INGENIERÍA DE CONTROL 2

Sesión 9

CONTROL ÓPTIMO

- Modelamiento y resultados

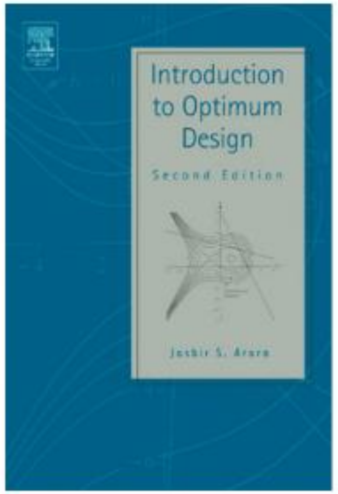
Bibliografía

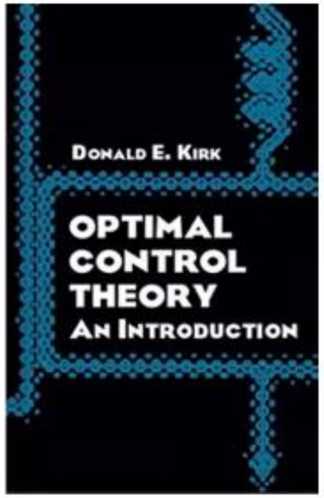
Para diseño óptimo:

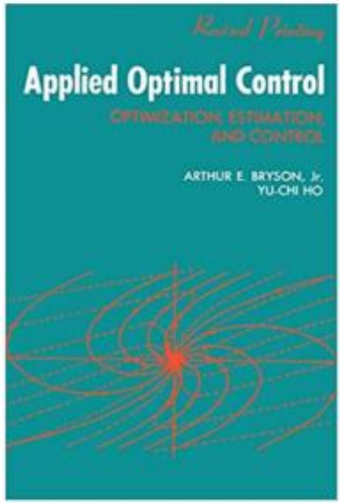
- Arora, J. Introduction to Optimum Design. 2nd Edition. 2004

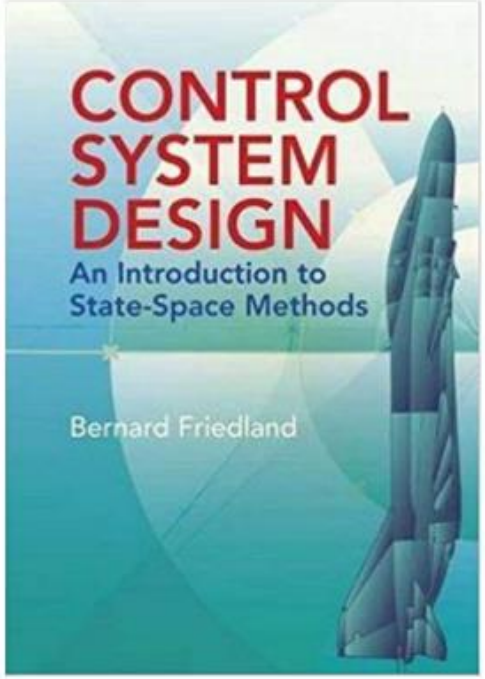
Para control óptimo:

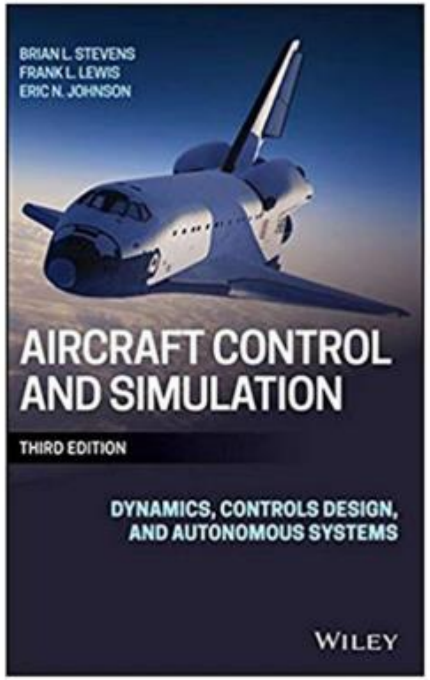
- Kirk, D. Optimal Control Theory. An Introduction. 1998
- Bryson, A. Applied Optimal Control. 1975
- Friedland, Bernard. Control System Design. 1986
- Stevens, B. Aircraft Control and Simulation. 3rd. Ed. 2016
- Stanislaw, Zak. Systems and control. 1st. Ed. 2003











