MC71 - Ingeniería de control 2

Unidad N°1: Modelamiento de sistemas mediante espacio de estados y análisis de su respuesta temporal

Semana 3

- Transformaciones del modelo en espacio de estados.
- Análisis de sistemas de lazo cerrado mediante la representación en espacio de estados.
- Ecuación de estado y de salida de sistemas de lazo cerrado.

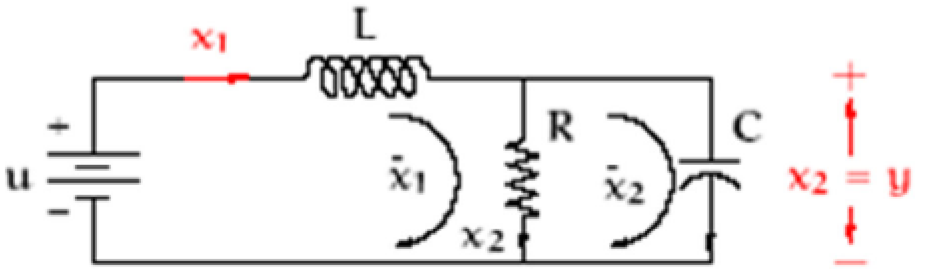
MEng. Carlos H. Inga Espinoza

Transformaciones de Similitud

- La descripción de espacio estado **no es única**. Dada la representación de espacio estado, un simple cambio de coordenadas nos daría diferentes representaciones del mismo sistema en espacio estado.

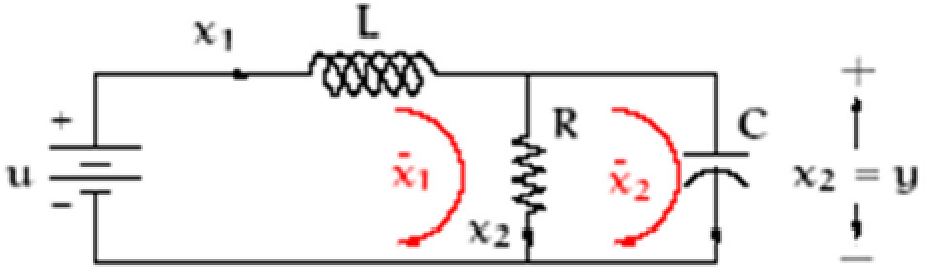
- Considere el circuito eléctrico RLC de la figura donde R=1Ω, L=1H y C=1F. Tomamos el voltaje de salida ***y*** a través de C. Si escogemos como variables de estado x_1, la corriente a través del inductor L, y x_2, el voltaje a través del capacitor C conseguimos la siguiente descripción de Espacio Estado:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u, \qquad y = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$



- Por otro lado, si nosotros escogemos como variables de estado los **lazos de corriente** $\bar{x}_1$ y $\bar{x}_2$, conseguimos el siguiente descriptor de espacio estado:

$$\begin{bmatrix} \dot{\bar{x}}_1 \\ \dot{\bar{x}}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u, \qquad y = \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \end{bmatrix}$$



- **Ambas ecuaciones de estado representan el mismo circuito**, por lo que deben estar relacionadas. En efecto, podemos verificar que

$$\begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}}_{P} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \qquad \bar{x} = Px \ \text{ o } \ \boldsymbol{x} = \boldsymbol{P}^{-1}\bar{\boldsymbol{x}}$$

Transformaciones de Similitud

- Es importante tener claro los conceptos de ecuación característica, valores y vectores característicos.
- Cuando se lleva a cabo un análisis en variables de estado a veces es útil, transformar las ecuaciones a ciertas formas particulares que pueden facilitar la tarea de control, para que esto ocurra es obligatorio que las propiedades tales como la ecuación característica, valores y vectores característicos y la función de transferencia se mantenga en la transformación.
- Lo que se debe hacer es especificar una matriz P no singular, que nos ayude a la transformación:

Transformaciones de Similitud

- Sucede frecuentemente, que las variables de estado que aparecen en el modelo de un sistema no son las más convenientes para tareas de análisis y diseño.
- Por otro lado, existe la posibilidad de transformar las matrices $\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C}, \mathrm{D}$, a un nuevo conjunto de matrices A, B, C, D.

Transformaciones de Similitud

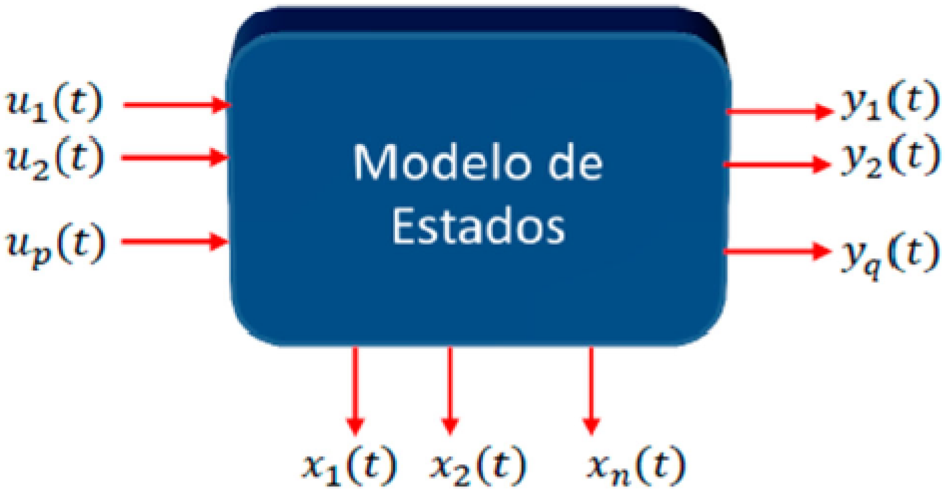
- Este cambio de variables es realizado mediante una transformación lineal.

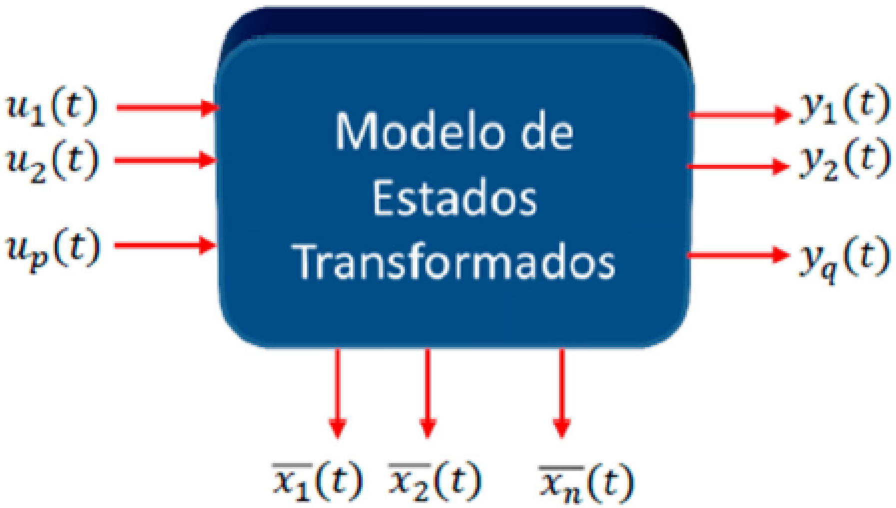
$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

$$\dot{x}(t) = A\ x\ (t) + Bu(t)$$

$$y(t) = C\ x\ (t) + Du(t)$$





Transformaciones de Similitud

- Dada las ecuaciones dinámicas de un sistema **SISO**:

$$x(t) = Ax(t) + Bu(t) \qquad (1)$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t) \qquad (2)$$

- Las cuales son transformadas a otro grupo de ecuaciones de la misma dimensión mediante la siguiente transformación

$$x(t) = P\overline{x}(t) \qquad (3)$$

- En donde P es una matriz no singular de nxn, por lo que

$$\overline{x}(t) = P^{-1}x(t) \qquad (4)$$

Transformaciones de Similitud

- Derivando (4):

$$\dot{\bar{x}}(t) = P^{-1}\dot{x}(t) \qquad (5)$$

- Reemplazando la ecuación 1:

$$\dot{\bar{x}}(t) = P^{-1}(Ax(t) + Bu(t)) \qquad (6)$$

- Reemplazando la ecuación 3:

$$\dot{\bar{x}}(t) = P^{-1}AP\bar{x}(t) + P^{-1}Bu(t)) \qquad (7)$$

Transformaciones de Similitud

$$\bar{A} = P^{-1}AP \qquad (9)$$

$$\bar{B} = P^{-1}\mathrm{B} \qquad (10)$$

de la misma manera, sustituyendo (3) en (2)

$$y(t) = CPx(t) + Du(t) \qquad (11)$$

de donde

$$\bar{C} = CP \qquad (12)$$

$$\bar{D} = D \qquad (13)$$

Transformaciones de Similitud

- Esta transformación, denominada transformación de similitud, tiene la propiedad de que al realizarla, la FT, la ecuación característica, los valores y vectores propios se conservan.

