

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего профессионального образования

«Национальный исследовательский технологический университет «МИСиС»

СТАРООСКОЛЬСКИЙ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ ИМ. А.А. УГАРОВА

(филиал) федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего профессионального образования

«Национальный исследовательский технологический университет «МИСиС»

СТИ НИТУ «МИСиС»

Кафедра ТОММ

Корнаева Е.П., Корнаев А.В.

МЕХАНИКА СПЛОШНЫХ СРЕД

Методические указания к выполнению лабораторных работ

для студентов направления 150100

«Металлургия»

(всех форм обучения)

Старый Оскол · 2013

УДК 621.771

ББК 34.62

К 67

Рецензент: к.т.н., профессор Кравченко О.Ф.

к.ф.-м.н. Корнаева Е.П., к.т.н., доцент Корнаев А.В.

Механика сплошных сред. Методические указания к выполнению лабораторных работ. Старый Оскол, СТИ НИТУ «МИСиС», 2013, - 33с.

Методически указания соответствует программе учебной дисциплины "Механика сплошных сред" для студентов направления 150100 «Металлургия» всех форм обучения.

Методические указания предназначены для выполнения лабораторных работ с использованием ЭВМ и специализированного программного обеспечения для инженерных расчетов. Методические указания содержат перечень лабораторных работ, их цели, краткие теоретические сведения, указания к выполнению и варианты лабораторных работ по курсу «Механика сплошных сред».

© Кафедра ТОММ СТИ НИТУ «МИСиС»

© Корнаева Е.П., Корнаев А.В.

СОДЕРЖАНИЕ

Условные обозначения, индексы и сокращения механики сплошных сред..	3
ВВЕДЕНИЕ	6
Лабораторная работа №1 «Действия над матрицами, тензорами и анализ тензорных полей»	7
Лабораторная работа №2 «Кинематика сплошных сред»	15
Лабораторная работа №3 «Кинематика течения несжимаемой среды, движущейся с обтеканием твердых препятствий»	19
Лабораторная работа №4	25
«Статика сплошных сред»	25
Лабораторная работа №5 «Исследование стационарного движения сплошной несжимаемой среды»	28
РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА	32

Условные обозначения, индексы и сокращения механики сплошных сред

1. Действия над тензорами и анализ тензорных полей¹:

ϵ_{ijk} - символ Т.Леви-Чивиты,

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} 1 & \text{четная перестановка индексов (123, 231, 312);} \\ 0 & \text{имеются повторяющиеся индексы;} \\ -1 & \text{нечетная перестановка индексов (132, 321, 213);} \end{cases}$$

δ_{ij} - символ Л.Кroneкера $\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i=j; \\ 0 & i \neq j; \end{cases}$

T_δ – единичный тензор с компонентами δ_{ij} ;

M_α - матрица направляющих косинусов преобразования координат с компонентами $\alpha_{ij} = \cos(x'_i x_j)$;

a_0 - среднее значение тензора, $a_0 = a_{ii} / N$, N - размерность пространства;

S_a – сферическая часть тензора, $S_a = a_0 T_\delta$;

D_a – девиаторная часть тензора $D_a = T_a - S_a$;

∇ - векторный дифференциальный оператор У.Р.Гамильтона (набла) с

компонентами $\nabla = \left[\left[\frac{\partial}{\partial x_i} \right] \right]$;

$\Delta = \nabla^2 = \nabla \cdot \nabla$ - скалярный дифференциальный оператор П.С.Лапласа с ком-

понентами $\Delta = \left[\left[\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_i} \right] \right]$.

¹ В работе используется правило А. Эйнштейна и исключение из него А.И. Лурье.

Правило А. Эйнштейна: если в одночлене (например, $a_i b_i$ или $k f_k$, или $c_j d^j$ и т.п.), содержащем индексированные переменные, встречаются повторяющиеся индексы или одинаковые с индексами буквы, то по этим индексам или индексам и буквам производится суммирование ($a_i b_i = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots$ или $k f_k = f_1 + 2f_2 + \dots$, или $c_j d^j = c_1 d + c_2 d^2 + \dots$ и т.п.)

Исключение А.И. Лурье: суммирование в одночлене по повторяющимся индексам или индексам и одинаковым с ними буквам не производится, если такие индексы или буквы в любом виде встречаются с обеих сторон знака равенства (неравенства, тождества и т.п.) в уравнениях или равенствах (неравенствах, тождествах и т.п.), например: $c_i = a_i b_i \Rightarrow c_1 = a_1 b_1$; $c_2 = a_2 b_2$; ... или $s_k = k f_k \Rightarrow s_1 = f_1$; $s_2 = 2f_2$; ..., или $g_j = c_j d^j \Rightarrow g_1 = c_1 d$; $g_2 = c_2 d^2$; ...

2. Кинематические параметры и координаты:

x_i – декартовы координаты ($i = \overline{1,3}$);

t – время;

\vec{u} – вектор перемещения с компонентами u_i ;

T_ε – тензор деформаций с компонентами $\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$;

ε_0 – средняя деформация, $\varepsilon_0 = \varepsilon_{ii} / N$;

S_ε – сферическая часть тензора деформаций, $S_\varepsilon = \varepsilon_0 T_\delta$;

D_ε – девиатор тензора деформаций с компонентами $e_{ij} = \varepsilon_{ij} - \varepsilon_0 \delta_{ij}$;

$\Gamma = \sqrt{2e_{ij}e_{ij}}$ – интенсивность сдвиговых деформаций;

\vec{V} – вектор скорости с компонентами V_i ;

T_ξ – тензор скоростей деформаций с компонентами $\xi_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial V_i}{\partial x_j} + \frac{\partial V_j}{\partial x_i} \right)$;

ξ_0 – средняя скорость деформации, $\xi_0 = \xi_{ii} / N$;

S_ξ – сферическая часть тензора скоростей деформаций, $S_\xi = \xi_0 T_\delta$;

D_ξ – девиатор тензора скоростей деформаций с компонентами

$\xi_{ij} = \xi_{ij} - \xi_0 \delta_{ij}$;

$H = \sqrt{2\xi_{ij}\xi_{ij}}$ – интенсивность сдвиговых скоростей деформаций;

3. Статические параметры:

T_σ – тензор напряжений с компонентами σ_{ij} ;

σ_0 – среднее напряжение, $\sigma_0 = \sigma_{ii} / N$, противоположно значению гидростатического давления $p_0 = -\sigma_0$;

S_σ – сферическая часть тензора напряжений, $S_\sigma = \sigma_0 T_\delta$;

D_σ – девиатор тензора напряжений с компонентами $s_{ij} = \sigma_{ij} - \sigma_0 \delta_{ij}$;

$T = \sqrt{0.5s_{ij}s_{ij}}$ – интенсивность касательных напряжений;

3. Динамические (термодинамические) параметры:

θ – температура;

ρ – плотность;

μ – коэффициент динамической вязкости;

a – коэффициент температуропроводности;

c – теплоемкость;

\vec{f} – объемная (массовая) сила, например, сила гравитации.

ВВЕДЕНИЕ

Механика сплошных сред занимается изучением наиболее распространенного способа количественного описания движения сред с учетом деформационных и тепловых явлений на основе гипотезы сплошности с применением математического аппарата анализа и синтеза.

