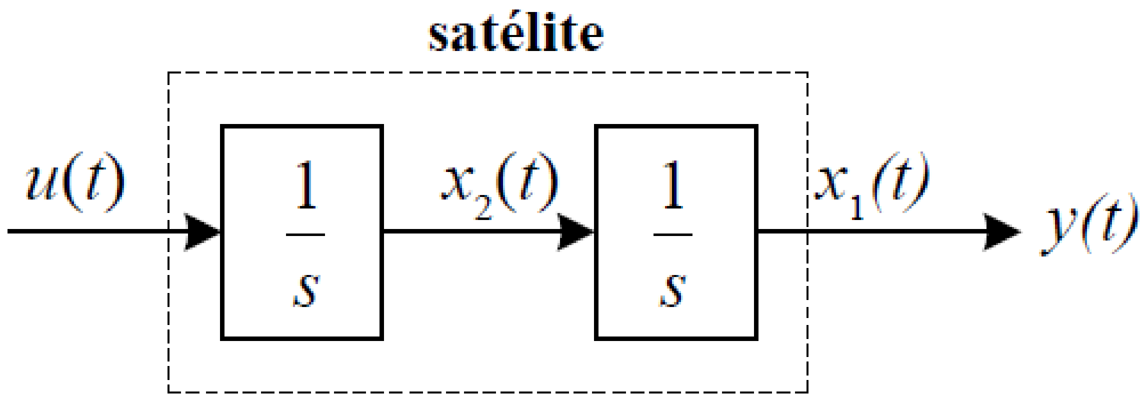
INGENIERÍA DE CONTROL 2

Sesión 7

Ejemplo. Se tiene la planta



Diseñar un observador para la planta.

La posición de las raíces que garantizan la respuesta deseada del observador son:

$$\mu_1 = -10 \qquad \text{y} \qquad \mu_2 = -10$$

Solución.

Se analiza la matriz de observabilidad

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CA} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$|\mathbf{V}| \neq 0$ – no singular $\rightarrow$ la planta es observable.

La ec. característica de la planta viene dada por

$$\Delta_0(s) = |s\mathbf{I} - \mathbf{A}| = \begin{vmatrix} s & -1 \\ 0 & s \end{vmatrix} = s^2 \quad ;$$

$$a_0 = 0$$
$$a_1 = 0$$

La ec. característica deseada será

$$\Delta_d(s) = (s+10)(s+10) = s^2 + 20s + 100$$

$$\alpha_0 = 100$$
$$\alpha_1 = 20$$

De donde

$$K'_{e1} = 100 - 0 = 100$$
$$K'_{e2} = 20 - 0 = 20$$

cont.

Los valores de las ganancias de realimentación que se deben implementar en el observador son:

$$\mathbf{K}_e = \mathbf{Q}\mathbf{K}'_e$$

$$\mathbf{Q} = (\mathbf{MV})^{-1} = \left(\begin{bmatrix} a_1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CA} \end{bmatrix} \right)^{-1}$$

$$= \left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right)^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

de donde

$$\mathbf{K}_e = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 100 \\ 20 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 \\ 100 \end{bmatrix}$$

Implementación del Observador

El modelo de estado de una planta viene dado por

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}u(t)$$
$$y(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t)$$

