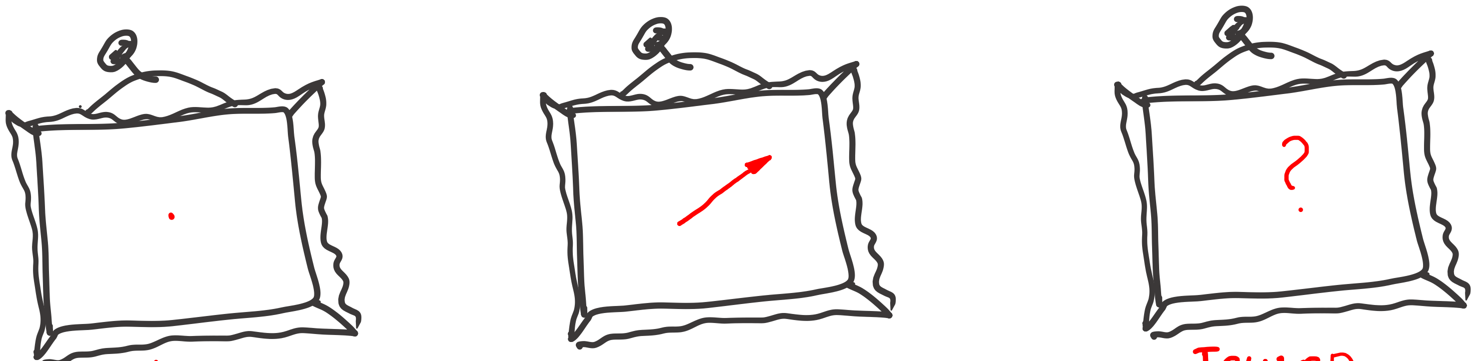
An Introduction to Tensor Calculus. Part 1: Scalars, Vectors and Tensors.



Скаляр   Вектор   Тензор

N - разм. простр.

Скаляр a $\mathbb{R}^N$ хар-ся $N^0=1$ компонент

Вектор $\vec{a}$ $\mathbb{R}^N$ хар-ся $N^1=N$ компонент

Тензор $\overset{n}{T}_a$ n - ранг $\mathbb{R}^N$ хар-ся N^n компонент

a
скаляр

$$\vec{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_N \end{bmatrix} = [[a_i]]$$

вектор

$$\overset{2}{T}_a = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = [[\, a_{ij} \,]]$$

т-р 2 ранга

номер строки   номер столбца

An Introduction to Tensor Calculus. Part 1: Scalars, Vectors and Tensors.

Правило Эйнштейна

$\vec{a} = [\![a_i]\!] = [\![a_1\ a_2\ a_3]\!]$
$= [\![a_j]\!] = [\![a_1\ a_2\ a_3]\!]$

a_i, a_j > немой

$\dfrac{(i = 1 \dots 3)}{(j = 1 \dots 3)}$

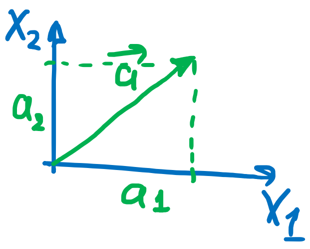
Сокр.	Разв.
a_i	a_1, a_2, a_3
a_{ii}	$a_{11} + a_{22} + a_{33}$
$a_i b_i$	$a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$
a_{ij}	$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix}$
$a_{ij} b_{ij}$	$a_{11} b_{11} + a_{12} b_{12} + a_{13} b_{13} + a_{21} b_{21} + a_{22} b_{22} + a_{23} b_{23} + a_{31} b_{31} + a_{32} b_{32} + a_{33} b_{33}.$

$(i, j = 1 \dots 3)$

$N^{\text{кол инд}}$

$\mathbb{R}^3$

$\mathbb{R}^2$



i	j
1	1
1	2
1	3
2	1
2	2
2	3
3	1
3	2
3	3

1
3 2

An Introduction to Tensor Calculus. Part 1: Scalars, Vectors and Tensors.

