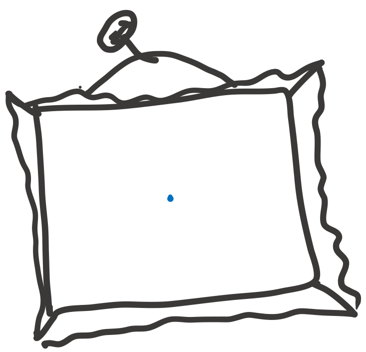
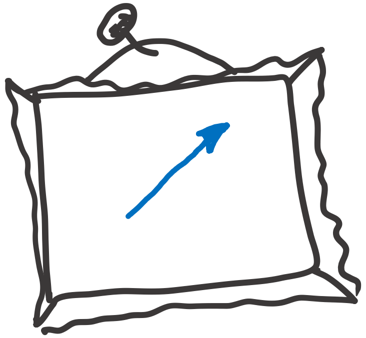
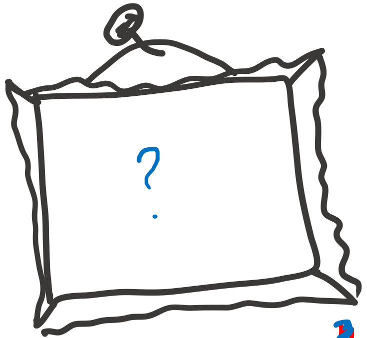
An Introduction to Tensor Calculus. Part 1: Scalars, Vectors and Tensors.



Скаляр. a



Вектор. $\vec{a}$



Тензор. $\overset{2}{T}_a$

N - размерность пространства

Скаляр	a	$\mathbb{R}^N$	хар-ся	$N^0=1$	компонентой
Вектор	$\vec{a}$	$\mathbb{R}^N$	хар-ся	$N^1=N$	комп.
Тензор р. n	$\overset{n}{T}_a$	$\mathbb{R}^N$	хар-ся	N^n	комп.

$$a$$

скаляр

$$\vec{a} = \left[\!\left[\begin{matrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_N \end{matrix} \right]\!\right]$$

вектор

$$\overset{2}{T}_a = \left[\!\left[\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1N} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2N} \\ \vdots & & & \\ a_{N1} & a_{N2} & \cdots & a_{NN} \end{matrix} \right]\!\right]$$

тензор 2 р

$\mathbb{R}^N$

[[ ]] - для комп. тензоров

Пр. Ейнштейна ; a $\vec{a} = [\![a_i]\!]$ $(i=1\ldots N)$, $T_a = [\![a_{ij}]\!]$

$a_i \sim a_1 \; a_2 \ldots a_N$

$a_{ii} \sim a_{11} + a_{22} + \ldots + a_{NN}$

$a_i b_i \sim a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots a_N b_N$; $a_i b_j = \begin{bmatrix} a_1 b_1 & a_1 b_2 & \ldots & a_1 b_N \\ \vdots & & & \\ a_N b_1 & a_N b_2 & \ldots & a_N b_N \end{bmatrix}$

Цикл. Фурье

$a_{ii} = c_i \sim a_{11} = c_1 , \; a_{22} = c_2 , \ldots \; a_{NN} = c_N$

П1 $c_{ij} = a_{ik} b_{kj} \sim$? $c_{11} = a_{11} b_{11} + a_{12} b_{21} + \ldots \ldots a_{1N} b_{N1}$.

c_{12}

$\vdots$

П2 $\mathbb{R}^3$

$a_{ij} a_{ji}$ $\qquad c_i = \epsilon_{ijk} a_j b_k$ $\qquad c_{ij} = a_i b_j$.

$\mathbb{R}^N$

$i \; j$

$1 \; 1$
$1 \; 2$
$\vdots$
$1 \; N$ — 1 стр

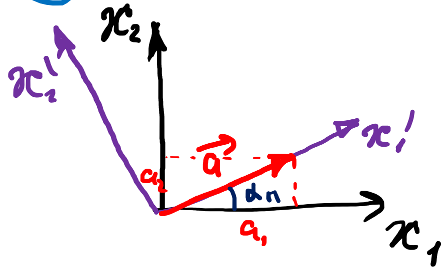
$2 \; 1$
$2 \; 2$
$\vdots$
$2 \; N$

$i \; j \; k$

$\mathbb{R}^N$ $\quad i,j,k\ldots = 1\ldots N$. Ком-ты тензоров ранга 1 и выше изм. при повороте координат

	Т-р 0 р	Т-р 1 го ранга	Т-р n-го ранга
Нач. коорд x_i	a	$\vec{a} = [[a_i]]$	$\overset{n}{T}_a = [[a_{\underbrace{i,j\ldots k}_{n}}]]$
После поворота x_i'	a	$\vec{a}' = [[a_i']]$	$\overset{n}{T}_a' = [[a'_{i,j\ldots k}]]$