Para el ejemplo dado

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$$

Implementación del Observador

El modelo de estado del observador viene dado por

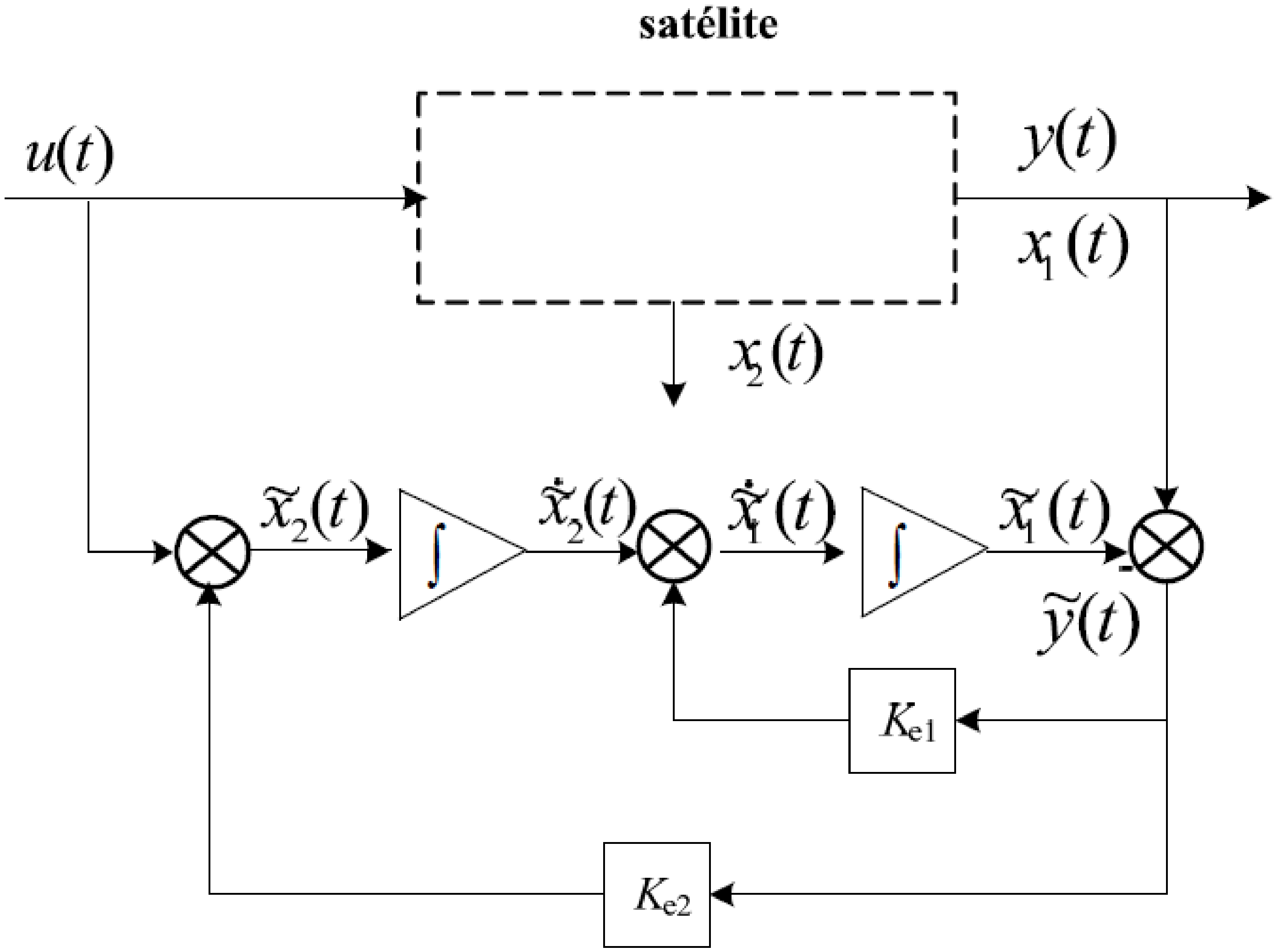
$$\dot{\tilde{\mathbf{x}}}(\mathbf{t}) = \mathbf{A}\tilde{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{B}u(t) + \mathbf{K}_e\left(y - \tilde{y}\right)$$

Para el ejemplo dado

$$\begin{bmatrix} \dot{\tilde{x}}_1(t) \\ \dot{\tilde{x}}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x}_1(t) \\ \tilde{x}_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) + \begin{bmatrix} K_{e1} \\ K_{e2} \end{bmatrix} \left[y(t) - \tilde{y}(t) \right]$$

$$\tilde{y}(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x}_1(t) \\ \tilde{x}_2(t) \end{bmatrix}$$

Se obtiene el diagrama de simulación



DISEÑO DE SISTEMAS DE SEGUIMIENTO

INTRODUCCIÓN

En el problema seguimiento, el sistema tiene una entrada de referencia y la salida del sistema deberá ser igual a esta, es decir la salida del sistema deberá seguir a la entrada de referencia.

Se estudiaran dos casos:

- cuando la planta contiene un integrador y
- cuando la planta no contiene integrador

3.6 SISTEMA DE SEGUIMIENTO CUANDO LA PLANTA TIENE UN INTEGRADOR

Dada la planta

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}u(t) \qquad (1)$$

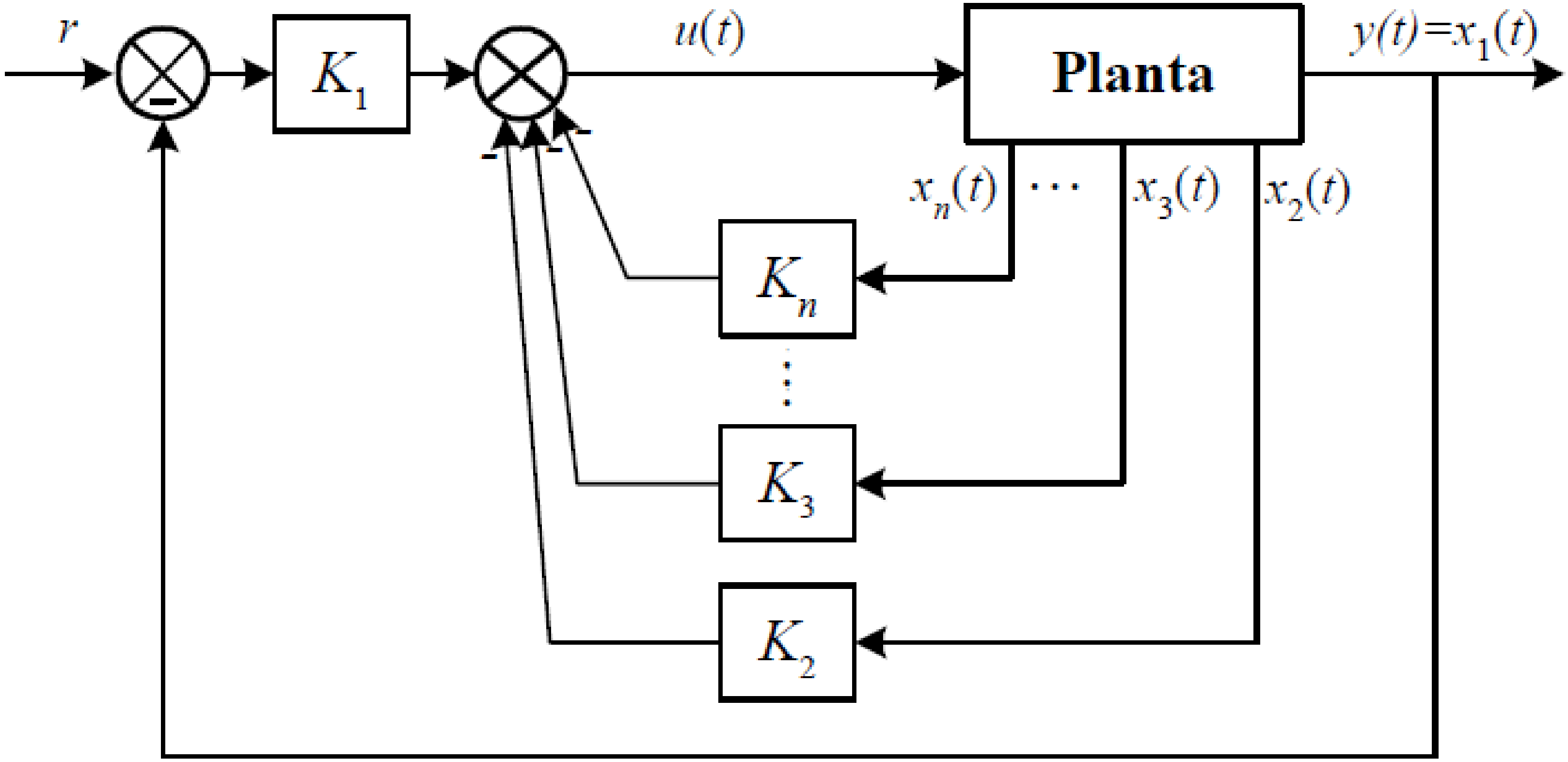
$$y(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) \qquad (2)$$