Лабораторные работы по курсу «Механика сплошных сред» предназначены для приобретения умения и навыков студентов выполнять решение задач механики сплошных сред с использованием современного программного обеспечения.

Методические указания содержат краткие теоретические сведения, варианты заданий и порядок их выполнения. Методические указания составлены на основании материалов учебника Б.В. Кучеряева «Механика сплошных сред» [1].

Лабораторная работа №1

«Действия над матрицами, тензорами и анализ тензорных полей»

Цель работы: научиться читать, записывать и программировать с использованием специализированных программ на ЭВМ математические операции над матрицами и тензорами, а также операции анализа тензорных полей.

Формулировка задачи: используя специализированное программное обеспечение выполнить операции над матрицами и тензорами в соответствии с вариантами. Результаты работы представить в виде отчета, содержащего название, цель, формулировку задачи, краткие теоретические сведения и листинг программы с комментариями.

Краткие теоретические сведения

Основными действиями над матрицами являются: сложение (вычитание), произведение, транспонирование, альтернирование и симметрирование.

Операция сложения (вычитания) выполняется над матрицами одинаковой размерности, при этом выполняется сложение (вычитание) соответствующих компонент $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$.

Транспонированной матрицей M_a^T называется матрица, компоненты которой определяются выражением $a_{ik}^T = a_{ki}$.

Матрицу M_a можно разложить на симметричную M_b и альтернативную M_c части:

$$\begin{aligned} M_b &= \frac{1}{2}(M_a + M_a^T) \\ M_c &= \frac{1}{2}(M_a - M_a^T) \end{aligned} \tag{1.1}$$

Формула (1.1) в скалярной форме записи (записи через компоненты) имеет вид:

$$\begin{aligned} b_{ik} &= \frac{1}{2}(a_{ik} + a_{ki}), \\ c_{ik} &= \frac{1}{2}(a_{ik} - a_{ki}). \end{aligned} \quad (1.2)$$

Для определения произведения двух матриц M_b и M_c количество столбцов первой матрицы должно совпадать с количеством строк второй ($M_{b(m \times n)} M_{c(n \times p)} = M_{d(m \times p)}$), тогда произведение определяется по формуле:

$$d_{ij} = b_{ik} c_{kj}. \quad (1.3)$$

В механике сплошных сред приходится иметь дело с так называемыми тензорными величинами. Из школьного курса физики известны понятия скалярных (температура, масса, плотность) и векторных (скорость, ускорение, сила) величин. Из институтского курса механики известны понятия тензорных величин (тензор напряжения, тензор деформации). С позиции тензорной алгебры [1] все перечисленные величины являются тензорами, и все они определяются законом преобразования компонент при повороте множества координат x_i («старые» координаты) в множество координат x'_i («новые» координаты), характеризуемом матрицей косинусов:

$$\alpha_{ij} = \cos \left(\hat{x'_i x_j} \right). \quad (1.4)$$

Тензором нулевого ранга a (скаляром) в N -мерном пространстве называется математическая величина, характеризующаяся $N^0=1$ количеством компонент, которая при повороте множества координат с помощью матрицы косинусов $((\alpha_{jk}))$ преобразуется по закону:

$$a' = a. \quad (1.5)$$

Тензором первого ранга \vec{a} (вектором) в N -мерном пространстве называется математическая величина, характеризующаяся $N^1=N$ количеством

компонент, каждая из которых при повороте множества координат с помощью матрицы косинусов $((\alpha_{jk}))$ преобразуется по закону:

$$a'_j = \alpha_{jk} a_k. \quad (1.6)$$

Тензором второго ранга T_a (тензором) в N -мерном пространстве называется математическая величина, характеризующаяся N^2 количеством компонент, каждая из которых при повороте множества координат с помощью матрицы косинусов $((\alpha_{jk}))$ преобразуется по закону:

$$a'_{jm} = \alpha_{jk} \alpha_{mp} a_{kp}. \quad (1.7)$$

О тензорах более высокого порядка n можно почитать в учебнике [1].

Прикладное значение имеет процедура разложения тензора² на его сферическую S_a и девиаторную D_a части. Сферической частью S_a тензора T_a называется тензор вида:

$$S_a = a_0 T_\delta, \quad (1.8)$$

где a_0 - среднее значение тензора T_a , $a_0 = a_{ii} / N$.

Девиаторная часть тензора D_a определяется как разность тензора T_a и его сферической части S_a .

В тензорной алгебре основными видами произведения тензоров являются скалярное, векторное и тензорное. Подробнее об общих правилах произведений тензоров произвольного ранга можно прочесть в учебнике [1]. Случаи произведений тензоров первого ранга рассмотрены ниже.

Скалярным произведением векторов \vec{u} и $\vec{\sigma}$ называется тензор нулевого ранга (скаляр) $c = \vec{u} \cdot \vec{\sigma}$, определяемый по формуле:

$$c = u_i \sigma_i \quad (1.9)$$

Векторным произведением векторов \vec{u} и $\vec{\sigma}$ называется тензор первого ранга (вектор) $\vec{c} = \vec{u} \times \vec{\sigma}$, компоненты которого определяются по формуле:

$$c_i = \epsilon_{ijk} u_j \sigma_k. \quad (1.10)$$

² Далее по тексту тензор второго ранга называется просто тензором.

Тензорным произведением векторов \vec{u} и $\vec{\sigma}$ называется тензор второго ранга (тензор) $T_c = \vec{u} \otimes \vec{\sigma}$, компоненты которого определяются по формуле:

$$c_{ij} = u_i \sigma_j. \quad (1.11)$$

Всякий симметричный тензор можно привести к главному (диагональному) виду. Главным направлением тензора T_a называется такой вектор \vec{y} , направление которого не изменяется при его скалярном умножении на тензор:

$$\vec{y} \cdot T_a = \lambda \vec{y}. \quad (1.12)$$

Уравнение (1.12) сводится к характеристическому уравнению вида:

$$-\lambda^3 + a^I \lambda^2 - a^{II} \lambda + a^{III} = 0, \quad (1.13)$$

где $a^I = a_{ii}$,

$$a^{II} = \frac{1}{2} \left((a^I)^2 - a_{ij} a_{ji} \right),$$

$$a^{III} = |a_{ij}|.$$

Величины a^I , a^{II} , a^{III} являются инвариантными (от англ. *invariant* - неизменный) к преобразованию координат. Уравнение (1.13) имеет три корня: λ_1 , λ_2 , λ_3 , которые могут быть определены по стандартной процедуре решения кубического уравнения [1], либо посредством использования стандартных функций определения корней алгебраических уравнений, заложенных программных комплексах. Затем корни уравнения ранжируют и присваивают соответствующие значения главным компонентам тензора:

$$T_a = \llbracket a_i \rrbracket = \begin{bmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 \end{bmatrix}, \quad a_1 \geq a_2 \geq a_3. \quad (1.14)$$

В качестве проверки следует сравнить значения инвариантов до и после преобразования компонент тензора.

Если каждой точке некоторой области пространства ставится в соответствие тензор T_a , то говорят, что в этой области задано тензорное поле T_a . Если тензор в каждой точке области не изменяется во времени, то поле такого тензора называется стационарным. Анализ тензорных полей удобно выполнять с помощью следующих дифференциальных операторов.