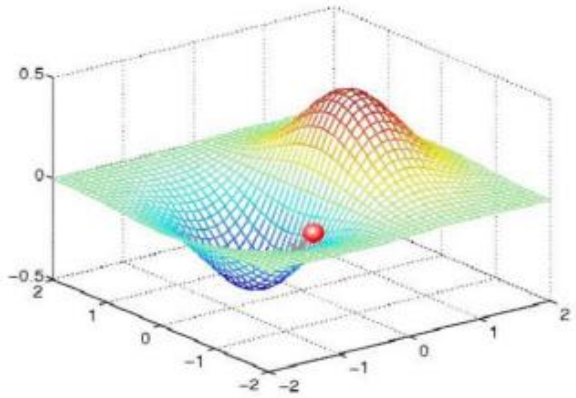
OPTIMIZACIÓN

- **Concepto de Optimización**
- Optimización: "tan bueno como lo permiten las restricciones“

- Optimización requiere de un punto de referencia para la comparación de soluciones o criterio de conducta (algunas veces llamado función de costo o de riesgo)

Optimización es hacer mínimo/máximo un criterio de calidad por adecuada selección de los grados de libertad.

- Índice de calidad en el dominio del tiempo
- Índice de calidad en el dominio de la frecuencia
- Índice de calidad en el espacio estado