- Ejemplo, si

$$\Delta(s) = |sI - A| = s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots a_1 s + a_0$$

Ecuación característica del sistema original

también

$$\Delta(s) = |sI - A\,| = s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots a_1 s + a_0$$

Ecuación característica del sistema transformado

Propiedades invariantes de la Formas de similitud

La ecuación característica, valores característicos, y vector característico

- La ecuación característica del sistema descrito: $\dot{\bar{x}}(t) = \bar{A}\,\bar{x}(t) + \bar{B}u(t)$ es: $|sI - \bar{A}\,|$

como: $\bar{A} = P^{-1}AP$

entonces: $|sI - \bar{A}\,| = |sI - P^{-1}AP| =$

$$|sI - \bar{A}\,| = |sP^{-1}P - P^{-1}AP| = |(sP^{-1} - P^{-1}A)(P)|$$

- Ya que la determinante del producto de matrices es igual al producto de las determinantes de las matrices del sistema:

$$|sI - \bar{A}\,| = |(sP^{-1} - P^{-1}A)(P)| = |sP^{-1} - P^{-1}A||P|$$

$$|sI - \bar{A}\,| = |(P^{-1})(sI - A)||P| = |\cancel{P}^{-1}||sI - A||\cancel{P}|$$

$$|sI - \bar{A}\,| = |sI - A|$$

- Vemos que la ecuación característica se mantiene lo que lleva naturalmente al mismo valor característico y vectores característicos

Propiedades invariantes de la Formas de similitud

La matriz de función de transferencia

Propiedad : $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

$$\bar{G}(s) = \bar{C}(sI - \bar{A})^{-1}\bar{B} + \bar{D}$$

$$\bar{G}(s) = CP(sP^{-1}P - P^{-1}AP)^{-1}P^{-1}B + D$$

$$\bar{G}(s) = CP([P^{-1}]\,[sP - AP])^{-1}P^{-1}B + D$$

$$\bar{G}(s) = CP([sP - AP]^{-1})][P^{-1}]^{-1}P^{-1}B + D$$

$$\bar{G}(s) = CP[sP - AP]^{-1}PP^{-1}B + D$$

$$\bar{G}(s) = CP[(sI - A)P]^{-1}PP^{-1}B + D$$

$$\bar{G}(s) = CPP^{-1}[(sI - A)]^{-1}PP^{-1}B + D$$

$$\bar{G}(s) = C[(sI - A)]^{-1}B + D$$

1. Forma Canónica Controlable (FCC)

- Tiene propiedades que lo hacen conveniente para pruebas de controlabilidad y diseño de controladores mediante realimentación de estados

1. Forma Canónica Controlable (FCC)

- Las ecuaciones dinámicas (1) y (2) se transforman a la FCC, mediante la transformación de la ecuación (3) con:

$$x(t) = P\bar{x}(t)$$

$$\boxed{P = SM} \qquad (14)$$

en donde:

$$S = [B \quad AB \quad A^2B \quad \dots \quad A^{n-1}B] \qquad (15)$$

Matriz de controlabilidad

y

$$M = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & 1 \\ a_2 & a_3 & \cdots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n-1} & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad (16)$$

recordando

$$\Delta(s) = |sI - A| = s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots a_1 s + a_0 = 0$$

1. Forma Canónica Controlable (FCC)

- Entonces:

$$\bar{A} = P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{n-1} \end{bmatrix}$$

Coeficientes de la ecuación característica

$$\bar{B} = P^{-1}B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

1. Forma Canónica Controlable (FCC)

- Además C y D, están dadas por la ecuación (12):

$$\bar{C} = CP$$
$$\bar{D} = D$$

- $\bar{C}$ y $\bar{D}$, no siguen un patrón particular. Las FCC requieren que
- P^{-1} exista, entonces esto implica que la matriz S debe tener inversa, ya que la inversa de M siempre existe; esto es debido a que su determinante es $(-1)^{n-1}$ el cual es diferente de cero.

$$\boxed{P = SM}$$

Problema: Transforme las ecuaciones de estado a la forma FCC

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

2. Forma Canónica Observable (FCO)

- El sistema descrito por las ecuaciones dinámicas (1) y (2) se transforman a la FCO mediante la transformación:

$$x(t) = Q\bar{x}(t)$$

- La matriz Q de la transformación a la FCO, viene dada por:

$$Q = (MV)^{-1}$$

- En donde M viene dada por la ecuación (16) y

$$M=\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & 1 \\ a_2 & a_3 & \cdots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n-1} & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$V = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}$$

2. Forma Canónica Observable (FCO)

- De donde se obtiene:

$$\bar{A} = Q^{-1}AQ = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & -a_2 \\ \vdots & \vdots & \cdots & 0 & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_{n-1} \end{bmatrix}$$

$$\bar{C} = CQ = [0 \quad 0 \quad \dots \quad 0 \quad 1]$$

$$\bar{B} = Q^{-1}B$$

$$\bar{D} = D$$

3. Forma Canónica Diagonal (FCD)

- Dadas (1) y (2) si A tiene autovalores distintos, existe una transformación no singular

$$x(t) = T\overline{x}\,(t)$$

- Donde T esta compuesta por los vectores propios de A

$$T = [P_1 \quad P_2 \quad P_3 \quad \dots \quad P_n]$$

donde $P_{i,}\ \ i = 1,2,,\dots n,$ denota el vector propio asociado con el autovalor λ_i

Empleando la matriz T hallada en las ecuaciones transformadas (5) y (6) se obtendrá la matriz diagonal

3. Forma Canónica Diagonal (FCD)

$$\bar{A} = T^{-1}AT = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & & 0 \\ & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

- En donde $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \ \lambda_n$, son los n autovalores distintos. Asimismo de (10)-(12)

$$\bar{B} = T^{-1}B$$

$$\bar{C} = CT$$

$$\bar{D} = D$$

3. Forma Canónica Diagonal (FCD)

- Una de las ventajas de la FCD, es que las ec. de estado transformadas se presentan en forma desacoplada una de la otra y por lo tanto se pueden resolver en forma individual

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -p_1 & & & & 0 \\ & -p_2 & & & \\ & & \cdot & & \\ & & & \cdot & \\ & & & & \cdot \\ 0 & & & & -p_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & \cdots & c_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{bmatrix} + b_0 u$$

4. Forma Canónica de Jordan (FCJ) o modal

- En general, cuando la matriz A tiene valores característicos de orden múltiple, esta no se podrá transformar a la forma diagonal.
- Sin embargo, existe una transformación de similitud, donde la matriz de transformación **T** se forma empleando los vectores propios y los vectores propios generalizados, con la cual se obtendrá como una matriz cuasi diagonal, la cual es conocida como forma canónica de Jordan (FCJ)

4. Forma Canónica de Jordan (FCJ)

Ejemplo:

- La FCJ de una matriz A, la cual tiene un valor propio de tercer orden λ_1 y dos valores propios distintos λ_2 y $\lambda_3$vendra dada por

$$A = \left[\begin{array}{ccc|c|c} \lambda_1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & \lambda_2 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_3 \end{array}\right]$$