En la fig. se supone que, $y(t)=x_1(t)$. La entrada, r – escalón. La variable de control obtenida al aplicar realimentación de estado es,

$$u(t) = -\begin{bmatrix} 0 & K_2 & K_3 & \dots & K_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix} + K_1\left[r - x_1(t)\right]$$

ESTRUCTURA DEL SS

Al aplicar la ley de control en el sistema se obtiene



SS CUANDO LA PLANTA TIENE UN INTEGRADOR

Es decir

$$u(t) = -\mathbf{K}\mathbf{x}(t) + K_1 r \qquad (3)$$

Si r se aplica en t=0, reemplazando (3) en (1)

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = (\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K})\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}K_1 r \qquad (4)$$

El sistema diseñado deberá ser asintóticamente estable, la variable de salida $y(\infty)$ deberá tender a r (valor constante) y la variable $u(\infty)$ deberá tender a cero.

En estado estable

$$\dot{\mathbf{x}}(\infty) = (\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K})\mathbf{x}(\infty) + \mathbf{B}K_1 r \qquad (5)$$

ECUACIÓN DEL ERROR

Tomando en cuenta que $r(\infty) = r$, operando (4) - (5)

$$\dot{\mathbf{x}}(t) - \dot{\mathbf{x}}(\infty) = (\mathbf{A} - \mathbf{BK})[\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}(\infty)] \qquad (6)$$

definiendo

$$\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}(\infty) = \mathbf{e}(t)$$

De donde (6) se convierte en

$$\dot{\mathbf{e}}(t) = (\mathbf{A} - \mathbf{BK})\mathbf{e}(t)$$

El diseño de un sistema de seguimiento se convierte en el diseño de un sistema regulador asintóticamente estable, tal que $\mathbf{e}(t) \rightarrow 0$, dada cualquier condición inicial $\mathbf{e}(0)$.

ECUACIÓN CARACTERÍSITCA

La ec. característica del sistema de lazo cerrado es

$$\Delta_c(\mathrm{s}) = \left| s\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{BK} \right| = 0 \qquad (7)$$

Aquí, **K** se calcula de tal manera que las raíces de $\Delta_c(\mathrm{s})$ se encuentren en las posiciones deseadas.

Si la respuesta del error requiere que las raíces de se ubiquen en $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$; entonces la ec. característica deseada es

$$\Delta_d(s) = (s-\mu_1)(s-\mu_2)\ldots(s-\mu_n) = 0 \qquad (8)$$

DISEÑO DE UN SISTEMA DE SEGUIMIENTO

El diseño de un sistema de seguimiento equivale al diseño de un sistema regulador estable de n-ésimo orden.

