Facultad de Ingeniería

Carrera de Ingeniería Electrónica
Carrera de Telecomunicaciones y Redes
Carrera de Ingeniería Mecatrónica

CURSO

Señales y Sistemas

TEMA

Procesos Aleatorios

Densidad Espectral de Potencia

PROFESOR

Ing. Christian del Carpio Damián

PROCESOS ALEATORIOS

CONCEPTO DEL PROCESO ALEATORIO

Una variable aleatoria "*X*" es, por definición, una función de los resultados posibles "*s* de un experimento, ahora será función tanto de s como del tiempo.

Se asigna a cada resultado s, de acuerdo con algún tipo de regla, una función del tiempo.

$$x(t,s)$$

El conjunto de todas las funciones, designada por *X(t,s)*, se denomina proceso aleatorio.

CONCEPTO DEL PROCESO ALEATORIO

- Un proceso aleatorio $X(t,s)$ representa un conjunto de funciones temporales cuando t y s son variables.
- Cada función temporal se denomina función muestra.
- Un proceso aleatorio también representa una sola función temporal cuando t es una variable y s se fija en un valor específico.
- Un proceso aleatorio también representa una variable aleatoria cuando se fija t y s se considera una variable.

ESTACIONARIEDAD

Un proceso aleatorio se dice que es estacionario si todas sus propiedades estadísticas **no cambian** con el tiempo.

Estacionaridad de primer orden

Un proceso aleatorio estacionario de primer orden implica que:

$$\boxed{f_X(x_1;t_1) = f_X(x_1;t_1+\Delta)}$$

ESTACIONARIEDAD

Estacionariedad de segundo orden y en sentido amplio

Un proceso aleatorio estacionario de segundo orden implica que:

$$f_X(x_1, x_2; t_1, t_2) = f_X(x_1, x_2; t_1 + \Delta, t_2 + \Delta)$$

Por lo tanto las medidas estadísticas de segundo orden permanecen invariantes en el tiempo si el intervalo de separación entre las variables permanecen constantes.

ESTACIONARIEDAD

Para estacionaridad de segundo orden se tiene

$$\boxed{R_{X_1X_2}(t_1,t_2) = R_{X_1X_2}(t_1,t_1+\tau) = R_{X_1X_2}(\tau)}$$

En forma general

$$\boxed{R_{XX}(\tau) = E[X(t)X(t+\tau)] = \overline{X(t)X(t+\tau)}}$$

ESTACIONARIEDAD

En un proceso aleatorio estacionario en el sentido amplio (WS) se cumple que:

$$E[X(t)] = \overline{X} = \text{constante}$$
$$E[X(t)X(t+\tau)] = R_{XX}(\tau)$$

Un proceso aleatorio estacionario de segundo orden es un proceso estacionario en el sentido amplio.

ESTACIONARIEDAD

Ejemplo 1

Demostrar que el proceso aleatorio

$$X(t) = A\cos(\omega_0 t + \Theta)$$

es estacionario en sentido amplio si suponemos que A y ω_o son constantes y Θ es variable aleatoriamente uniformemente distribuida en el intervalo $(0, 2\pi)$.

LA FUNCIÓN DE AUTOCORRELACIÓN

La función de autocorrelación de un proceso aleatorio $X(t)$ es la correlación E[$X_1 X_2$] de dos variables aleatorias $X_1 = X(t_1)$ y $X_2 = X(t_2)$ definidas para el proceso en los instantes t_1 y t_2

$$R_{XX}(t_1, t_2) = E[X(t_1)X(t_2)]$$

$$R_{XX}(t, t+\tau) = E[X(t)X(t+\tau)]$$

Para un proceso WS se tiene:

$$R_{XX}(\tau) = E[X(t)X(t+\tau)]$$

LA FUNCIÓN DE AUTOCORRELACIÓN

Propiedades de la autocorrelación

Para procesos WS, se tiene que:

(1) $|R_{XX}(\tau)| \leq R_{XX}(0)$

(2) $R_{XX}(-\tau) = R_{XX}(\tau)$

(3) $R_{XX}(0) = E[X^2(t)]$

(4) Si $E[X(t)]=\overline{X} \neq 0$ y $X(t)$ es ergódico con componentes no periódicos entonces

$$\lim_{|\tau| \to \infty} R_{XX}(\tau) = E[x]^2$$

LA FUNCIÓN DE AUTOCORRELACIÓN

Propiedades de la autocorrelación

Para procesos WS, se tiene que:

(5) Si X(t) tiene una componente periódica entonces $R_{XX}(\tau)$ tendrá una componente periódica con el mismo periodo

(6) Si X(t) es un proceso ergódico con valor medio igual a cero y no tiene componentes periódicas entonces

$$\lim_{|\tau|\to\infty} R_{XX}(\tau) = 0$$

(7) $R_{XX}(\tau)$ no puede tener forma arbitraria

LA FUNCIÓN DE AUTOCORRELACIÓN

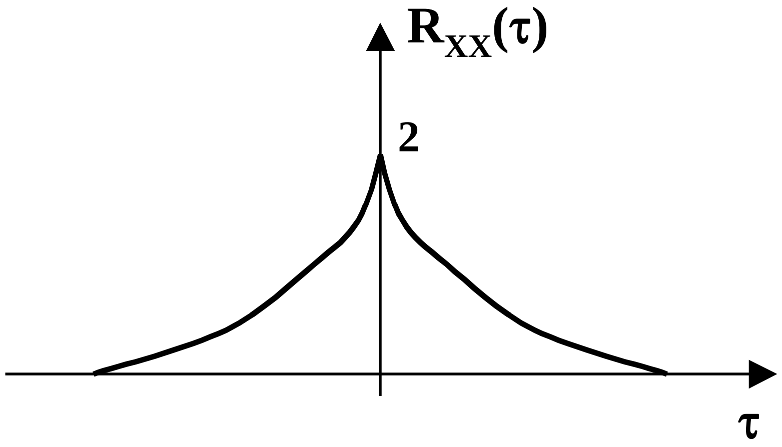
Se define el coeficiente de autocorrelación como:

$$\rho_{XX}(\tau) = \frac{R_{XX}(\tau)}{R_{XX}(0)}, \qquad -1 \leq \rho_{XX}(\tau) \leq 1$$

LA FUNCIÓN DE AUTOCORRELACIÓN

Ejemplo 2

Un proceso estacionario WS X(t) presente una función de autocorrelación de la siguiente figura. Si la varianza del proceso es igual a 0.25. Se pide graficar la media E[X(t)] en el tiempo.



LA FUNCIÓN DE AUTOCORRELACIÓN

Ejemplo 3

Dada la siguiente función de autocorrelación para un proceso ergódico estacionario con componentes no periódicas

$$R_{XX}(\tau) = 25 + \frac{4}{1+6\tau^2}$$

Halle la varianza del proceso.

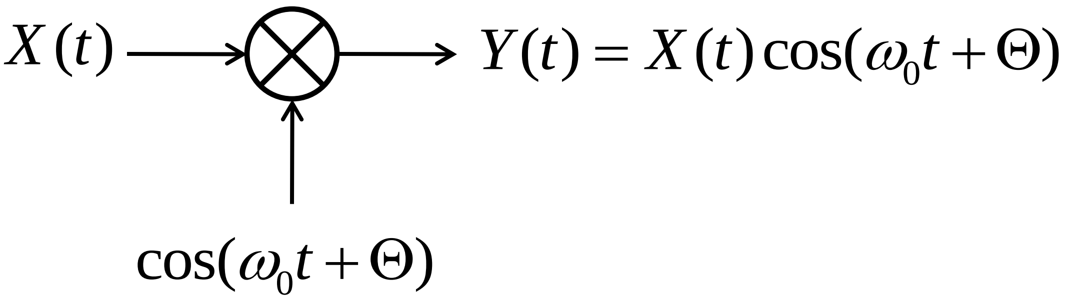
LA FUNCIÓN DE AUTOCORRELACIÓN

Ejemplo 4

Sea *X(t)* un proceso aleatorio estacionario WS con función de autocorrelación

$$R_{XX}(\tau) = e^{-a|\tau|} \;,\; \text{a>0 es cte}$$

Si se tiene la siguiente grafica, donde ω_o es una constante y Θ es una variable aleatoria uniforme en el intervalo (-π, π), que es estadísticamente independiente de *X(t)*. Determinar la función de autocorrelación de *Y(t)*