Исм. Аурне

$$c_i = a_{ij} b_j \sim$$

$$c_1 = a_{11} b_1 + a_{12} b_2 + a_{13} b_3,$$
$$c_2 = a_{21} b_1 + a_{22} b_2 + a_{23} b_3,$$
$$c_3 = a_{31} b_1 + a_{32} b_2 + a_{33} b_3,$$

$$c_{ik} = a_{ij} b_{jk}$$

$$c_{11} = a_{11} b_{11} + a_{12} b_{21} + a_{13} b_{31},$$
$c_{12} =$

$c_{13} =$

$c_{21} =$

$c_{22} =$

$c_{23} =$

$c_{31} =$

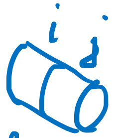
$c_{32} =$

$c_{33} =$

$$c_i = \epsilon_{ijk} a_j b_k$$

$$c_1 = \epsilon_{111} a_1 b_1 + \epsilon_{112} a_1 b_2 + \epsilon_{113} a_1 b_3 + \epsilon_{121} a_2 b_1 + \ldots$$
$c_2 =$

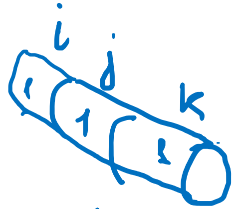
$c_3 =$



1	1
1	2
1	3
2	1
2	2
2	3
3	1
3	2
3	3

I_i

J_j



1	1	1
1	1	2
1	1	3
1	2	1
1	2	3

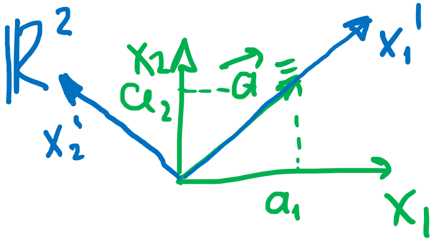
An Introduction to Tensor Calculus. Part 1: Scalars, Vectors and Tensors.

$\mathbb{R}^N \quad i,k,j\ldots = 1\ldots N$

Компоненты т-ов ранга 1 и выше изменяются при повороте координат.

		Т-ор 0 ранга	Тен-р 1 ранга	Т-р n-го ранга
Нач. коорд.	X_i	a	$\vec{a} = [\![a_i]\!]$	$\overset{n}{T}_a = [\![a_{\underbrace{ijk\ldots m}_{n}}]\!]$
После поворота	X_i'	a	$\vec{a} = [\![a_i']\!]$	$\overset{n}{T}_a = [\![a'_{ijk\ldots m}]\!]$

П1 $\mathbb{R}^2$

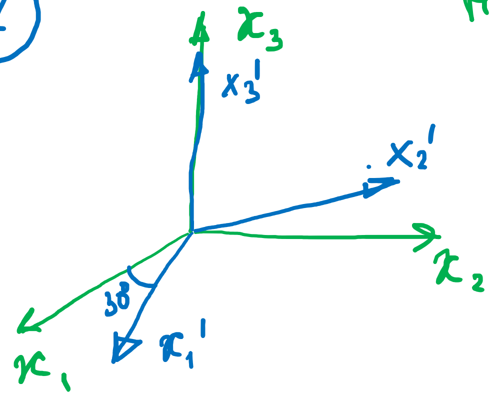


Матрица косинусов

$$\boxed{\alpha_{ij} = \cos \widehat{x_i' x_j}} \sim \mathbb{R}^N$$

П2

Найти α_{ij} после поворота коорд. вокруг x_3 на 30°



$$((\alpha_{ij})) = \left(\left(\begin{array}{ccc} {}^{\alpha_{11}}\cos(30^\circ) & {}^{\alpha_{12}}\cos(60^\circ) & {}^{\alpha_{13}}\cos(90) \\ {}^{\alpha_{21}}\cos(120^\circ) & {}^{\alpha_{22}}\cos(30^\circ) & {}^{\alpha_{23}}\cos(90^\circ) \\ {}^{\alpha_{31}}\cos(90) & {}^{\alpha_{32}}\cos(90) & {}^{\alpha_{33}}\cos(0^\circ) \end{array}\right)\right)$$

An Introduction to Tensor Calculus. Part 1: Scalars, Vectors and Tensors.

Тензор n-го ранга это матем. вел-на, характеризуемая в N-мерном пространстве N^n кол-вом компонент, каждая из которых при повороте коорд. изменяется по закону:

$\boxed{a' = a}$ Т-р 0го ранга

$\boxed{a'_i = \alpha_{ik} a_k}$ Т-р 1-го ранга

$\boxed{a'_{ij} = \alpha_{ik} \alpha_{jm} a_{km}}$ Т-р 2го ранга

$\boxed{a'_{i \ldots j} = \alpha_{ik} \ldots \alpha_{jm} a_{k \ldots m}}$ Т-ор ранга n

An Introduction to Tensor Calculus. Part 1: Scalars, Vectors and Tensors.

