CONTROL OPTIMO

Criterio de estabilidad de Lyapunov

- Matemáticamente se demuestra buscando una función que represente la «energía» del sistema y si la derivada de ella es negativa, el sistema es estable

Función definida positiva: una función escalar, de una posible variable vectorial, $f_{(x)}$, se dice que es definida positiva si:

1. $f_{(x)} \geq 0$, para todo x.

2. $f_{(x)} = 0$, si y solo si $x = 0$.

Ejemplo E.10.1: Probar si la función $f_{(x)} = 1000x_1^2 + 100x_2^2$ es definida positiva.

Solución:

1. Para cualquier valor de x_1 que sea diferente de 0, $1000x_1^2 > 0$.

2. Para cualquier valor de x_2 que sea diferente de 0, $100x_2^2 > 0$.

3. Teniendo en cuenta a (a) y (b), para cualquier valor de x_1 y x_2, diferente de 0, $1000x_1^2 + 100x_2^2 > 0$.

4. Para $x_1 = x_2 = 0$, $1000x_1^2 + 100x_2^2 = 0$.

Dado que se cumplen las condiciones (i) y (ii), la función $f_{(x)} = 1000x_1^2 + 100x_2^2$ es definida positiva.

Ejemplo E.10.2: Dada la función $f_{(x)} = x^T Qx$, donde $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ y $Q = \begin{bmatrix} 1000 & 0 \\ 0 & 100 \end{bmatrix}$. Determinar si la función es definida positiva.

Solución:

Si evaluamos la matriz y la variable vectorial en la función, tenemos:

$$f_{(x)} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1000 & 0 \\ 0 & 100 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$f_{(x)} = 1000x_1^2 + 100x_2^2$$

Matriz definida positiva: una matriz simétrica de $n \ x \ n$ $Q = Q^T$ se le denomina definida positiva, si para todo $x \in \Re$, es una función definida positiva.

Toda matriz definida positiva debe cumplir con las siguientes propiedades:

1. Todos los valores propios de una matriz definida positiva son reales.

2. Todos los valores propios de una matriz definida positiva son positivos.

3. Los valores propios de una matriz definida positiva son ortogonales. A consecuencia de esto es que existe una matriz unitaria U, tal que $\Lambda = U^T QU$ es una matriz diagonal con los valores propios de Q y donde $UU^T = U^T U = I$.

4. Una matriz definida positiva puede ser factorizada (factorización de Cholesky): $Q = F^T F$ para alguna (no única) matriz F.

De hecho, cualquier matriz simétrica con todos los valores propios positivos es una matriz definida positiva.

Función de Lyapunov: cualquier función escalar $V_{(x)}$ será una Función de Lyapunov, siempre que satisfaga las dos condiciones siguientes:

1. $V_{(x)}$ es una función definida positiva.
2. $\dot{V}_{(x)}$ es una función definida negativa.

Prueba de estabilidad: para un sistema lineal e invariante en el tiempo, asumimos el siguiente modelo:

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

$$y = Cx + Du$$

Suponiendo que $u = 0$ y que existen dos matrices positivas definidas, $P > 0$ y $Q > 0$ tales que cumplan:

$$A^T P + PA + Q = 0 \quad \text{o} \quad A^T P + PA = -Q$$

Entonces, el sistema es estable, y a la ecuación anterior se le conoce como ecuación de Lyapunov.

Para probar la afirmación anterior, definimos la función candidata de Lyapunov para el sistema:

$$V_{(x)} = x^T Px$$

$$\frac{dV(x)}{dt} = \dot{x}^T Px + x^T P\dot{x}$$

Cuando u=0, tenemos que:

$$\frac{dV_{(x)}}{dt} = (Ax)^T Px + x^T P(Ax)$$

$$\dot{V}_{(x)} = x^T A^T Px + x^T PAx$$

$$\dot{V}_{(x)} = x^T (A^T P + PA)x = x^T (-Q)x$$

$$\dot{V}_{(x)} = x^T (A^T P + PA)x = -x^T Qx$$

Aquí se verifica fácilmente que si Q es definida positiva, $\dot{V}(x)$ es definida negativa, y por lo tanto, hemos probado estabilidad por el método directo de Lyapunov.

