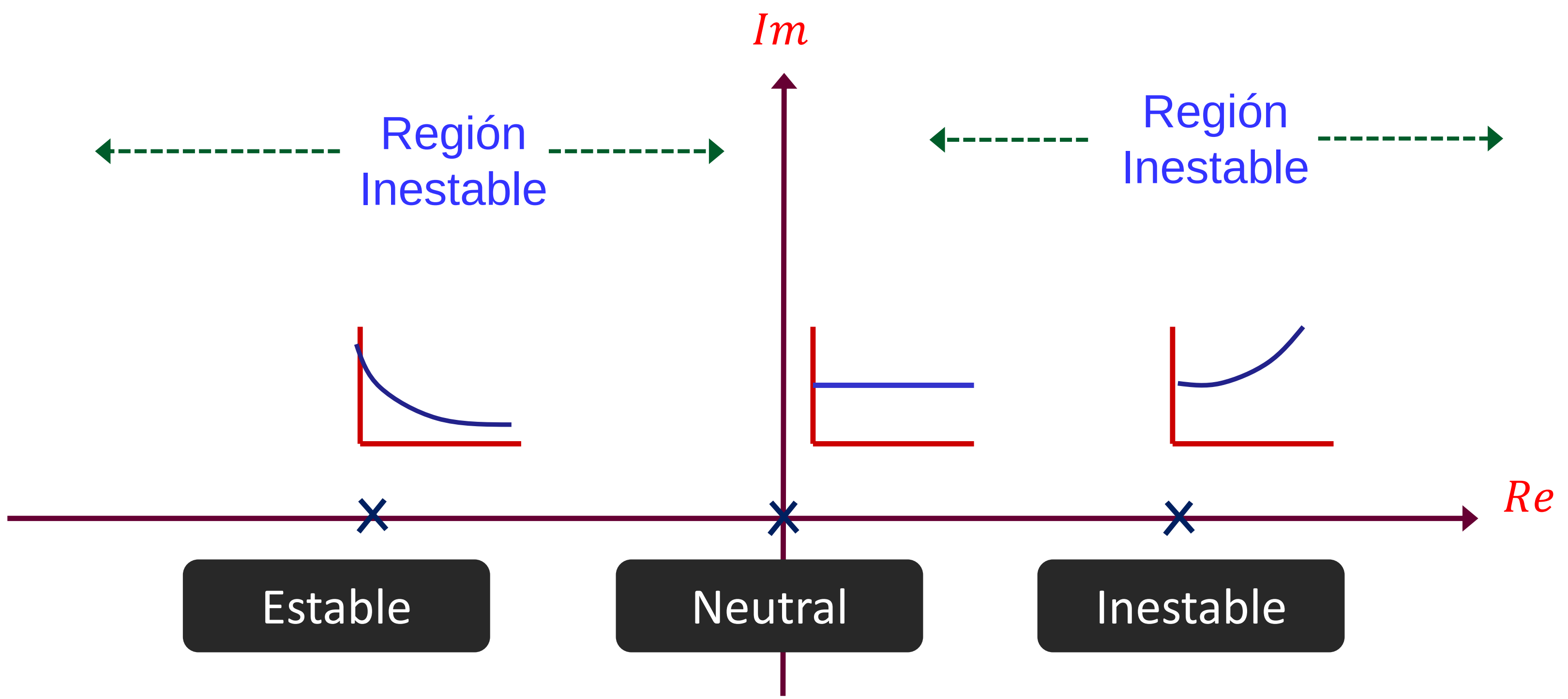


Consideraciones

- La estabilidad absoluta de un sistema es una propiedad del sistema y no depende de la entrada.
- La estabilidad de un sistema lineal e invariante en el tiempo se puede determinar al verificar la ubicación de las raíces de la ecuación característica del sistema.
- Por lo tanto, no es necesario conocer la respuesta en el tiempo del sistema para determinar su estabilidad desde el punto de vista práctico.