Действия над тензорами (их матрицами)

1.1. Транспонирование $T_a \to T_a^T$

$T_a^T = ((a^T_{ij}))$ $\quad a^T_{ij} = a_{ji}$ $\quad a^T_{11} = a_{11},\ a^T_{12} = a_{21}, \ldots$

1.2. Симметрирование $T_в$ и альтернирование T_c тензора T_a

$T_в = \frac{1}{2}(T_a + T_a^T)$ $\quad в_{ij} = \frac{1}{2}(a_{ij} + a_{ji});$

$T_c = \frac{1}{2}(T_a - T_a^T)$ $\quad c_{ij} = \frac{1}{2}(a_{ij} - a_{ji});$

$T_в + T_c = T_a$

1.3 Сложение

$T_c = T_a + T_в$ $\quad c_{ij} = a_{ij} + в_{ij}$

An Introduction to Tensor Calculus. Part 1: Scalars, Vectors and Tensors.

1.4. Умножение на число

$T_c = a\,T_b \qquad c_{ij} = a\, b_{ij}$

1.5. Пи-скалярное умножение (p-dot product)

$$\overset{m+n-2p}{T_c} = \overset{n}{T_a} \odot_p \overset{m}{T_b} \qquad c_{i..jr..s} = a_{i..j\underbrace{k...l}_{p \text{ штук}}}\; b_{\underbrace{k..l r...s}_{m}}$$

т.е. $m=n=p=0$

$$\overset{0}{T_c} = \overset{0}{T_a} \cdot \overset{0}{T_b} \qquad c = a\cdot b \quad \text{— скал. пр 2 скал.}$$

$m=n=p=1$

$$\overset{1+1-2\cdot 1}{T_c} = \overset{1}{T_a} \cdot \overset{1}{T_b} \qquad c = a_k \cdot b_k \quad \text{— скал пр 2х вект}$$

$m \geq 1,\ n=p=0 \qquad p=0 \quad \odot \to \otimes$

$$\overset{m}{T_c} = \overset{0}{T_a} \otimes \overset{m}{T_b} \qquad c_{r..s} = a\, b_{\underbrace{r..s}_{m}} \quad \text{— умн. т-ра на число}$$

$p,\ p$

пи

$\underbrace{a_i b_i} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$

$A = \underset{\text{сила}}{\vec{F}} \cdot \underset{\text{перемещ.}}{\vec{u}}$

An Introduction to Tensor Calculus. Part 1: Scalars, Vectors and Tensors.

$m = n = 1\ ,\ p = 0$

$$\overset{1}{T}_c = \overset{1}{T}_a \otimes \overset{1}{T}_b \qquad c_{ir} = a_i b_r$$

1.6 Пи-векторно пр-е (p - cross product)

$$\overset{m+n-p}{T}_c = \overset{m}{T}_a \times_p \overset{n}{T}_b$$

$$c_{i..j\,f...t\,u...r} = \epsilon_{fvq} \dots \epsilon_{tkw}\, a_{i...j\,\overbrace{v...k}^{p\text{-штук}}}\, b_{q...w\,u...r}$$