Solución de la Ecuación de Lyapunov: suponiendo que tenemos una matriz Q>0, para encontrar P podemos usar la siguiente fórmula:

$$P = \int_0^\infty (e^{A\tau})^T Q e^{A\tau} d\tau$$

Para comprobar esta igualdad partimos de la ecuación de Lyapunov:

$$A^T P + PA = A^T \int_0^\infty (e^{A\tau})^T Q e^{A\tau} d\tau + \int_0^\infty (e^{A\tau})^T Q e^{A\tau} d\tau \cdot A$$

$$A^T P + PA = \int_0^\infty (e^{A\tau} A)^T Q e^{A\tau} d\tau + \int_0^\infty (e^{A\tau})^T Q (e^{A\tau} A) d\tau$$

$$A^T P + PA = \int_0^\infty \left[(e^{A\tau} A)^T Q e^{A\tau} + (e^{A\tau})^T Q (e^{A\tau} A) \right] d\tau$$

$$A^T P + PA = \int_0^\infty \left[\frac{d}{dt} (e^{A\tau})^T Q e^{A\tau} \right] d\tau$$

$$A^T P + PA = \left[(e^{A\tau})^T Q e^{A\tau} \right]_0^\infty = (e^{A(\infty)})^T Q e^{A(\infty)} - (e^{A(0)})^T Q e^{A(0)}$$

Este sistema es estable solamente si $e^{A\infty} = 0$. Por lo tanto, si esa condición se cumple, se verificaría la ecuación de Lyapunov:

$$A^T P + PA = -(e^{A(0)})^T Q e^{A(0)} = -(I) Q (I) = -Q$$

Ejemplo E.10.3: Supongamos que tenemos la matriz $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$ y queremos encontrar P, de tal manera que sea definida positiva, sabiendo que $Q = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$.

Como primer paso, asumimos a la matriz P de la siguiente forma:

$$P = \begin{bmatrix} p_1 & p_2 \\ p_2 & p_3 \end{bmatrix}$$

para luego aplicar la fórmula correspondiente:

$$A^T P + PA = -Q$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} p_1 & p_2 \\ p_2 & p_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p_1 & p_2 \\ p_2 & p_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 & p_2 \\ p_2 & p_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p_1 & p_2 \\ p_2 & p_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -p_2 & -p_3 \\ p_1 - p_2 & p_2 - p_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -p_2 & p_1 - p_2 \\ -p_3 & p_2 - p_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -2p_2 & p_1 - p_2 - p_3 \\ p_1 - p_2 - p_3 & 2p_2 - 2p_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

De esta igualdad tenemos:

De esta igualdad tenemos:

$$-2p_2 = -4$$

$$p_1 - p_2 - p_3 = 0$$

$$2(p_2 - p_3) = -2$$

resolviendo el sistema de ecuaciones:

$$p_1 = 5$$

$$p_2 = 2$$

$$p_3 = 3$$

Por lo tanto, el resultado del problema es:

$$P = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

Ejemplo E.10.4: considerando al sistema siguiente:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

determinar P para que cumpla el Criterio de Lyapunov $A^T P + PA + Q = 0$.

