

# 1 Лекция 1.

## 1.1 Определение булевой функции.

Обозначим за  $E$  множество  $\{0, 1\}$ .

**Определение.**  $f(x_1, \dots, x_n) \in E$  — функция алгебры логики (**булева функция**), где  $x_i \in E \forall i = 1, \dots, n$  — это отображение  $f: E^n \rightarrow E$ . Его можно проиллюстрировать таблицей возможных значений  $f$  на различных наборах переменных:

$x_1$	$x_2$	$\dots$	$x_{n-1}$	$x_n$	$f(x_1, \dots, x_n)$
0	0	$\dots$	0	1	0 или 1
0	0	$\dots$	1	1	0 или 1
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
1	1	$\dots$	1	1	0 или 1

**Определение.**  $P_2$  — множество всех булевых функций от произвольного конечного множества переменных.  $P_2(n)$  — множество всех булевых функций от  $n$  переменных.

**Определение.**  $E^n = \{(\sigma_1, \dots, \sigma_n) \mid \sigma_i \in E; i = 1, \dots, n\}$

**Утверждение.**  $|P_2(n)| = 2^{2^n}$ .

*Доказательство.* Очевидно. □

## 1.2 Существенные и фиктивные переменные.

**Определение.** Пусть  $f(x_1, \dots, x_n)$  — булева функция. Тогда  $x_i$  называется **существенной** переменной для  $f$ , если:  $\exists \sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{i-1}, \sigma_{i+1}, \dots, \sigma_n \in \{0, 1\}$ , такие, что:

$f(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{i-1}, 0, \sigma_{i+1}, \dots, \sigma_n) \neq f(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{i-1}, 1, \sigma_{i+1}, \dots, \sigma_n)$ . В противном случае переменная называется **фиктивной** (пример придумать не очень сложно).

1. Пусть  $x_i$  — фиктивная переменная для  $f$ .

Рассмотрим функцию  $g: g(x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n) :$

$$g(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{i-1}, \sigma_{i+1}, \dots, \sigma_n) = f(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{i-1}, 0, \sigma_{i+1}, \dots, \sigma_n) = f(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{i-1}, 1, \sigma_{i+1}, \dots, \sigma_n)$$

Тогда говорят, что  $g$  **получена из  $f$  удалением фиктивной переменной  $x_i$** .

2. Пусть  $f(x_1, \dots, x_n)$  — булева функция. Также, пусть имеется  $y \neq x_1, \dots, x_n$ . Рассмотрим функцию  $h(x_1, \dots, x_n, y)$ :

$$h(\sigma_1, \dots, \sigma_n, \sigma) = f(\sigma_1, \dots, \sigma_n)$$

Тогда говорим, что  $h$  **получена из  $f$  добавлением фиктивной переменной  $y$** .

**Определение.** Две булевы функции называются **равными**, если они могут быть получены друг из друга с помощью некоторого числа операций добавления или удаления фиктивных переменных.

### 1.3 Элементарные функции:

1. От одной переменной.

$x$	0	$x$	$\bar{x}$	1
0	0	0	1	1
1	0	1	0	1

2. От двух переменных:

$x$	$y$	$xy$	$x \vee y$	$x \oplus y$	$x \sim y$	$x \rightarrow y$	$x y$	$x \downarrow y$
0	0	0	0	0	1	1	1	1
0	1	0	1	1	0	1	1	0
1	0	0	1	1	0	0	1	0
1	1	1	1	0	1	1	0	0

3. От трех переменных(функция "медиана"):

$x$	$y$	$z$	$f(x, y, z)$
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

### 1.4 Формула над системой булевых функций.

$F = \{f_1(x_1, x_2, \dots, x_{n_1}); f_2(x_1, x_2, \dots, x_{n_2}); \dots; f_n(x_1, x_2, \dots, x_{n_n})\} \subseteq P_2$  – некоторое множество булевых функций, таких что каждой булевой функции  $f_i(x_1, x_2, \dots, x_{n_i})$  сопоставляем функциональный символ  $f_i$ .

**Определение.** Формулой над  $F$  называется строка символов, состоящая из любых символов-переменных, обозначающих  $f_1, \dots, f_n$  и вспомогательных символов "(", ")" , ", определяемое индуктивным образом:

**База индукции:** символ любой переменной – правильная формула над  $F$ .

**Индуктивное предположение:** пусть  $F_1, F_2, \dots, F_{n_i}$  – некоторые формулы над  $F$ , тогда  $f_i(F_1, F_2, \dots, F_{n_i})$  – тоже формула над  $F$ .