Bloques de Jordan

- En general la FCJ tiene las siguientes propiedades:

✓ Los elementos en la diagonal principal son los valores característicos

✓ Todos los elementos bajo la diagonal son cero

✓ Algunos elementos de arriba de los valores característicos de orden múltiple son unos

✓ Los números unos junto con los valores característicos forman bloques

- llamados bloques de Jordan

✓ Cuando la matriz no simétrica A tiene valores característicos de orden múltiple sus vectores característicos no son LI

✓ El numero de bloques de Jordan en igual a r vectores LI

✓ Existe solo un vector carcateristico LI asociado a cada Bloque de

- Jordan

✓ La matriz de transformacion T se forma empleando los vectores caracteristicos y los vectores generalizados como sus columnas

Ejemplo 1

Ejemplo

- Dado el modelo de estado de una planta

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1(t)\\ \dot{x}_2(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 2\\ -4 & -3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1\\ 2\end{bmatrix}u(t)$$

$$y(t)=\begin{bmatrix}1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\end{bmatrix}$$

- Transformar la representación dada a la FCC: obtener $\bar{A}$ y $\bar{B}$

Ejemplo 1

Solución

- Obtener la matriz de controlabilidad

$$S = [B \quad AB] = \left[\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -4 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right] = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 2 & -10 \end{bmatrix}$$

se comprueba $|S| \neq 0$

- Lo cual es un indicativo que se puede transformar a la FCC, para lo cual se obtiene la ecuación característica

Ejemplo 1

$$\Delta(s) = |sI - A| = \left| s \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -4 & -3 \end{bmatrix} \right| = s^2 + 2s + 5 = 0$$

- De donde

$$a_0 = 5 \qquad a_1 = 2$$

- Lo cual es un indicativo que

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -5 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\bar{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Ejemplo 2

Ejemplo

- Dado el modelo de estado de una planta

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$$

- Transformar la representación dada a la FCO: obtener $\bar{A}$ y $\bar{C}$

Ejemplo 2

Solución

- Obtener la matriz de observabilidad

$$V = \begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

- Se comprueba $|V| \neq 0$

- Lo cual es un indicativo que se puede transformar a la FCO para lo cual se obtiene la ecuación característica

Ejemplo 2

$$\Delta(s) = |sI - A| = \left|s\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}1 & 1\\-2 & -1\end{bmatrix}\right| = s^2 + 1 = 0$$

de donde

$a_0 = 1 \qquad a_1 = 0$

lo cual es un indicativo que:

$$\bar{A} = \begin{bmatrix}0 & -1\\1 & 0\end{bmatrix}$$

$$\bar{C} = \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$$

Ejemplo 3

Ejemplo

- Dado el modelo de una planta dada en su FCC

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} b_0 & b_1 & b_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix}$$

- Trazar su diagrama de simulación

Ejemplo 3

Solución

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t)$$

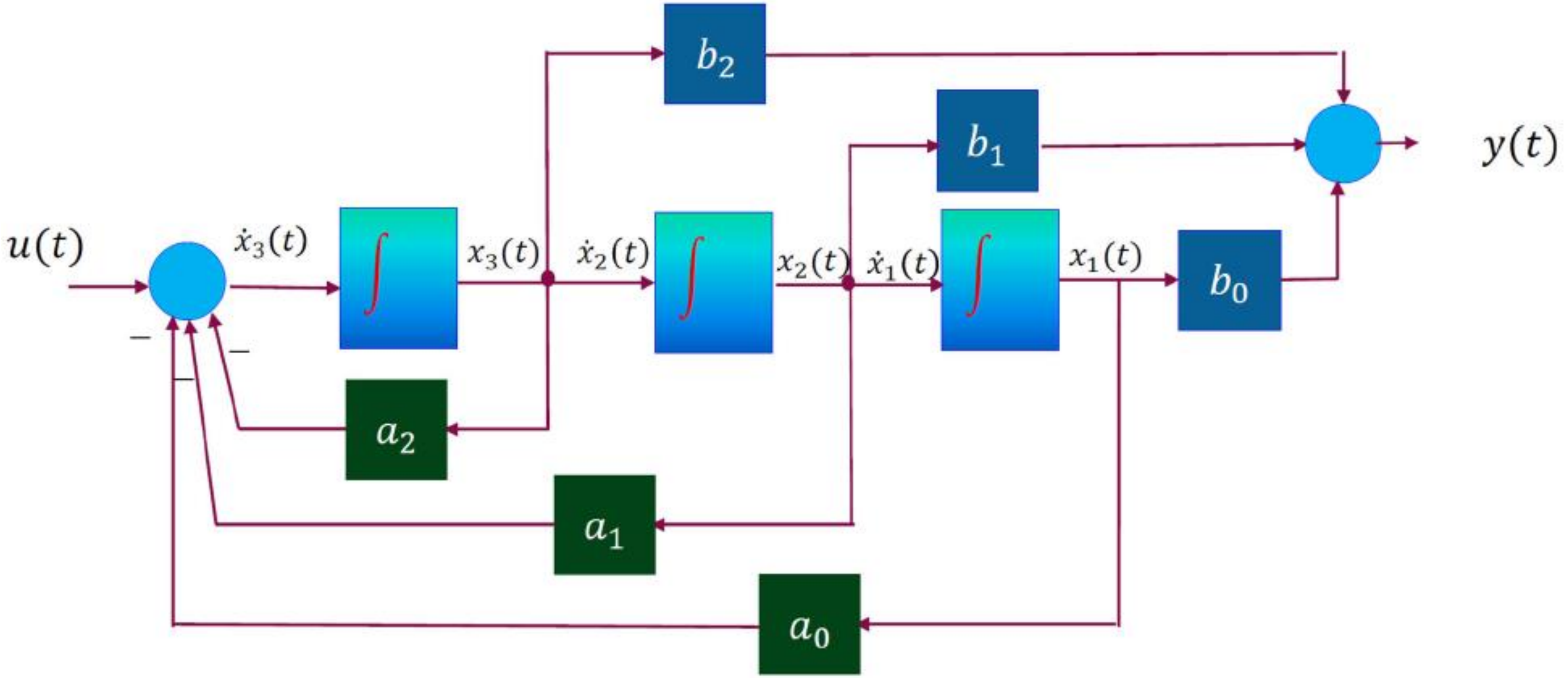
$$\dot{x}_2(t) = x_3(t)$$

$$\dot{x}_3(t) = -a_0 x_1(t) - a_1 x_2(t) - a_2 x_3(t) + b_2 u(t)$$

$$y(t) = b_0 x_1(t) + b_1 x_2(t) + b_2 x_3(t)$$

- Trazando el diagrama de simulación respectivo, se tiene

Ejemplo 3



Ejemplo 4

Ejemplo

- Dado el modelo de una planta dada en su FCO

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & -a_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix}$$