Solución:

Asumimos cualquier Q, tal que sea definido positivo:

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Reemplazamos los datos que tenemos en la fórmula correspondiente:

$$A^T P + PA = -Q$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} p_1 & p_2 \\ p_2 & p_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p_1 & p_2 \\ p_2 & p_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 & p_2 \\ p_2 & p_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p_1 & p_2 \\ p_2 & p_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -2p_2 & -2p_3 \\ p_1 - p_2 & p_2 - p_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2p_2 & p_1 - p_2 \\ -2p_3 & p_2 - p_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -4p_2 & p_1 - p_2 - 2p_3 \\ p_1 - p_2 - 2p_3 & 2p_2 - 2p_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

De esta igualdad tenemos:

$$-4p_2 = -1$$

$$p_1 - p_2 - 2p_3 = 0$$

$$2(p_2 - p_3) = -1$$

resolviendo el sistema de ecuaciones:

$$p_1 = 1.75$$

$$p_2 = 0.25$$

$$p_3 = 0.75$$

Por lo tanto, el resultado del problema que cumple con las propiedades de la Función de Lyapunov es:

$$P = \begin{bmatrix} 1.75 & 0.25 \\ 0.25 & 0.75 \end{bmatrix}$$

Control óptimo cuadrático

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

$$J = \int_0^{\infty} L_{(x,u)} dt$$

en donde $L_{(x,u)}$ es una función cuadrática y hermitiana de x y u, y que producirá la ley de control:

$$u(t) = -Kx(t)$$

donde K es una matriz de r x n:

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ . \\ . \\ . \\ u_{r1} \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & . & . & . & k_{1n} \\ k_{21} & k_{22} & . & . & . & . \\ . & . & . & & & . \\ . & . & & . & & . \\ . & . & & & . & . \\ k_{r1} & k_{r2} & . & . & . & k_{rn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ . \\ x_n \end{bmatrix}$$

Una ventaja de usar el esquema de control óptimo cuadrático es el que el sistema diseñado será estable, excepto en el caso en que el sistema no sea controlable. Para diseñar sistemas de control, basándose en la función de costos que minimiza los índices de desempeño cuadráticos, necesitamos resolver la Ecuación de Ricatti.

A continuación, consideraremos el problema de determinar el vector de control $u_{(t)}$ óptimo para el sistema de control:

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

mediante el empleo de la función de costos:

$$J = \int_0^\infty (x^* Qx + u^* Ru)dt$$

donde Q es una matriz real, hermitiana o simétrica y definida positiva, y R es una matriz real, hermitiana o simétrica y definida positiva y u no está restringida.

Estas matrices han sido escogidas de manera que cumplan con el Criterio de estabilidad de Lyapunov, donde la función candidata debe ser definida positiva y su derivada, definida negativa. Por lo tanto, si estos dos principios se cumplen, el sistema es estable.

Es importante resaltar que para los sistemas con vectores reales y matrices reales, las matrices transpuestas conjugadas, son solamente transpuestas:

$$J = \int_0^\infty (x^* Qx + u^* Ru)dt \text{ es igual a } J = \int_0^\infty (x^T Qx + u^T Ru)dt$$

es igual a

Asumamos una matriz Q, de orden 3 simétrica que nos permita demostrar qué tan fácil se pueden considerar los valores de sus elementos:

$$x^T Qx = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} & q_{13} \\ q_{12} & q_{22} & q_{23} \\ q_{13} & q_{23} & q_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

Del mismo modo, asumimos que los valores de los elementos que no pertenecen a la diagonal principal, son iguales a cero:

$$\forall i \neq j \rightarrow q_{ij} = 0$$

$$x^T Q x = \begin{bmatrix} x_1 q_{11} & x_2 q_{22} & x_3 q_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

$$x^T Q x = x_1 q_{11} x_1 + x_2 q_{22} x_2 + x_3 q_{33} x_3$$

$$x^T Q x = q_{11} x_1^2 + q_{22} x_2^2 + q_{33} x_3^2$$

Donde esta función presenta un escalar cuadrático, y si cada uno de los elementos q, es positivo, entonces cumple con las condiciones de la definición.

Del mismo modo, vemos que si valoramos adecuadamente el elemento q_{11} potenciaremos a la variable x_1, mientras que si valoramos al elemento q_{22} potenciaremos a la variable x_2, y así sucesivamente.