CORRELACIÓN CRUZADA

Si se tienen dos procesos aleatorios X(t) e Y(t), se dice que son estacionarios conjuntamente en sentido amplio si cada uno de ellos satisface individualmente la condición de proceso WS y su función de correlación cruzada es definida como

$$\boxed{R_{XY}(t_1,t_2)=E[X(t_1)Y(t_2)]}$$

Así mismo se puede reescribir como

$$\boxed{R_{XY}(t,t+\tau)=E[X(t)Y(t+\tau)]}$$

CORRELACIÓN CRUZADA

Entonces si X(t) e Y(t) son al menos conjuntamente estacionarios en sentido amplio, se tiene que

$$R_{XY}(\tau) = E[X(t)Y(t+\tau)]$$

CORRELACIÓN CRUZADA

Propiedades de la correlacion cruzada

(1) Si $R_{XY}(t,t+\tau)=0$

entonces X(t) e Y(t) se dice que son procesos ortogonales

(2) Si dos procesos son estadísticamente independientes, entonces

$$R_{XY}(t,t+\tau)=E[X(t)]E[Y(t+\tau)]$$

Si, además de ser independientes X(t) e Y(t) son al menos estacionarios en sentido amplio, entonces $R_{XY}(\tau)=\mathrm{E[X]E[Y]}$

PROCESOS ERGÓDICOS

Media Temporal

- Sea X(t) un proceso aleatorio
- Se define la media temporal como

$$\overline{x} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} x(t)dt$$

$$\overline{x} = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(n)$$

N: número de muestras

PROCESOS ERGÓDICOS

Valor cuadrático medio Temporal

- Sea X(t) un proceso aleatorio
- Se define el valor cuadrático medio temporal como

$$\overline{x^2} = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} x^2(t)\,dt$$

$$\overline{x^2} = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x^2(n)$$

N: número de muestras

PROCESOS ERGÓDICOS

Autocorrelación temporal

- Sea X(t) un proceso aleatorio
- Se define la función temporal de autocorrelación como

$$\square(\tau) = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} x(t) x(t+\tau) dt$$

$$\square(m) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(n) x(n+m)$$

PROCESOS ERGÓDICOS

Todos los promedios temporales son iguales a los correspondientes promedios estadísticos

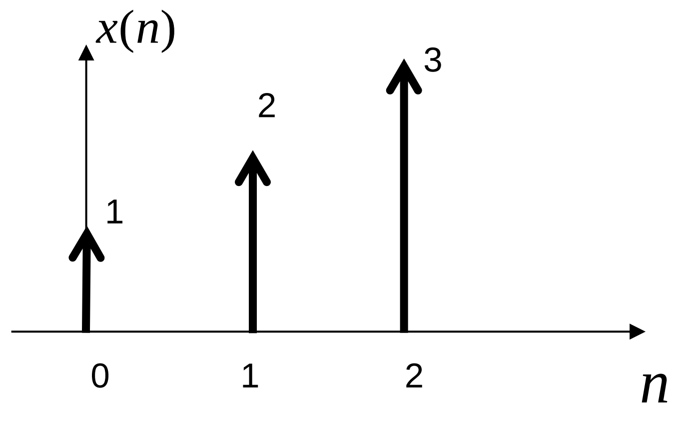
$$E[\overline{x}] = \overline{X}$$

$$E[\square\,(\tau)] = R_{XX}(\tau)$$

PROCESOS ERGÓDICOS

Ejemplo 5

Si se tiene la siguiente figura, hallar la autocorrelación temporal $R_{XX}(m)$



PROCESOS ERGÓDICOS

Ejemplo 6

Una señal X(t) es modelada como un proceso aleatorio ergódico de distribución uniforme en el rango [-5 15]. De acuerdo a ello se pide determinar la potencia media del proceso.