- Trazando el diagrama de simulación respectivo, se tiene

Ejemplo 4

Solución

$$\dot{x}_1(t) = -a_0 x_3(t) + b_0 u(t)$$

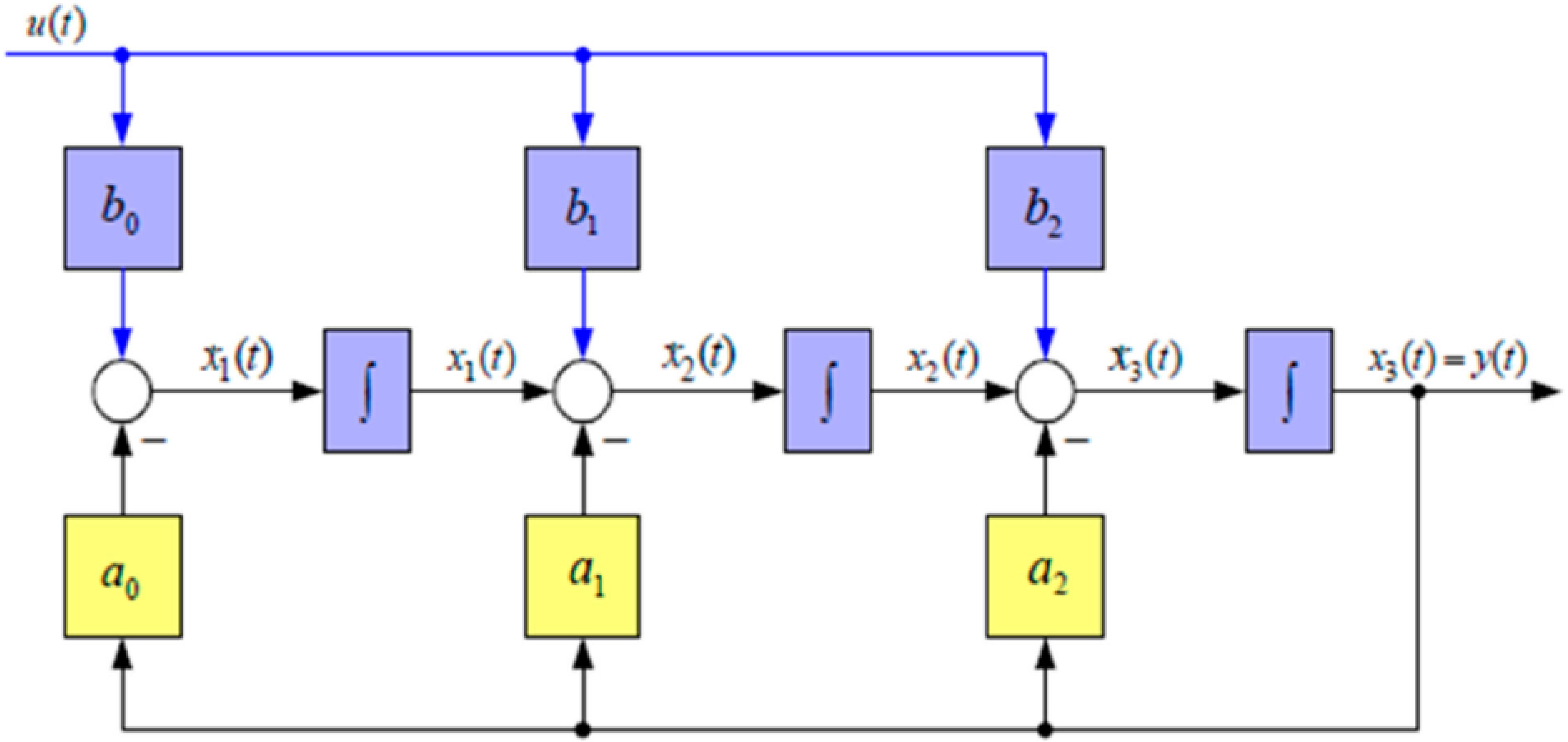
$$\dot{x}_2(t) = x_1(t) - a_1 x_3(t) + b_1 u(t)$$

$$\dot{x}_3(t) = x_2(t) - a_2 x_3(t) + b_2 u(t)$$

$$y(t) = x_3(t)$$

- Trazando el diagrama de simulación respectivo, se tiene

Ejemplo 5



Problema 6

- Considere la siguiente ecuación de estado:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 & 1 & 0 \\ -11 & 0 & 1 \\ -6 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ 2 \end{bmatrix} u$$

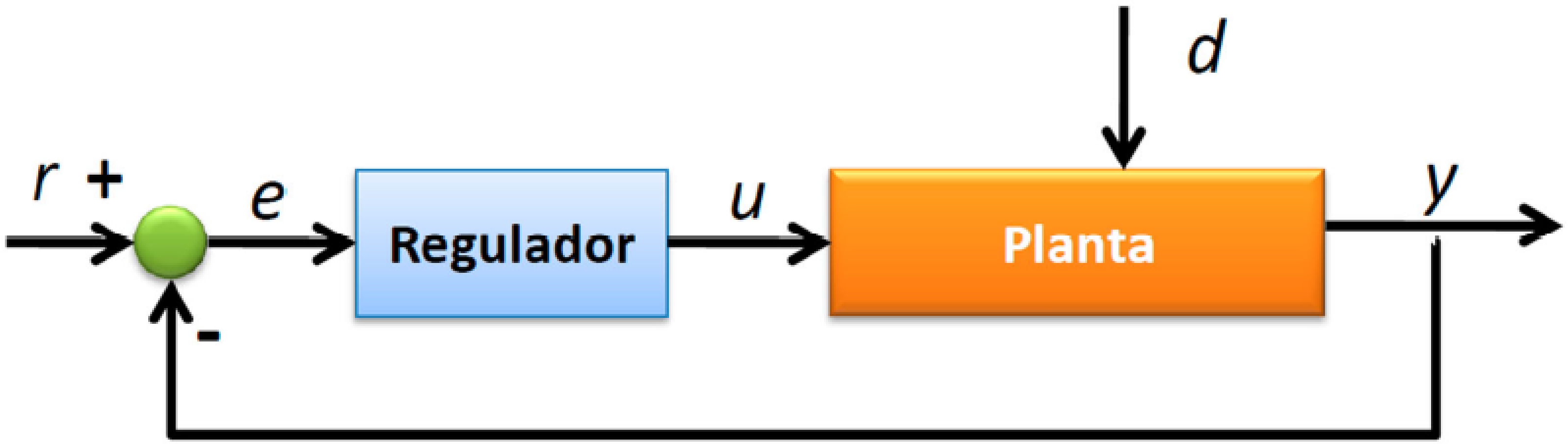
$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

- Muestre que la ecuación de estado puede transformarse a la siguiente forma:

$$\begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \\ \dot{z}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -6 \\ 1 & 0 & -11 \\ 0 & 1 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

- Luego obtenga la salida y en términos de z1, z2 y z3

Análisis de sistemas de lazo cerrado



En el control clásico la salida es retroalimentada al punto de suma. El controlador sólo responde cuando la perturbación en la salida y es perceptible

Análisis de sistemas de lazo cerrado

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}\mathbf{u}$$

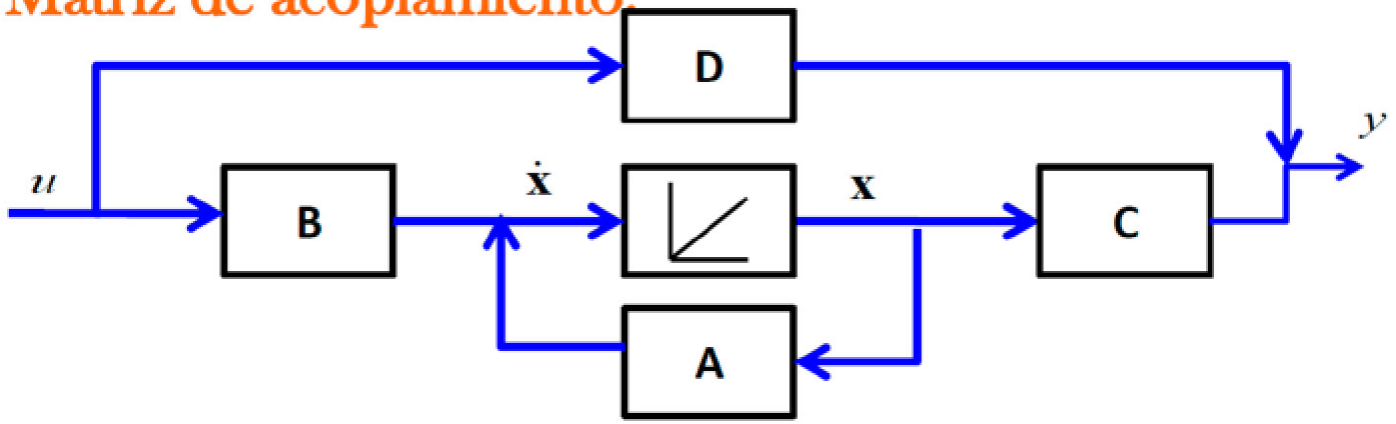
A,B,C y D son matrices, vectores y variables escalares con coeficientes constantes.