Оператор У.Р.Гамильтона (набла) с компонентами:

$$\nabla = \left[\left[\frac{\partial}{\partial x_i} \right] \right]. \quad (1.15)$$

По структуре оператор У.Р. Гамильтона является вектором с компонентами $\frac{\partial}{\partial x_i}$. По правилам скалярного произведения векторов определяются оператор

П.С.Лапласа:

$$\Delta = \nabla \cdot \nabla = \left[\left[\frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right) \right] \right] = \left[\left[\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_i} \right] \right]. \quad (1.16)$$

Основные операции анализа тензорных полей тензоров нулевого, первого и второго ранга рассмотрены ниже.

Градиент скалярного поля $\varphi = \varphi(x_i)$:

$$\nabla \varphi = \left[\left[\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right] \right]. \quad (1.17)$$

Как видно из (1.17) градиентом скалярного поля является вектор с компонентами $\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}$. Вектор градиента направлен в сторону наискорейшего роста

φ . Также возможно определение градиента тензоров более высокого порядка, интерес при последующем изучении предмета представляет градиент векторного поля \vec{a} :

$$\nabla \otimes \vec{a} = \left[\left[\frac{\partial a_j}{\partial x_i} \right] \right]. \quad (1.18)$$

Похожее на (1.18) тензорное произведение вида:

$$\vec{a} \otimes \nabla = \left[\left[\frac{\partial a_i}{\partial x_j} \right] \right], \quad (1.19)$$

называется производной вектора \vec{a} по векторному аргументу \vec{x} .

Дивергенция (от англ. *divergence* - отклонение) является дифференциальной операцией, применяемой для анализа тензорных полей тензоров первого ранга и выше, и определяется по правилам скалярного произведения оператора У.Р.Гамильтона и исследуемого тензора:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \vec{a} &= \frac{\partial a_i}{\partial x_i}, \\ \nabla \cdot T_a &= \left[\left[\frac{\partial a_{ij}}{\partial x_i} \right] \right]. \end{aligned} \quad (1.20)$$

Ротор (от англ. *divergence* - отклонение) является дифференциальной операцией, применяемой для анализа тензорных полей тензоров первого ранга и выше, и определяется по правилам векторного произведения оператора У.Р.Гамильтона и исследуемого тензора. Ротор вектора определяется по формуле:

$$\nabla \times \vec{a} = \left[\left[\epsilon_{ijk} \frac{\partial a_k}{\partial x_j} \right] \right]. \quad (1.21)$$

Порядок выполнения работы

Используя стандартные функции прикладного программного продукта необходимо выполнить следующие действия.

1. Задать матрицу $M_a = ((a_{ik}))$ (таблица 1.1), затем определить транспонированную матрицу M_a^T , а также ее симметричную M_b и альтернативную M_c части (1.1-1.2) и их произведение (1.3).

Таблица 1.1 – варианты заданий к пункту 1 лабораторной работы №1

Вариант 1	Вариант 2	Вариант 3	Вариант 4	Вариант 5
$\left(\begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 12 & 3 & -4 \\ 2 & 9 & 1 \end{pmatrix} \right)$	$\left(\begin{pmatrix} 8 & -5 & 10 \\ 2 & 10 & 3 \\ 1 & 13 & 6 \end{pmatrix} \right)$	$\left(\begin{pmatrix} 4 & 19 & 17 \\ 1 & 13 & 2 \\ 6 & 3 & -7 \end{pmatrix} \right)$	$\left(\begin{pmatrix} -1 & 3 & 19 \\ 5 & 13 & -7 \\ 5 & 7 & -4 \end{pmatrix} \right)$	$\left(\begin{pmatrix} 1 & 8 & 6 \\ 3 & -5 & 9 \\ 4 & -1 & 2 \end{pmatrix} \right)$
Вариант 6	Вариант 7	Вариант 8	Вариант 9	Вариант 10
$\left(\begin{pmatrix} 6 & 6 & -2 \\ 11 & 2 & 4 \\ 3 & 15 & 3 \end{pmatrix} \right)$	$\left(\begin{pmatrix} 7 & 9 & -11 \\ 2 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 1 \end{pmatrix} \right)$	$\left(\begin{pmatrix} 2 & 10 & 4 \\ 1 & -8 & 7 \\ 8 & 3 & -5 \end{pmatrix} \right)$	$\left(\begin{pmatrix} 13 & 12 & 3 \\ 9 & 8 & 7 \\ 15 & 4 & -2 \end{pmatrix} \right)$	$\left(\begin{pmatrix} 7 & 12 & -5 \\ 6 & 4 & 10 \\ 9 & 2 & 17 \end{pmatrix} \right)$

2. Задать вектор $\vec{v} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ и преобразовать его компоненты при повороте координат на угол α вокруг оси x_i (1.6).

Таблица 1.2 – варианты заданий к пункту 2 лабораторной работы №1

Вариант 1	Вариант 2	Вариант 3	Вариант 4	Вариант 5
$\alpha = 0.1\pi,$ x_1	$\alpha = 0.11\pi,$ x_2	$\alpha = 0.12\pi,$ x_3	$\alpha = 0.13\pi,$ x_1	$\alpha = 0.14\pi,$ x_2
Вариант 6	Вариант 7	Вариант 8	Вариант 9	Вариант 10
$\alpha = 0.15\pi,$ x_1	$\alpha = 0.16\pi,$ x_2	$\alpha = 0.17\pi,$ x_3	$\alpha = 0.18\pi,$ x_1	$\alpha = 0.19\pi,$ x_3

3. Задать вектор тензор T_a и определить его сферическую S_a (1.6) и девиаторную D_a части, а также определить главные компоненты тензора T_a (1.12 - 1.14). Проверить инварианты.

Таблица 1.3 – варианты заданий к пункту 3 лабораторной работы №1

Вариант 1	Вариант 2	Вариант 3	Вариант 4	Вариант 5
$\begin{bmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 1 \\ 5 & 1 & 3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 6 & 1 & 7 \\ 1 & 3 & 5 \\ 7 & 5 & 2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 5 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 2 \\ 3 & 2 & 2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 6 & 2 & 1 \\ 2 & 6 & 3 \\ 1 & 3 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 7 & 3 & 4 \\ 3 & 0 & 5 \\ 4 & 5 & 2 \end{bmatrix}$
Вариант 6	Вариант 7	Вариант 8	Вариант 9	Вариант 10
$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 6 & 3 \\ 2 & 3 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 7 & 3 & 4 \\ 3 & 0 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 5 & 1 & 3 \\ 1 & 6 & 2 \\ 3 & 2 & 2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 6 & 2 & 4 \\ 2 & 8 & 3 \\ 4 & 3 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 6 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & 5 \\ 1 & 5 & 2 \end{bmatrix}$

4. Задать тензорные поля $\varphi = \varphi(x_i)$ (скалярное поле) и $\vec{a} = \vec{a}(x_i)$ (векторное поле), затем определить в точке М (1, 2, 4): $\nabla \varphi$, $\nabla \cdot \vec{a}$, $\nabla \times \vec{a}$, $\nabla \otimes \vec{a}$, $\vec{a} \otimes \nabla$ (1.15 - 1.20). Построить график линий уровня $\nabla \varphi = const$