Optimización de parámetros mediante el Criterio de Lyapunov:

$$\dot{x} = Ax$$

en el que todos los valores característicos de A tiene partes reales negativas, o el origen $x = 0$ es estable. Suponemos que la matriz A tiene un parámetro ajustable. Se requiere minimizar la siguiente función de costo:

$$J = \int_0^{\infty} (x^* Q x) dt$$

Ahora mostraremos que una Función de Lyapunov se usa efectivamente en la solución de este problema. Supongamos que:

$$x^* Q x = -\frac{d}{dt}(x^* P x)$$

en donde P es una matriz hermitiana o simétrica, definida positiva. En este caso, tal como ya se ha demostrado, obtenemos:

$$x^* Q x = -\dot{x}^* P x - x^* P \dot{x}$$

$$x^* Q x = -(Ax)^* P x - x^* P (Ax)$$

$$x^* Q x = -(x^* A^*) P x - x^* P (Ax)$$

$$x^* Q x = -x^* A^* P x - x^* P A x$$

$$-x^* Q x = x^* (A^* P + PA) x$$

Mediante el método de Lyapunov, sabemos que para una Q, existe un P, siempre que A sea estable, tal que:

$$A^* P + PA = -Q$$

Por tanto, determinamos los elementos de P a partir de esta ecuación.

La función de costo se calcula de la siguiente manera:

$$J = \int_0^\infty x^* Qx\,dt = -x^* Px\Big|_0^\infty = -x^*_{(\infty)} Px_{(\infty)} + x^*_{(0)} Px_{(0)}$$

Dado que todos los valores característicos de A tienen partes reales negativas tenemos que $x_{(\infty)} \rightarrow 0$. Por lo tanto, obtenemos:

$$J = x^*_{(0)} Px_{(0)}$$

Así, la función de costo J se obtiene en términos de la condición inicial $x_{(0)}$ y P, que se determina mediante A y Q usando la ecuación $A^*P + PA = -Q$.

Ejemplo E.10.5: Dado un sistema cuya función de transferencia es:

$$G_{(s)} = \frac{C_{(s)}}{R_{(s)}} = \frac{1}{s^2 + 4\zeta s + 1}$$

Determinar el factor de amortiguamiento relativo $\zeta > 0$, tal que cuando la entrada sea un escalón unitario $r_{(t)} = 1$, se minimice el siguiente índice de la función de costo:

$$J = \int_0^{\infty} (10e^2 + \alpha \dot{e}^2) dt$$

donde $\alpha > 0$, $e = r - c$ y sabiendo que el sistema parte del reposo, con condiciones iniciales $x_{1(0)} = 1$ y $x_{2(0)} = 0$.

Solución:

El sistema:

$$G_{(s)} = \frac{C_{(s)}}{R_{(s)}} = \frac{1}{s^2 + 4\zeta s + 1}$$

se puede expresar como:

$$r_{(t)} = \ddot{c} + 4\zeta \dot{c} + c$$

si lo evaluamos en términos del error:

$$e = r - c$$

$$\dot{e} = \dot{r} - \dot{c}$$

$$\ddot{e} = \ddot{r} - \ddot{c}$$

$$-\ddot{c} + \ddot{r} - \ddot{r} - 4\zeta\dot{c} + 4\zeta\dot{r} - 4\zeta\dot{r} - c + r = 0$$

$$(\ddot{r} - \ddot{c}) + 4(\zeta\dot{r} - \zeta\dot{c}) + (r - c) = \ddot{r} + 4\zeta\dot{r}$$

$$\ddot{e} + 4\zeta\dot{e} + e = \ddot{r} + 4\zeta\dot{r}$$

como $r_{(t)} = 1$, entonces $\dot{r} = \ddot{r} = 0$:

$$\ddot{e} + 4\zeta\dot{e} + e = 0$$

asumimos como variable de estado a $x_1 = e$ y a $x_2 = \dot{e}$.