П1 $\mathbb{R}^2$



$x_i : \vec{a} = [[a_i]]$

$x_i' : \vec{a}' = [[a_i']]$

$$\alpha_{ij} = \cos \widehat{x_i' x_j} \quad \sim \mathbb{R}^N$$

$$\alpha_{11} = \cos \widehat{x_1' x_1}$$

$((\alpha_{ij}))$ – матричн. скобки

Обобщ. опред. : $\mathbb{R}^N$

Тензор n-го ранга это мат. вел-на, хар. N^n комп., кажд. из кот. при повороте коорд. изм. по закону:

$\boxed{a' = a}$ скаляр, Т-ор 0-го ранга

$\boxed{a_i' = \alpha_{ij} a_j}$ вектор = Т-ор 1 ранга

$\boxed{a'_{ij} = \alpha_{ik}\alpha_{jm} a_{km}}$ Т-р 2 ранга

$\boxed{a'_{i..j} = \alpha_{ik}\ldots\alpha_{jm} a_{k\ldots m}}$ Т-ор ранга n

1.1. Транспонирование $M_a \to M_a^T$

$$M_a^T = ((a^T_{ij})) \; ; \quad a^T_{ij} = a_{ji} \; ; \quad a^T_{11} = a_{11} \, , \; a^T_{12} = a_{21} \, \ldots$$

1.2. Симметричная M_b и альтерн. M_c части м-цы M_a

$$M_b = \frac{1}{2}\left(M_a + M_a^T\right) \to b_{ij} = \frac{1}{2}\left(a_{ij} + a_{ji}\right)$$

$$M_c = \frac{1}{2}\left(M_a - M_a^T\right) \to c_{ij} = \frac{1}{2}\left(a_{ij} - a_{ji}\right)$$

$$\boxed{M_b + M_c = M_a}$$

1.3. Умножение м-ц

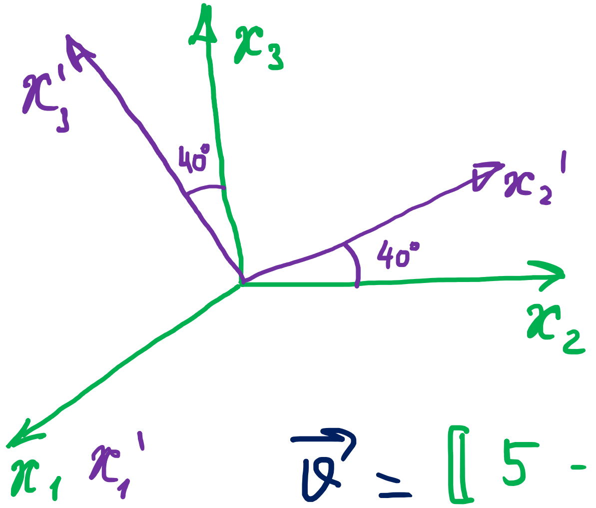
$$M_d = M_b M_c \qquad d_{ij} = b_{ik} c_{kj}$$

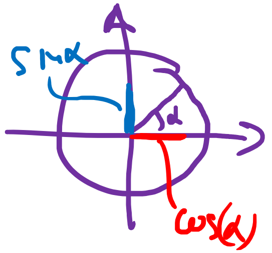
$$d_{11} = b_{11} c_{11} + b_{12} c_{21} + b_{13} c_{31} .$$

$$d_{12} = b_{11} c_{12}$$

1.2. Определить комп-ты матрицы.

1.3. Преобразоват комп-ты вектора $\vec{v}$ и тензора T_a





Поворот вокр x_1 на $40°$

$$\alpha_{ij} = \cos \widehat{X_i' X_j} = \begin{pmatrix} \cos(0°) & \cos(90°) & \cos(90°) \\ \cos(90°) & \cos(40°) & \cos(50°) \\ \cos(90°) & \cos(130°) & \cos(40°) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0.766 & 0.643 \\ 0 & -0.643 & 0.766 \end{pmatrix}.$$

$$\vec{v} = [5\ \ -1\ \ 2] = [5\ \ 0{,}52\ \ 2{,}18].$$

$$\boxed{v_i' = \alpha_{ij} v_j}$$

$$v_1' = \alpha_{11} v_1 + \alpha_{12} v_2 + \alpha_{13} v_3 =$$

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2} = \sqrt{v_i v_i}$$

Действия над тензорами. R^N

Тензорная форма

Скалярная форма

1. Сумма

$$\overset{n}{T}_c = \overset{n}{T}_a + \overset{n}{T}_b \qquad c_{\underbrace{i..j}_{n}} = a_{i..j} + b_{i..j}.$$

2. П-скалярное произв.

