Análisis de Fourier: SERIE DE FOURIER

- Derivada generalizada en la serie de Fourier
- De la serie a la transformada de Fourier.
- Transformada de Fourier y transformada inversa de Fourier.

LA DERIVADA GENERALIZADA

La derivada generalizada de una función contínua por intervalos y diferenciable, con discontinuidades súbitas, es la derivada ordinaria donde ésta existe, mas la suma de las funciones impulsos en las discontinuidades, multiplicadas por la magnitud de los cambios.

Dada esta gráfica

graficar la derivada.

usando la serie compleja de Fourier (es lo recomendable)

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega_0 t} \quad ; \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{2} = \pi$$

$$c_n = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t).e^{-jn\pi t}.dt = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} f(t).e^{-jn\pi t}.dt$$

$$c_n = \frac{1}{2}\int_{1/2}^{3/2} f(t)\, e^{-jn\pi t}\, dt = \frac{1}{2}\left[\int_{-1/2}^{1/2} -1\delta(t-0).e^{-jn\pi t}\, dt + \int_{1/2}^{3/2} +1\delta(t-1).e^{-jn\pi t}\, dt\right]$$

$$= e^{-jn\pi 0} + e^{-jn\pi 1}$$

$$\boxed{c_n = \frac{1}{2}\left[-1 + (-1)^n\right]}$$

La serie de Fourier es: $f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\pi t}$

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2}\left[-1 + (-1)^n\right] e^{jn\pi t} \text{ (Rpta).}$$

$$f(t) = \overset{n=0}{0} + \left(-e^{j\pi t}_{n=1} - e^{-j\pi t}_{n=-1}\right) + \overset{n=2}{\overset{n=-2}{0}} + \left(-e^{3j\pi t}_{n=3} - e^{-3j\pi t}_{n=-3}\right) + \overset{n=4}{\overset{n=-4}{0}} + \left(-e^{5j\pi t}_{n=5} - e^{-5j\pi t}_{n=-5}\right) + \dots$$

$$f(t) = -\underbrace{\left(e^{j\pi t} + e^{-j\pi t}\right)}_{2\cos(\pi t)} - \underbrace{\left(e^{3j\pi t} + e^{-3j\pi t}\right)}_{2\cos(3\pi t)} - \underbrace{\left(e^{5j\pi t} + e^{-5j\pi t}\right)}_{2\cos 5\pi t} + \dots$$

$$f(t) = -2\left[\cos \pi t + \cos 3\pi t + \cos 5\pi t + \dots\right] \text{ (Rpta)}$$

$$e^{\pm jn\pi} = (-1)^n$$

Propiedades del Delta Dirac:

Considerando $a \le t_0 \le b$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) = 1$$

$$\int_{a}^{b} \delta(t - t_0)dt = 1$$

$$* \quad \int_{a}^{b} f(t)\delta(t - t_0)dt = f(t_0)$$

Derivada generalizada en la serie de Fourier

Ejemplo 2: Dada la señal $f(t)$ en el periodo fundamental T=4

a. Halle la serie de Fourier para $f'(t)$

b. A partir de a) obtener la serie compleja de Fourier de $f(t)$

Hallemos la gráfica de f'(t):

forma compleja de Fourier (lo mas recomendable)

la serie de $f'(t)$: $\quad f'(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} d_n \cdot e^{jn\omega_0 t}$ ...(*)

$* \; T = 4$

$\omega_0 = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$.

$$d_n = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f'(t) \cdot e^{-jn\frac{\pi}{2}t}\, dt = \frac{1}{4}\int_{-2}^{2} f'(t)\, e^{-jn\frac{\pi}{2}t}\, dt$$

$$d_n = \frac{1}{4}\left[\int_{-2}^{-1/2} 3\delta(t+1) \cdot e^{-jn\frac{\pi}{2}t}\, dt + \int_{-1/2}^{1/2} -2\,\delta(t-0) \cdot e^{-jn\frac{\pi}{2}t}\, dt + \int_{1/2}^{2} -1\,\delta(t-1) \cdot e^{-jn\frac{\pi}{2}t}\, dt\right]$$

$$d_n = \frac{1}{4}\left[3e^{-jn\frac{\pi}{2}(-1)} + -2e^{-jn\frac{\pi}{2}(0)} + -1e^{-jn\frac{\pi}{2}(1)}\right]$$

$$d_n = \frac{1}{4}\left[3e^{jn\frac{\pi}{2}} - 2 - e^{-jn\frac{\pi}{2}}\right] \longrightarrow \text{en } (*)$$

$$\Rightarrow f'(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{4}\left[3e^{jn\frac{\pi}{2}} - e^{-jn\frac{\pi}{2}} - 2\right] \cdot e^{jn\frac{\pi}{2}t}$$

Serie compleja de $f'(t)$

Hallemos **la gráfica de f'(t):**

Propiedades del Delta Dirac:

Considerando $a \le t_0 \le b$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) = 1$$

$$\int_{a}^{b} \delta(t - t_0)dt = 1$$

$$\int_{a}^{b} f(t)\delta(t - \boldsymbol{t_0})dt = f(\boldsymbol{t_0})$$

De la serie a la transformada de Fourier

De la serie a la transformada de Fourier

La serie de Fourier nos permite obtener una representación en el dominio de la frecuencia para **funciones periódicas** $f(t)$.