La ecuación de estado es:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -4\zeta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Por otro lado:

$$J = \int_0^{\infty} (10e^2 + \alpha\dot{e}^2)dt$$

$$J = \int_0^{\infty} (10x_1^2 + \alpha x_2^2)dt$$

$$J = \int_0^{\infty} x^T Q x dt = \int_0^{\infty} (10x_1^2 + \alpha x_2^2)dt$$

$$J = \int_0^{\infty} x^T Q x dt = \int_0^{\infty} [x_1 \quad x_2] \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} dt$$

Con el valor de Q, determinaremos a P:

$$A^T P + PA = -Q$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -4\zeta \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} p_1 & p_2 \\ p_2 & p_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p_1 & p_2 \\ p_2 & p_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -4\zeta \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & \alpha \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -4\zeta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 & p_2 \\ p_2 & p_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p_1 & p_2 \\ p_2 & p_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -4\zeta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -10 & 0 \\ 0 & -\alpha \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -4\zeta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 & p_2 \\ p_2 & p_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p_1 & p_2 \\ p_2 & p_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -4\zeta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -10 & 0 \\ 0 & -\alpha \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -2p_2 & p_1 - 4\zeta p_2 - p_3 \\ p_1 - 4\zeta p_2 - p_3 & 2p_2 - 8\zeta p_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -10 & 0 \\ 0 & -\alpha \end{bmatrix}$$

Con estos datos tenemos tres ecuaciones simultáneas:

$$-2p_2 = -10$$

$$p_1 - 4\zeta p_2 - p_3 = 0$$

$$2p_2 - 8\zeta p_3 = -\alpha$$

en la cuales los resultados de las expresiones en función del factor de amortiguamiento ζ y de μ son:

$$p_1 = \frac{\alpha + 10 + 160\zeta^2}{8\zeta}$$

$$p_2 = 5$$

$$p_3 = \frac{\mu + 10}{8\zeta}$$

Si visualizamos P:

$$P = \begin{bmatrix} \frac{\alpha + 10 + 160\zeta^2}{8\zeta} & 5 \\ 5 & \frac{\mu + 10}{8\zeta} \end{bmatrix}$$

Con P y con las condiciones iniciales, debemos desarrollar:

$$J = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\alpha + 10 + 160\zeta^2}{8\zeta} & 5 \\ 5 & \frac{\mu + 10}{8\zeta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\alpha + 10 + 160\zeta^2}{8\zeta} & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$J = \frac{\alpha + 10 + 160\zeta^2}{8\zeta}$$

Para minimizar la función de costos J, debemos hacer: $\frac{\partial J}{\partial \zeta} = 0$

$$\frac{\partial J}{\partial \zeta} = \frac{\partial \left(20\zeta + \frac{\alpha + 10}{8\zeta} \right)}{\partial \zeta}$$

$$\frac{\partial J}{\partial \zeta} = 20 + (-1)\frac{\alpha + 10}{8\zeta^2}$$

$$\frac{\partial J}{\partial \zeta} = 20 - \frac{\alpha + 10}{8\zeta^2} = 0$$

$$20 = \frac{\alpha + 10}{8\zeta^2}$$

$$160\zeta^2 = \alpha + 10$$

$$\zeta = \sqrt{\frac{\alpha + 10}{160}}$$

Por lo tanto, el valor óptimo del factor de amortiguamiento ζ es $\zeta = \sqrt{\frac{\alpha + 10}{160}}$. Entonces, por ejemplo, si $\mu = 1$, el valor del factor de amortiguamiento es $\zeta = 0.2622$.

