1 Лекция 1.

1.1 Определение булевой функции.

Обозначим за E множество $\{0, 1\}$.

Определение. $f(x_1, \ldots, x_n) \in E$ — функция алгебры логики **(булева функция)**, где $x_i \in E\ \forall i = 1, \ldots, n$ — это отображение $f\colon E^n \to E$. Его можно проиллюстрировать таблицей возможных значений f на различных наборах переменных:

x_1	x_2	$\ldots$	x_{n-1}	x_n	$f(x_1, \ldots, x_n)$
0	0	$\ldots$	0	1	0 **или** 1
0	0	$\ldots$	1	1	0 **или** 1
$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$
1	1	$\ldots$	1	1	0 **или** 1

Определение. P_2 — множество всех булевых функций от произвольных конечных множеств переменных.

Определение. $E^n = \{(\sigma_1, \ldots, \sigma_n) |\ \sigma_i \in E;\ i = 1, \ldots, n\}$

Булева функция задает

Утверждение. $|P_2(x_1, \ldots, x_n)| = 2^{2^n}$.

Доказательство. Очевидно. □

1.2 Существенные и фиктивные переменные.

Определение. Пусть $f(x_1, \ldots, x_n)$ – булева функция. Тогда x_i называется **существенной** переменной для f, если: $\exists \sigma_1, \sigma_2, \ldots \sigma_{i-1}, \sigma_{i+1}, \ldots, \sigma_n \in \{0, 1\}$, такие, что:

$f(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_{i-1}, 0, \sigma_{i+1}, \ldots, \sigma_n) \neq f(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_{i-1}, 1, \sigma_{i+1}, \ldots, \sigma_n)$. В противном случае переменная называется **фиктивной** (пример придумать не очень сложно).

1. Пусть x_i — фиктивная переменная для f.

   Рассмотрим функцию g: $g(x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n)$:
   $g(\sigma_1, \sigma_2 \ldots \sigma_{i-1}, \sigma_{i+1}, \ldots, \sigma_n) = f(\sigma_1, \sigma_2 \ldots \sigma_{i-1}, 0, \sigma_{i+1}, \ldots, \sigma_n) = f(\sigma_1, \sigma_2 \ldots \sigma_{i-1}, 1, \sigma_{i+1}, \ldots, \sigma_n)$
   Тогда говорят, что g **получена из** f **удалением фиктивной переменной** x_i.

2. Пусть $f(x_1, \ldots, x_n)$ – булева функция. Также, пусть имеется $y \neq x_1, \ldots, x_n$. Рассмотрим функцию $h(x_1, \ldots, x_n, y)$:
   $h(\sigma_1, \ldots, \sigma_n, \sigma) = f(\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$
   Тогда говорим, что h **получена из** f **добавлением фиктивной переменной** y**.**

Определение. Две булевы функции называются **равными**, если они могут быть получены друг из друга с помощью некоторого числа операций добавления или удаления фиктивных переменных.

1.3 Элементарные функции:

1. От одной переменной.

x	0	x	$\bar{x}$	1
0	0	0	1	1
1	0	1	0	1

2. От двух переменных:

x	y	xy	$x \vee y$	$x \oplus y$	$x \sim y$	$x \to y$	$x \mid y$	$x \downarrow y$
0	0	0	0	0	1	1	1	1
0	1	0	1	1	0	1	1	0
1	0	0	1	1	0	0	1	0
1	1	1	1	0	1	1	0	0

3. От трех переменных(функция "медиана"):

x	y	z	$f(x,y,z)$
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

1.4 Формула над системой булевых функций.

$F = \{f_1(x_1, x_2, ..., x_{n_1}); f_2(x_1, x_2, ..., x_{n_2}); ...; f_n(x_1, x_2, ..., x_{n_n})\} \subseteq P_2$ – некоторое множество булевых функций, таких что каждой булевой функции $f_i(x_1, x_2, ..., x_{n_i})$ сопоставляем функциональный символ f_i.

Определение. *Формулой над F* называется строка символов, состоящая из любых символов-переменных, обозначающих $f_1, ..., f_n$ и вспомогательных символов "(",")" ,", определяемое индуктивным образом:

База индукции: символ любой переменной – правильная формула над F.