Condición de los Polos para Estabilidad

- **Condición de estabilidad:** todos los polos del sistema deben tener parte real negativa. Es decir, todos los polos deben estar en el semiplano izquierdo del plano s (la región estable)

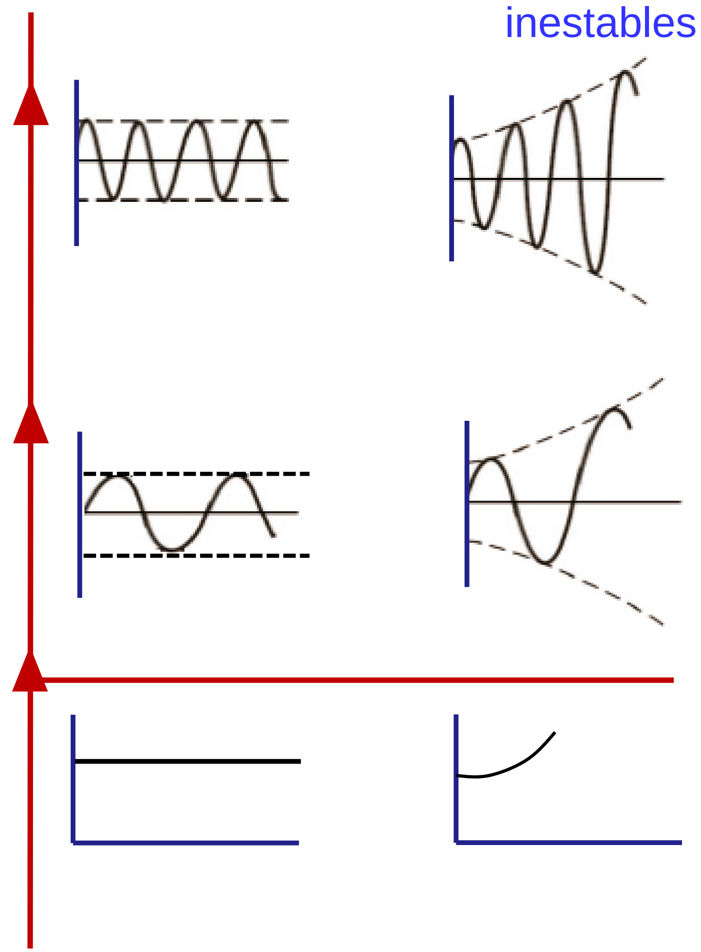


Sistemas Marginalmente Estables

¿Y el eje imaginario?

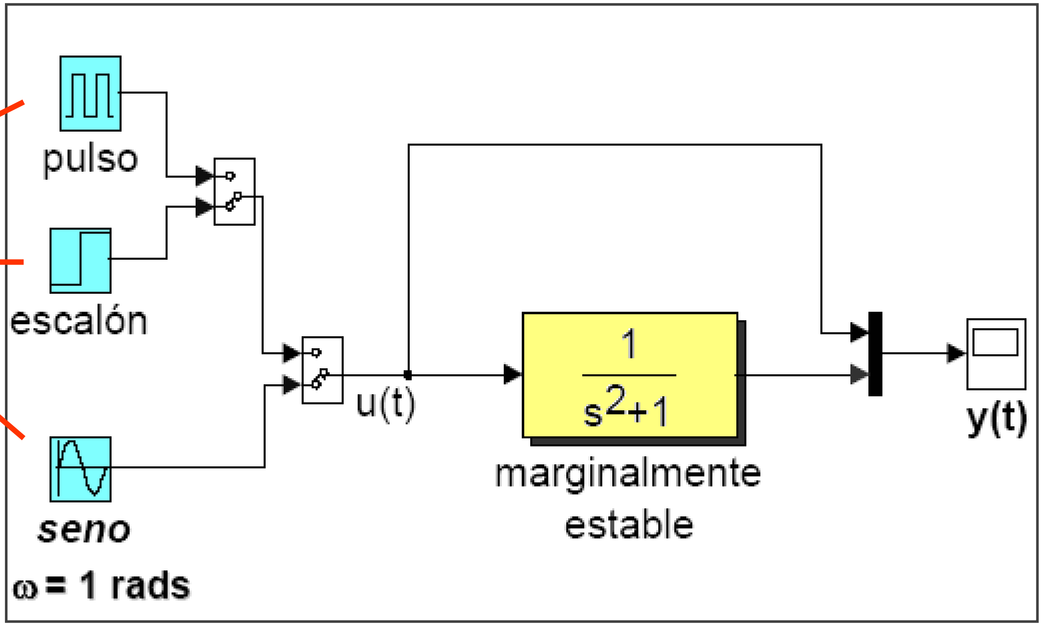
- Si un sistema con un par de polos imaginarios $\pm j\omega_n$ es excitado por una entrada que contenga la misma frecuencia del polo ω_n, la respuesta será inestable. Si el polo es múltiple, el sistema es siempre inestable, sin importar el tipo de entrada