Таблица 1.4 – варианты заданий к пункту 4 лабораторной работы №1

Вариант 1	Вариант 2	Вариант 3	Вариант 4	Вариант 5
$\varphi = x_1 x_2$, $\vec{a} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix}$	$\varphi = x_1^2 x_2$, $\vec{a} = \begin{bmatrix} \frac{x_1^2}{x_2} & x_2 \end{bmatrix}$	$\varphi = x_1 x_2^2$, $\vec{a} = \begin{bmatrix} \frac{x_1}{x_2} & x_2 \end{bmatrix}$	$\varphi = x_1^3 x_2$, $\vec{a} = \begin{bmatrix} \frac{x_1^4}{x_2} & x_2 \end{bmatrix}$	$\varphi = x_1^2 x_2$, $\vec{a} = \begin{bmatrix} \frac{x_1^2}{x_2^2} & x_2 \end{bmatrix}$
Вариант 6	Вариант 7	Вариант 8	Вариант 9	Вариант 10
$\varphi = x_1 x_2$, $\vec{a} = \begin{bmatrix} x_1^2 & x_2 \end{bmatrix}$	$\varphi = x_1^2 x_2^3$, $\vec{a} = \begin{bmatrix} \frac{x_1^2}{x_2} & x_2 \end{bmatrix}$	$\varphi = x_1^2 x_2^2$, $\vec{a} = \begin{bmatrix} \frac{x_1^4}{x_2} & x_2 \end{bmatrix}$	$\varphi = x_1^3 x_2^2$, $\vec{a} = \begin{bmatrix} \frac{x_1^3}{x_2} & x_2 \end{bmatrix}$	$\varphi = x_1^2 x_2$, $\vec{a} = \begin{bmatrix} \frac{x_1^3}{x_2^2} & x_2 \end{bmatrix}$

Лабораторная работа №2

«Кинематика сплошных сред»

Цель работы: научиться выполнять построение и анализ полей кинематических величин.

Формулировка задачи: используя специализированное программное обеспечение выполнить построение полей кинематических величин. Результаты работы предоставить в виде отчета, содержащего название, цель, формулировку задачи, краткие теоретические сведения и листинг программы с комментариями.

Краткие теоретические сведения.

Если в области движения сплошной среды задано поле перемещений $\vec{u} = \vec{u}(x_i, t)$, то поле скоростей можно определить по формуле:

$$\vec{V} = \frac{d\vec{u}}{dt}, \quad (2.1)$$

где t - время.

Поле тензора деформаций может быть определено по формуле О.Коши [1,2]:

$$T_{\varepsilon} = \frac{1}{2}(\nabla \otimes \vec{u} + \vec{u} \otimes \nabla). \quad (2.2)$$

Тогда диагональные компоненты тензора деформаций T_{ε} характеризуют изменение линейных размеров окрестности материальной частицы, находящейся в начальный момент времени (до деформации) в точке $M(x_i)$. Боковые компоненты тензора деформаций T_{ε} характеризуют изменение угловых размеров окрестности материальной частицы, находящейся в начальный момент времени в точке $M(x_i)$.

Тензор деформаций T_{ε} по стандартной процедуре может быть разложен на сферическую S_{ε} и девиаторную $D_{\varepsilon} = \llbracket e_{ij} \rrbracket$ части, причем сфериче-

ская часть характеризует изменение объема окрестности материальной частицы, а девиаторная – изменение ее формы. Таким образом, в случае несжимаемости среды выполняется условие:

$$\varepsilon_{ii} = 0. \quad (2.3)$$

Важное значение имеет инвариантная характеристика движения среды называемая интенсивностью сдвиговых деформаций Γ , определяемая по формуле:

$$\Gamma = \sqrt{2e_{ij}e_{ji}}. \quad (2.4)$$

Если в области движения сплошной среды известно поле скоростей $\vec{V} = \vec{V}(x_i, t)$, то поле тензора скоростей деформаций может быть определено по формуле Дж.Стокса [1,2]:

$$T_{\xi} = \frac{1}{2}(\nabla \otimes \vec{V} + \vec{V} \otimes \nabla). \quad (2.5)$$

Тогда диагональные компоненты тензора скоростей деформаций T_{ξ} характеризуют изменение линейных размеров окрестности материальной частицы, находящейся в начальный времени t в точке $M(x_i)$. Боковые компоненты тензора скоростей деформаций T_{ξ} характеризуют изменение угловых размеров окрестности материальной частицы, находящейся в момент времени t в точке $M(x_i)$.

Тензор скоростей деформаций T_{ξ} по стандартной процедуре может быть разложен на сферическую S_{ξ} и девиаторную $D_{\xi} = \llbracket \eta_{ij} \rrbracket$ части, причем сферическая часть характеризует изменение объема окрестности материальной частицы, а девиаторная – изменение ее формы. Таким образом, в случае несжимаемости среды выполняется условие:

$$\xi_{ii} = 0. \quad (2.6)$$

Важное значение имеет инвариантная характеристика движения среды называемая интенсивностью сдвиговых скоростей деформаций H , определяемая по формуле:

$$H = \sqrt{2\eta_{ij}\eta_{ji}}. \quad (2.7)$$

Порядок выполнения работы.

По заданному полю перемещений (или скоростей) определить в момент времени $t = 1$ кинематические параметры материальной частицы, находящейся в начальный момент времени в точке $M(1, 1)$ (таблица 2.1).

Таблица 2.1 – Исходные данные к лабораторной работе №2

Вариант 1 поле перемещ..	Вариант 2 поле скоростей	Вариант 3 поле перемещ..	Вариант 4 поле скоростей	Вариант 5 поле перемещ.
$\begin{bmatrix} x_1^2 t \\ x_1 x_2 t \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} x_1 t + x_2 t \\ x_1 x_2 t \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} x_1^3 x_2 t \\ x_2^2 t \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} x_1 t + x_2 t \\ x_1^2 x_2 t \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} x_1 x_2^2 t \\ x_2^3 t \end{bmatrix}$
Вариант 6 поле скоростей	Вариант 7 поле перемещ.	Вариант 8 поле скоростей	Вариант 9 поле перемещ.	Вариант 10 поле скоростей
$\begin{bmatrix} x_1(x_2 + 1)t \\ x_1^2 x_2 t \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2x_1^2 x_2 t \\ x_2^2 t \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} x_1 x_2 t \\ x_1^2 x_2^3 t \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2x_1^2 x_2 t \\ x_1 x_2^2 t \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2x_1^2 t + x_2 t \\ x_1 x_2^3 t \end{bmatrix}$

Необходимо определить:

1. тензор деформаций T_ε (тензор скоростей деформаций T_ξ) и его дивидендную и сферическую части;
2. интенсивность сдвиговых деформаций Γ (сдвиговых скоростей деформаций H).

По результатам расчета оценить, что произошло с объемом материальной частицы (уменьшился, не изменился, увеличился).