Индуктивное предположение: пусть $F_1, F_2, ..., F_{n_i}$ – некоторые формулы над F, тогда $f_i(F_1, F_2, ..., F_{n_i})$ – тоже формула над F.

Пример. $((\overline{x \vee y})\&(z \to y))$ — формула над $\{x \vee y; x\&y, x \to y, \overline{x}\}$

Конъюнкция имеет приоритет над дизъюнкцией.

Значения формулы на наборе значений переменных, входящих в формулу, определяется индуктивным образом.

База индукции: если f — тривиальная, то все очевидно.

Индуктивное предположение: пусть $F_1, F_2, \ldots, F_n$ – формулы, для которых данное понятие уже определено.
$F = f_i(F_1, F_2, \ldots, F_{n_i})$;
$x_1, \ldots, x_n$ – все переменные, содержащиеся в F.
$\Omega = (\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$ – набор значений $x_1, \ldots, x_n$.
Ω_j – поднабор значений из Ω для переменных, содержащихся в формуле F_j.
b_j – значение функции F_j на наборе Ω_j.
Тогда значение F на наборе Ω равно $f_i(b_1, \ldots, b_{ni})$
Пусть F – формула над Φ, содержащая символы переменных $x_1, \ldots, x_n$. Тогда F реализует функцию $f(x_1, \ldots, x_n)$, т.ч для любого набора $(\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$ значений $x_1, ..., x_n$ значение $f(\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$ равно значению формулы F на $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$.
f получается из Φ с помощью операции суперпозиции, если F реализуется некоторой нетривиальной формулой над Φ.

Определение. Две формулы F_1 и F_2 называются **эквивалентными**, если они реализуют одинаковые функции.

Пусть $* \in \{\vee, \&, \oplus, \sim\}$ – некоторая операция.

1. $x * y = y * x$ (коммутативность)
2. $x * (y * z) = (x * y) * z$ (ассоциативность)
3. $x(y \vee z) = xy \vee xz$

   $x(y \oplus z) = xy \oplus xz$

   $x \vee (y \& z) = (x \vee y) \& (x \vee z)$

   $x \vee (y \sim z) = (x \vee y) \sim (x \vee z)$ (дистрибутивность)
4. $x \vee xy = x$ (поглощение)
5. $\overline{\overline{x}} = x$ (двойное отрицание)
6. $\overline{x \vee y} = \overline{x} \& \overline{y}$

   $\overline{x \& y} = \overline{x} \vee \overline{y}$ (закон де Моргана)
7. $x\overline{x} = 0$, $x \vee \overline{x} = 1$, $x \oplus \overline{x} = 1$, $x \sim \overline{x} = 0$

   $xx = x$, $x \vee x = x$, $x \oplus x = 0$, $x \sim x = 1$

   $x \& 1 = x$, $x \vee 1 = 1$, $x \oplus 1 = \overline{x}$, $x \sim 1 = x$

   $x \& 0 = 0$, $x \vee 0 = x$, $x \oplus 0 = x$, $x \sim 0 = \overline{x}$

2 Лекция 2 (Замыкания и прочее).

2.1 Определения.

Возьмем множество $F \subseteq P_2$.

Определение. Замыкание $[F]$ множества F — это множество всех булевых функций, получаемых из булевых функций множества F с помощью операций суперпозиции, удаления и добавления фиктивных переменных.

Определение. F — замкнуто, если $[F] = F$.

1. $[\{x \oplus y\}] = \{0, x, x_1 \oplus \ldots \oplus x_t (t \geq 2)\}$
2. P_2 — замкнуто.

Определение. $P_2(n)$ — все булевы функции, существенно зависящие от не более, чем n переменных.

1. $P_2(1)$ — замкнуто.
2. $P_2(2)$ — не замкнуто. $(xy \in P_2(2), xyz \notin P_2(2))$

2.2 Свойства замыкания.

1. $F \subseteq [F]$.
2. $F_1 \subseteq F_2 \Longrightarrow [F_1] \subseteq [F_2]$
3. $[[F]] = [F]$

   Доказательство. 1) $[F] \subseteq [[F]]$ (по 1, 2) 2)$[[F]] \subseteq [F]$.
   $f(x_1, \ldots, x_n) \in [[F]] \Longrightarrow \exists$ формула Φ, реализующая f. Пусть $f_1, \ldots, f_s$ □