Sistemas marginalmente estables (estables para algunas entradas, inestables para otras)



Sistemas Marginalmente Estables

Seleccionamos una de las entradas u(t)



Al simular, observamos que para las entradas, pulso y escalón el sistema es marginalmente estable.

Para el caso de entrada senoidal la estabilidad marginal dependerá de la frecuencia de entrada.

Métodos para Análisis de Estabilidad

- Existen métodos que permiten determinar la estabilidad de sistemas dinámicos sin necesidad de determinar las raíces de la ecuación característica (polos del sistema).
  - ✓ Criterio Routh-Hurwitz
  - ✓ Criterio de Nyquist
  - ✓ Diagrama de Bode

Métodos para Análisis de Estabilidad

- Análisis de estabilidad
  - ✓ Estabilidad Absoluta
  - ✓ Estabilidad Relativa
  - ✓ Comportamiento Estacionario

- Estabilidad Absoluta
  - ✓ Criterio de Routh
  - ✓ Criterio de Nyquist, etc.

- Estabilidad Relativa
  - ✓ Lugar de Raíces (Root Locus)
  - ✓ Diagramas de Bode .
  - ✓ Diagramas de Nyquist, etc

Condición suficiente para Inestabilidad

- Considere un sistema estable, por tanto el polinomio característico consistirá en términos de la forma $(s+a_i)$, donde a_i es positivo real o complejo con parte real positiva.
  a. El producto de tales términos es un polinomio con coeficientes positivos.
  b. Ningún termino de polinomio puede estar ausente, por ejemplo:

$$(s+a)(s-a) = s^2 - a^2$$

$$(s-jb)(s+jb) = s^2 + b^2$$

Prueba Suficiente de Inestabilidad: Un sistema es inestable, si todos los signos de todos los términos de su polinomio característico no son los mismos.

Si cualquier término esta ausente, el sistema es inestable, o mejor, marginalmente estable.

Desafortunadamente, si todos los términos son positivos y ninguno esta ausente, no se puede concluir nada acerca de la estabilidad o inestabilidad.

Una condición necesaria, pero no suficiente

- Deseamos hallar una condición que nos permita saber si un sistema lineal es estable o no analizando solamente los coeficiente del polinomio característico, sin necesidad de resolver este.

Polinomio característico:

$$\boxed{\Delta(s) = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \ldots + a_1 s + a_0}$$

Ecuación característica:

$$\Delta(s) = 0$$

Una condición necesaria, pero no suficiente

- Forma factorizada:

$$\Delta(s) = a_n(s - p_1)(s - p_2) \dots (s - p_n) = 0$$

operando:

$$\Delta(s) = a_n[s^n - (p_1 + p_2 \dots + p_n)s^{n-1} + (p_1p_2 + p_2p_3 + p_1p_3 \dots)s^{n-2} \\ -(p_1p_2p_3 + p_1p_2p_4 + \cdots)s^{n-3} \quad \dots + (-1)^n p_1p_2 \dots p_n] = 0$$

Condición necesaria, pero NO suficiente

Si Todos los polos tienen parte real negativa (sistema estable), entonces Todos los coeficientes tiene que tener el mismo signo

Una condición necesaria, pero no suficiente

- Ejercicio: sin resolver la ecuación característica, determine si los sistemas con los siguientes polinomios característicos son o no son estables

$$\Delta_1(s) = s^3 - 4s^2 + s + 6$$ INESTABLE

$$\Delta_2(s) = s^4 + 2s^3 + 3s^2 + 4s + 5$$?

$$\Delta_3(s) = s^4 + 2s^3 + 5s^2 + 4s + 5$$?