$$\overset{m+n-2p}{T}_c = \overset{m}{T}_a \, ⓟ \, \overset{n}{T}_b \qquad c_{i..jr..s} = a_{\underbrace{i..j\,k..l}_{m}} \cdot b_{\underbrace{k..l\,r..s}_{n}}$$

2.1. $m=n=p=0$ $\qquad \overset{0}{T}_c = \overset{0}{T}_a ⓪ \overset{0}{T}_b \qquad c = a\,b$

2.2. $m=n=p=1$ $\qquad \overset{0}{T}_c = \overset{1}{T}_a \cdot \overset{1}{T}_b \qquad c = a_i b_i$

2.3 $m>1,\ n=p=0$ $\qquad \overset{m}{T}_c = \overset{m}{T}_a \cdot \overset{0}{T}_b \qquad c_{\underbrace{i..j}_{m}} = a_{i..j}\, b$

2.4 $m=n=p>1$ — полное скалярное пр-е

$$\overset{0}{T}_c = \overset{m}{T}_a \cdot \overset{n}{T}_b \qquad c = a_{\underbrace{i..j}_{m}}\, b_{\underbrace{i..j}_{n}}, \quad m = n$$

2.5 $m=n,\ p=0$ — тензорное произв.

$$\overset{m+n}{T}_c = \overset{m}{T}_a \otimes \overset{n}{T}_b \qquad c_{i..jr..s} = a_{i..j}\, b_{r..s}$$

П $m=n=1,\ p=0$ $\qquad \overset{2}{T}_c = \vec{a} \otimes \vec{b} \qquad c_{ik} = a_i b_k$

① → ·/·/

ⓟ → ·

⓪ → $\otimes$

$c_{11} = a_1 b_1$
$c_{12} = a_1 b_2$
$c_{13} = a_1 b_3$

Тенз. Скалярные

3. П-векторные пр-е

$$\overset{m+n-p}{T}_c = \overset{m}{T}_a \times_p \overset{n}{T}_b$$

$$c_{i..j\,f..t\,u..r} = \underbrace{\varepsilon_{fvq\ldots} \ldots \varepsilon_{tkr}}^{p}\, a_{i..j\,\overbrace{v..k}^{p}}\, b_{q..r\,u..w}.$$

Символ Леви-Чивиты

$$\varepsilon_{i..j} = \begin{cases} 1, & \text{если перестановка четная} \\ -1, & \text{если -//- -//- нечетная} \\ 0 & \text{- ост. сл.} \end{cases}$$

$$R^3 \quad \varepsilon_{ijk} = \begin{cases} 1 & (123,\ 231,\ 312) \\ -1 & (132\ \ 321\ \ 213) \\ 0 \end{cases}$$

$i, j, k = 1 \ldots 3$

1 3 2

3.1. $m = n = p = 1$
cross product

$$\overset{1}{T}_c = \overset{1}{T}_a \times \overset{1}{T}_b$$

$$c_f = \varepsilon_{fvq} a_v b_q$$

Пр. $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$, R^3,

$$c_1 = \cancel{\varepsilon_{111} a_1 b_1} + \cancel{\varepsilon_{112} a_1 b_2} + \cancel{\varepsilon_{113} a_1 b_3} + \cancel{\varepsilon_{121} a_2 b_1} + \cancel{\varepsilon_{122} a_2 b_2} + \underbrace{\varepsilon_{123}}_{=1} a_2 b_3 + \cancel{\varepsilon_{131} a_3 b_1} + \underbrace{\varepsilon_{132}}_{=-1} a_3 b_2 + \cancel{\varepsilon_{133} a_3 b_3} =$$

$$= \underline{a_2 b_3 - a_3 b_2}$$

$$c_2 = \varepsilon_{231} a_3 b_1 + \varepsilon_{213} a_1 b_3 = \underline{a_3 b_1 - a_1 b_3}.$$

$$c_3 = \varepsilon_{312} a_1 b_2 + \varepsilon_{321} a_2 b_1 = \underline{a_1 b_2 - a_2 b_1}$$

$$\vec{c} = \left\| \begin{matrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{matrix} \right\|$$

01.09.2021. Лекция **1. –** Кинематика сплошных сред

1.1 Напоминание

1.2 Лагранжевы и Эйлеровы координаты

Малые деф.