METODOLOGÍA 1

Considere una planta: $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}u(t)$ (1)

y la señal de control : $u(t) = -\mathbf{K}\mathbf{x}(t) + K_1 r$ (3)

La ec. caracteristica deseada:

$$\Delta_d(s) = (s - \mu_1)(s - \mu_2)\ldots(s - \mu_n) = 0 \qquad (8)$$

Solución

- Analizar la controlabilidad de la planta: rango(**S**)=n
- Determinar: $\Delta(\mathrm{s}) = \mathrm{s}^n + a_{n-1}\mathrm{s}^{n-1} + \ldots + a_1\mathrm{s} + a_0 = 0$
- Expandir (8): $\Delta_d(s) = s^n + \alpha_{n-1}s^{n-1} + \ldots + \alpha_1 s + \alpha_0 = 0$
- Hallar: $K_i^* = \alpha_{i-1} - a_{i-1},$ $i = 1,2,\ldots n$
- Determinar para la planta original

$$\mathbf{K} = \mathbf{K}^*\mathbf{P}^{-1}$$

METODOLOGÍA 2

Considere una planta: $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}u(t)$ (1)

y la señal de control : $u(t) = -\mathbf{K}\mathbf{x}(t) + K_1 r$ (3)

La ec. caracteristica deseada:

$$\Delta_d(s) = (s-\mu_1)(s-\mu_2)\ldots(s-\mu_n) = 0 \qquad (8)$$

Solución

- Analizar la controlabilidad de la planta: rango(**S**)=n
- Expandir (8): $\Delta_d(s) = s^n + \alpha_{n-1}s^{n-1} + \ldots + \alpha_1 s + \alpha_0 = 0$
- Determinar **K** empleando la **Formula de Ackermman**

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{AB} & \ldots & \mathbf{A}^{n-2}\mathbf{B} & \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B} \end{bmatrix}^{-1} \Delta_d(\mathbf{A})$$

METODOLOGÍA 2 (cont.)

donde $\boldsymbol{\Delta}_d(\mathbf{A})$, representa la matriz polinomial

$$\boldsymbol{\Delta}_d(\mathbf{A}) = \mathbf{A}^n + \alpha_{n-1}\mathbf{A}^{n-1} + \ldots + \alpha_1\mathbf{A} + \alpha_0\mathbf{I}$$

SELECCIÓN DE LAS RAÍCES DE LA ECUACIÓN CARACTERÍSTICA DESEADA

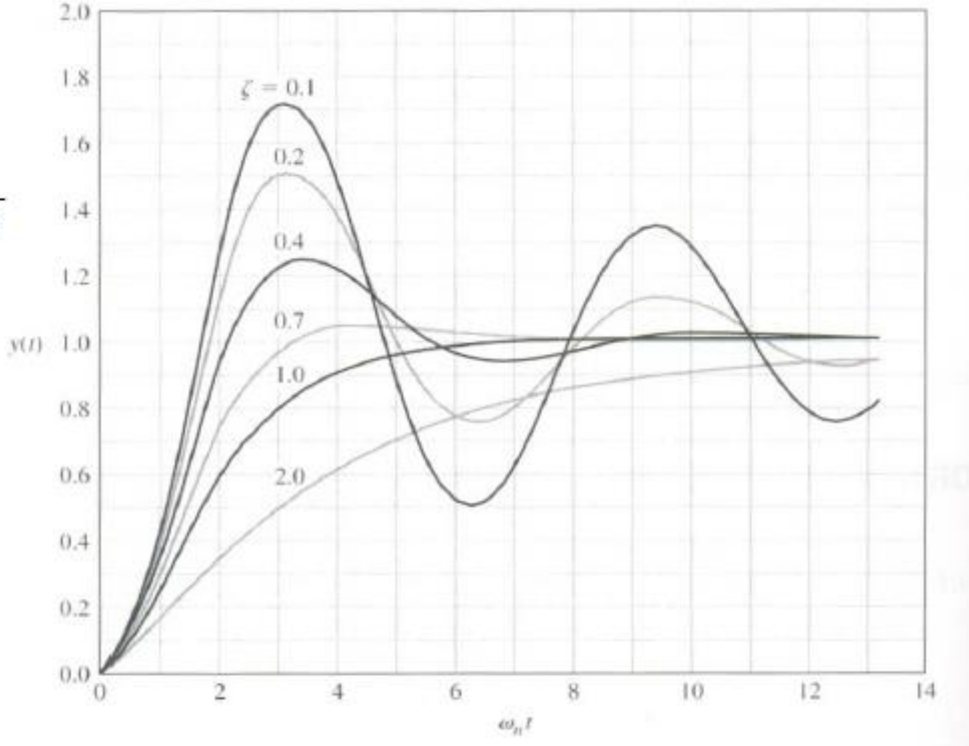
La selección de las posiciones de las raíces deseadas, se puede realizar empleando la siguiente técnica:

- **En base a polos dominantes.**

$$s_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm j\omega_n \sqrt{1-\zeta^2}$$

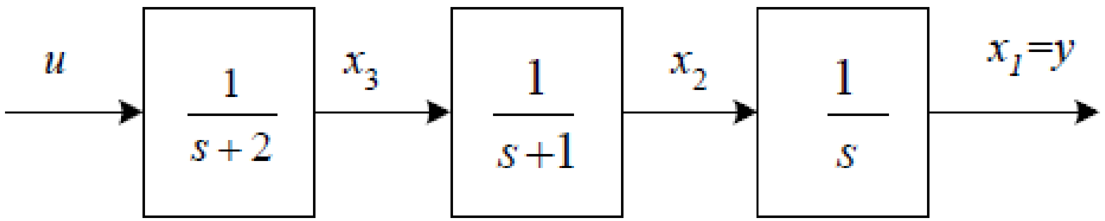
$$T_{es} \approx \frac{4}{\zeta\omega_n}$$

$$m_p\% = 100\, e^{-\pi\zeta/\sqrt{1-\zeta^2}}$$



Ejemplo.- Sistema de Seguimiento cuando la planta tiene integrador

Se muestra el diagrama de bloques de una planta



La respuesta en el tiempo del sistema debe de alcanzar una señal de referencia escalón en un tiempo menor a 2.5 seg. y con un sobreimpulso menor al 20%.