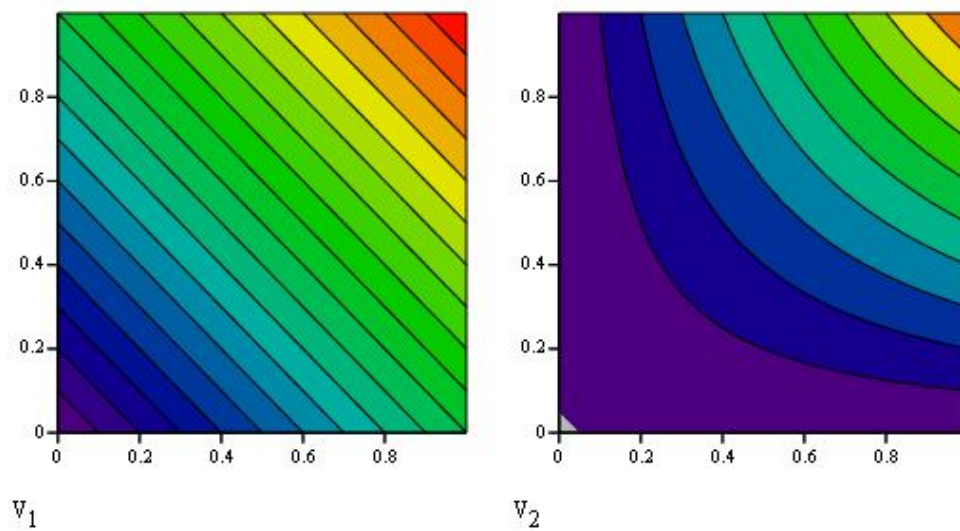


Рисунок 2.1 – Контурные графики компонент поля скоростей

Построить контурные графики компонент поля скоростей, как это показано на рисунке 2.1

Лабораторная работа №3

«Кинематика течения несжимаемой среды, движущейся с обтеканием твердых препятствий»

Цель работы: научиться выполнять построение и анализ полей кинематических величин течений несжимаемых сред с обтеканием твердых препятствий.

Формулировка задачи: используя простейшие гармонические течения теории функций комплексного переменного, построить поле скоростей и определить кинематические параметры движения среды в заданной точке пространства. Результаты работы предоставить в виде отчета, содержащего название, цель, формулировку задачи, краткие теоретические сведения и листинг программы с комментариями.

Краткие теоретические сведения.

Безусловно, развитие современной вычислительной техники и программного обеспечения позволяет решать задачи движения сред в областях произвольной конфигурации. Это очень важное и существенное продвижение науки. Однако, такие решения являются численными, а анализ и оптимизация численных моделей требует получения серии решений, в отличие от аналитических моделей, оптимизация которых сводится обычно к приравниванию к нулю производной.

Двухмерное стационарное движение сред удобно описывать с помощью, так называемой, функции тока ψ . Поле скоростей, построенное на основании функции тока, определяется по формуле:

$$V_1 = \frac{\partial \psi}{\partial x_2}, V_2 = -\frac{\partial \psi}{\partial x_1}. \quad (3.1)$$

Можно показать, что для любой скалярной функции тока ψ поле скоростей (3.1) удовлетворяет условию несжимаемости. Изолиниями функции тока

$\psi = const$ являются линии тока, то есть линии, касательные к которым совпадают по направлению с вектором скорости (рисунок 3.1).

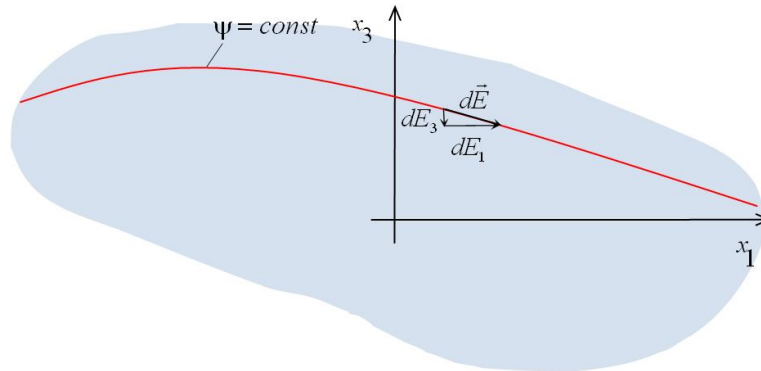


Рисунок 3.1 – Линия тока $\psi = const$ и ее элементарная часть $d\vec{E}$

Таким образом, контурное изображение функции тока дает визуальное изображение движения среды.

Интересным способом построения функций тока и течений является разложение функции $\omega(z)$ комплексного переменного аргумента z . Как известно, комплексный аргумент можно представить в одном из видов (рисунок 3.2):

$$\begin{aligned} z &= x_1 + ix_2, \\ z &= \rho [\cos(x_1) + i \sin(x_2)], \\ z &= \rho e^{i\alpha}, \end{aligned} \quad (3.2)$$

где i - мнимая единица $i = \sqrt{-1}$;

x_1, x_2 - декартовы координаты комплексного числа z ;

ρ, α - полярные координаты комплексного числа z .

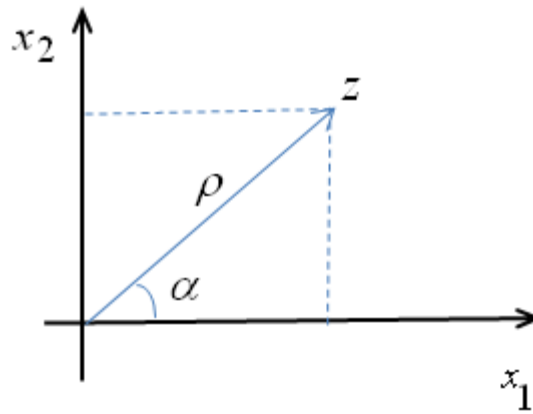


Рисунок 3.2 – Комплексное число z

Функция комплексного аргумента $\omega(z)$ может быть разложена на действительную $\varphi(x_1, x_2)$ и мнимую $\psi(x_1, x_2)$ части:

$$\omega(x_1, x_2) = \varphi(x_1, x_2) + i\psi(x_1, x_2). \quad (3.3)$$

Мнимая часть $\psi(x_1, x_2)$ является искомой функцией тока. Функции тока, построенные с использованием комплексных функций, обладают свойством суперпозиции. Кроме того, линии тока по определению являются непроницаемыми для среды, так как вектор скорости является касательным к линии и не пересекает её. Поэтому любую линию тока можно считать твердой границей, а с помощью функций тока можно моделировать течения обтекания твердых препятствий или течения в каналах.

Рассмотрим пример построения течения, полученного суперпозицией двух простейших течений. Первое течение называется однородным потоком [1]:

$$\omega_1(z) = C_0 z, \quad (3.4)$$

где C_0 - комплексное число.

На рисунке 3.3 изображена функция тока $\psi_1 = \psi_1(x_1, x_2)$ для случая $\text{Im}(C_0) = 0$ в трехмерном пространстве и ее контурное изображение, по последнему можно судить, что поле скоростей, построенное по формуле (3.1) на основании этой функции тока будет описывать прямолинейное движение среды в направлении оси x_1 .