т.е. $m = n = p = 1$

$$\overset{1+1-1}{T}_c = \overset{1}{T}_a \times \overset{1}{T}_b$$

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$$

$$\boxed{c_f = \epsilon_{fvq} a_v b_q}$$

$c_1 = a_2 b_3 - a_3 b_2$

$c_2 = a_3 b_1 - a_1 b_3$

$c_3 = a_1 b_2 - a_2 b_1$

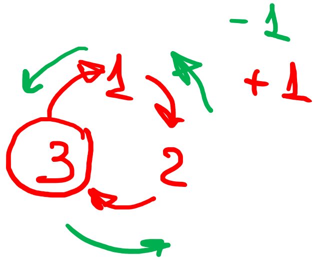
$+\ 312$

$-\ 321$

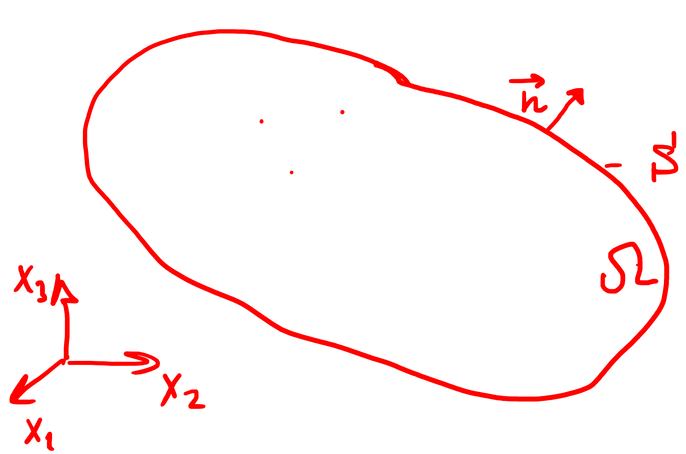
$$c = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \vec{e}_1 \underbrace{(a_2 b_3 - a_3 b_2)}_{=c_1} + \vec{e}_2 \underbrace{(a_3 b_1 - a_1 b_3)}_{=c_2} + \vec{e}_3 \underbrace{(a_1 b_2 - a_2 b_1)}_{=c_3} =$$

Символ Леви-Чивита

$$\epsilon_{fvq} = \begin{cases} -1 & \text{- нечет.} \\ 1 & \text{- чет.} \\ 0 & \text{- ост} \end{cases}$$



2 Анализ тензорных полей.



Рассм. областъ Ω с пов-ю S, характеризуемой ед. внешней нормалью $\vec{n}$.

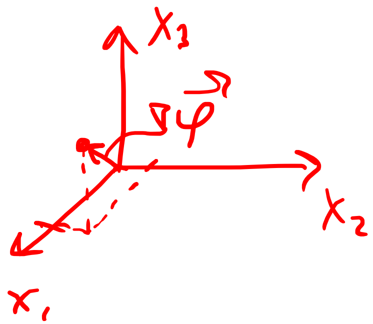
Если в кажд. т. простр Ω задан тензор, то говорят, что задано тензорное поле

2.1 $\nabla \underset{\text{скал. ф-я}}{\varphi} = \left[\!\left[\dfrac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right]\!\right]$ – градиент (напр. наиск. роста)' $\nabla = \left[\!\left[\dfrac{\partial}{\partial x_i} \right]\!\right]$ – оператор Гамильтона

$$\varphi = 5x_1x_2 + 10x_1x_3$$

$$\nabla\varphi = \left[\!\left[5x_2 + 10x_3 ,\ 5x_1 ,\ 10x_1 \right]\!\right]$$

$$\nabla\varphi(x_1 = 5,\ x_2 = 1,\ x_3 = 10) = \left[\!\left[105 \quad 25 \quad 50 \right]\!\right]$$

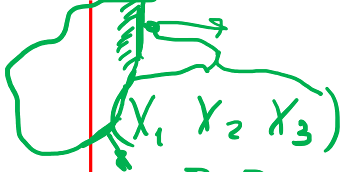


Кочин Н.Е.
Аналит. геом. и нач. тензор. анализа.

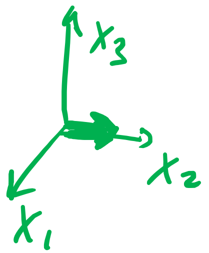
Анализ тензорных полей.

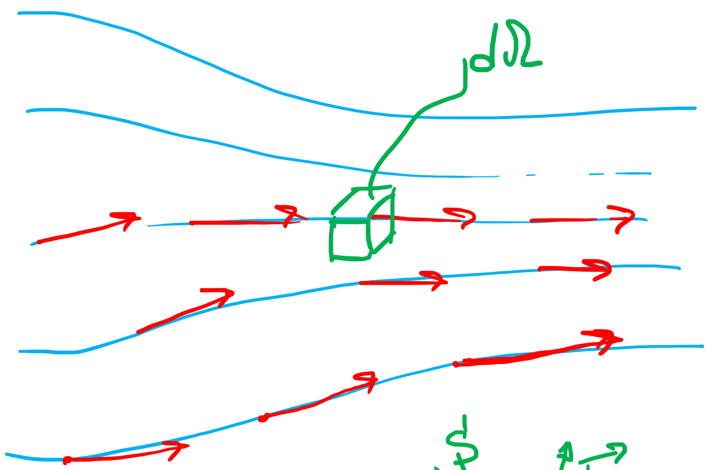
2.2 $\underbrace{\nabla\cdot\vec{a}}_{\text{дивергенция вектора}} = \dfrac{\partial a_i}{\partial x_i} = \dfrac{\partial a_1}{\partial x_1}+\dfrac{\partial a_2}{\partial x_2}+\dfrac{\partial a_3}{\partial x_3};c = \vec{a}\cdot\vec{b} = a_i b_i = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$