OPTIMIZACIÓN

Requerimientos en el lazo de Control

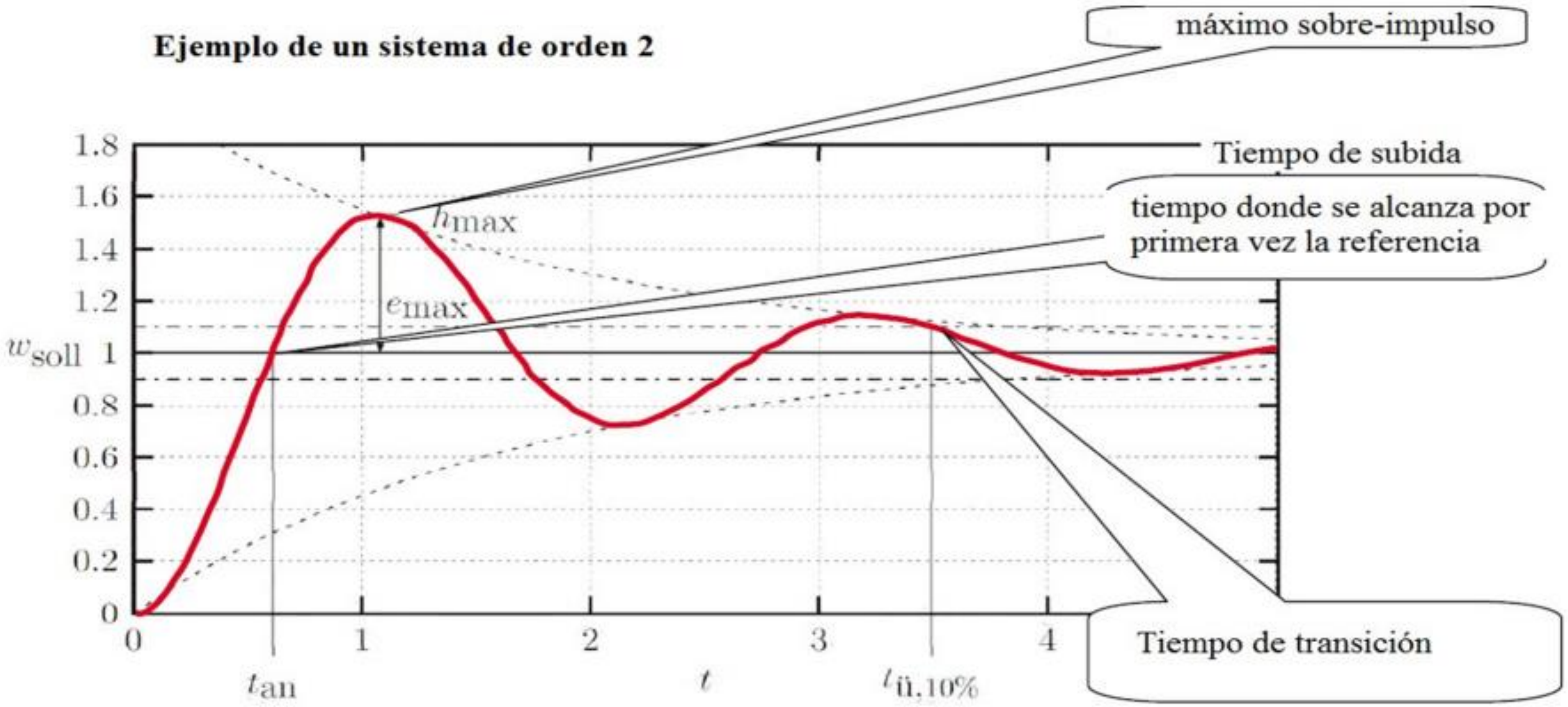
Estabilidad

Buen amortiguamiento

Aproximación en el estado estacionario

Buena conducta dinámica

Bajo esfuerzo de control



REGULADOR ÓPTIMO CUADRÁTICO

- Paso 1: Resuelva la ecuación algebraica de Riccati, hallando **P**.

$$\boldsymbol{A^T P + PA - PBR^{-1}B^T P + Q = 0}$$

- Paso 2: Calcule K usando la ecuación:

$$\boldsymbol{K = R^{-1}B^T P}$$

- Si $\boldsymbol{A - BK}$ es una matriz estable, este método siempre entrega un resultado correcto.

- El requisito de que $\boldsymbol{A - BK}$ sea estable es equivalente a que el rango de la siguiente matriz sea n.

$$rank \begin{bmatrix} \boldsymbol{Q^{\frac{1}{2}}} \\ \boldsymbol{Q^{\frac{1}{2}}A} \\ \vdots \\ \boldsymbol{Q^{\frac{1}{2}}A^{n-1}} \end{bmatrix} = n$$

https://youtu.be/i8JUAqg7pAU?si=kcsuzZyOkUF6DUJH

Brazo Robot de 2GDL

- Modelamiento y Control

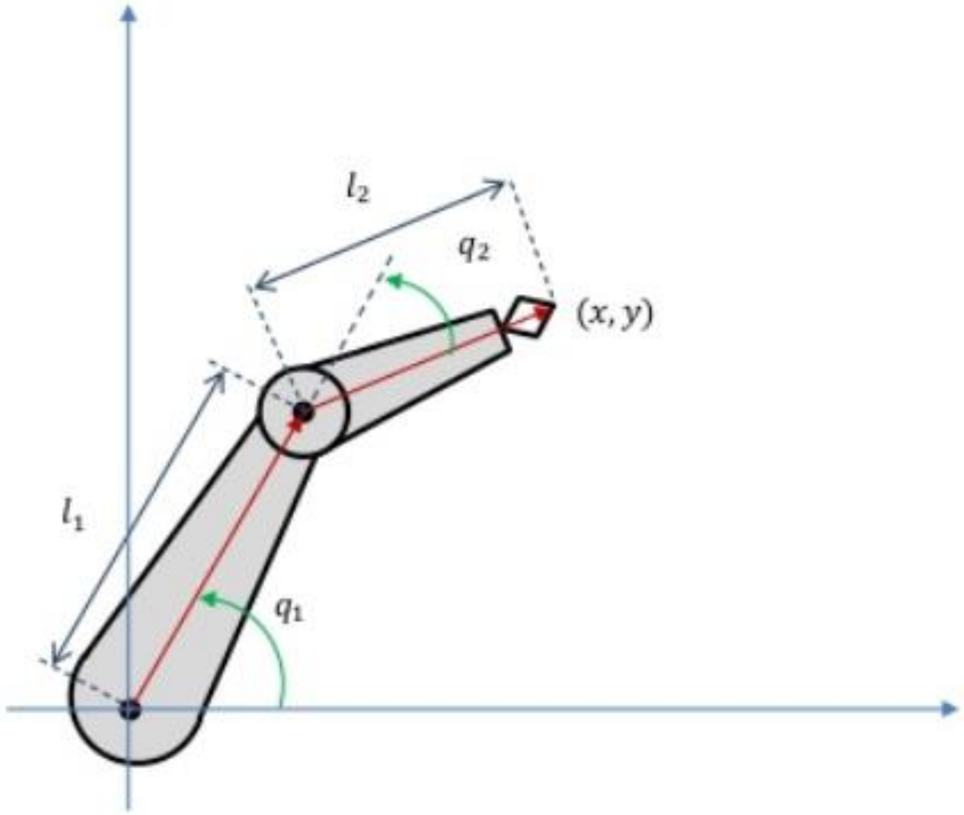
- Control
- Identificación
- Trayectoria