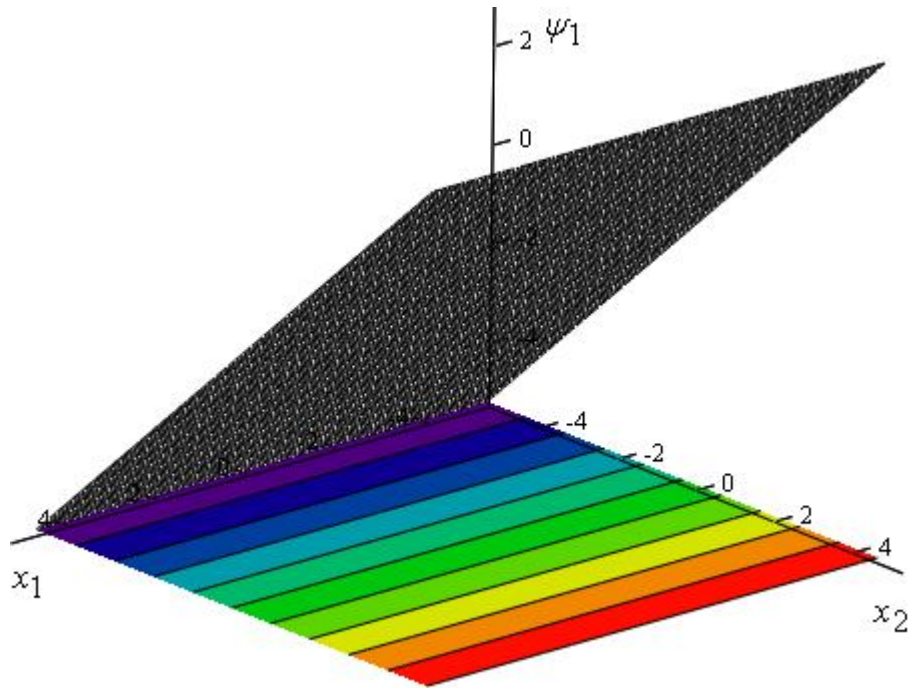


Рисунок 3.3 – Функция тока $\psi_1 = \psi_1(x_1, x_2)$

Второе течение называется диполем [1]:

$$\omega_2(z) = C_0 \frac{r^2}{z}, \quad (3.5)$$

где r - действительное число.

На рисунке 3.4 изображена функция тока $\psi_2 = \psi_2(x_1, x_2)$ в трехмерном пространстве и ее контурное изображение.

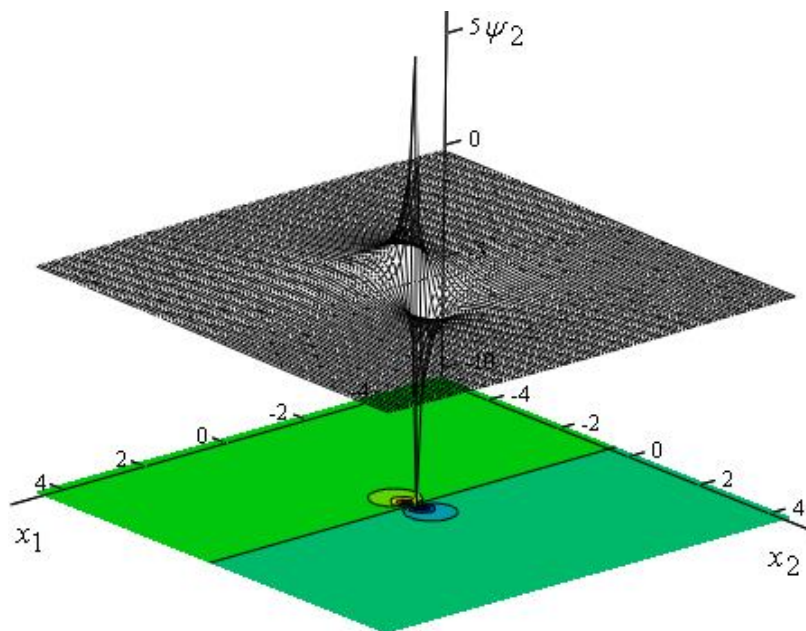


Рисунок 3.3 – Функция тока $\psi_2 = \psi_2(x_1, x_2)$

Итоговое течение является суммой течений (3.4-3.5) (функция тока изображена на рисунке 3.4):

$$\omega(z) = \omega_1(z) + \omega_2(z) = C_0 \left(z + \frac{r^2}{z} \right). \quad (3.6)$$

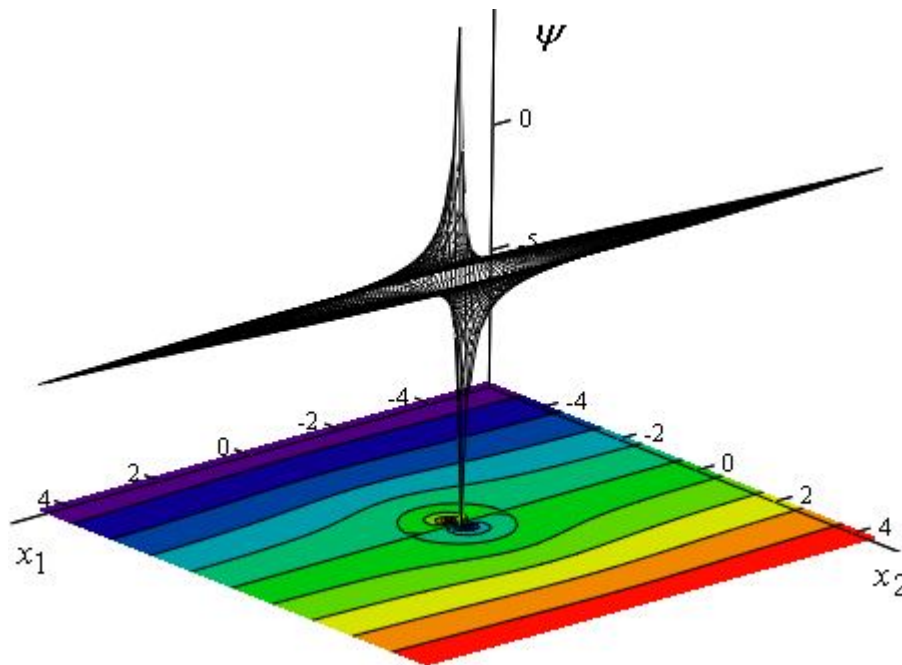


Рисунок 3.4 – Функция тока $\psi = \psi(x_1, x_2)$

Итоговое течение, построенное на основании уравнения (3.6) и изображенное на рисунке 3.4 можно интерпретировать как обтекание потоком сплошной среды цилиндра радиусом r (3.5-3.6). По функции тока $\psi = \text{Im}(\omega(z))$ можно построить поле скоростей (3.1) и определить его основные кинематические характеристики, как это было сделано в лабораторной работе №2.

Порядок выполнения работы.

Используя стандартные функции прикладного программного продукта необходимо сравнить кинематику течения однородного потока среды и потока, обтекающего цилиндр. Необходимо выполнить следующие действия.

1. Построить контурные графики функций тока $\psi_1 = \text{Im}(\omega_1(z))$ и $\psi = \text{Im}(\omega(z))$ комплексных функций (3.4) и (3.6).
2. Построить поля скоростей по формуле (3.1).