Diseño del controlador óptimo cuadrático:

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

$$u = -Kx$$

$$J = \int_0^\infty (x^T Qx + u^T Ru)dt$$

$$\dot{x} = Ax + B(-Kx)$$

$$\dot{x} = Ax - BKx$$

$$\dot{x} = (A - BK)x$$

$$J = \int_0^\infty (x^T Qx + (-Kx)^T R(-Kx))dt$$

$$J = \int_0^\infty (x^T Qx + x^T K^T RKx)dt$$

$$J = \int_0^\infty [x^T (Q + K^T RK)x]dt$$

$$x^T (Q + K^T RK)x = -\frac{d}{dt}(x^T Px)$$

$$\dot{x}^T Px + x^T P\dot{x} = -x^T (Q + K^T RK)x$$

$$[(A - BK)x]^T Px + x^T P[(A - BK)x] = -x^T (Q + K^T RK)x$$

$$x^T (A - BK)^T Px + x^T P(A - BK)x = -x^T (Q + K^T RK)x$$

$$x^T A^T Px - x^T K^T B^T Px + x^T PAx - x^T PBKx = -x^T (Q + K^T RK)x$$

$$x^T (A^T P - K^T B^T P + PA - PBK)x = -x^T (Q + K^T RK)x$$

$$A^T P - K^T B^T P + PA - PBK = -(Q + K^T RK)$$

$$(A^T - K^T B^T)P + P(A - BK) = -(Q + K^T RK)$$

$$R = T^T T$$

$$(A^T - K^T B^T)P + P(A - BK) + (Q + K^T T^T TK) = 0$$

$$A^T P - K^T B^T P + PA - PBK + Q + K^T T^T TK = 0$$

$$A^T P + PA + K^T T^T TK - PBK - K^T B^T P + Q = 0$$

a dos sumandos de la ecuación vamos a multiplicarlos por la equivalencia de la unidad de esa manera: a uno por $T^{-1}T$ y al otro por $T^T T^{-T}$. Del mismo modo, a la ecuación vamos a sumar y restar la siguiente expresión: $PBT^{-1}T^{-T}B^T P$:

$$A^T P + PA + (K^T T^T TK - PBT^{-1}TK - K^T T^T T^{-T} B^T P +$$
$$PBT^{-1}T^{-T}B^T P - PBT^{-1}T^{-T}B^T P + Q = 0$$

$$A^T P + PA + [K^T T^T - PBT^{-1}][TK - T^{-T}B^T P] - PB(TT^T)^{-1}B^T P + Q = 0$$

$$A^T P + PA + [TK - T^{-T}B^T P]^T [TK - T^{-T}B^T P] - PBR^{-1}B^T P + Q = 0$$

Dado que la teoría de optimización exige que la expresión $J = x'_{(0)} P x_{(0)}$ sea mínima, y que el objetivo de control es calcular o diseñar un controlador K que minimice esa expresión, entonces procuraremos un K que minimice los términos encerrados en los corchetes haciéndolos iguales a 0:

$$[TK - T^{-T} B^T P]^T [TK - T^{-T} B^T P] = 0$$

$$TK - T^{-T} B^T P = 0$$

$$TK = T^{-T} B^T P$$

$$K = T^{-1} T^{-T} B^T P$$

$$K = (TT^T)^{-1} B^T P$$

Dado que $R = R^T$ y $R = T^T T$, obtenemos un controlador K óptimo cuadrático:

$$K = R^{-1} B^T P$$

$$u = -R^{-1} B^T P x$$

Entonces, si K va a convertir esta expresión en 0, para determinar P debemos considerar solamente:

$$A^T P + PA - PBR^{-1} B^T P + Q = 0$$

la cual es conocida como la Ecuación Reducida de Riccati.