Solución

El modelo de estado de la planta viene dado por

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

y la ec. de salida

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix}$$

Solución

Se analiza la controlabilidad del sistema

$$\mathbf{S} = [\mathbf{B}\ \ \mathbf{AB}\ \ \mathbf{A}^2\mathbf{B}]$$

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \\ 1 & -2 & 4 \end{bmatrix}$$

Verificando

rango $(\mathbf{S}) = 3$, el sistema es controlable.

Solución

La ec. característica de la planta viene dada por

$$\Delta(s) = \begin{vmatrix} s & -1 & 0 \\ 0 & s+1 & -1 \\ 0 & 0 & s+2 \end{vmatrix} = s^3 + 3s^2 + 2s = 0 \quad ; \qquad \begin{array}{l} a_0 = 0 \\ a_1 = 2 \\ a_2 = 3 \end{array}$$

Las raíces de la ec. característica que permiten una respuesta deseada cuando la señal de entrada es un escalón, se obtienen empleando:

$$T_{es} \approx \frac{4}{\zeta\omega_n} \leq 2.5 \qquad\qquad m_p\% = 100\, e^{-\pi\zeta/\sqrt{1-\zeta^2}}$$

de donde:

$$\zeta \approx 0.5 \qquad\qquad \omega_n \approx 4$$

Solución

Las raíces de la ec. característica que permiten una respuesta deseada cuando la señal de entrada es un escalón son

$$\lambda_1 = -2 + j2\sqrt{3}$$
$$\lambda_2 = -2 - j2\sqrt{3}$$
$$\lambda_3 = -10$$

La ec. característica deseada será

$$\Delta_d(s) = (s + 2 - j2\sqrt{3})(s + 2 + j2\sqrt{3})(s + 10) =$$

$$\Delta_d(s) = s^3 + 14s^2 + 56s + 160 = 0 \quad ;$$

$$\alpha_0 = 160$$
$$\alpha_1 = 56$$
$$\alpha_2 = 14$$

cont.

De donde

$$K_1^* = 160 - 0 = 160$$

$$K_2^* = 56 - 2 = 54$$

$$K_3^* = 14 - 3 = 11$$

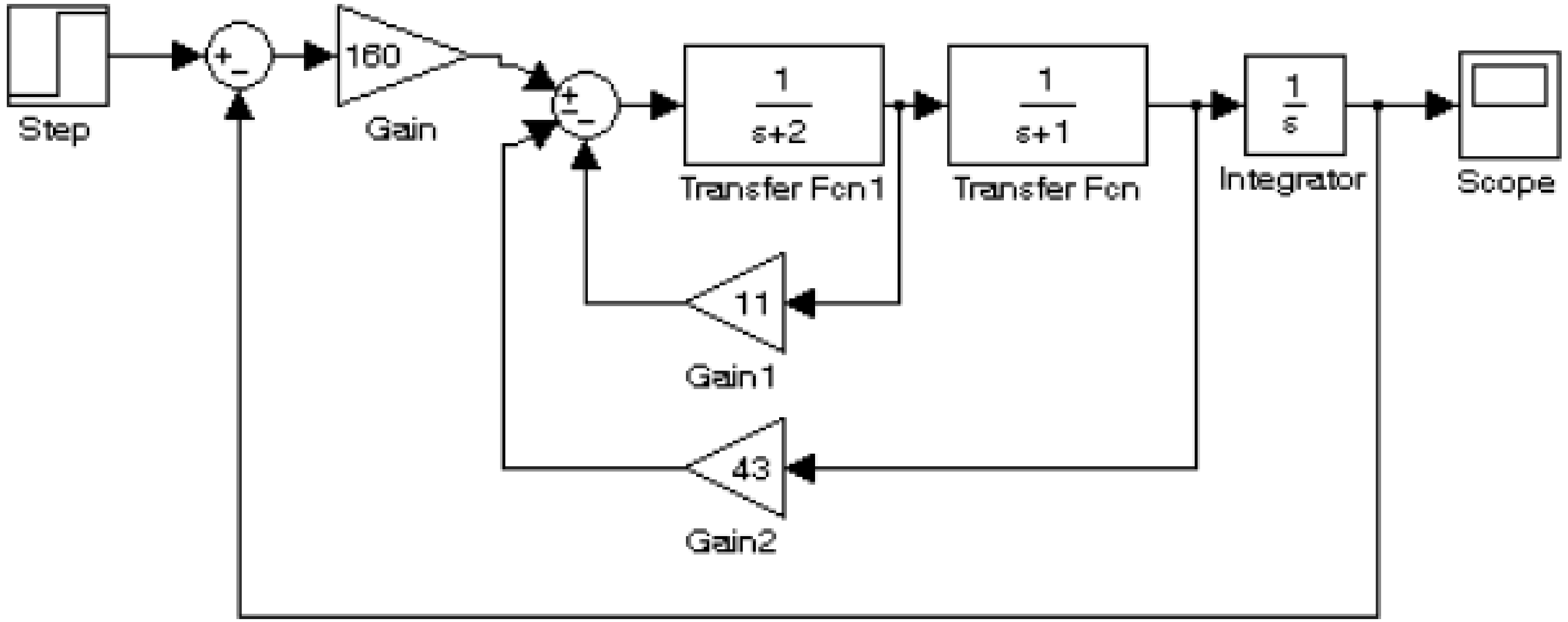
Los valores de las ganancias de realimentación que se deben implementar en la planta son:

$$\mathbf{K} = \mathbf{K}^*\mathbf{P}^{-1} = \begin{bmatrix} 160 & 54 & 11 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 160 & 43 & 11 \end{bmatrix}$$