- Luego verifique su respuesta usando el comando *roots()* de matlab

Criterio de Routh-Hurwitz

Criterio de Estabilidad de Routh-Hurwitz

- Este método provee una forma de determinar si el sistema es estable o no haciendo un escrutinio de los coeficientes de los términos en la ecuación característica(EC), sin la necesidad del trabajo mecánico de encontrar las raíces.

- Es un método algebraico que prueba si cualquiera de las raíces está en el semiplano derecho del Plano “S”.
- Usando este criterio también podemos decir cuantos polos de lazo cerrado están en: el semiplano izquierdo, semiplano derecho, y sobre el eje imaginario jw.

Criterio de Routh-Hurwitz: Forma General

3. *Si todos los coeficientes son positivos, hay que ordenarlos en filas y columnas según el siguiente arreglo numérico*

$$\Delta(s) = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \ldots + a_1 s + a_0$$

$$\begin{array}{c|ccc}
s^n & a_n & a_{n-2} & a_{n-4} \\
s^{n-1} & a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} \\
\hline
s^{n-2} & b_{n-1} & b_{n-3} & b_{n-5} \\
s^{n-3} & c_{n-1} & c_{n-3} & c_{n-5} \\
 & & & \\
s^0 & h_{n-1} & &
\end{array}$$

$$b_{n-1} = -\frac{1}{a_{n-1}} \begin{vmatrix} a_n & a_{n-2} \\ a_{n-1} & a_{n-3} \end{vmatrix}$$

$$b_{n-3} = -\frac{1}{a_{n-1}} \begin{vmatrix} a_n & a_{n-4} \\ a_{n-1} & a_{n-5} \end{vmatrix}$$

$$c_{n-1} = -\frac{1}{b_{n-1}} \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} \\ b_{n-1} & b_{n-3} \end{vmatrix}$$

- El numero de cambios de signos en la primera columna es igual al numero de polos con parte real positiva
- Nos da una condición **NECESARIA Y SUFICIENTE**

Criterio de Routh-Hurwitz: Forma General

- El criterio de Routh-Hurwitz establece que el número de raíces con parte real positiva es igual al número de cambios de signo en la primera columna de la tabla. Un polinomio Hurwitz tiene todos sus coeficientes, y también todos los términos de la primera columna de la tabla, positivos.

Criterio de Routh-Hurwitz para Estabilidad

- Ejemplo:

$$R(s) \longrightarrow \boxed{\frac{N(s)}{a_4 s^4 + a_3 s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0}} \longrightarrow C(s)$$

s^4	a_4	a_2	a_0
s^3	a_3	a_1	0
s^2			
s^1			
s^0			

Las primeras dos filas del arreglo se obtienen directamente de la ecuación del polinomio característico.

Criterio de Routh-Hurwitz para Estabilidad

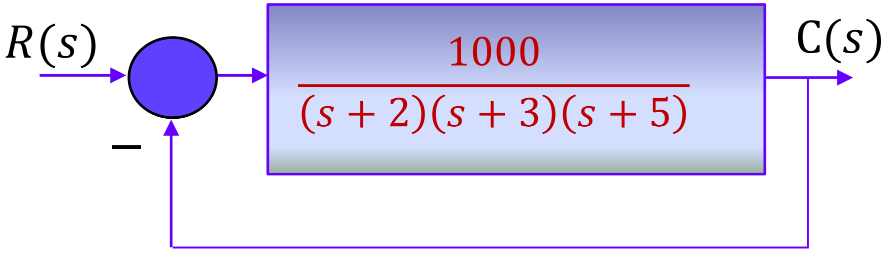
- Completando el arreglo

s^4	a_4	a_2	a_0
s^3	a_3	a_1	0
s^2	$\frac{-\begin{vmatrix} a_4 & a_2 \\ a_3 & a_1 \end{vmatrix}}{a_3} = b_1$	$\frac{-\begin{vmatrix} a_4 & a_0 \\ a_3 & 0 \end{vmatrix}}{a_3} = b_2$	$\frac{-\begin{vmatrix} a_4 & 0 \\ a_3 & 0 \end{vmatrix}}{a_3} = 0$
s^1	$\frac{-\begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}}{b_1} = c_1$	$\frac{-\begin{vmatrix} a_3 & 0 \\ b_1 & 0 \end{vmatrix}}{b_1} = 0$	$\frac{-\begin{vmatrix} a_3 & 0 \\ b_1 & 0 \end{vmatrix}}{b_1} = 0$
s^0	$\frac{-\begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & 0 \end{vmatrix}}{c_1} = d_1$	$\frac{-\begin{vmatrix} b_1 & 0 \\ c_1 & 0 \end{vmatrix}}{c_1} = 0$	$\frac{-\begin{vmatrix} b_1 & 0 \\ c_1 & 0 \end{vmatrix}}{c_1} = 0$

