

1 Лекция 1.

1.1 Определение булевой функции.

Обозначим за E множество $\{0, 1\}$.

Определение. $f(x_1, \dots, x_n) \in E$ — функция алгебры логики (**булева функция**), где $x_i \in E \forall i = 1, \dots, n$ — это отображение $f: E^n \rightarrow E$. Его можно проиллюстрировать таблицей возможных значений f на различных наборах переменных:

x_1	x_2	\dots	x_{n-1}	x_n	$f(x_1, \dots, x_n)$
0	0	\dots	0	1	0 или 1
0	0	\dots	1	1	0 или 1
\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots
1	1	\dots	1	1	0 или 1

Определение. P_2 — множество всех булевых функций от произвольного конечного множества переменных. $P_2(n)$ — множество всех булевых функций от n переменных.

Определение. $E^n = \{(\sigma_1, \dots, \sigma_n) \mid \sigma_i \in E; i = 1, \dots, n\}$

Утверждение. $|P_2(n)| = 2^{2^n}$.

Доказательство. Очевидно. □

1.2 Существенные и фиктивные переменные.

Определение. Пусть $f(x_1, \dots, x_n)$ — булева функция. Тогда x_i называется **существенной** переменной для f , если: $\exists \sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{i-1}, \sigma_{i+1}, \dots, \sigma_n \in \{0, 1\}$, такие, что:

$f(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{i-1}, 0, \sigma_{i+1}, \dots, \sigma_n) \neq f(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{i-1}, 1, \sigma_{i+1}, \dots, \sigma_n)$. В противном случае переменная называется **фиктивной** (пример придумать не очень сложно).

1. Пусть x_i — фиктивная переменная для f .

Рассмотрим функцию $g: g(x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n) :$

$$g(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{i-1}, \sigma_{i+1}, \dots, \sigma_n) = f(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{i-1}, 0, \sigma_{i+1}, \dots, \sigma_n) = f(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{i-1}, 1, \sigma_{i+1}, \dots, \sigma_n)$$

Тогда говорят, что g **получена из f удалением фиктивной переменной x_i** .

2. Пусть $f(x_1, \dots, x_n)$ — булева функция. Также, пусть имеется $y \neq x_1, \dots, x_n$. Рассмотрим функцию $h(x_1, \dots, x_n, y):$

$$h(\sigma_1, \dots, \sigma_n, \sigma) = f(\sigma_1, \dots, \sigma_n)$$

Тогда говорим, что h **получена из f добавлением фиктивной переменной y** .

Определение. Две булевы функции называются **равными**, если они могут быть получены друг из друга с помощью некоторого числа операций добавления или удаления фиктивных переменных.

1.3 Элементарные функции:

1. От одной переменной.

x	0	x	\bar{x}	1
0	0	0	1	1
1	0	1	0	1

2. От двух переменных:

x	y	xy	$x \vee y$	$x \oplus y$	$x \sim y$	$x \rightarrow y$	$x y$	$x \downarrow y$
0	0	0	0	0	1	1	1	1
0	1	0	1	1	0	1	1	0
1	0	0	1	1	0	0	1	0
1	1	1	1	0	1	1	0	0

3. От трех переменных (функция "медиана"):

x	y	z	$f(x, y, z)$
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

1.4 Формула над системой булевых функций.

$\Phi = \{f_1(x_1, x_2, \dots, x_{n_1}); f_2(x_1, x_2, \dots, x_{n_2}); \dots; f_n(x_1, x_2, \dots, x_{n_n})\} \subseteq P_2$ – некоторое множество булевых функций, таких что каждой булевой функции $f_i(x_1, x_2, \dots, x_{n_i})$ сопоставляем функциональный символ f_i .

Определение. Формулой над Φ называется строка символов, состоящая из любых символов-переменных, обозначающих f_1, \dots, f_n и вспомогательных символов "(", ")", ",", определяемое индуктивным образом:

База индукции: символ любой переменной – правильная формула над Φ .

Индуктивное предположение: пусть F_1, F_2, \dots, F_{n_i} – некоторые формулы над Φ , тогда $f_i(F_1, F_2, \dots, F_{n_i})$ – тоже формула над Φ .