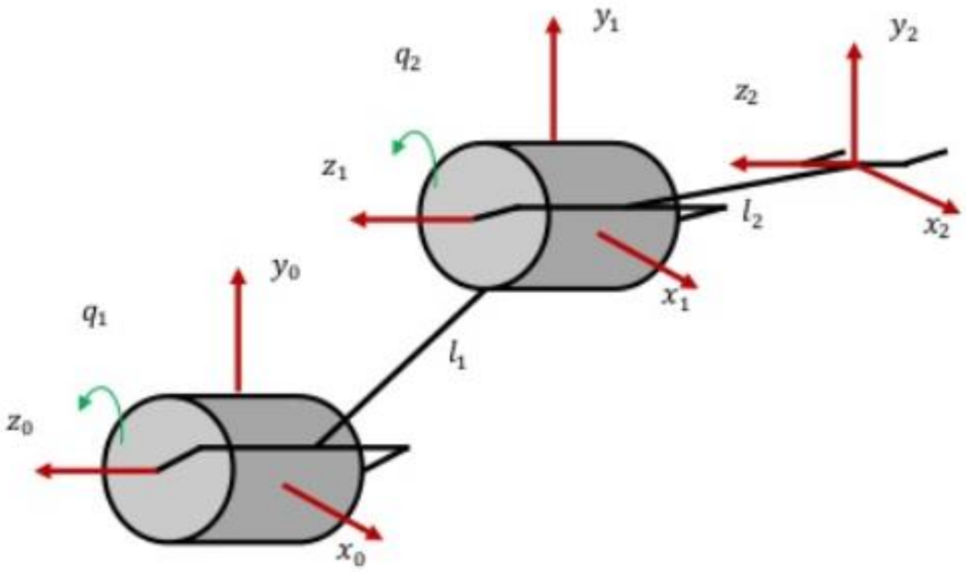
Robot Kuka en trayectoria de precisión

https://www.youtube.com/watch?v=loCnCrz8F3w

CINEMÁTICA

Sea el robot planar de dos grados de libertad representado por la siguiente figura, se obtendrá su cinemática directa mediante el algoritmo de Denavit-Hartenberg (D-H).





Eslabón	θ_i	d_i	a_i	α_i
1	q_1	0	l_1	0
2	q_2	0	l_2	0

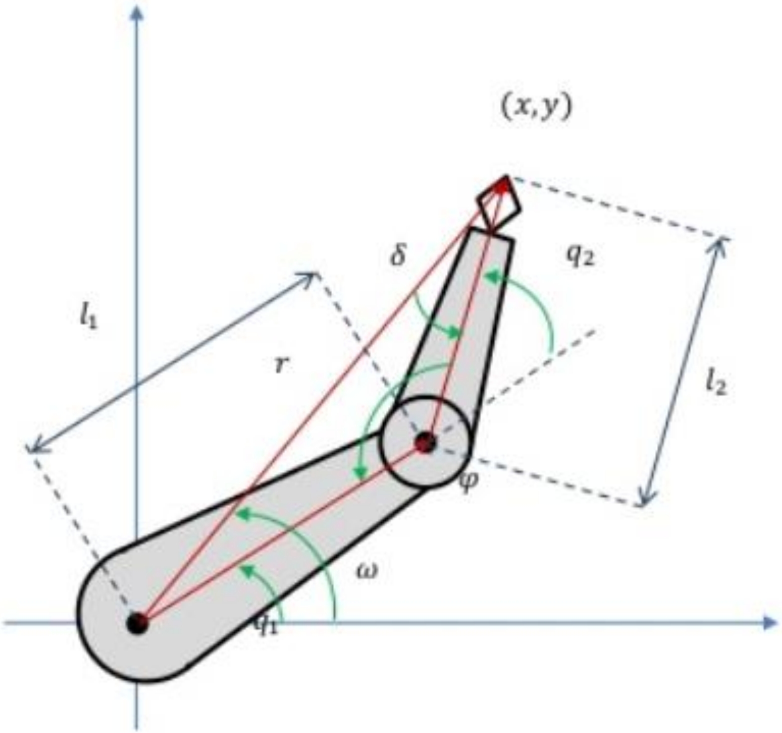
Parámetros de D-H para el robot planar de 2 GDL

Ahora que se tienen los parámetros D-H, se sustituirán en las matrices de transformación homogénea D-H de cada eslabón. Se tiene:

$$\boldsymbol{A}_0^1 = \begin{bmatrix} c_1 & -s_1 & 0 & l_1c_1 \\ s_1 & c_1 & 0 & l_1s_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \boldsymbol{A}_1^2 = \begin{bmatrix} c_2 & -s_2 & 0 & l_2c_2 \\ s_2 & c_2 & 0 & l_2s_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

CINEMÁTICA

Considerando las variables mostradas en el diagrama siguiente, se determinarán por el método gráfico las ecuaciones para cada una de las coordenadas articulares en función de (x, y) dadas.