A:= Matriz del sistema

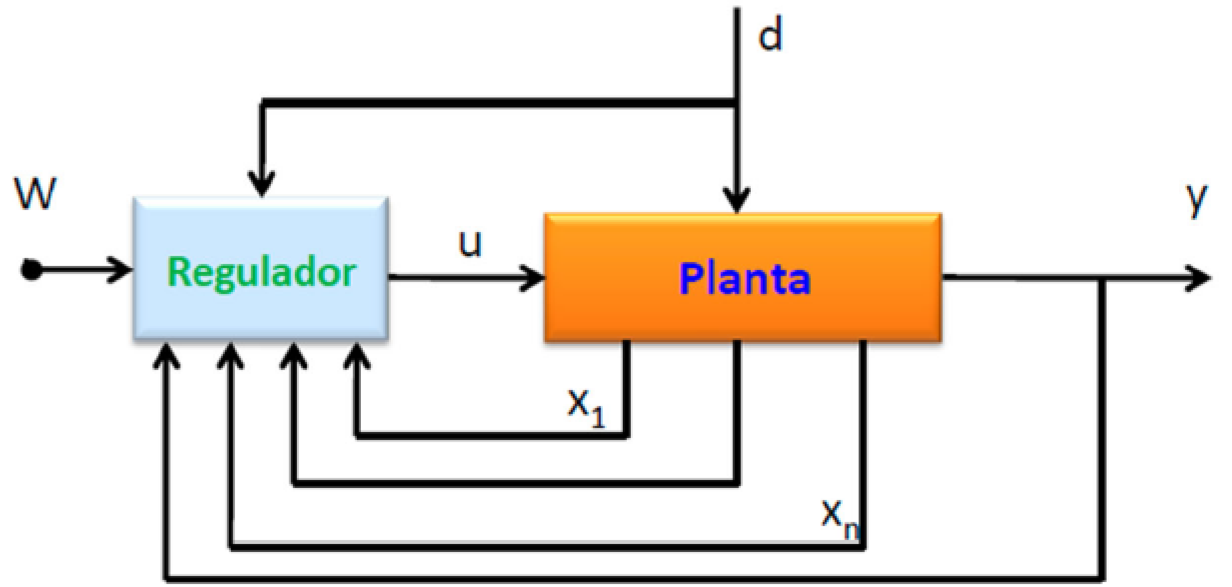
B:= Matriz de entradas

C:= Matriz de salidas

D:= Matriz de acoplamiento.



Análisis de sistemas de lazo cerrado

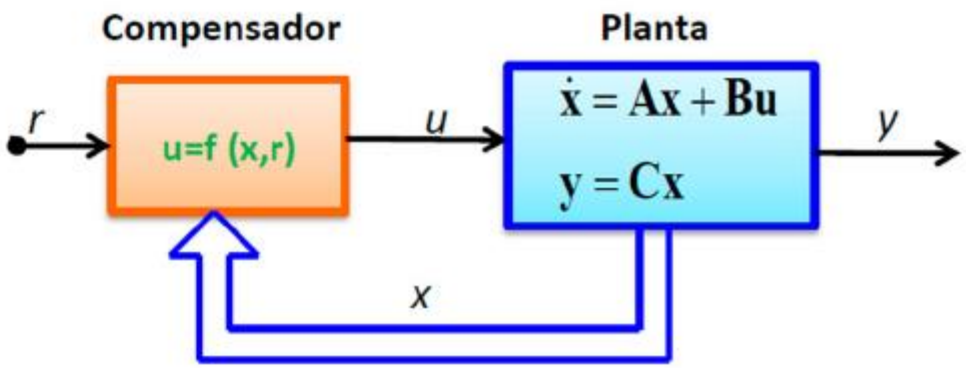


- Retroalimentación a la salida - Lugar de raíces
  - Ubicación de polos dominantes.

Control Clásico

- Retroalimentación de estados
  - Retorno de todas las variables de estado.
  - Ubicación arbitraria de todos los polos en lazo cerrado
  - Regulador estático : $u = -Kx$

Análisis de sistemas de lazo cerrado



•Control estático (sin memoria)

El valor de la variable de control *u* es función de las variables de estado actuales x_i .

•Controlador lineal -retroalimentación de estados

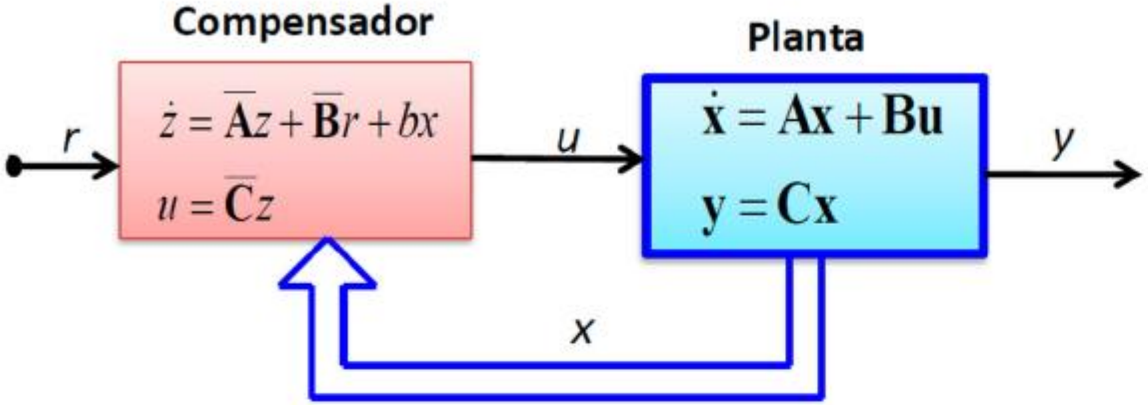
$$\mathbf{u} = \underbrace{-\mathbf{k}_1\mathbf{x}_1 - \mathbf{k}_2\mathbf{x}_2 \ldots - \mathbf{k}_n\mathbf{x}_n}_{} + \mathbf{r}$$