Пример. $((\overline{x \vee y}) \& (z \rightarrow y))$ – формула над $\{x \vee y; x \& y; x \rightarrow y; \bar{x}\}$

Конъюнкция имеет приоритет над дизъюнкцией.

Значения формулы на наборе значений переменных, входящих в формулу, определяется индуктивным образом.

База индукции: если f — тривиальная, то все очевидно.

Индуктивное предположение: пусть F_1, F_2, \dots, F_n — формулы, для которых данное понятие уже определено.

$$F = f_i(F_1, F_2, \dots, F_{n_i});$$

x_1, \dots, x_n — все переменные, содержащиеся в F .

$\Omega = (\sigma_1, \dots, \sigma_n)$ — набор значений x_1, \dots, x_n .

Ω_j — поднабор значений из Ω для переменных, содержащихся в формуле F_j .

b_j — значение функции F_j на наборе Ω_j .

Тогда значение F на наборе Ω равно $f_i(b_1, \dots, b_{n_i})$

Пусть F — формула над Φ , содержащая символы переменных x_1, \dots, x_n . Тогда F реализует функцию $f(x_1, \dots, x_n)$, т.ч для любого набора $(\sigma_1, \dots, \sigma_n)$ значений x_1, \dots, x_n значение $f(\sigma_1, \dots, \sigma_n)$ равно значению формулы F на $\sigma_1, \dots, \sigma_n$.

f получается из Φ с помощью операции суперпозиции, если F реализуется некоторой нетривиальной формулой над Φ .

Определение. Две формулы F_1 и F_2 называются **эквивалентными**, если они реализуют одинаковые функции.

Пусть $*$ $\in \{\vee, \&, \oplus, \sim\}$ — некоторая операция.

$$1. x * y = y * x \text{ (коммутативность)}$$

$$2. x * (y * z) = (x * y) * z \text{ (ассоциативность)}$$

$$3. x(y \vee z) = xy \vee xz$$

$$x(y \oplus z) = xy \oplus xz$$

$$x \vee (y \& z) = (x \vee y) \& (x \vee z)$$

$$x \vee (y \sim z) = (x \vee y) \sim (x \vee z) \text{ (дистрибутивность)}$$

$$4. x \vee xy = x \text{ (поглощение)}$$

$$5. \overline{\overline{x}} = x \text{ (двойное отрицание)}$$

$$6. \overline{x \vee y} = \overline{x} \& \overline{y}$$

$$\overline{x \& y} = \overline{x} \vee \overline{y} \text{ (закон де Моргана)}$$

$$7. x\overline{x} = 0, x \vee \overline{x} = 1, x \oplus \overline{x} = 1, x \sim \overline{x} = 0$$

$$xx = x, x \vee x = x, x \oplus x = 0, x \sim x = 1$$

$$x \& 1 = x, x \vee 1 = 1, x \oplus 1 = \overline{x}, x \sim 1 = x$$

$$x \& 0 = 0, x \vee 0 = x, x \oplus 0 = x, x \sim 0 = \overline{x}$$

2 Лекция 2 (Замыкания и прочее).

2.1 Определения.

Возьмем множество $F \subseteq P_2$.

Определение. Замыкание $[F]$ множества F — это множество всех булевых функций, получаемых из булевых функций множества F с помощью операций суперпозиции, удаления и добавления фиктивных переменных.

Определение. F — замкнуто, если $[F] = F$.

1. $[\{x \oplus y\}] = \{0, x, x_1 \oplus \dots \oplus x_t (t \geq 2)\}$
2. P_2 — замкнуто.

Определение. $P_2(n)$ — все булевы функции, существенно зависящие от не более, чем n переменных.

1. $P_2(1)$ — замкнуто.
2. $P_2(2)$ — не замкнуто. ($xy \in P_2(2), xyz \notin P_2(2)$)

2.2 Свойства замыкания.

1. $F \subseteq [F]$.
2. $F_1 \subseteq F_2 \implies [F_1] \subseteq [F_2]$
3. $[[F]] = [F]$

Доказательство. 1) $[F] \subseteq [[F]]$ (по 1, 2) 2) $[[F]] \subseteq [F]$.

$f(x_1, \dots, x_n) \in [[F]] \implies \exists$ формула Φ , реализующая f . Пусть f_1, \dots, f_s

□