Aplicando la ley de los cosenos, se determina la segunda coordenada articular:

$$r^2 = x^2 + y^2$$

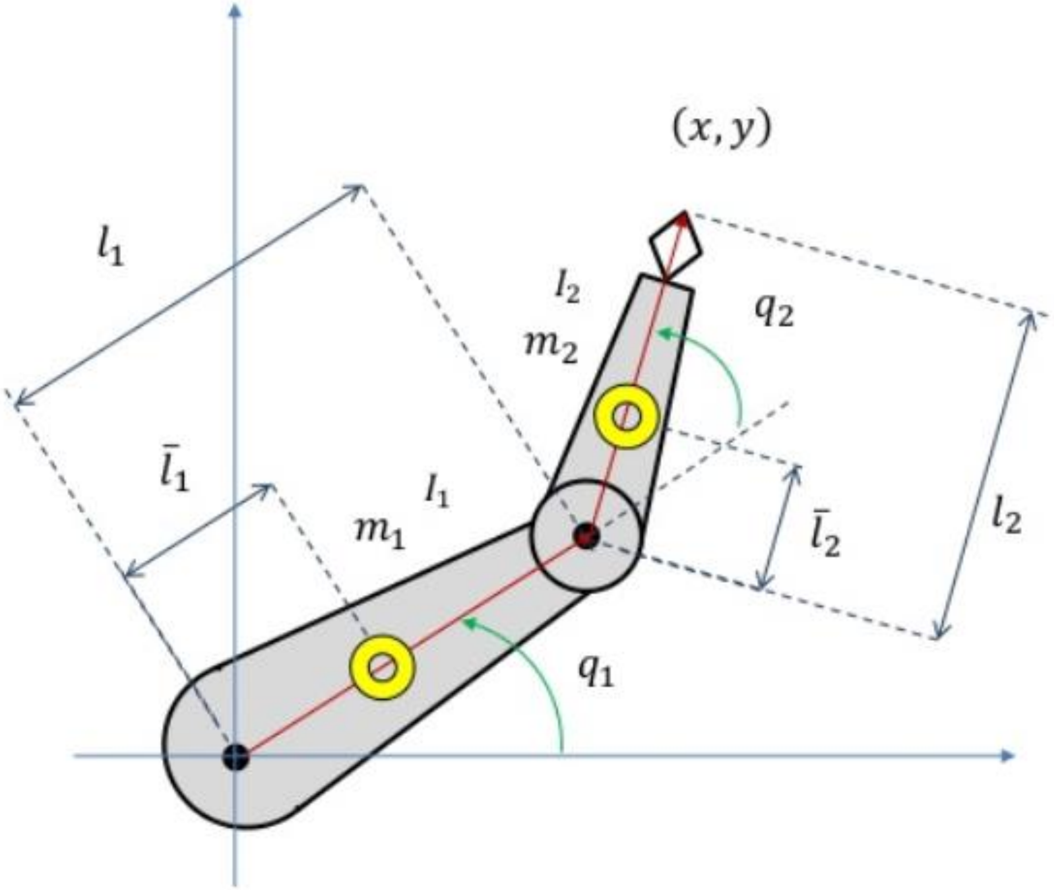
$$r^2 = l_1^2 + l_2^2 - 2l_1 l_2 \cos\varphi$$

$$\varphi = \pi - q_2$$

$$\cos\varphi = \cos(\pi - q_2) = -\cos q_2 = \frac{l_1^2 + l_2^2 - r^2}{2l_1 l_2}$$