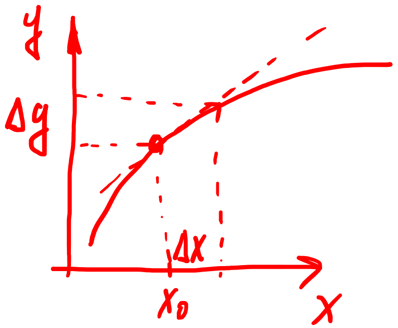
1.3 Перемещения и деформации. Формула Коши

1.4 Условие совместности деформаций

1.5 Поле скоростей

1.6 Тензор скоростей деформаций

1.7 Условие совместности скоростей деформаций



$$\Delta y = \underbrace{tg\alpha\, \Delta x}_{dy} + \delta(x, \Delta x)$$

$$\boxed{dy = y' dx}$$

$\Delta x \to 0$

$\Delta y \approx y' dx$

$y = x$ $\quad dy = dx = 1\Delta x \Rightarrow dx = \Delta x$

$dy = y' dx$ $\quad \boxed{y' = \frac{dy}{dx}}$ $\quad \frac{\partial y}{\partial x}$

Функция

$y(x) = x^2$

$y(2) = 4$

число число

Функционал

$J[y(x)] = \int_0^1 y(x)dx$

$J[x^2] = \frac{1}{3}$

ф-я число

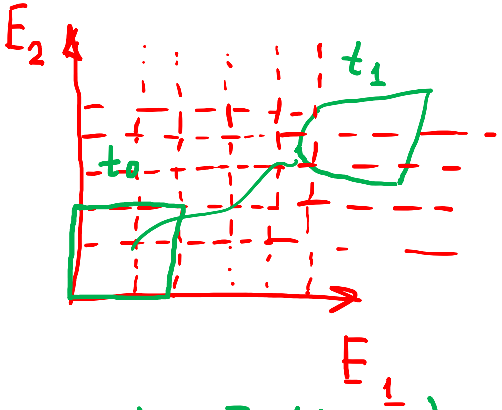
Оператор

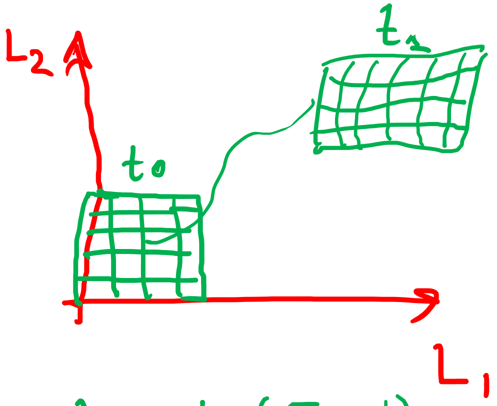
$\frac{\partial y}{\partial x}$

$y = x^2$ $\quad \frac{\partial y}{\partial x} = 2x$

ф-я ф-я.

1.2. Лагр и Эйл. подходы.





$E_i = E_i(L_j, t)$ $L_i = L_i(E_j, t) \to \boxed{\dfrac{d\vec{L}}{dt} = 0}$

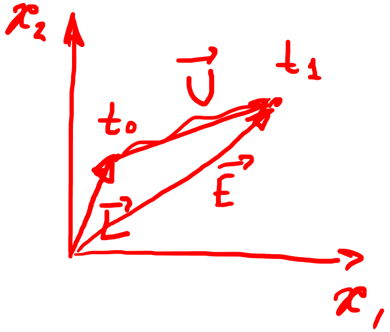
$\nabla\varphi = [\![\dfrac{\partial\varphi}{\partial x_i}]\!]$

$\nabla\cdot\vec{a} = \dfrac{\partial a_i}{\partial x_i}$

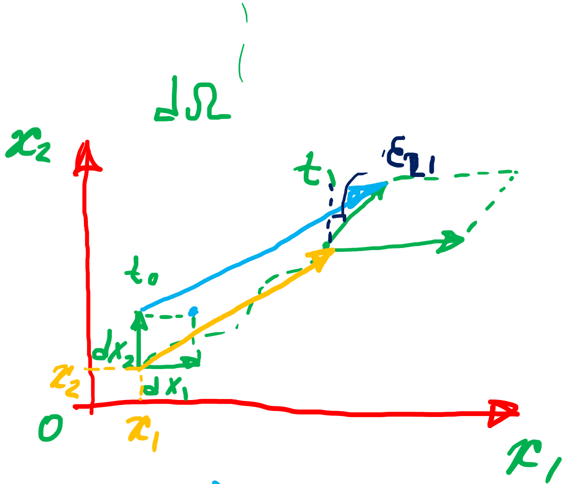
$\nabla\cdot T_a = [\![\dfrac{\partial a_{ij}}{\partial x_i}]\!]$

$\nabla\otimes\vec{a} = [\![\dfrac{\partial a_j}{\partial x_i}]\!]$

1.3



$\vec{U} = \vec{E} - \vec{L}$



$\vec{U}(x_1, x_2)$

$\vec{U}(x_1, x_2 + dx_2)$

$\vec{U}(x_1 + dx_1, x_2)$

$\vec{U}(x_1 + dx_1, x_2 + dx_2)$

$d\vec{U} = (\vec{U}\otimes\nabla)\cdot d\vec{x}$ $\nabla\otimes\vec{U}$ – дисторция Distortion

$\left\|\dfrac{\partial u_j}{\partial x_i}\right\| \ll 1$

$T_\varepsilon = [\![\varepsilon_{ij}]\!] = \frac{1}{2}(\nabla\otimes\vec{U} + \vec{U}\otimes\nabla)$; $\boxed{\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u_j}{\partial x_i} + \dfrac{\partial u_i}{\partial x_j}\right)}$ – ф-ла Коши в кинем.