¿Es posible extender de alguna manera las series de Fourier para obtener el dominio de la frecuencia de **funciones no periódicas**?

Consideremos la siguiente función periódica de periodo
Tren de pulsos de amplitud 1, ancho **P** y periodo **T**:

En un periodo:

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \frac{-T}{2} < t < \frac{-p}{2} \\ 1 & \frac{-p}{2} < t < \frac{p}{2} \\ 0 & \frac{p}{2} < t < \frac{T}{2} \end{cases}$$

De la serie a la transformada de Fourier

$$\operatorname{Sen}\theta = \frac{e^{j\theta} - e^{-j\theta}}{2j}$$

Los coeficientes de la Serie Compleja de Fourier en este caso resultan puramente reales:

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \frac{-T}{2} < t < \frac{-p}{2} \\ 1 & \frac{-p}{2} < t < \frac{p}{2} \\ 0 & \frac{p}{2} < t < \frac{T}{2} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad c_n = \left(\frac{P}{T}\right)\frac{sen\left(n\omega_0\frac{p}{2}\right)}{\left(n\omega_0\frac{p}{2}\right)}$$

$$c_n = \frac{1}{T}\int_{0}^{T} f(t)e^{-jn\omega_0 t}dt$$

$T \to \frac{T}{2}$, $0 \to -\frac{T}{2}$

$$c_n = \frac{1}{T}\left[\cancel{\int_{-\frac{T}{2}}^{-\frac{p}{2}} 0\, e^{-jn\omega_0 t}\, dt} + \int_{-\frac{p}{2}}^{\frac{p}{2}} 1\, e^{-jn\omega_0 t}\, dt + \cancel{\int_{\frac{p}{2}}^{\frac{T}{2}} 0\, e^{-jn\omega_0 t}\, dt}\right] = \frac{1}{T}\cdot\frac{e^{-jn\omega_0 t}}{-jn\omega_0}\Bigg|_{-\frac{p}{2}}^{\frac{p}{2}}$$

$$c_n = \frac{1}{T}\cdot\frac{1}{jn\omega_0}\left(\frac{e^{jn\omega_0\frac{p}{2}} - e^{-jn\omega_0\frac{p}{2}}}{2j}\right)\cdot 2j = \frac{2}{n\omega_0 T}\left(\operatorname{Sen}\left(n\omega_0\frac{p}{2}\right)\right) = \frac{P\operatorname{Sen}\left(n\omega_0\frac{p}{2}\right)}{T\,\frac{n\omega_0}{2}\,P} \Rightarrow c_n = \frac{P}{T}\cdot\frac{\operatorname{Sen}\left(n\omega_0\frac{p}{2}\right)}{n\omega_0\frac{p}{2}}$$

$$* \quad \frac{e^{j\theta} - e^{-j\theta}}{2j} = \operatorname{Sen}\theta$$

El espectro de frecuencia correspondiente lo obtenemos (en este caso) graficando c_n versus $\omega = n\omega_0$.

De la serie a la transformada de Fourier

Espectro del tren de pulsos para P=1, T=2

$$c_n = \left(\frac{P}{T}\right)\frac{sen\left(n\omega_0\frac{p}{2}\right)}{\left(n\omega_0\frac{p}{2}\right)} \quad \Rightarrow \quad c_n = \left(\frac{1}{2}\right)\frac{sen\left(n\frac{\pi}{2}\right)}{\left(n\frac{\pi}{2}\right)}, \qquad \omega_0 = \frac{2\pi}{2} = \pi$$

n	$\omega = n\pi$	c_n
0	0	1/2
±1	±1π	1/π = 0,318
±2	±2π	0
±3	±3π	-1/3π = –0,106
±4	±4π	0
±5	±5π	7/5π = 0,064
±6	±6π	0

De la serie a la transformada de Fourier

Si el periodo del tren de pulsos aumenta

De la serie a la transformada de Fourier

En el límite cuando $T \longrightarrow \infty$, la función deja de ser periódica:

¿Qué pasa con los coeficientes de la serie de Fourier?

De la serie a la transformada de Fourier

De la serie a la transformada de Fourier

Si hace T muy grande ($T \to \infty$): El espectro se vuelve **continuo**

Forma compleja de la Serie de Fourier

El razonamiento anterior nos lleva a reconsiderar la expresión de una función $f(t)$ **no periódica** en el dominio de la frecuencia, **no** como una suma de armónicos de frecuencia $n\omega_0$, sino como una función continua de la frecuencia ω.