Luego de este análisis, resumimos diciendo que para un sistema:

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

que tiene una ley de control:

$$u = -Kx$$

la cual corresponde a una función de costos conocida, de la forma:

$$J = \int_0^{\infty} (x^T Qx + u^T Ru)dt$$

El controlador de estados será calculado con la siguiente expresión:

$$K = R^{-1}B^T P$$

donde R y B son datos y P es extraído de la Ecuación Reducida de Riccati:

$$A^T P + PA - PBR^{-1}B^T P + Q = 0$$

Estimación óptima

- De forma análoga a como se obtuvo la solución al observador por ubicación de polos, planteamos el sistema dual:

$$\dot{Z} = A^T Z + C^T \Gamma$$

- Y diseñamos un LQR para minimizar:

$$J=\int_{t_0}^{\infty}(Z^T(t)QZ(t) + \Gamma^T(t)R(t)\Gamma(t))dt$$

- Requeriremos hallar P de la ec. De Riccati:

$$AP + PA^T - PC^T R^{-1} CP + Q = 0$$

- Luego la ganancia del observador será:

$$K_e = PC^T R^{-1}$$

Recuerde para controlador:	$PA + A^T P - PBR^{-1}B^T P + Q = 0$	$K = R^{-1}B^T P$

Ejemplo E.10.6: dado un sistema que responde a la siguiente ecuación de estado,

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

se requiere minimizar la siguiente función:

$$16x_1^2 + \beta x_2^2 + u^2$$

donde $\beta \geq 0$, y procurando determinar el K óptimo para $u = -Kx$.

Solución:

Planteamos la función de costos que represente a la expresión que se busque minimizar:

$$J = \int_0^\infty (16x_1^2 + \beta x_2^2 + u^2) dt$$

$$J = \int_0^\infty \left(x^T \begin{bmatrix} 16 & 0 \\ 0 & \beta \end{bmatrix} x + u^T [1] u \right) dt$$

donde $Q = \begin{bmatrix} 16 & 0 \\ 0 & \beta \end{bmatrix}$ y $R = [1]$.

Con estos datos, aplicamos la Ecuación Reducida de Riccati:

$$A^T P + PA - PBR^{-1}B^T P + Q = 0$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} p_1 & p_2 \\ p_2 & p_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p_1 & p_2 \\ p_2 & p_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} p_1 & p_2 \\ p_2 & p_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} [1]^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} p_1 & p_2 \\ p_2 & p_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 16 & 0 \\ 0 & \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 & p_2 \\ p_2 & p_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p_1 & p_2 \\ p_2 & p_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} p_1 & p_2 \\ p_2 & p_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} [1] \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 & p_2 \\ p_2 & p_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 16 & 0 \\ 0 & \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ p_1 & p_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & p_1 \\ 0 & p_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} p_2 \\ p_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_2 & p_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 16 & 0 \\ 0 & \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & p_1 \\ p_1 & 2p_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} p_2^2 & p_2 p_3 \\ p_2 p_3 & p_3^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 16 & 0 \\ 0 & \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -p_2^2 + 16 & p_1 - p_2 p_3 \\ p_1 - p_2 p_3 & 2p_2 - p_3^2 + \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$-p_2^2 + 16 = 0 \qquad p_2 = 4$$

$$p_1 - p_2 p_3 = 0$$

$$2p_2 - {p_3}^2 + \beta = 0$$

$$2(4) - {p_3}^2 + \beta = 0$$

$$p_3 = \sqrt{\beta + 8}$$

$$p_1 - (4)(\sqrt{\beta + 8}) = 0$$

$$p_1 = 4\sqrt{\beta + 8}$$

$$P = \begin{bmatrix} 4\sqrt{\beta + 8} & 4 \\ 4 & \sqrt{\beta + 8} \end{bmatrix}$$

$$K = R^{-1} B^T P$$

$$K = [1]^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 4\sqrt{\beta + 8} & 4 \\ 4 & \sqrt{\beta + 8} \end{bmatrix}$$

$$K = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4\sqrt{\beta + 8} & 4 \\ 4 & \sqrt{\beta + 8} \end{bmatrix}$$

$$K = \begin{bmatrix} 4 & \sqrt{\beta + 8} \end{bmatrix}$$

$$u = -Kx$$

$$u = -\begin{bmatrix} 4 & \sqrt{\beta + 8} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$u = -4x_1 - x_2\sqrt{\beta + 8}$$

Ejemplo E.10.7: Se tiene un telescopio para instrucción cuyos motores para la elevación y deflexión son DC. Su alimentación máxima es de 40 Voltios y consume una potencia máxima de 1KW. Requisitos necesarios para su movimiento de 0 a 90° son:

a. Sobreimpulso máximo menor del 2 %.

b. Tiempo de establecimiento de dos segundos para una tolerancia menor al 2 %.