ε_{ii} – лин. деф $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji}$ – сдвиг

По станд. проц. T_ε можно прив. к диаг. виду $T_\varepsilon = \left[\!\left[\begin{matrix}\varepsilon_1 & 0 & 0\\ 0 & \varepsilon_2 & 0\\ 0 & 0 & \varepsilon_3\end{matrix}\right]\!\right]$

$\varepsilon_1 \geqslant \varepsilon_2 \geqslant \varepsilon_3$

По др. станд. проц. $T_\varepsilon = \underbrace{S_\varepsilon}_{\text{хар. изм объема}} + \underbrace{D_\varepsilon}_{\text{формы}}$

$\varepsilon_0 = \frac{\varepsilon_{ii}}{3} = \frac{\varepsilon_{11}+\varepsilon_{22}+\varepsilon_{33}}{3}$; $S_\varepsilon = \varepsilon_0 T_\delta$, $T_\delta = [\![\delta_{ij}]\!]$.

$D_\varepsilon = T_\varepsilon - S_\varepsilon = [\![e_{ij}]\!]$

По др. станд. проц. $I^1 = e_{ii} = 0$, $I^2 = \frac{1}{2} e_{ij} e_{ji}$.

$\boxed{\Gamma = \sqrt{2 e_{ij} e_{ji}}}$ – инт. сдвиг. деф.

Сопр = ... деформ

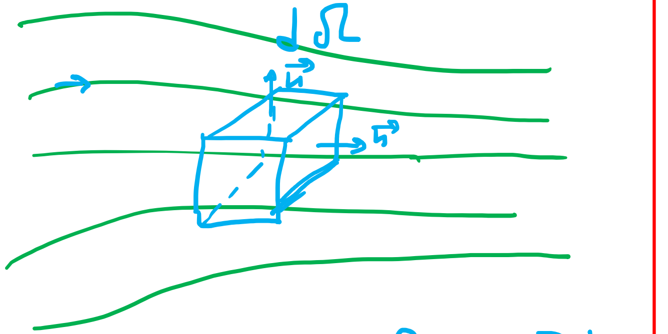
1.4 Усл. совм. деф.

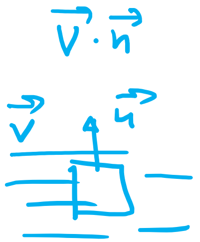
$\boxed{\nabla_2 \times T_\varepsilon = 0}$ у.с.д. Сен-Венана.

$\nabla_2 = \nabla \otimes \nabla = \left[\!\left[\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}\right]\!\right]$

1.5. Поле скоростей $\vec V = \vec V(x_i(t), t)$

$$\vec V = \frac{d\vec U}{dt} \qquad \nabla\cdot\vec V = 0$$

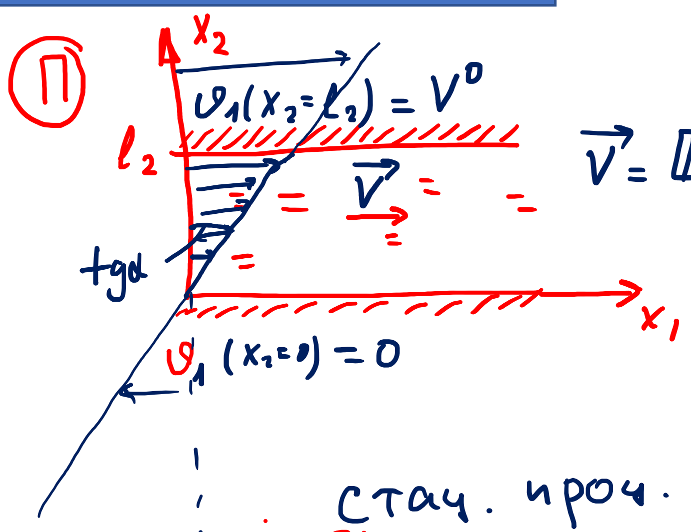




$$\int_S \vec V\cdot\vec n\,dS = \int_\Omega \nabla\cdot\vec V\,d\Omega$$

ф-ла Остроград-Гаусса

П



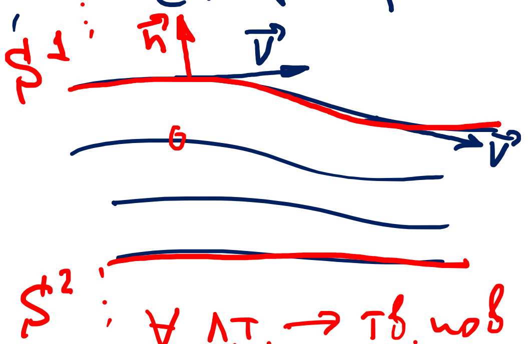
$\vec V = [\,v_1(x_2)\ 0\,]$

$$\boxed{v_1 = \frac{V^0}{l_2}\,x_2}$$

$v_1(0) = 0$

$v_1(l_2) = V^0$

стац. проц.