$\nabla = \left[\!\left[\dfrac{\partial}{\partial x_i}\right]\!\right] \quad \vec{a} = [\![a_j]\!]$



$\vec{n} = [\![0\ 1\ 0]\!]$



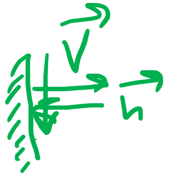


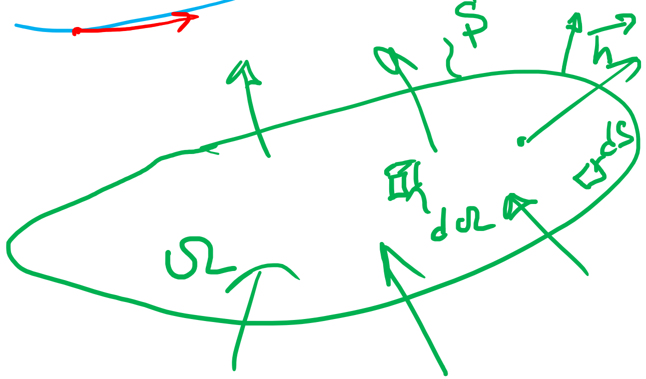
$b_x = b_{вых} \rightarrow \nabla\cdot\vec{a} = 0$ – несж. тв. тел

$b_x > b_{вых} \rightarrow \nabla\cdot\vec{a} < 0$

$b_x < b_{вых} \rightarrow \nabla\cdot\vec{a} > 0$

$$\boxed{\nabla\cdot\vec{V} = 0}$$





$$\boxed{\int\limits_S \vec{a}\cdot\vec{n}\,dS = \int\limits_\Omega \nabla\cdot\vec{a}\,d\Omega}$$

Анализ тензорных полей.

$$\nabla \cdot T_a = [\![\frac{\partial a_{ik}}{\partial x_i}]\!]$$

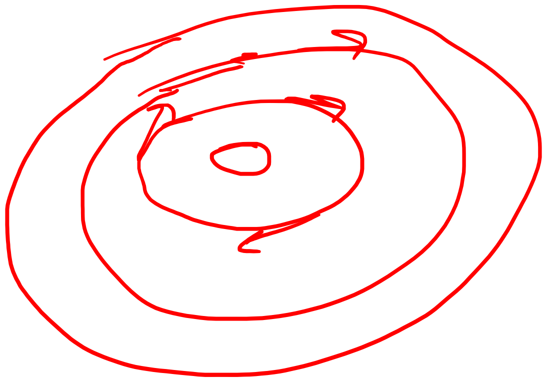
$$\overset{1+2-2}{T}_d = \overset{1}{T}_b \cdot \overset{2}{T}_c$$

$$d_k = b_i c_{ik}$$

$$d_1 = b_1 c_{11} + b_2 c_{21} + b_3 c_{31}$$

2.3 Ротор вект. поля

$$\nabla \times \vec{a} = [\![\varepsilon_{ijk} \frac{\partial a_k}{\partial x_i}]\!]$$



$$\nabla \times \vec{a} \neq 0$$

Анализ тензорных полей.

2.4. Градиент тенз. полей

$p=0$

$$\nabla \otimes \vec{a} = \left[\!\left[\frac{\partial a_j}{\partial x_i} \right]\!\right]$$

$$\overset{1+1-2\cdot 0}{T_d} = \overset{1}{T_b} \otimes \overset{1}{T_c}$$

$$d_{ij} = b_i \; c_j$$

$$\nabla \otimes T_a = \left[\!\left[\frac{\partial a_{jk}}{\partial x_i} \right]\!\right]$$

$$T_a = [\![a_{ij}]\!] \qquad i,j=1,3$$

$$\overset{3}{T_b} = [\![a_{ijk}]\!]$$

Анализ тензорных полей.

Анализ тензорных полей.

Анализ тензорных полей.

Анализ тензорных полей.

An Introduction to Tensor Calculus. Part 1: Scalars, Vectors and Tensors.