Таблица 3.1 – варианты заданий к лабораторной работе №3

<i>Вариант 1</i>	<i>Вариант 2</i>	<i>Вариант 3</i>	<i>Вариант 4</i>	<i>Вариант 5</i>
$M(1.5, 1.5)$	$M(2, 2)$	$M(3, 3)$	$M(0, 2)$	$M(0, -2)$
<i>Вариант 6</i>	<i>Вариант 7</i>	<i>Вариант 8</i>	<i>Вариант 9</i>	<i>Вариант 10</i>
$M(2, 0)$	$M(-2, 0)$	$M(20, 0)$	$M(30, 0)$	$M(30, 30)$

3. Определить кинематические параметры течений в точке $M(x_i)$ (таблица 3.1), сравнить кинематические параметры сплошного потока (3.4) и течения обтекающего цилиндр (3.6).

Лабораторная работа №4

«Статика сплошных сред»

Цель работы: научиться выполнять построение и анализ полей статических величин.

Формулировка задачи: используя специализированное программное обеспечение выполнить построение полей статических величин. Результаты работы предоставить в виде отчета, содержащего название, цель, формулировку задачи, краткие теоретические сведения и листинг программы с комментариями.

Краткие теоретические сведения

По признаку действия на тело силы можно подразделить на поверхностные и объемные, а также на внутренние и внешние.

Полным поверхностным напряжением (далее по тексту полным напряжением) называется физическая величина, характеризующая силовое воздействие, приходящееся на единицу поверхности. Полное напряжение определяется по формуле:

$$\bar{\sigma}^n = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{P}^n}{\Delta S}, \quad (4.1)$$

где $\Delta \vec{P}^n$ - полная поверхностная сила, действующая на поверхности ΔS .

Формула О.Коши в статике связывает поверхностные напряжения, действующие на гранях тетраэдра, три из которых параллельны координатным плоскостям и находятся внутри объема тела и одна из которых совпадает с элементом поверхности этого тела:

$$\bar{\sigma}^n = \vec{n} \cdot T_{\sigma}, \quad (4.2)$$

где \vec{n} - единичная внешняя нормаль к поверхности тела S ;

T_{σ} - тензор внутренних напряжений (далее по тексту тензор напряжений) с компонентами σ_{ik} .

Полное напряжение $\vec{\sigma}^n$ удобно представлять в виде суммы его нормальной и касательной проекций:

$$\begin{aligned}\vec{\sigma}^n &= \vec{p}^n + \vec{\tau}^n, \\ \vec{p}^n &= (\vec{\sigma}^n \cdot \vec{n})\vec{n}, \\ \vec{\tau}^n &= \vec{n} \times \vec{\sigma}^n \times \vec{n},\end{aligned}\tag{4.3}$$

где \vec{p}^n - нормальная составляющая полного напряжения;

$\vec{\tau}^n$ - касательная составляющая полного напряжения (напряжение трения).

По стандартной процедуре тензор напряжений T_σ можно разложить на сферическую S_σ и девиаторную D_σ части (см. лабораторную работу №1). Сферическая часть тензора напряжений характеризует ту часть силового воздействия на окрестность материальной частицы, которая способствует изменению объема, а девиаторная – формы.

По другой стандартной процедуре тензор напряжений T_σ можно привести к диагональному виду (см. лабораторную работу №1).

Порядок выполнения работы

Используя стандартные функции прикладного программного продукта и варианты заданий (таблица 4.1) необходимо выполнить следующие действия.

1. Определить величины полного $\vec{\sigma}^n$, нормального \vec{p}^n и касательного $\vec{\tau}^n$ напряжения на поверхности тела в точке, характеризуемой тензором внутренних напряжений (таблица 4.1) и единичной внешней нормалью к поверхности $\vec{n} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} \end{bmatrix}$.
2. Определить сферическую и девиаторную части тензора (таблица 4.1), привести тензор к диагональному виду.

Таблица 4.1 – варианты заданий к лабораторной работе №4

Вариант 1	Вариант 2	Вариант 3	Вариант 4	Вариант 5
$\begin{bmatrix} 6 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & 5 \\ 1 & 5 & 2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 6 & 4 & 7 \\ 4 & 3 & 5 \\ 7 & 5 & 7 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 5 & 1 & 3 \\ 1 & -3 & 2 \\ 3 & 2 & 2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 6 & 2 & 5 \\ 2 & 6 & 3 \\ 5 & 3 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 7 & 3 & 4 \\ 3 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 2 \end{bmatrix}$
Вариант 6	Вариант 7	Вариант 8	Вариант 9	Вариант 10
$\begin{bmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 5 & 6 & 3 \\ 2 & 3 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 7 & 3 & 4 \\ 3 & 0 & 3 \\ 4 & 3 & -2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 5 & 8 & 3 \\ 8 & 6 & 2 \\ 3 & 2 & 2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 6 & 2 & 4 \\ 2 & 8 & 3 \\ 4 & 3 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 1 \\ 5 & 1 & 7 \end{bmatrix}$

Лабораторная работа №5
«Исследование стационарного движения сплошной
несжимаемой среды»

Цель работы: научиться выполнять постановку и решение задач механики сплошных сред.

Формулировка задачи: используя специализированное программное обеспечение выполнить постановку и решение краевой задачи механики сплошных сред. Результаты работы предоставить в виде отчета, содержащего название, цель, формулировку задачи, краткие теоретические сведения и листинг программы с комментариями.

Краткие теоретические сведения.

Математическая постановка задачи выполняется в кинематической форме [1-4] то есть основной неизвестной величиной является поле скоростей $\vec{V} = V_i(x_j)$. Суть математической постановки стационарных задач заключается в записи замкнутого множества математических уравнений и граничных условий к ним. Множество уравнений, как известно, становится замкнутым, если количество неизвестных функций и количество уравнений совпадает. В таблице 5.1 в общем виде представлена процедура получения замкнутого множества уравнений в математической постановке задачи движения несжимаемой среды.

Решение замкнутого множества уравнений таблицы 5.1 позволяет определить основные характеристики движения среды. При необходимости, множество уравнений может быть пополнено, неизменным остается требование равенства количества уравнений и неизвестных. Например, при необходимости уравнения могут быть дополнены уравнением теплопроводности [1]:

$$\frac{d\theta}{dt} = a\Delta\theta + \frac{TH}{c\rho}, \quad (5.1)$$

где θ - температура,

a - коэффициент температуропроводности,

T , H - интенсивности касательных напряжений и сдвиговых скоростей деформаций соответственно;

c - удельная теплоемкость,

ρ - плотность.

Также множество уравнений может быть дополнено эмпирическими функциями свойств среды, если последние нельзя считать константами.

Таблица 5.1 – Замкнутое множество уравнений в кинематической постановке для несжимаемых сред

Вид уравнения	Тензорная форма записи	Скалярная форма записи	Суммарное количество	
			неизвестных	уравнений
Уравнение движения	$\nabla \cdot T_{\sigma} + \rho \vec{f} = \rho \frac{d\vec{V}}{dt}$	$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_i} + \rho f_i = \rho \frac{dV_i}{dt}$	9 шт. σ_{ij}, V_i	3 шт.
Обобщенный закон Р.Гука	$D_{\sigma} = 2\mu D_{\xi}$	$(\sigma_{ij} - \delta_{ij}\sigma_0) = 2\mu(\xi_{ij} - \delta_{ij}\xi_0)$	17 шт. + ξ_{ij} , σ_0, ξ_0	9 шт.
Определение средней скорости деформации	-	$\xi_0 = \xi_{ii} / 3$	17 шт.	10 шт.
Условие несжимаемости	$\nabla \cdot \vec{V} = 0$	$\frac{\partial V_i}{\partial x_i} = 3\xi_0 = 0$	17 шт.	11 шт.
Формула Дж.Стокса	$T_{\xi} = \frac{1}{2} \times (\nabla \otimes \vec{V} + \vec{V} \otimes \nabla)$	$\xi_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial V_i}{\partial x_j} + \frac{\partial V_j}{\partial x_i} \right)$	17 шт.	17 шт.