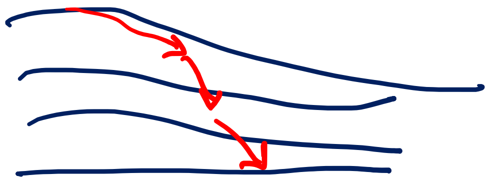


$$Q = \int_{S_1} \vec n\cdot\vec V\,dS_1 = 0$$

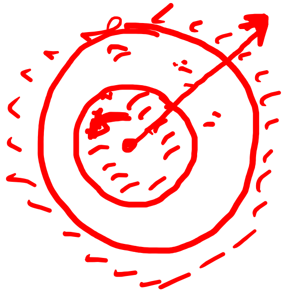
$\forall$ л.т. $\to$ тв. пов

Причина затверд.

нестац.



$$\boxed{\frac{\partial f(x_i(t),t)}{\partial t} = 0}$$



~~По станд. проч.~~

Тензор скор. деф-ий

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}(x_i(t),t)}{dt}, \qquad \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \underbrace{\vec{v}\cdot(\overbrace{\nabla\otimes\vec{v}}^{\text{скор. деф.}})}_{\text{конвект. слаг.}}$$

$$\boxed{T_\xi = [\![\xi_{ij}]\!] = \frac{1}{2}\left(\nabla\otimes\vec{v} + \vec{v}\otimes\nabla\right)}$$ – ф. Стокса

$$\xi_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_j}{\partial x_i} + \frac{\partial v_i}{\partial x_j}\right)$$

По станд. проч. $T_\xi = \left[\!\!\left[\begin{matrix} \xi_1 & 0 & 0 \\ 0 & \xi_2 & 0 \\ 0 & 0 & \xi_3 \end{matrix}\right]\!\!\right]$.

По др. ст. проч. $T_\xi = S_\xi + D_\xi$; $S_\xi = \xi_0 \cdot T_\delta$; $\xi_0 = \xi_{ii}/3$

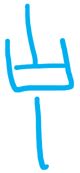
$$D_\xi = [\![\eta_{ij}]\!] \to H = \sqrt{2\eta_{ij}\eta_{ij}} = 2\|\eta^{II}\|$$

инт. сдвиговых скоростей деф.

Усл. совм. скор. деф. $\boxed{\nabla_2 \times T_\xi = 0}$

ξ, ξ (кси)

H, η эта



сопр = ... скорость деф.

Практика 1.

Дано: $\vec{U} = [\![\overset{u_1}{x_1 x_2} \quad \overset{u_2}{5x_1} \quad \overset{u_3}{0}]\!]$

1. Найти T_ε.

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)$$

$$\varepsilon_{11} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial (x_1 x_2)}{\partial x_1} + \frac{\partial (x_1 x_2)}{\partial x_1}\right) = x_2$$

$$\varepsilon_{12} = \frac{1}{2}\left(x_1 + 5\right) = \frac{x_1+5}{2}$$

$$\varepsilon_{13} = \frac{1}{2}\left(\quad \right) = 0$$

$$\varepsilon_{21} = \frac{1}{2}\left(5 + x_1\right) = \frac{x_1+5}{2}$$

$$\varepsilon_{22} = \frac{1}{2}\left(0 + 0\right) = 0$$

$$\varepsilon_{23} = \frac{1}{2}\left(0 + 0\right) = 0$$

$$\varepsilon_{31} = \frac{1}{2}\left(0\right) = 0$$

$$\varepsilon_{32} = 0$$

$$\varepsilon_{33} = 0$$

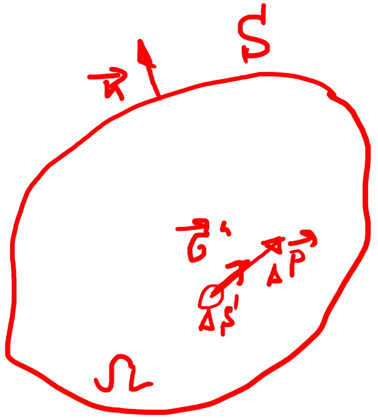
$$T_\varepsilon = \begin{bmatrix} x_2 & \frac{x_1+5}{2} & 0 \\ \frac{x_1+5}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Силы

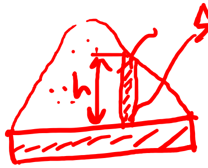
~~Точечн. (расп. в точке)~~

Поверхн. силы (распр. по пов-ти)