$$\mathbf{u} = -\mathbf{K}\mathbf{x} + \mathbf{r}$$

•Controlador no lineal - retroalimentación de estados

$$\mathbf{u} = \mathbf{f}(\mathbf{x},\mathbf{r})$$

Análisis de sistemas de lazo cerrado

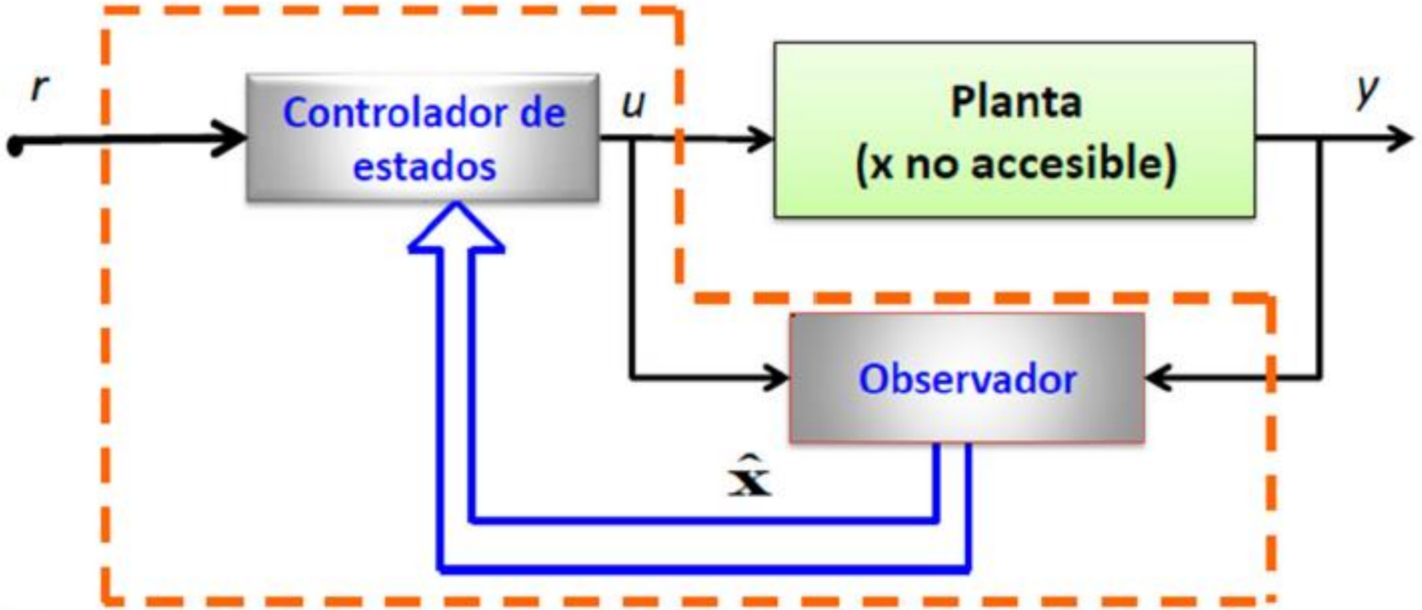


$$\left.\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{z} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} A & B\bar{C} \\ b & \bar{A} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \bar{B} \end{bmatrix} r \\ y &= \begin{bmatrix} C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix} \end{aligned}\right\}$$

Ecuación de estado y de salida del sistema de lazo cerrado

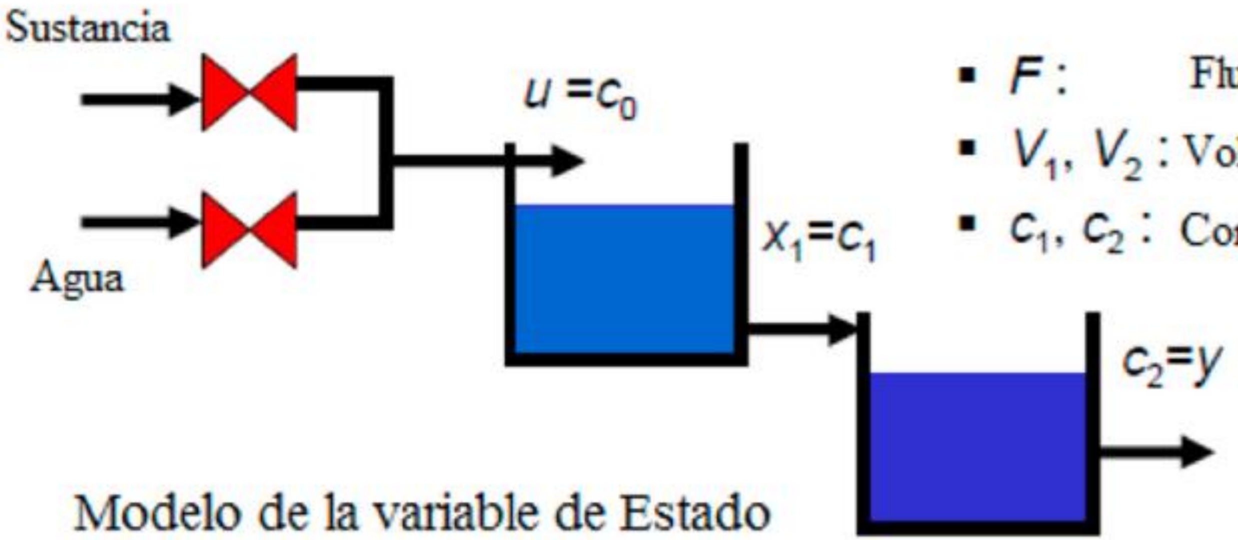
El **orden del sistema controlado** es aumentado comparado con el orden de la planta.

Análisis de sistemas de lazo cerrado



- Ventajas y desventajas del controlador de estados
  - Mejora el control
  - Necesita múltiples mediciones
- Determinación de las variables de estado
  - Medición directa es a menudo caro o imposible.
  - Reconstrucción de variables de estado por un observador.

Análisis de sistemas de lazo cerrado



- F : Flujo
- V_1, V_2 : Volumenes de los tanques
- c_1, c_2 : Concentración de la sustancia

Modelo de la variable de Estado

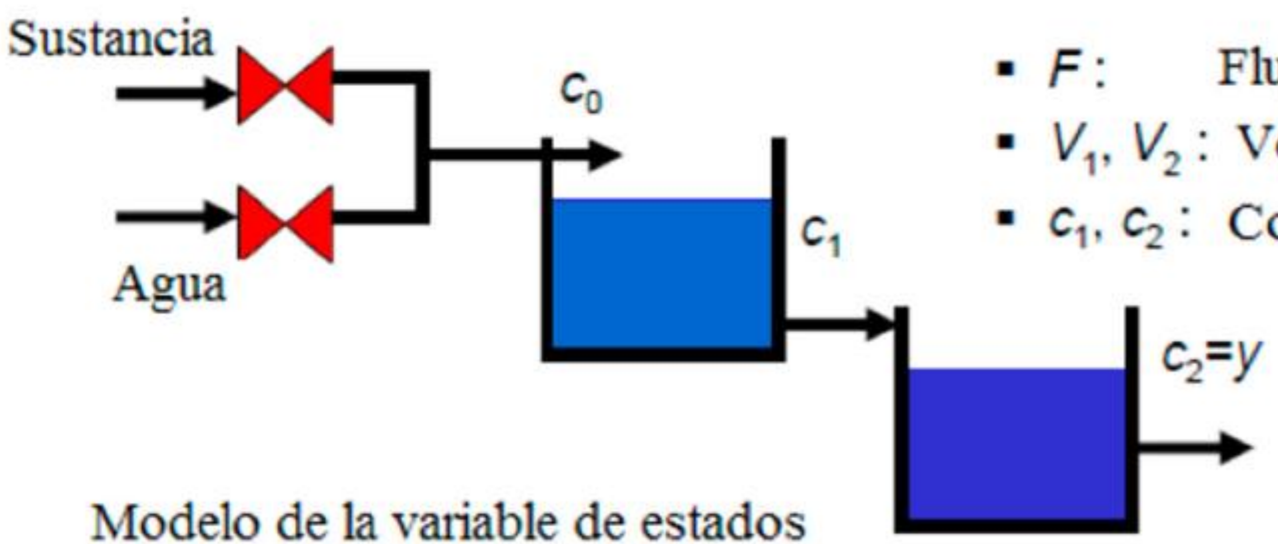
$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{F}{V_1} & 0 \\ \frac{F}{V_2} & -\frac{F}{V_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{F}{V_1} \\ 0 \end{pmatrix} u$$

$$y = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

Matriz de Controlabilidad

$$\mathrm{Co} = \begin{pmatrix} \underline{b} & \underline{A}\underline{b} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{F}{V_1} & -\frac{F^2}{V_1^2} \\ 0 & \frac{F^2}{V_1 V_2} \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Controlable}$$

Análisis de sistemas de lazo cerrado



- F: Flujo
- V_1, V_2: Volumenes de los tanques
- c_1, c_2: Concentración de la sust.

Modelo de la variable de estados

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{F}{V_1} & 0 \\ \frac{F}{V_2} & -\frac{F}{V_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{F}{V_1} \\ 0 \end{pmatrix} u$$

$$y = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

Matriz de Observabiliad

$$\underline{S}_B = \begin{pmatrix} \underline{c} & \underline{c}A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{F}{V_2} & -\frac{F}{V_2} \end{pmatrix} \Rightarrow \text{observable}$$

Análisis de sistemas de lazo cerrado

- A través de la retroalimentación:

  U=-Kx

- La ecuación de espacio estado quedaría así:

$$\dot{\mathbf{x}} = (\mathbf{A} - \mathbf{BK})\mathbf{x}$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{Cx}$$

- K es escogido tal que los valores propios de (A-BK) sean los deseado y se asegure la estabilidad del sistema.