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega_0 t}$$

Así, la serie, al cambiar la variable discreta $n\omega_0$ (cuando $T \longrightarrow \infty$) por la variable continua ω, se transforma en una **integral** de la siguiente manera:

Como $c_n = \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_{-T/2}^{T/2} f(t)e^{-jn\omega_0 t}dt \quad \Rightarrow \quad f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\left[\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)e^{-jn\omega_0 t}dt\right]e^{jn\omega_0 t}$

$$\Rightarrow \; f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)e^{-jn\omega_0 t}dt\right]\omega_0 e^{jn\omega_0 t}$$

$\omega_0 = \dfrac{2\pi}{T}$

$T = \dfrac{2\pi}{\omega_0}$

Si $T \longrightarrow \infty$, $n\omega_0 \longrightarrow \omega$ y $\omega_0 \longrightarrow d\omega$, entonces la sumatoria se convierte en:

$\omega_0 = \dfrac{2\pi}{T} \to 0$

$T \to \infty \Rightarrow \omega_0 \to 0$

$\omega_0 \approx d\omega_0$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t}dt\right]e^{j\omega t}d\omega$$

Forma compleja de la Serie de Fourier

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\underbrace{\left[\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t}dt\right]}_{F(\omega)} e^{j\omega t}d\omega$$

Denominando $F(\omega)$ a la expresión en el corchete:

Transformada de Fourier

$$\boldsymbol{F(\omega)} = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t}dt$$

de $t \longrightarrow$ a ω

Obteniéndose:

de $\omega \longrightarrow$ a t.

Identidad de Fourier

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \boldsymbol{F(\omega)}e^{j\omega t}d\omega$$

Transformada inversa

Estas expresiones nos permiten calcular la expresión $F(\omega)$ (dominio de la frecuencia) a partir de $f(t)$ (dominio del tiempo) y viceversa

Transformada de Fourier

- Dada una función $f(t)$ llamamos **transformada de Fourier** a la función $F(\omega)$ definida por:

$$\boldsymbol{\mathcal{F}[f(t)]} = F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t}dt$$

$\mathcal{F}(f(t)) = F(\omega)$

- De manera similar llamamos **transformada inversa de Fourier** a la función que nos determina $f(t)$ a partir de la función $F(\omega)$ mediante:

$$\boldsymbol{\mathcal{F}^{-1}[F(\omega)]} = f(t) = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{j\omega t}d\omega$$

$\mathcal{F}(f(t))$ ✓

$\mathcal{F}(F(\omega)) \Rightarrow$ ERROR

$\mathcal{F}^{-1}(F(\omega))$ ✓

Transformada de Fourier

$$\mathcal{F}[f(t)] = F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t}dt$$

Ejemplo : halle la transformada de Fourier de $f(t) = e^{-|t|}$

$$\Im[f(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|t|}.e^{-jwt}dt$$

$$\Im[f(t)] = \int_{-\infty}^{0} e^{t}.e^{-jwt}dt + \int_{0}^{\infty} e^{-t}.e^{-jwt}dt$$

$$\Im[f(t)] = \int_{-\infty}^{0} e^{(1-j\omega)t}\,dt + \int_{0}^{\infty} e^{-(1+j\omega)t}.dt$$

$$\Im[f(t)] = \frac{1}{1-j\omega}e^{(1-j\omega)t}\Big|_{-\infty}^{0} + \frac{1}{-(1+j\omega)}e^{-(1+j\omega)t}\Big|_{0}^{\infty}$$

$$\mathcal{F}(f(t)) = \frac{1}{1-j\omega}(1-\cancel{e^{-\infty}}) - \frac{1}{1+j\omega}(\cancel{e^{-\infty}}-1)$$

$$\mathcal{F}(f(t)) = \frac{1}{1-j\omega} + \frac{1}{1+j\omega} = \frac{(1+\cancel{j\omega}) + (1-\cancel{j\omega})}{1^2 - j^2\omega^2}$$

$$F(\omega) = \frac{2}{1+\omega^2}$$

Transformada de Fourier

$$\mathcal{F}[f(t)] = F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t}dt$$

Ejemplo : halle la transformada de Fourier de

$$f(t) = \begin{cases} 1 \ , |t| < T/2 \\ 0 \ , |t| > T/2 \end{cases} \rightarrow -\frac{T}{2} < t < \frac{T}{2}$$

$$\Im[f(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(t).e^{-jwt}dt = \int_{-T/2}^{T/2} 1.e^{-jwt}dt$$

$$\Im[f(t)] = \frac{e^{-jwt}}{-jw}\Big|_{-T/2}^{T/2}$$

$$\Im[f(t)] = \frac{e^{-jwT/2} - e^{jwT/2}}{-jw}$$

$$\Im[f(t)] = \frac{1}{jw}.\left(e^{\frac{jwT}{2}} - e^{\frac{-jwT}{2}}\right) = \frac{1}{jw}.\left(2jsen\left(\frac{wT}{2}\right)\right)$$

$$e^{j\theta} - e^{-j\theta} = 2jsen\theta$$

$$\frac{e^{j\theta} - e^{-j\theta}}{2j} = sen\theta$$

$$F(\omega) = T\frac{sen\left(\omega\frac{T}{2}\right)}{\left(\omega\frac{T}{2}\right)}$$

$$F(\omega) = T\frac{sen\left(\omega\frac{T}{2}\right)}{\left(\omega\frac{T}{2}\right)}$$