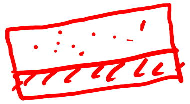
Объемные силы (распред. по объему)



$$\boxed{\vec\sigma^n = \lim_{\Delta S\to 0}\frac{\Delta\vec P}{\Delta S}} = \frac{d\vec P}{dS}$$



$\dfrac{\cancel{\Delta S}\cdot h\cdot\rho g}{\cancel{\Delta S}}$ = давл. перен



– давл. однородное =

= $\dfrac{\text{вес песка}}{\text{пл. стола}}$

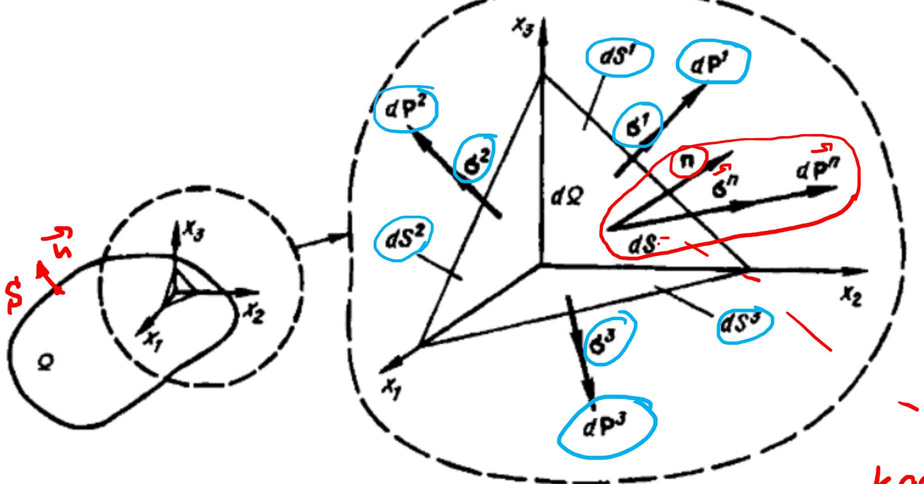
$$\vec\sigma^n = \frac{d\vec P}{dS}$$

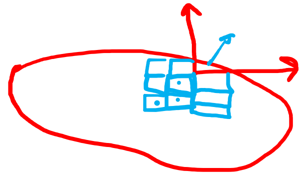
$$\vec\sigma^n\, dS = d\vec P$$

$$\int_S \vec\sigma^n\, dS = \int_S d\vec P$$

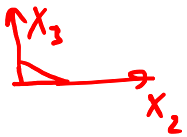
$$\int \vec\sigma^n\, dS = \vec P$$

$$\boxed{\vec P = \int_S \vec\sigma^n\, dS}$$





$$\vec{\sigma}^n = \frac{d\vec{P}}{dS}$$



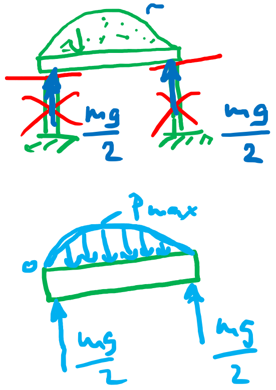
нормальные

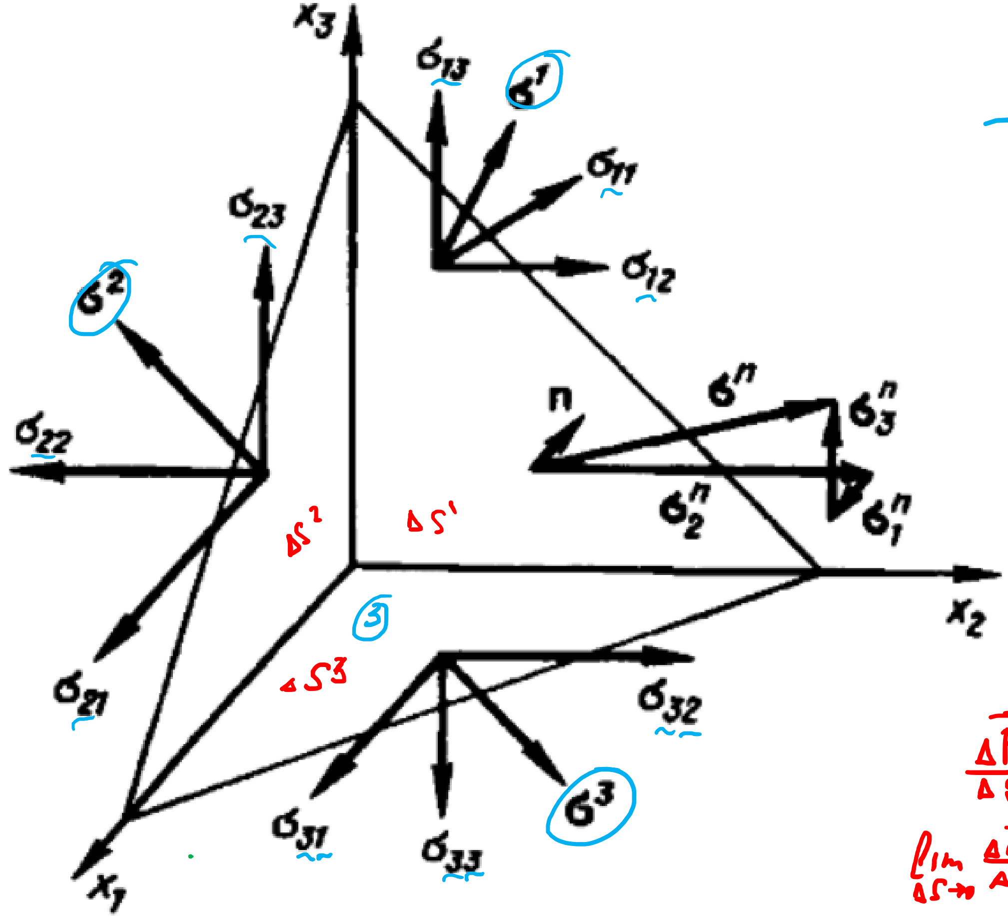
касательные напр.

