# 1 Лекция 1.

## 1.1 Определение булевой функции.

Обозначим за $E$ множество $\{0, 1\}$.

**Определение**. $f(x_1, \ldots, x_n) \in E$ — функция алгебры логики **(булева функция)**, где $x_i \in E\ \forall i = 1, \ldots, n$ — это отображение $f\colon E^n \to E$. Его можно проиллюстрировать таблицей возможных значений $f$ на различных наборах переменных:

| $x_1$ | $x_2$ | $\ldots$ | $x_{n-1}$ | $x_n$ | $f(x_1, \ldots, x_n)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | $\ldots$ | 0 | 1 | 0 **или** 1 |
| 0 | 0 | $\ldots$ | 1 | 1 | 0 **или** 1 |
| $\ldots$ | $\ldots$ | $\ldots$ | $\ldots$ | $\ldots$ | $\ldots$ |
| 1 | 1 | $\ldots$ | 1 | 1 | 0 **или** 1 |

**Определение**. $P_2$ — множество всех булевых функций от произвольного конечного множества переменных. $P_2(n)$ — множество всех булевых функций от $n$ переменных.

**Определение**. $E^n = \{(\sigma_1, \ldots, \sigma_n) |\ \sigma_i \in E;\ i = 1, \ldots, n\}$

**Утверждение**. $|P_2(n)| = 2^{2^n}$.

*Доказательство.* Очевидно. □

## 1.2 Существенные и фиктивные переменные.

**Определение**. Пусть $f(x_1, \ldots, x_n)$ – булева функция. Тогда $x_i$ называется **существенной** переменной для $f$, если: $\exists \sigma_1, \sigma_2, \ldots \sigma_{i-1}, \sigma_{i+1}, \ldots, \sigma_n \in \{0, 1\}$, такие, что:
$f(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_{i-1}, 0, \sigma_{i+1}, \ldots, \sigma_n) \neq f(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_{i-1}, 1, \sigma_{i+1}, \ldots, \sigma_n)$. В противном случае переменная называется **фиктивной** (пример придумать не очень сложно).

1. Пусть $x_i$ — фиктивная переменная для $f$.

   Рассмотрим функцию $g$: $g(x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n)$ :
   $g(\sigma_1, \sigma_2 \ldots \sigma_{i-1}, \sigma_{i+1}, \ldots, \sigma_n) = f(\sigma_1, \sigma_2 \ldots \sigma_{i-1}, 0, \sigma_{i+1}, \ldots, \sigma_n) = f(\sigma_1, \sigma_2 \ldots \sigma_{i-1}, 1, \sigma_{i+1}, \ldots, \sigma_n)$
   Тогда говорят, что $g$ **получена из** $f$ **удалением фиктивной переменной** $x_i$.

2. Пусть $f(x_1, \ldots, x_n)$ – булева функция. Также, пусть имеется $y \neq x_1, \ldots, x_n$. Рассмотрим функцию $h(x_1, \ldots, x_n, y)$:
   $h(\sigma_1, \ldots, \sigma_n, \sigma) = f(\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$
   Тогда говорим, что $h$ **получена из** $f$ **добавлением фиктивной переменной** $y$**.**

**Определение**. Две булевы функции называются **равными**, если они могут быть получены друг из друга с помощью некоторого числа операций добавления или удаления фиктивных переменных.

## 1.3 Элементарные функции:

1. От одной переменной.

| $x$ | $0$ | $x$ | $\bar{x}$ | $1$ |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 0 | 1 |

2. От двух переменных:

| $x$ | $y$ | $xy$ | $x \vee y$ | $x \oplus y$ | $x \sim y$ | $x \to y$ | $x \vert y$ | $x \downarrow y$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 |

3. От трех переменных (функция "медиана"):

| $x$ | $y$ | $z$ | $f(x,y,z)$ |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 0 |
| 0 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 1 |

## 1.4 Формула над системой булевых функций.

$\Phi = \{f_1(x_1, x_2, ..., x_{n_1}); f_2(x_1, x_2, ..., x_{n_2}); ...; f_n(x_1, x_2, ..., x_{n_n})\} \subseteq P_2$ – некоторое множество булевых функций, таких что каждой булевой функции $f_i(x_1, x_2, ..., x_{n_i})$ сопоставляем функциональный символ $f_i$.

**Определение**. *Формулой над* $\Phi$ называется строка символов, состоящая из любых символов-переменных, обозначающих $f_1, ..., f_n$ и вспомогательных символов "(",")" ,", определяемое индуктивным образом:

**База индукции:** символ любой переменной – правильная формула над $\Phi$.

**Индуктивное предположение:** пусть $F_1, F_2, ..., F_{n_i}$ – некоторые формулы над $\Phi$, тогда $f_i(F_1, F_2, ..., F_{n_i})$ – тоже формула над $\Phi$.