Рассматривается стационарное течение вязкой несжимаемой среды, характеризуемой коэффициентом динамической вязкости μ в канале между двумя пластинами, одна из которых неподвижна, а другая движется с постоянной скоростью V_0 (рисунок 5.1). Исследуется область размерами $L_1 \times L_2 \times L_3$ ($L_1 = L_3 = 1$, м). Считается, что поля механических и тепловых величин не изменяются вдоль координаты x_2 , то есть движение является

двухмерным, а поле скоростей \vec{V} имеет только одну ненулевую компоненту $\vec{V} = [V_1, 0, 0]$. Считается, что действие массовых сил незначительно. Считается также, что изменение температуры окрестности материальной частицы происходит только вследствие внутреннего трения в процессе движения ($a\Delta\theta \ll d\theta/dt$, ТН/(ср)).

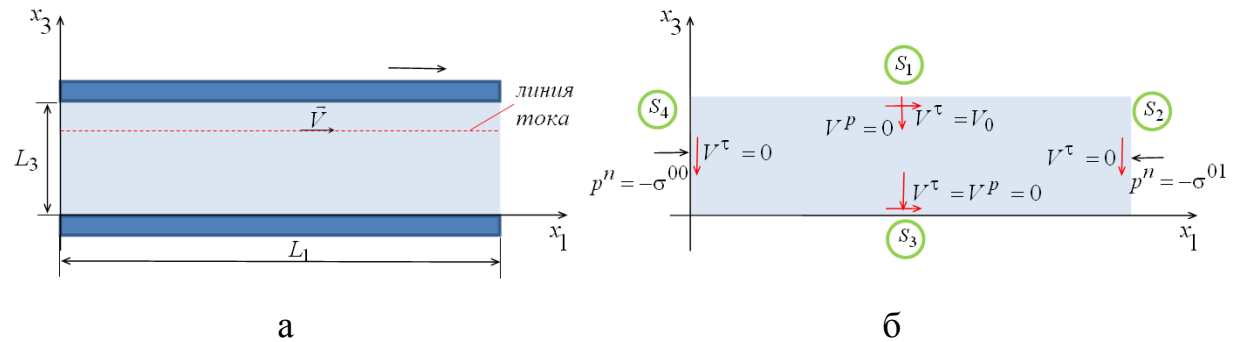


Рисунок 5.1 – Расчетная область течения (а)
и механические граничные условия (б)

Как видно на рисунке 1 (б), на границах S_1 и S_3 области заданы кинематические граничные условия, на границах S_2 и S_4 заданы смешанные граничные условия [1].

Порядок выполнения работы.

Используя стандартные функции прикладного программного продукта и варианты заданий (таблица 5.2) необходимо выполнить следующие действия.

1. Используя формулу Дж.Стокса (таблица 5.1) определить тензор скоростей деформаций $T_\xi = \llbracket \xi_{ij} \rrbracket$, затем определить его девиаторную часть $D_\xi = \llbracket \eta_{ij} \rrbracket$ и найти интенсивность сдвиговых скоростей деформаций $H = \sqrt{2\eta_{ij}\eta_{ij}}$.
2. Используя стандартные функции решения дифференциальных уравнений прикладного программного продукта решить уравнение движения (таблица 5.2) с учетом граничных условий и условия несжимаемости, тем самым

определить поле скоростей $V_1 = V_1(x_j)$ и вывести профиль скорости на график.

3. Используя закон Р. Гука (таблица 5.1) определить компоненты девиатора тензора напряжений $D_\sigma = \llbracket s_{ij} \rrbracket$ и найти интенсивность касательных напряжений $T = \sqrt{0.5 s_{ij} s_{ij}}$.

4. Построить график профиля давления.

5. Определить величину силы трения на подвижной поверхности

$$F_{mp} = \int_{S_2} \sigma_{13} dS_2 = \int_0^b \int_0^{L_1} \sigma_{13} dx_1 dx_2.$$

6. Считая изменение температуры в результате теплопроводности малым ($a\Delta\theta \ll d\theta/dt$, ТН/(ср)), а также учитывая что при стационарном движении интегрирование по времени может быть заменено интегрированием вдоль траектории движения $dt = dx_1 / V_1$, необходимо найти изменение температуры материальных частиц, пересекающих исследуемую область и проходящих через точку $M(0, 0, x_3)$.

Варианты для выполнения приведены в таблице 5.2. Для всех вариантов принять: $M(0, 0, 0.5L_3)$, $\rho = 881 \text{ кг/м}^3$, $c = 2.1 \cdot 10^3 \text{ Дж/(м}^3 \cdot \text{с} \cdot \text{К)}$, $\mu = 0.235 \text{ Па} \cdot \text{с}$, $\sigma^{00} = 1.5 \cdot 10^6 \text{ Па}$, $b = L_1 = 1 \text{ м}$.

Таблица 5.2 – варианты заданий к лабораторной работе №5

Группа 1					
№ вар.	1	2	3	4	5
σ^{01} , МПа	0.11	0.115	0.13	0.14	0.12
L_3 , мкм	900	720	810	750	50
V^0 , м/с	5	6	7	8	9
θ_0 , °С	40	39	38	37	36
№ вар.	6	7	8	9	10
σ^{01} , МПа	0.16	0.17	0.18	0.218	0.1
L_3 , мкм	900	300	50	150	290
V^0 , м/с	10	20	30	40	50
θ_0 , °С	40	41	42	43	44

РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

- 1 Б.В. Кучеряев. Механика сплошных сред. : Теоретические основы обработки давлением композитных металлов: Учебник для вузов .-М.: МИСиС, 2006. – 604с.
- 2 Горенский Б.М. Механика сплошных сред. Версия 1.0 [Электронный ресурс]: конспект лекций. / Б. М. Горенский, Л. А. Лапина, А. Ш. Любанова, А. В. Паршаков, Р. А. Шигапов, С. В. Капустина и др. – Электрон. дан. (2 Мб). – Красноярск : ИПК СФУ, 2008 г.
- 3 Дж. Мейз. Механика сплошных сред. М.: Мир, 1974.-314с.
- 4 Седов Л.И. Механика сплошной среды, т. 1, 2. - М.: Наука, 1976.

Методические указания
к выполнению лабораторных работ

Корнаева Елена Петровна
Корнаев Алексей Валерьевич

"Механика сплошных сред"
Методические указания к выполнению лабораторных работ

Технический редактор: Иванова Н.И.
Компьютерный набор: Корнаева Е.П.
Корректор: Иванова Н.И.

Подписано к печати _____ Бумага для множительной техники
Формат _____ Усл.печ.листов _____ Тираж _____ экз. Заказ _____

Отпечатано с авторского оригинала в отделе оперативной печати
Старооскольского технологического института им.А.А. Угарова.
Старый Оскол, микрорайон Макаренко, 40