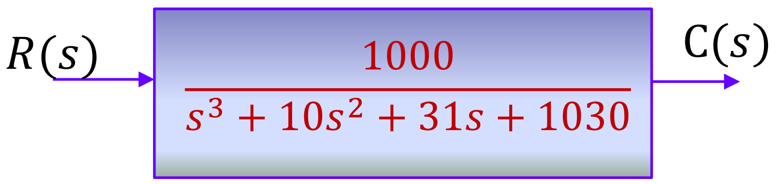
Cada fila subsiguiente es completada a partir de las dos filas previas. Términos ausentes son tratados como ceros.

Ejemplo 1

a. Sistema Realimentado



b. Sistema equivalente en lazo cerrado



s^3	1	31	0
s^2	$\cancel{10}\ \ 1$	$\cancel{1030}\ \ 103$	0
s^1	$\frac{-\begin{vmatrix}1 & 31\\1 & 103\end{vmatrix}}{1}=-72$	$\frac{-\begin{vmatrix}1 & 0\\1 & 0\end{vmatrix}}{1}=0$	$\frac{-\begin{vmatrix}1 & 0\\1 & 0\end{vmatrix}}{1}=0$
s^0	$\frac{-\begin{vmatrix}1 & 103\\-72 & 0\end{vmatrix}}{-72}=103$	$\frac{-\begin{vmatrix}1 & 0\\-72 & 0\end{vmatrix}}{-72}=0$	$\frac{-\begin{vmatrix}1 & 0\\-72 & 0\end{vmatrix}}{-72}=0$

Cualquier fila puede ser multiplicada por una constante positiva sin cambiar los valores de las filas subsiguientes. Dos cambios de signo en la 1era columna indican dos polos en el semiplano derecho.

Ejemplo 2

- Determinar si el siguiente polinomio característico tiene raíces en el lado derecho del plano complejo:

$$\Delta_1(s) = s^3 - 4s^2 + s + 6$$

s^3	1	1
s^2	-4	6
s^1	2.5	0
s^0	6	

¡ INESTABLE !

2 polos en el lado derecho del plano complejo

Ejemplo 3

Determinar la condición necesaria y suficiente para que un polinomio característico de grado dos sea estable.

$$\Delta(s) = a_2 s^2 + a_1 s + a_0$$

s^2	a_2	a_0
s^1	a_1	0
s^0	a_0	

En este caso la condición necesaria y suficiente es que los tres coeficientes

$$a_2, a_1, a_0$$

Sean del mismo signo

Ejemplo 4

- Determinar si el siguiente polinomio característico tiene raíces en el lado derecho del plano complejo:

$$\Delta(s) = s^6 + 4s^5 + 3s^4 + 2s^3 + s^2 + 4s + 4$$

s^6	1	3	1	4
s^5	4	2	4	0
s^4	$5/2$	0	4	
s^3	2	$-12/5$	0	
s^2	3	4		
s^1	$-76/15$	0		
s^0	4			

¡ INESTABLE !

2 polos en el lado derecho del plano complejo

Caso Especial 1

- Si solamente el primer elemento en la primera columna es cero, reemplace este cero por una constante positiva pequeña $(\varepsilon > 0)$ y proceda como antes. Luego tomamos el limite $\varepsilon \to 0$ para aplicar el criterio de estabilidad.

Ejercicio: determinar si el siguiente polinomio característico tiene raíces en el lado derecho del plano complejo:

$$\Delta(s) = s^3 + 2s^2 + s + 2$$

s^3	1	1
s^2	2	2
s^1	$0 \approx \varepsilon$	0
s^0	2	

¡ MARGINALMENTE ESTABLE !