Introducción

- En el diseño en el espacio-estado, existen criterios para determinar (desde el inicio), si la solución que cumple las especificaciones deseadas existe o no.
- Las condiciones sobre controlabilidad y observabilidad gobiernan la existencia de una solución de un problema de control óptimo.
- A diferencia de lo que sucede en la teoría del control clásico, la teoría del control moderno considera la realimentación de variables internas, es decir de sus estados. De ahí la importancia del concepto de controlabilidad completa. Este concepto fue introducido por Kalman y le permitió demostrar la imposibilidad de controlar un sistema inestable por cancelación de polos con ceros, mas allá de la exactitud de la cancelación.

Controlabilidad y Observabilidad

- Ejemplo:
- Se tiene un SLIT

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) \\ \dot{x}_4(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \end{bmatrix}$$

Controlabilidad y Observabilidad

- De donde las correspondientes ecuaciones de estado son:

$$\dot{x}_1(t) = -x_1(t) + u(t)$$

$$\dot{x}_2(t) = -2x_2(t) + u(t)$$

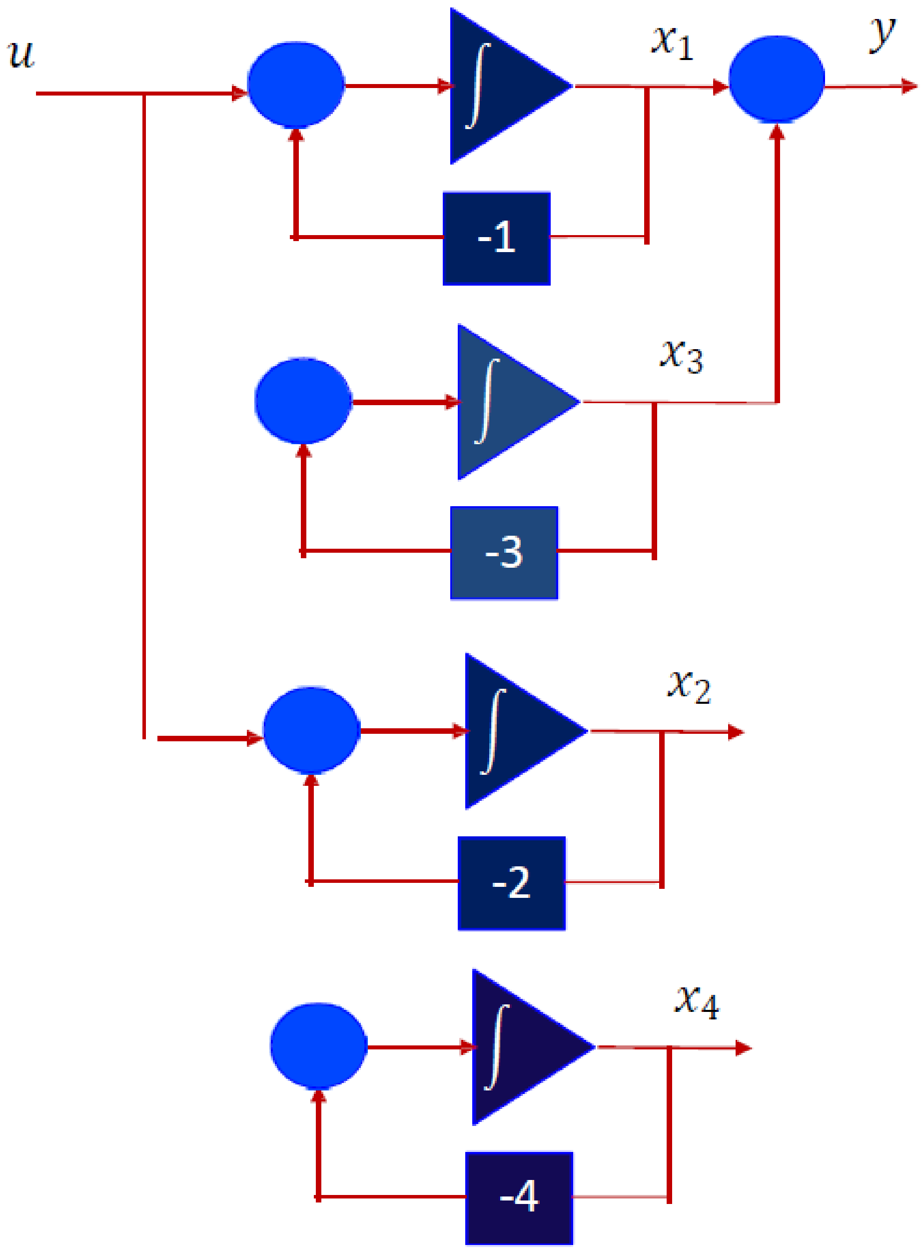
$$\dot{x}_3(t) = -3x_3(t)$$

$$\dot{x}_4(t) = -4x_4(t)$$

$$y(t) = x_1(t) + x_3(t)$$

Controlabilidad y Observabilidad

- Su diagrama de simulación viene dado por:



Controlabilidad y Observabilidad

- Las condiciones de controlabilidad y observabilidad de los cuatro estados se determinan por inspección.
- El sistema estudiado consta de 4 diferentes subsistemas
  - ✓ **x1:** controlable y observable (C y O)
  - ✓ **x2:** controlable, pero no observable (C pero N O)
  - ✓ **x3:** no controlable, pero observable (NC pero O)
  - ✓ **x4:** no controlable y no observable (NC y NO)

Relación entre Controlabilidad, Observabilidad y FT

Teorema

- Si la FT de un SLI-t tiene cancelación de polos y ceros, este será, o no controlable ó no observable, o ambos, dependiendo de cómo se definan las variables de estado.

- Si la FT de un SLI-t no tiene cancelación de polos y ceros, este siempre se podrá representar mediante ecuaciones dinámicas como un sistema totalmente controlable y observable.

Relación entre Controlabilidad, Observabilidad y FT

Ejemplo

- Solamente en el primer subsistema x_1 contribuye a la FT

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{s+1}$$

- Que paso? La FT corresponde a la dinámica descrita por el modelo de estado, tiene tres cancelaciones de polos y ceros

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = C(sI - A)^{-1}B = \frac{(s+2)(s+3)(s+4)}{(s+1)(s+2)(s+3)(s+4)}$$

Relación entre Controlabilidad, Observabilidad y FT

- Sistemas no controlables y no observables son originados debido a:
  - ✓ Variables de estado redundantes
  - ✓ Sistemas físicamente incontrolables
  - ✓ Demasiada simetría

Definición de Controlabilidad

- El proceso es completamente controlable si cada variable de estado se puede controlar para llegar a un cierto objetivo en un tiempo finito a través de algún control no restringido u(t)
- Si una de las variables de estado es independiente del control u(t) no habrá forma de dirigir esta variable de estado a un estado deseado en un tiempo finito, se dice entonces en particular que el estado no es controlable y que el sistema no es completamente controlable
- Pero la controlabilidad se puede definir para la salida del sistema de forma que existe una diferencia entre controlabilidad de estado y la controlabilidad de la salida

Definición de Controlabilidad

- Considere un SLIT

$$\frac{dx(t)}{dt} = Ax(t) + Bu(t) \qquad (1)$$
$$y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

- Se dice que un sistema es controlable si puede ser movido desde cualquier estado inicial $x_{(to)}$ a cualquier otro estado deseado $x_{(tf)}$ en un intervalo de tiempo finito $t = t_f - t_o \geq 0$ aplicando una entrada continua por intervalos $u(t)$
- A es una matriz de nxn
- B es una matriz de nx1
- X es un vector de dimensión n
- u es un vector de rx1 entradas
- y es un vector de px1 salidas

Controlabilidad: Teorema

- Para que el sistema descrito por la ecuación de estado (1)sea completamente controlable, es necesario y suficiente que su matriz de controlabilidad de *n* x *nr* tenga rango *n*:

$$S = [B \quad AB \quad A^2B \quad \ldots \quad A^{n-1}B]$$

r- número de entradas

Este criterio es directo pero no es muy sencilllo emplearlo para un sistema de orden superior y/o de muchas entradas

- **Nota:** Rango de una matriz **F** es el número máximo de columnas linealmente independiente en **F**; ó es el orden de la matriz no singular más grande contenida en **F**.