**Пример.**  $((\overline{x \vee y}) \& (z \rightarrow y))$  – формула над  $\{x \vee y; x \& y; x \rightarrow y; \bar{x}\}$

Конъюнкция имеет приоритет над дизъюнкцией.

Значения формулы на наборе значений переменных, входящих в формулу, определяется индуктивным образом.

**База индукции:** если  $f$  — тривиальная, то все очевидно.

**Индуктивное предположение:** пусть  $F_1, F_2, \dots, F_n$  — формулы, для которых данное понятие уже определено.

$$F = f_i(F_1, F_2, \dots, F_{n_i});$$

$x_1, \dots, x_n$  — все переменные, содержащиеся в  $F$ .

$\Omega = (\sigma_1, \dots, \sigma_n)$  — набор значений  $x_1, \dots, x_n$ .

$\Omega_j$  — поднабор значений из  $\Omega$  для переменных, содержащихся в формуле  $F_j$ .

$b_j$  — значение функции  $F_j$  на наборе  $\Omega_j$ .

Тогда значение  $F$  на наборе  $\Omega$  равно  $f_i(b_1, \dots, b_{n_i})$

Пусть  $F$  — формула над  $\Phi$ , содержащая символы переменных  $x_1, \dots, x_n$ . Тогда  $F$  реализует функцию  $f(x_1, \dots, x_n)$ , т.ч. для любого набора  $(\sigma_1, \dots, \sigma_n)$  значений  $x_1, \dots, x_n$  значение  $f(\sigma_1, \dots, \sigma_n)$  равно значению формулы  $F$  на  $\sigma_1, \dots, \sigma_n$ .

$f$  получается из  $\Phi$  с помощью операции суперпозиции, если  $F$  реализуется некоторой нетривиальной формулой над  $\Phi$ .

**Определение.** Две формулы  $F_1$  и  $F_2$  называются **эквивалентными**, если они реализуют одинаковые функции.

Пусть  $*$   $\in \{\vee, \&, \oplus, \sim\}$  — некоторая операция.

$$1. x * y = y * x \text{ (коммутативность)}$$

$$2. x * (y * z) = (x * y) * z \text{ (ассоциативность)}$$

$$3. x(y \vee z) = xy \vee xz$$

$$x(y \oplus z) = xy \oplus xz$$

$$x \vee (y \& z) = (x \vee y) \& (x \vee z)$$

$$x \vee (y \sim z) = (x \vee y) \sim (x \vee z) \text{ (дистрибутивность)}$$

$$4. x \vee xy = x \text{ (поглощение)}$$

$$5. \overline{\overline{x}} = x \text{ (двойное отрицание)}$$

$$6. \overline{x \vee y} = \overline{x} \& \overline{y}$$

$$\overline{x \& y} = \overline{x} \vee \overline{y} \text{ (закон де Моргана)}$$

$$7. x\overline{x} = 0, x \vee \overline{x} = 1, x \oplus \overline{x} = 1, x \sim \overline{x} = 0$$

$$xx = x, x \vee x = x, x \oplus x = 0, x \sim x = 1$$

$$x \& 1 = x, x \vee 1 = 1, x \oplus 1 = \overline{x}, x \sim 1 = x$$

$$x \& 0 = 0, x \vee 0 = x, x \oplus 0 = x, x \sim 0 = \overline{x}$$

## 2 Лекция 2 (Замыкания и прочее).

### 2.1 Определения.

Возьмем множество  $F \subseteq P_2$ .

**Определение.** Замыкание  $[F]$  множества  $F$  — это множество всех булевых функций, получаемых из булевых функций множества  $F$  с помощью операций суперпозиции, удаления и добавления фиктивных переменных.

**Определение.**  $F$  — замкнуто, если  $[F] = F$ .

1.  $[\{x \oplus y\}] = \{0, x, x_1 \oplus \dots \oplus x_t (t \geq 2)\}$
2.  $P_2$  — замкнуто.

**Определение.**  $P_2(n)$  — все булевы функции, существенно зависящие от не более, чем  $n$  переменных.

1.  $P_2(1)$  — замкнуто.
2.  $P_2(2)$  — не замкнуто. ( $xy \in P_2(2), xyz \notin P_2(2)$ )

### 2.2 Свойства замыкания.

1.  $F \subseteq [F]$ .
2.  $F_1 \subseteq F_2 \implies [F_1] \subseteq [F_2]$
3.  $[[F]] = [F]$

*Доказательство.* 1)  $[F] \subseteq [[F]]$  (по 1, 2) 2)  $[[F]] \subseteq [F]$ .

$f(x_1, \dots, x_n) \in [[F]] \implies \exists$  формула  $\Phi$ , реализующая  $f$ . Пусть  $f_1, \dots, f_s$

□