$$\cos q_2 = c_2 = \frac{r^2 - l_1^2 - l_2^2}{2l_1 l_2}$$

DINÁMICA

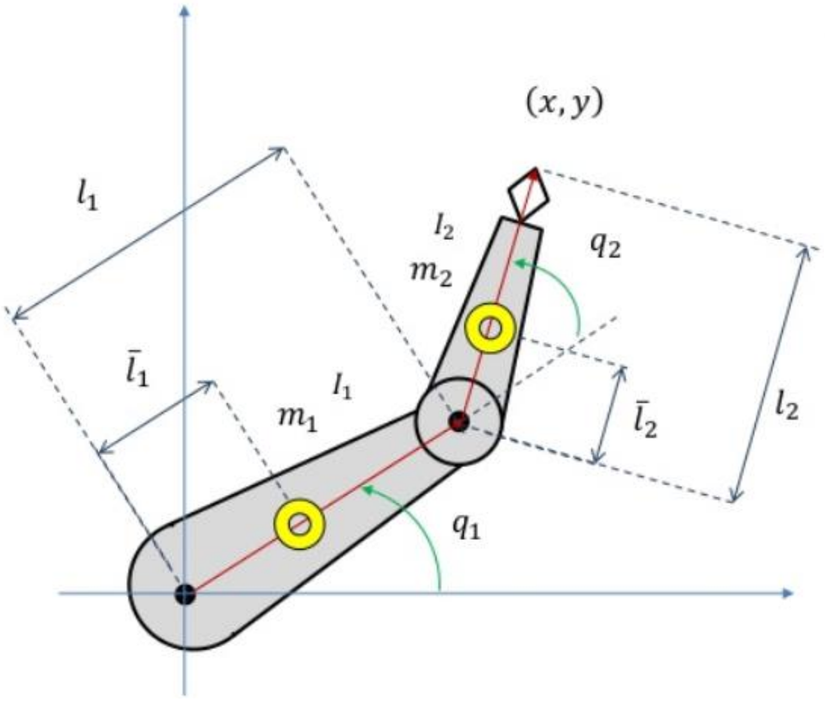


Considerando el diagrama de arriba, se obtendrán la energía cinética y la energía potencial de cada eslabón, con base en (5.5) y (5.6).

MODELO DEL BRAZO ROBOT DE 2GDL

$$\left(m_2 l_1 \bar{l}_2 c_2 + m_2 \bar{l}_2^{\,2} + I_2\right)\ddot{q}_1 + \left(m_2 \bar{l}_2^{\,2} + I_2\right)\ddot{q}_2 + \left(m_2 l_1 \bar{l}_2 s_2 \dot{q}_1\right)\dot{q}_1 + \left(m_2 \bar{l}_2 c_{12}\right) g = \tau_2$$

Sin embargo, en el marco teórico se mencionó que es más útil escribir la dinámica de acuerdo con (5.10). Entonces se procede a sustituir las expresiones anteriores en dicha ecuación matricial.



$$\boldsymbol{M}(\boldsymbol{q})\ddot{\boldsymbol{q}} + \boldsymbol{C}(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})\dot{\boldsymbol{q}} + \boldsymbol{G}(\boldsymbol{q}) = \boldsymbol{\tau}$$

$$\boldsymbol{M} = \begin{bmatrix} m_1 \bar{l}_1^{\,2} + m_2\left(l_1^2 + 2 l_1 \bar{l}_2 c_2 + \bar{l}_2^{\,2}\right) + I_1 + I_2 & m_2\left(l_1 \bar{l}_2 c_2 + \bar{l}_2^{\,2}\right) + I_2 \\ m_2\left(l_1 \bar{l}_2 c_2 + \bar{l}_2^{\,2}\right) + I_2 & m_2 \bar{l}_2^{\,2} + I_2 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} -2 m_2 l_1 \bar{l}_2 s_2 \dot{q}_2 & -m_2 l_1 \bar{l}_2 s_2 \dot{q}_2 \\ m_2 l_1 \bar{l}_2 s_2 \dot{q}_1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{G} = g\begin{bmatrix} (m_1 \bar{l}_1 + m_2 l_1) c_1 + m_2 \bar{l}_2 c_{12} \\ m_2 \bar{l}_2 c_{12} \end{bmatrix}$$

$$\ddot{\boldsymbol{q}} = \begin{bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \end{bmatrix}, \dot{\boldsymbol{q}} = \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{bmatrix}, \boldsymbol{\tau} = \begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \end{bmatrix}$$

TRAYECTORIAS DEL BRAZO ROBOT DE 2GDL

Las trayectorias se definen modificando las convergencia de las variables de estado para este caso particular las variables $\emptyset$ y $\dot{\emptyset}$