Controlabilidad: Teorema

Otra alternativa

- Para un **SISO** descrito por la ecuación (1), el par [**A**,**B**] es completamente controlable si **A** y **B** están en la FCC o son transformables a la FCC mediante una transformación de similitud.
- En este caso el requerimiento será que $|S| \neq 0$
- Para realizar la transformación a FCC se requiere que P^{-1} exista es decir que S^{-1} exista. Por tanto para obtener la FCC se requiere que la inversa de la matriz de controlabilidad exista.

Controlabilidad: Teorema

Otra alternativa

- Para la ecuación (1), si A esta en FCJ entonces es completamente controlable si todos los elementos en las filas de B que corresponden a la ultima fila de cada bloque de Jordan son distintos de cero.
- La prueba es directa: se supone que A es diagonal y que tiene valores característicos distintos entonces es controlable si B no tiene algún renglón con todos los elementos ceros. La razón es que si A es diagonal todos los estados están desacoplados y si alguna fila de B contiene todos los elementos en cero el estado correspondiente no podrán ser afectados por ninguna de las entradas y el estado no seria controlable

$$A = \left[\begin{array}{ccc|c|c} \lambda_1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & \lambda_2 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_3 \end{array}\right]$$

Bloques de Jordan

$$A = \begin{bmatrix} \boxed{\begin{matrix} \lambda_1 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda_1 \end{matrix}} & \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 & 0 & 0 \end{matrix} & \lambda_2 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ \boxed{\begin{matrix} b_{31} & b_{32} \\ b_{41} & b_{42} \end{matrix}} \end{bmatrix}$$

Deben ser $\neq 0$ para la controlabilidad

- Para la controlabilidad solo los elementos en la fila de B que corresponden al ultima fila del bloque de Jordan deben ser $\neq 0$. los elementos en las otras filas de B no necesita ser $\neq 0$ ya que los estados correspondientes estan todavia acoplados a travez de uno de "1"s en los bloques de Jordan de A

Controlabilidad: Ejemplo 1

- Considere el modelo de estado de una planta

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix}$$

- Determine si esta planta es o no controlable

Solución

$$S = \begin{bmatrix} B & AB & A^2B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 9 & 1 \end{bmatrix}$$

$$rango(S) = 3$$

Si es de rango n, por tanto el sistema de estados si es completamente controlable

Controlabilidad: Ejemplo 2

- Considere el modelo de estado de una planta

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1(t)\\ \dot{x}_2(t)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}u(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\end{bmatrix}$$

- Determine si esta planta es o no controlable

Solución:

$$S = \begin{bmatrix}B & AB\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}$$

$$|S| = 0$$

Singular, entonces la planta es
NO CONTROLABLE

Controlabilidad: Ejemplo 3

- Considere el modelo de estado de unan planta

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$$

- Determine si esta planta es o no controlable

Solución:

$$S = \begin{bmatrix} B & AB \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$|S| \neq 0$ NO Singular, entonces la planta es CONTROLABLE

Definición de Observabilidad

- Considere un SLIT

$$\frac{dx(t)}{dt} = Ax(t) + Bu(t)$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

- Se dice que un sistema es observable si y solo si es posible determinar cualquier estado (inicial arbitrario) $x_{(to)}$ a partir de la observación de $y_{(t)}$ durante un intervalo de tiempo finito $t_o \leq t \leq t_f$

Observabilidad: Teorema

- Para que el sistema descrito por la ecuación (1) sea completamente observable es necesario y suficiente que su matriz de observabilidad de *n* x *np* tenga un rango *n*:

$$V = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}$$

p- número de salidas

Observabilidad: Teorema

- Para que un sistema SISO descrito por (1) el par **[A,C]** es completamente observable si **A** y **C** están en FCO o son transformables a la FCO mediante una transformación de similitud.
- En este caso el requerimiento será que $|V| \neq 0$

Observabilidad: Ejemplo 1

- Considere el modelo de estado de una planta:

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1(t)\\ \dot{x}_2(t)\\ \dot{x}_3(t)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 3 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\\ x_3(t)\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_1(t)\\ u_2(t)\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}y_1(t)\\ y_2(t)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\\ x_3(t)\end{bmatrix}$$

- Determine si esta planta es o no observable

$$V = \begin{bmatrix}C\\ CA\\ CA^2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 2 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 4 & 0 & 0\\ 0 & 4 & 0\end{bmatrix} \qquad rango(V) = 2$$

Observabilidad: Ejemplo 2

- Considere el modelo de estado de una planta:

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1(t)\\ \dot{x}_2(t)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 1\\ -2 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}u(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\end{bmatrix}$$

- Determine si esta planta es o no observable

$$V = \begin{bmatrix}C\\ CA\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{bmatrix}$$

$|V| \neq 0$ NO Singular, entonces la planta es OBSERVABLE

Observabilidad: Ejemplo 3

- Considere el modelo de estado de una planta:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$$

- Determine si esta planta es o no observable

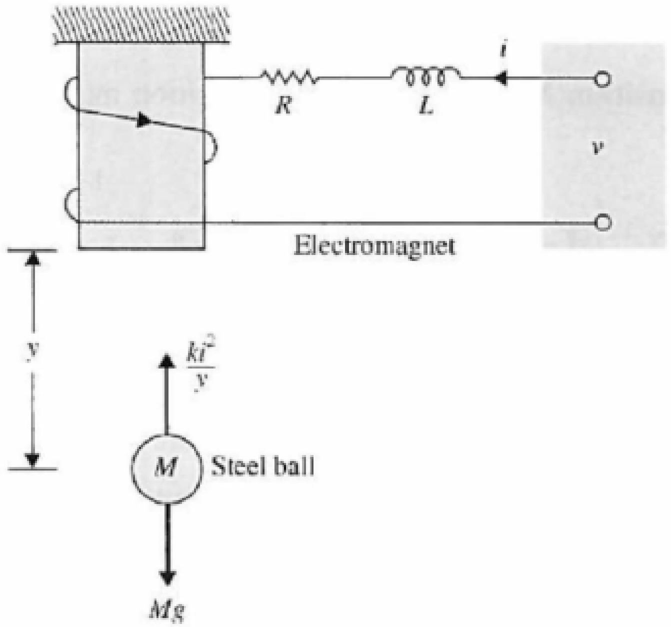
$$V = \begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$|V| = 0$$

Singular, entonces la planta es NO OBSERVABLE

Problema

- Sistema de levitación magnética: Las ecuación dinámicas que gobiernan un sistema de levitación son las siguientes:



$$M\frac{d^2x(t)}{dt^2} = Mg - \frac{ki^2(t)}{x(t)}$$

$$v(t) = Ri(t) + L\frac{di(t)}{dt}$$

$$x_1(t) = x(t)$$
$$x_2(t) = \frac{dx(t)}{dt}$$
$$x_3(t) = i(t)$$

V(t) = voltaje de entrada (V)
i(t) = corriente de armadura (A)
R = resistencia del devanado = 1 ohm
M = masa de la esfera = 1 kg
X(t) = posición de la esfera (m)
K = constante proporcional = 1
L = inductancia del devanado = 0.01H
g = gravedad

Problema

- Las ecuaciones de estado serán:

$$\frac{dx_1(t)}{dt} = x_2(t)$$

$$\frac{dx_2(t)}{dt} = g - \frac{k}{M}\frac{x_3^2(t)}{x_1(t)}$$

$$\frac{dx_3(t)}{dt} = -\frac{R}{L}x_3(t) + \frac{v(t)}{L}$$

- Los componentes no lineales pueden linealizarse cerca del punto de equilibrio x1(t)=x(t)=0.5m. Sustituyendo la ecuación queda:

$$\Delta\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}^*\Delta\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}^*\Delta v(t) \qquad \mathbf{A}^* = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 64.4 & 0 & -16 \\ 0 & 0 & -100 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B}^* = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 100 \end{bmatrix}$$

Analice si el sistema es controlable y observable

Gracias por vuestra atención...