EL PROCESO ALEATORIO GAUSSIANO

$$f_X(x_1, x_2, ..., x_N; t_1, t_2, ..., t_N) = \frac{e^{\frac{-1}{2}[x-\bar{x}]^T [C_X]^{-1} [x-\bar{x}]}}{\sqrt{(2\pi)^N \,|[C_X]|}}$$

$$\left[x - \overline{\mathrm{X}}\right] = \begin{bmatrix} x_1 - \overline{X}_1 \\ x_2 - \overline{X}_2 \\ \cdot \\ x_n - \overline{X}_N \end{bmatrix}$$

$$[C_X] = \begin{bmatrix} \sigma^2_{X_1} & C_{X_1 X_2} & C_{X_1 X_N} \\ C_{X_2 X_1} & \sigma^2_{X_2} & \\ & & \\ C_{X_N X_1} & C_{X_N X_2} & \sigma^2_{X_N} \end{bmatrix}$$

EL PROCESO ALEATORIO GAUSSIANO

Varianza: si es alta, el proceso se despega mucho de la media.

Covarianza: alta correlación entre muestras representa alta covarianza

PROCESOS DETERMINÍSTICOS

Un proceso es determinístico si valores futuros de una **función muestra** pueden ser predecidos por valores pasados.

PROCESOS DETERMINÍSTICOS

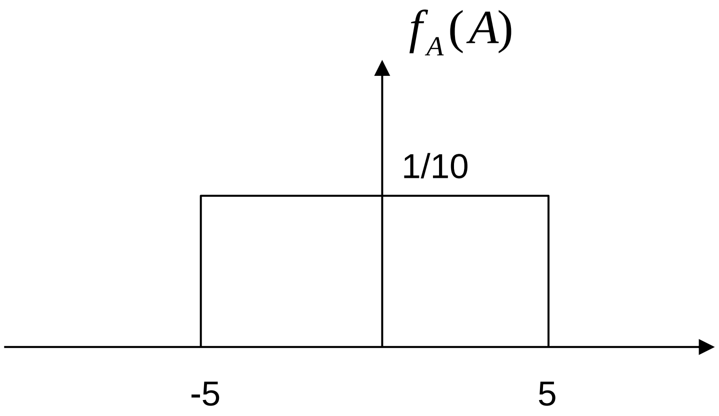
Ejemplo 7

El proceso aleatorio

$$X(t) = A\cos(\omega_0 t + \Theta)$$

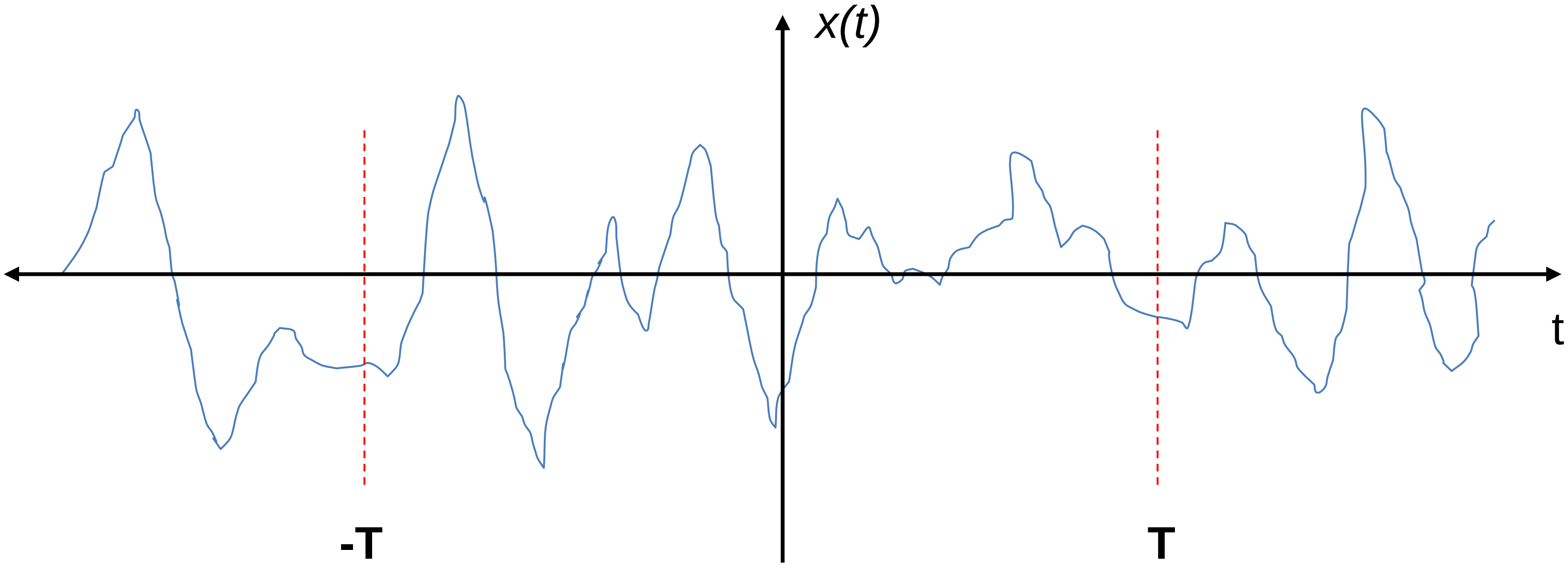
Ejemplo 8

Sea x(t)=A donde A es una v.a. con $f_A(A)$ de finido como:



DENSIDAD ESPECTRAL DE POTENCIA

DENSISDAD ESPECTRAL DE POTENCIA



$$x_T(t) = \begin{cases} x(t) & -T < t < T \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

DENSISDAD ESPECTRAL DE POTENCIA

La transformada de Fourier de $x_T(t)$ será

$$X_T(\omega) = \int_{-T}^{T} x_T(t) e^{-j\omega t} dt = \int_{-T}^{T} x(t) e^{-j\omega t} dt$$

La energía contenida en $x(t)$ en el intervalo $(-T, T)$

$$E(T) = \int_{-T}^{T} x_T^2(t) dt = \int_{-T}^{T} x^2(t) dt$$

Por el teorema de Parseval se tiene:

$$E(T) = \int_{-T}^{T} x^2(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} | X_T(\omega) |^2 d\omega$$

DENSISDAD ESPECTRAL DE POTENCIA

La potencia media *P(T)* de *x(t)* en el intervalo *(-T, T)* será