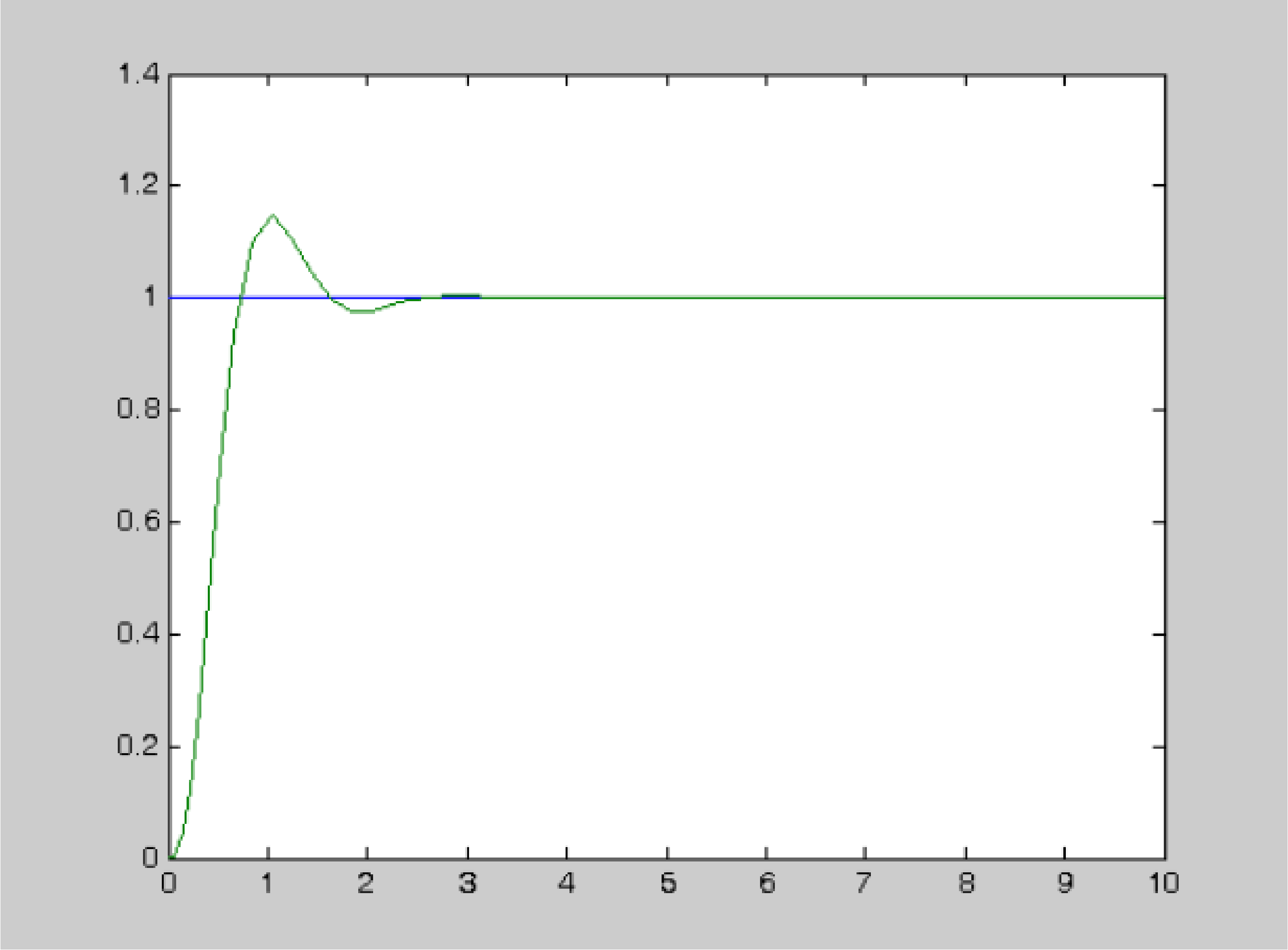
Diagrama solución

La respuesta del sistema con realimentación de estados, se muestra en la figura,



Respuesta en el Tiempo de y(t)

La respuesta del sistema a un escalón viene dada por



3.7 SISTEMA DE SEGUIMIENTO CUANDO LA PLANTA NO TIENE INTEGRADOR

En este caso. El principio de diseño consiste en insertar un integrador (ver figura). De donde