Porque no hay cambio de signo. El sistema tiene polos imaginarios puros

Caso Especial 1

Ejercicio: determinar si el siguiente polinomio característico tiene raíces en el lado derecho del plano complejo:

$$\Delta(s) = s^3 - 3s + 2$$

s^3	1	-3
s^2	$0 \approx \varepsilon$	2
s^1	$-3 - 2/\varepsilon$	0
s^0	2	

¡ INESTABLE !

Caso Especial 1

- Determinando signos en la primera columna de la tabla de Routh con cero en el primer elemento de la fila.

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{10}{s^5 + 2s^4 + 3s^3 + 6s^2 + 5s + 3}$$

s^5	1	3	5
s^4	2	6	3
s^3	$\cancel{0}\ \varepsilon$	$7/2$	0
s^2	$\frac{6\varepsilon - 7}{\varepsilon}$	3	0
s^1	$\frac{42\varepsilon - 49 - 6\varepsilon^2}{12\varepsilon - 14}$	0	0
s^0	3	0	0

Caso Especial 1

Ejemplo 2

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{10}{s^5 + 2s^4 + 3s^3 + 6s^2 + 5s + 3}$$

	Primera columna	$\varepsilon = +$	$\varepsilon = -$
s^5	1	$+$	$+$
s^4	2	$+$	$+$
s^3	$\cancel{0}\ \varepsilon$	$+$	$-$
s^2	$\frac{6\varepsilon - 7}{\varepsilon}$	$-$	$+$
s^1	$\frac{42\varepsilon - 49 - 6\varepsilon^2}{12\varepsilon - 14}$	$+$	$+$
s^0	3	$+$	$+$

Dos cambios de signo en la 1era columna indica dos polos en el semiplano derecho.

```
» roots([1 2 3 6 5 3])
ans =
   0.3429 + 1.5083i
   0.3429 - 1.5083i
  -1.6681
  -0.5088 + 0.7020i
  -0.5088 - 0.7020i
```

Caso Especial 2

- Otro caso especial ocurre cuando toda una fila es cero. Esto indica que hay raíces imaginarias o polos reales simétricos en relación al eje imaginario. En este caos debemos usar un polinomio auxiliar determinado por los coeficiente de la fila anterior ala que se hace cero y reemplazar la fila cero por los coeficientes de la derivada de este polinomio auxiliar que también son raíces del polinomio original

Ejercicio: determinar si el siguiente polinomio característico tiene raíces en el lado derecho del plano complejo:

$$\Delta(s) = s^5 + 5s^4 + 11s^3 + 23s^2 + 28s + 12 = 0$$

Caso Especial 2

$$\Delta(s) = s^5 + 5s^4 + 11s^3 + 23s^2 + 28s + 12 = 0$$

s^5	1	11	28
s^4	5	23	12
s^3	6.4	25.6	0
s^2	3	12	
$\cancel{s^1}$	$\cancel{0}$	$\cancel{0}$	
s^1	6	0	
s^0	12		

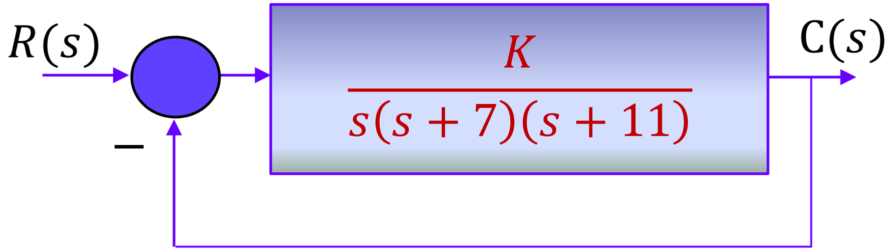
$D_1(s) = 3s^2 + 12s^0$

raíces: $D_1(s) = 0$ $\Rightarrow$ $s = \pm j2$

$$\frac{dD_1(s)}{ds} = 6s$$

¡ MARGINALMENTE ESTABLE !