$$P(T) = \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} x^2(t)dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{|X_T(\omega)|^2}{2T} d\omega$$

La función anterior no representa la potencia de una función muestra completa

DENSISDAD ESPECTRAL DE POTENCIA

Potencia media

$$P_{XX} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} x^2(t)dt = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|X_T(\omega)|^2}{2T} d\omega$$

$$P_{XX} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \lim_{T\to\infty} \frac{|X_T(\omega)|^2}{2T} d\omega$$

$$S_{XX}(\omega) = \lim_{T\to\infty} \frac{|X_T(\omega)|^2}{2T}$$

DENSISDAD ESPECTRAL DE POTENCIA

Para procesos aleatorios, se tiene que:

$$P_{XX} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} E[x^2(t)]dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \lim_{T\to\infty} \frac{E[|X_T(\omega)|^2]}{2T} dt$$

Por tanto se tiene que:

$$\boxed{S_{XX}(\omega) = \lim_{T\to\infty} \frac{E[|X_T(\omega)|^2]}{2T}}$$

DENSISDAD ESPECTRAL DE POTENCIA

Propiedades de la DEP

(1) $S_{XX}(\omega) \geq 0$

(2) $\mathrm{S}_{XX}(\omega) = S_{XX}(-\omega)$ X(t) real

(3) $\mathrm{S}_{XX}(\omega)$ *es real*

(4) $$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S_{XX}(\omega)d\omega = E[X^2(t)] = R_{XX}(0) = P_{XX}$$

(5) $$P_{XX} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S_{XX}(\omega)d\omega = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} E[x^2(t)]dt$$

DENSISDAD ESPECTRAL DE POTENCIA

Para procesos WS, se tiene

$$P_{XX} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S_{XX}(\omega)d\omega = E\left[x^2(t)\right] = \overline{x^2} = R_{XX}(0)$$

$$R_{XX}(\tau) \quad \xrightarrow{F} \quad S_{XX}(\omega)$$

$$S_{XX}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{XX}(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau$$

$$R_{XX}(\tau) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S(\omega)e^{j\omega\tau}d\omega$$