**Пример**. $((\overline{x \vee y})\&(z \to y))$ — формула над $\{x \vee y; x\&y, x \to y, \overline{x}\}$

Конъюнкция имеет приоритет над дизъюнкцией.

Значения формулы на наборе значений переменных, входящих в формулу, определяется индуктивным образом.

**База индукции:** если $f$ — тривиальная, то все очевидно.

**Индуктивное предположение:** пусть $F_1, F_2, \ldots, F_n$ – формулы, для которых данное понятие уже определено.
$F = f_i(F_1, F_2, \ldots, F_{n_i})$;
$x_1, \ldots, x_n$ – все переменные, содержащиеся в F.
$\Omega = (\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$ – набор значений $x_1, \ldots, x_n$.
$\Omega_j$ – поднабор значений из $\Omega$ для переменных, содержащихся в формуле $F_j$.
$b_j$ – значение функции $F_j$ на наборе $\Omega_j$.
Тогда значение $F$ на наборе $\Omega$ равно $f_i(b_1, \ldots, b_{ni})$
Пусть $F$ – формула над $\Phi$, содержащая символы переменных $x_1, \ldots, x_n$. Тогда $F$ реализует функцию $f(x_1, \ldots, x_n)$, т.ч для любого набора $(\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$ значений $x_1, ..., x_n$ значение $f(\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$ равно значению формулы $F$ на $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$.
$f$ получается из $\Phi$ с помощью операции суперпозиции, если F реализуется некоторой нетривиальной формулой над $\Phi$.

**Определение**. Две формулы $F_1$ и $F_2$ называются **эквивалентными**, если они реализуют одинаковые функции.

Пусть $* \in \{\vee, \&, \oplus, \sim\}$ – некоторая операция.

1. $x * y = y * x$ (коммутативность)
2. $x * (y * z) = (x * y) * z$ (ассоциативность)
3. $x(y \vee z) = xy \vee xz$

   $x(y \oplus z) = xy \oplus xz$

   $x \vee (y \& z) = (x \vee y) \& (x \vee z)$

   $x \vee (y \sim z) = (x \vee y) \sim (x \vee z)$ (дистрибутивность)
4. $x \vee xy = x$ (поглощение)
5. $\overline{\overline{x}} = x$ (двойное отрицание)
6. $\overline{x \vee y} = \overline{x} \& \overline{y}$

   $\overline{x \& y} = \overline{x} \vee \overline{y}$ (закон де Моргана)
7. $x\overline{x} = 0$, $x \vee \overline{x} = 1$, $x \oplus \overline{x} = 1$, $x \sim \overline{x} = 0$

   $xx = x$, $x \vee x = x$, $x \oplus x = 0$, $x \sim x = 1$

   $x \& 1 = x$, $x \vee 1 = 1$, $x \oplus 1 = \overline{x}$, $x \sim 1 = x$

   $x \& 0 = 0$, $x \vee 0 = x$, $x \oplus 0 = x$, $x \sim 0 = \overline{x}$

# 2 Лекция 2 (Замыкания и прочее).

## 2.1 Определения.

Возьмем множество $F \subseteq P_2$.

**Определение**. Замыкание $[F]$ множества $F$ — это множество всех булевых функций, получаемых из булевых функций множества $F$ с помощью операций суперпозиции, удаления и добавления фиктивных переменных.

**Определение**. $F$ — замкнуто, если $[F] = F$.

1. $[\{x \oplus y\}] = \{0, x, x_1 \oplus \ldots \oplus x_t (t \geq 2)\}$
2. $P_2$ — замкнуто.

**Определение**. $P_2(n)$ — все булевы функции, существенно зависящие от не более, чем $n$ переменных.

1. $P_2(1)$ — замкнуто.
2. $P_2(2)$ — не замкнуто. $(xy \in P_2(2), xyz \notin P_2(2))$

## 2.2 Свойства замыкания.

1. $F \subseteq [F]$.
2. $F_1 \subseteq F_2 \Longrightarrow [F_1] \subseteq [F_2]$
3. $[[F]] = [F]$

   *Доказательство.* 1) $[F] \subseteq [[F]]$ (по 1, 2) 2)$[[F]] \subseteq [F]$.
   $f(x_1, \ldots, x_n) \in [[F]] \Longrightarrow \exists$ формула $\Phi$, реализующая $f$. Пусть $f_1, \ldots, f_s$ $\square$