Criterio de Routh-Hurwitz: Ejemplo



$$\Delta(s) = s^3+18s^2+77s+K$$

s^3	1	77
s^2	18	K
s^1	$77 - K/18$	
s^0	K	

Para estabilidad debe cumplir:

$77 - \frac{K}{18} > 0 \qquad K < 77 * 18 \qquad K < 1386$

$K > 0$

Rango de *K* para estabilidad 0 < *K* < 1386

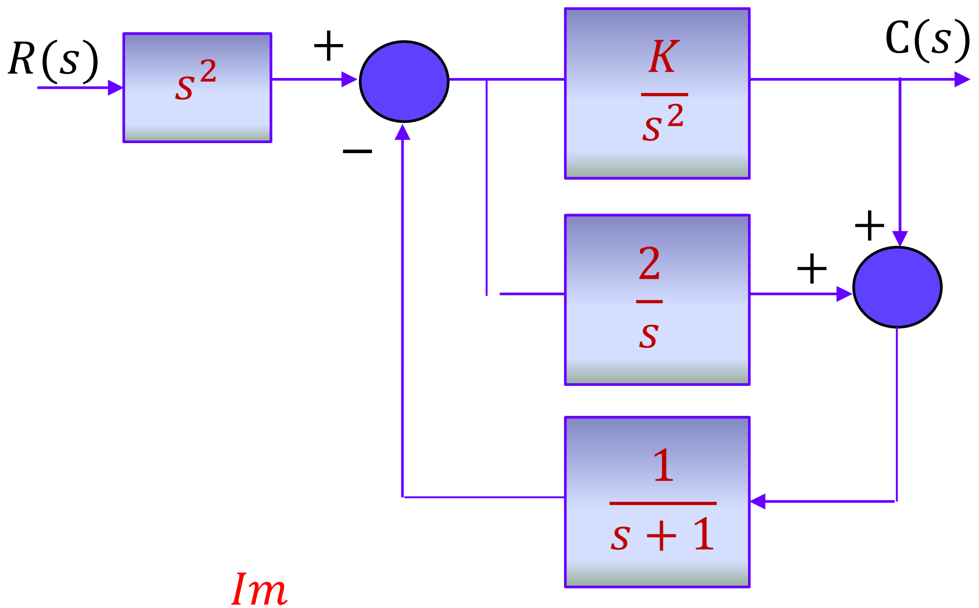
Probar en Simulink para valores de K fuera y dentro del rango hallado

Para *K* = 1386, Q(s) = $18s^2 + 1386 = 0$ ó $s^2 = -77$.
Por lo tanto,

$$\boxed{s = \pm j\sqrt{77}}$$

El valor de cruce del eje $j\omega$. Punto al cual los polos de lazo cerrado cruzan desde el semiplano izquierdo al semiplano derecho

Criterio de Routh-Hurwitz: Ejemplo



$$\frac{C}{R} = s^2\left[\frac{\frac{K}{s^2}+\frac{2}{s}}{1+\left(\frac{K}{s^2}+\frac{2}{s}\right)\left(\frac{1}{s+1}\right)}\right]$$

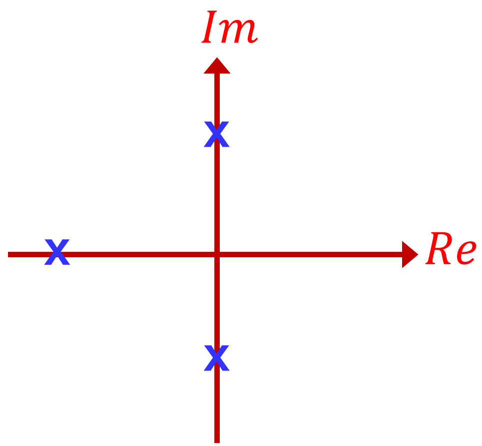
$$= s^2\left[\frac{(K+2s)(s+1)}{s^2(s+1)+(K+2s)}\right]$$

$$= \frac{s^2(K+2s)(s+1)}{s^3+s^2+2s+K}$$

Ecuación característica

$$s^3+s^2+2s+K=0$$

s^3	1	2
s^2	1	K
s^1	$(2-K)$	
s^0	K	



Rango de Estabilidad $K<2$

$$K=2 \Rightarrow s^2=-K=-2 \Rightarrow s=\pm j\sqrt{2}$$

s_3 = -1

Conclusión

- El criterio de estabilidad de Routh-Hurwitz permite determinar la estabilidad o no de un sistema, sin embargo no permite establecer el grado de estabilidad o inestabilidad del sistema.