DENSISDAD ESPECTRAL DE POTENCIA

Ejemplo 8

Para

$$X(t) = A\cos(\omega_0 t + \Theta)$$

Donde Θ es variable aleatoriamente uniformemente distribuida en el intervalo (0, 2π). Determinar la DEP del proceso

PROCESO ALEATORIO BLANCO

Una función muestra *n(t)* de un proceso aleatorio de ruido estacionario en sentido amplio *N(t)* se denomina **ruido blanco** si la DEP de *N(t)* es una constante a todas las frecuencias. Por tanto se tiene

$$\boxed{S_{NN}(\omega) = N_0 / 2}$$

PROCESO ALEATORIO BLANCO – pasa bajas

$$\mathrm{R}_{nn}(\tau) = N_0 B \frac{sen\left(2\pi B\tau\right)}{2\pi B\tau}$$

$$\mathrm{P}_{nn} = \frac{\frac{N_0}{2}\left(4\pi B\right)}{2\pi} = N_0 B$$

B es el ancho de banda en Hz

PROCESO ALEATORIO BLANCO – pasa banda

$$\mathrm{R}_{nn}(\tau) = N_0 B \frac{sen\left(\pi B\tau\right)}{\pi B\tau} \cos(\omega\tau)$$

$$\mathrm{P}_{nn} = N_0 B$$

B es el ancho de banda en Hz

DENSIDAD ESPECTRAL DE POTENCIA ENTRADA/SALIDA

Sistema Lineal

$$X(t) \longrightarrow \boxed{H(\omega)} \longrightarrow Y(t)$$

Proceso Aleatorio entrada

Proceso Aleatorio salida

Sistema Lineal

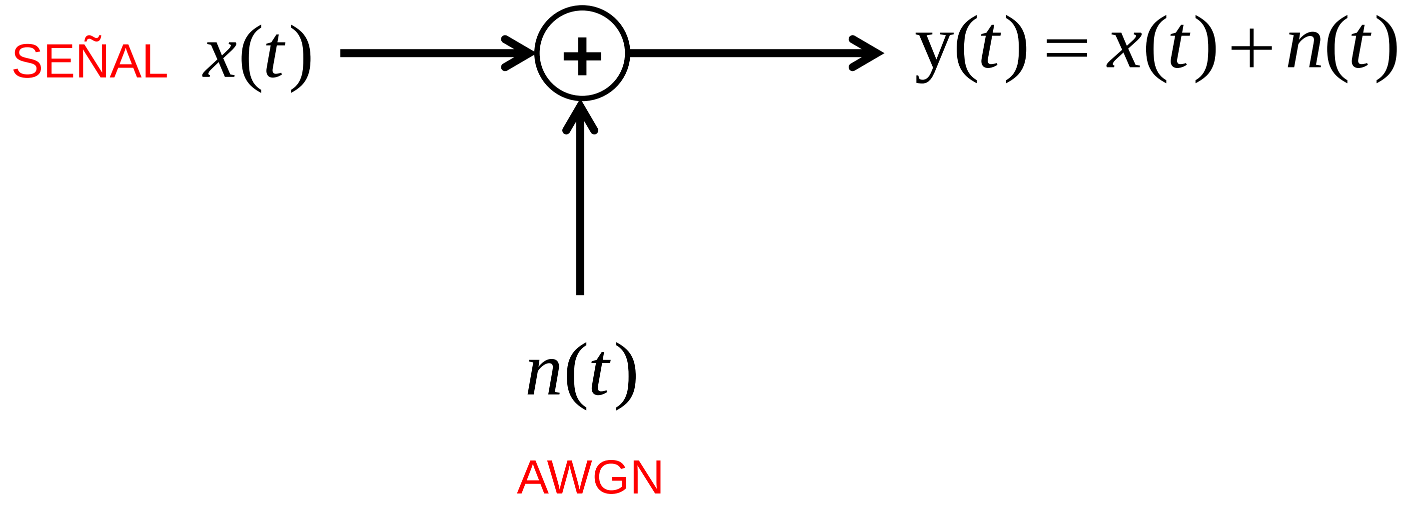
$$S_{XX}(\omega) \longrightarrow \boxed{H(\omega)} \longrightarrow S_{YY}(\omega)$$