El modelo matemático del motor DC es:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -10 & 1 \\ 0 & -0.02 & -2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} u$$

donde el vector de estado es: $x = \begin{bmatrix} \theta \\ \dot{\theta} \\ i \end{bmatrix}$

Se desea diseñar un controlador óptimo de seguimiento integral.

Como el sistema no tiene integrador para el caso de control de posición, debemos transformar al sistema para controlarlos adecuadamente:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{\xi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ -C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \xi \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix} r$$

$$y = \begin{bmatrix} C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \xi \end{bmatrix} + [D] u$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{\xi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -10 & 1 & 0 \\ 0 & -0.02 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \xi \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} r$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \xi \end{bmatrix} + [0] u$$

Para el cálculo del controlador óptimo de seguimiento con acción integral y para la determinación de P, consideraremos al comando *lqr* del Matlab. Comenzamos asumiendo las matrices Q y R, de la siguiente manera:

$$Q = \begin{bmatrix} 10000 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1000 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 100000 \end{bmatrix}$$

$$R = [1]$$

$$\hat{K} = \begin{bmatrix} K & -k_I \end{bmatrix}$$

Con esas matrices, la función de costo del sistema es:

$$J = \int \left(x^T \begin{bmatrix} 10000 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1000 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 100000 \end{bmatrix} x + u^T [1] u \right) dt$$

$$10000\theta^2 + 1000\dot{\theta}^2 + 10i^2 + 100000\xi^2 + u^2 = 0$$

```
% Cálculo del Controlador.
Q = [ 10000 0 0 0; 0 1000 0 0; 0 0 10 0; 0 0 0 100000 ];
R = [ 1 ];
Km = lqr(Ai,Bi,Q,R);
```

```
K = Km(1,1:3);
Ki = -Km(1,4);
```

a. Controlador:

$$K_m = [253.6860 \quad 25.5110 \quad 5.0424 \quad -316.2278]$$

$$K = [253.6860 \quad 25.5110 \quad 5.0424]$$

$$K_I = [316.2278]$$

b. La ley de control es:

$$u = -253.6860\theta - 25.5110\dot{\theta} - 5.0424i + 316.2278\xi$$

Ejemplo E.10.8: Sabiendo que el ejemplo E.10.7 se ha considerado un sistema que supuestamente tiene sensores en todas las variables de estado y eso normalmente no sucede, se desea diseñar un observador óptimo que estime las variables 2 y 3 para el mismo sistema.

La ley de control por cumplirse será:

$$u = -253.6860\theta - 25.5110\dot{\theta} - 5.0424\mathrm{i} + 316.2278\xi$$

$$T = \begin{bmatrix} 1000000 & 0 & 0 \\ 0 & 1000 & 0 \\ 0 & 0 & 1000000 \end{bmatrix}$$

$$S = [1]$$

$$J_e = \int \left(\tilde{x}^T \begin{bmatrix} 1000000 & 0 & 0 \\ 0 & 1000 & 0 \\ 0 & 0 & 1000000 \end{bmatrix} \tilde{x} + u^T [1] u \right) dt$$

$$1000000\tilde{\theta}^2 + 1000\tilde{\dot{\theta}}^2 + 1000000\tilde{i}^2 + u^2 = 0$$

```
% Cálculo del Observador.
T = [ 1000000 0 0; 0 1000 0; 0 0 1000000 ]; S = [ 1 ];
L = lqr(A',C',T,S)'
```

$$L = \begin{bmatrix} 1000 \\ 2.1292 \\ 20.7582 \end{bmatrix}$$