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}u(t) \qquad (1)$$

$$y(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) \qquad (2)$$

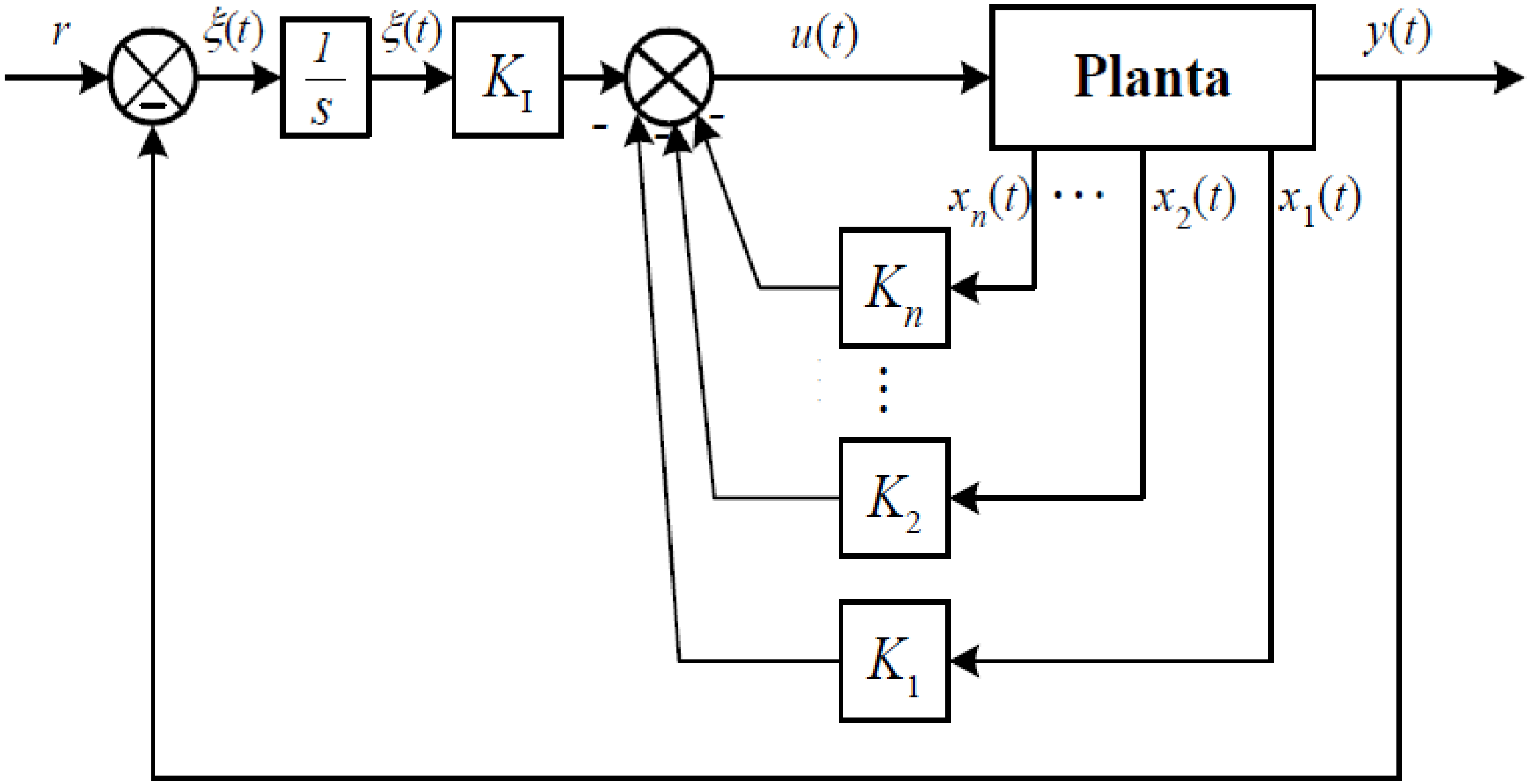
$$u(t) = -\mathbf{K}\mathbf{x}(t) + K_1\xi(t)$$

$$\dot{\xi}(t) = r - y(t) = r - \mathbf{C}\mathbf{x}(t) \qquad (3)$$

De (1) y (3)

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}}(t) \\ \dot{\xi}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{C} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}(t) \\ \xi(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{B} \\ 0 \end{bmatrix} u(t) + \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ 1 \end{bmatrix} r$$

ESTRUCTURA DEL SS



SS CUANDO LA PLANTA NO TIENE INTEGRADOR

Se diseña un sistema asintóticamente estable.

En estado estable $\dot{\xi}(t)=0$, asimismo $y(\infty)=r$.

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}}(\infty) \\ \dot{\xi}(\infty) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{C} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}(\infty) \\ \xi(\infty) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{B} \\ 0 \end{bmatrix} u(\infty) + \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ 1 \end{bmatrix} r(\infty)$$

Considerando que $r(\mathrm{t})$ es una entrada escalón, se tiene

$r(\infty)=r(\mathrm{t})=r$, para $t>0$.