DENSIDAD ESPECTRAL DE POTENCIA ENTRADA/SALIDA

$$S_{YY}(\omega) = \left| H(\omega) \right|^2 S_{XX}(\omega)$$

Additive White Gaussian Noise (AWGN)

$$\boxed{y(t) = x(t) + n(t)}$$



Se asume en la mayoría de los casos como siendo *WS*

Relación Señal / Ruido
SNR (Signal to Noise Ratio)

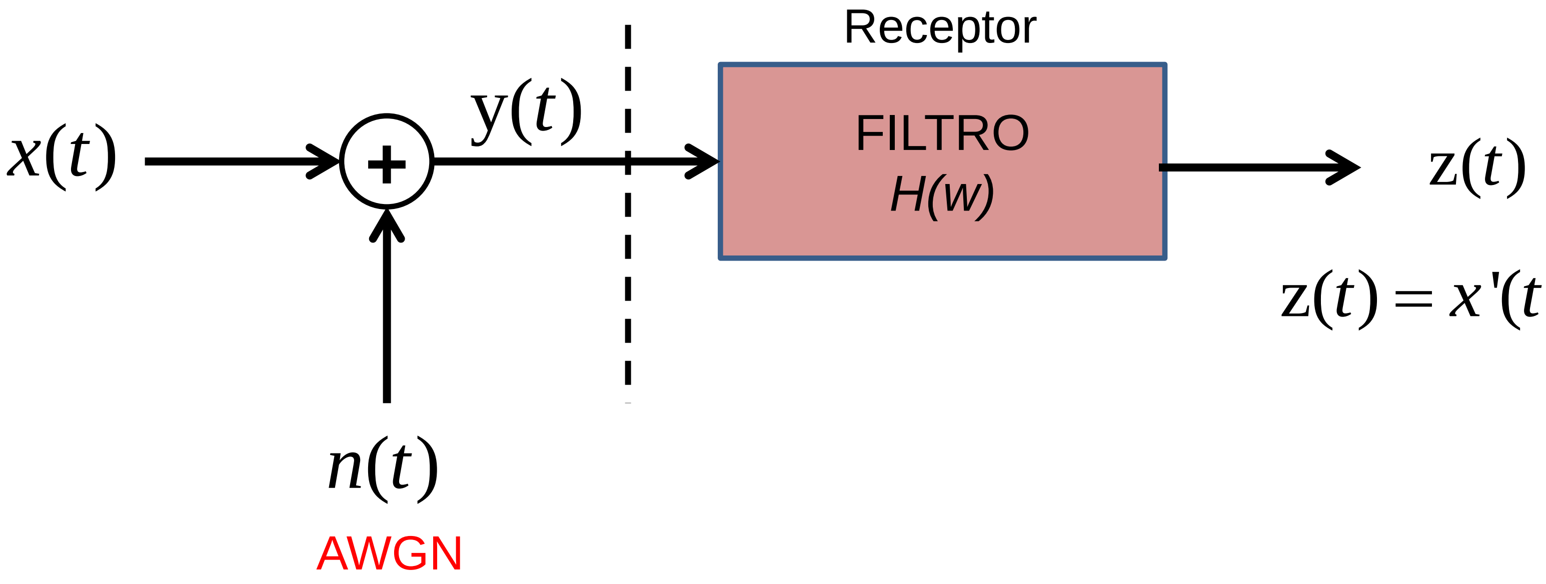
$$SNR_{dB} = 10\log 10\left(\frac{P_{XX}}{P_{nn}}\right)$$

$$P_{XX} \quad : Potencia\ de\ la\ señal$$

$$P_{nn} \quad : Potencia\ del\ Ruido$$

Relación Señal / Ruido

SNR (Signal to Noise Ratio)



$$z(t) = x'(t) + n'(t)$$

FUENTE:

PEYTON Z. PEEBLES, Jr. “Principios de probabilidad, variables aleatorias y señales aleatorias” McGraw-Hill/INTERAMERICANA DE ESPAÑA, 4ª ed., 2006