$$T_\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix}$$ – Тензор напряжений

РОЗУ

разр
отб
замен
уравн





Рассм ~~малый объем~~ $\Delta\Omega$, ΔS, $\vec{n} = [n_i]$

$$\boxed{\Delta S^i = \Delta S\, n_i}$$

На тело $\Delta\Omega$ действ внеш. сила $\Delta\vec{P}^n$, внутр силы $\Delta\vec{P}^i$ и объемная сила $\rho\Delta\Omega\vec{g}$

$$\Delta\vec{P}^n = \Delta\vec{P}^1 + \Delta\vec{P}^2 + \Delta\vec{P}^3 + \vec{g}\rho\Delta\Omega \quad : \Delta S$$

$$\frac{\Delta\vec{P}^n}{\Delta S} = \frac{\Delta\vec{P}^1}{\Delta S^1}n_1 + \frac{\Delta\vec{P}^2}{\Delta S^2}n_2 + \frac{\Delta\vec{P}^3}{\Delta S^3}n_3 + \rho\vec{g}\frac{\Delta\Omega}{\Delta S};\quad \Delta S = \frac{\Delta S^i}{n_i} = \frac{\Delta S^1}{n_1} = \frac{\Delta S^2}{n_2} = \frac{\Delta S^3}{n_3}$$

$\Delta\Omega = \Delta x_1 \Delta x_2 \Delta x_3$

$\Delta S = \Delta x_1 \Delta x_2$

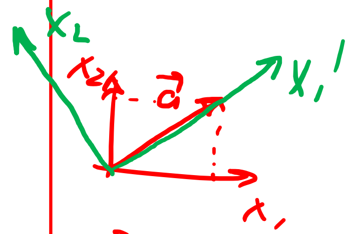
$\Delta x_i \ll 1$

$$\lim_{\Delta S\to 0}\frac{\Delta\vec{P}^n}{\Delta S} = \lim_{\Delta S\to 0}\frac{\Delta\vec{P}^i}{\Delta S^i}n_i + \rho\vec{g}\cdot\cancel{\lim_{\Delta S\to 0}\frac{\Delta\Omega}{\Delta S}} \to 0$$

Формула Коши в статике

$$\boxed{\vec{\sigma}^n = \vec{n} \cdot T_\sigma}$$

Объемные силы не возникают поверхн. напряжений!



$\vec{a} = [a_1\ a_2\ a_3]$

$\vec{a} = [a_1\ 0\ 0]$

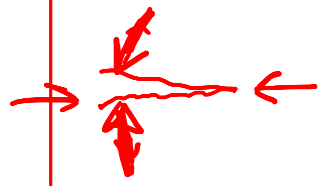
По станд. проч. T_σ м. привести к диаг. виду $T_\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix}$

По др. станд. пр $T_\sigma = \underbrace{S_\sigma}_{\text{вид. изм. объема}} + \underbrace{D_\sigma}_{\text{вид. изм формы}}$, $D_\sigma = [S_{ij}]$

$$S_\sigma = \sigma_0 T_\delta = \sigma_0 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\sigma_0 = \frac{\sigma_{ii}}{3} = -p_0$$

Вв. понятие интенсивность касательных напряжений $T = \sqrt{\frac{1}{2} S_{ij} S_{ji}}$



22.09.2021. Лекция **3**. – Динамика сплошных сред

1. Разминка
2. Лирическое отступление: дифференц. сложных функций
3. Уравнение неразрывности
4. Уравнение движения
5. Баланс мощностей
6. Уравнение баланса тепла