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}}(\mathrm{t})-\dot{\mathbf{x}}(\infty) \\ \dot{\xi}(\mathrm{t})-\dot{\xi}(\infty) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{C} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}(\mathrm{t})-\mathbf{x}(\infty) \\ \xi(\mathrm{t})-\xi(\infty) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{B} \\ 0 \end{bmatrix} \left[u(\mathrm{t})-u(\infty)\right] \quad (4)$$

SS CUANDO LA PLANTA NO TIENE INTEGRADOR

Definiendo

$$\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}(\infty) = \mathbf{x}_e(t)$$

$$\xi(t) - \xi(\infty) = \xi_e(t)$$

$$u(t) - u(\infty) = u_e(t)$$

y reemplazando en (4) se tiene

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}}_e(t) \\ \dot{\xi}_e(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{C} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_e(t) \\ \xi_e(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{B} \\ 0 \end{bmatrix} u_e(t) \qquad (4')$$

en donde

$$u_e(t) = -\mathbf{K}\mathbf{x}_e(t) + K_1\xi_e(t) \qquad (5)$$

ECUACIÓN DEL ERROR

Se define un nuevo vector de error $\mathbf{e}(t)$ $(n+1)$ –ésimo orden mediante

$$\mathbf{e}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_e(t) \\ \xi_e(t) \end{bmatrix}$$

ECUACIÓN DEL ERROR

Así de la ecuación (4´)

$$\dot{\mathbf{e}}(t) = \hat{\mathbf{A}}\,\mathbf{e}(t) + \hat{\mathbf{B}}\,u_e(t) \qquad (6)$$

en donde

$$\hat{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{C} & 0 \end{bmatrix} \qquad \hat{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} \mathbf{B} \\ 0 \end{bmatrix}$$

y la ec. (5) se convierte en

$$u_e(t) = -\hat{\mathbf{K}}\mathbf{e}(t) \qquad (5´)$$

ECUACIÓN DEL ERROR

En donde

$$\hat{\mathbf{K}} = [\mathbf{K} \;\; K_{\mathrm{I}}]$$

La ec. del error se obtiene sustituyendo (5´) en (6)

$$\dot{\mathbf{e}}(t) = (\hat{\mathbf{A}} - \hat{\mathbf{B}}\hat{\mathbf{K}})\mathbf{e}(t)$$

El diseño de un sistema de seguimiento de tipo1, equivale a diseñar un sistema regulador estable de $(n+1)$ –ésimo orden, tal que el nuevo vector $\mathbf{e}(t) \rightarrow 0$ dada cualquier c.i.

ECUACIÓN CARACTERÍSITCA

La ec. característica del sistema de lazo cerrado es

$$\Delta_c(s) = \left| s\mathbf{I} - \hat{\mathbf{A}} + \hat{\mathbf{B}}\hat{\mathbf{K}} \right| = 0 \qquad (7)$$

Aquí, $\hat{\mathbf{K}}$ (que incluye el vector de ganancias $\mathbf{K}$ y la ganancia integral K_{I}) se calcula de tal manera que las raíces de Δ_c(s) se encuentren en las posiciones deseadas.

Si la respuesta del error requiere que las raíces de $\Delta_c(s)$ se ubiquen en $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{n+1}$; entonces la ec. característica deseada es

$$\Delta_d(s) = (s - \lambda_1)(s - \lambda_2)\ldots(s - \lambda_{n+1}) = 0 \qquad (8)$$

DISEÑO DE UN SISTEMA DE SEGUIMIENTO

El diseño de un sistema de seguimiento equivale al diseño de un sistema regulador estable de (n+1)-ésimo orden.

METODOLOGÍA 2

Considere una planta : $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}u(t)$ (1)

y la señal de control : $u(t) = -\hat{\mathbf{K}}\mathbf{x}(t)$ (3)

La ec. característica deseada:

$$\Delta_d(s) = (s-\lambda_1)(s-\lambda_2)\ldots(s-\lambda_{n+1}) = 0 \qquad (8)$$

Solución

- Analizar la controlabilidad del sistema: rango(**P**)=n+1

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ -\mathbf{C} & 0 \end{bmatrix}$$

- Expandir (8): $\Delta_d(s) = s^{n+1} + \alpha_n s^n + \ldots + \alpha_1 s + \alpha_0 = 0$

METODOLOGÍA 2

- Determinar **K** empleando la **Formula de Ackermman**

$$\hat{\mathbf{K}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{B}} & \hat{\mathbf{A}}\hat{\mathbf{B}} & \dots & \hat{\mathbf{A}}^{n-1}\hat{\mathbf{B}} & \hat{\mathbf{A}}^{n}\hat{\mathbf{B}} \end{bmatrix}^{-1} \boldsymbol{\Delta}_d(\hat{\mathbf{A}})$$

donde $\boldsymbol{\Delta}_d(\mathbf{A})$, representa la matriz polinomial

$$\boldsymbol{\Delta}_d(\hat{\mathbf{A}}) = \hat{\mathbf{A}}^{n+1} + \alpha_n \hat{\mathbf{A}}^{n} + \dots + \alpha_1 \hat{\mathbf{A}} + \alpha_0 \mathbf{I}$$

SELECCIÓN DE LAS RAÍCES DE LA ECUACIÓN CARACTERÍSTICA DESEADA

La selección de las posiciones de las raíces deseadas, se puede realizar empleando alguna de las siguientes técnicas:

- **En base a polos dominantes.**

$$s_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$$

$$T_{es} \approx \frac{4}{\zeta\omega_n}$$

$$m_p\% = 100\, e^{-\pi\zeta/\sqrt{1-\zeta^2}}$$