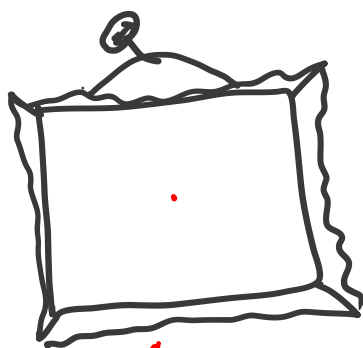
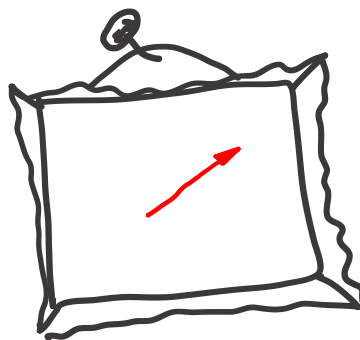


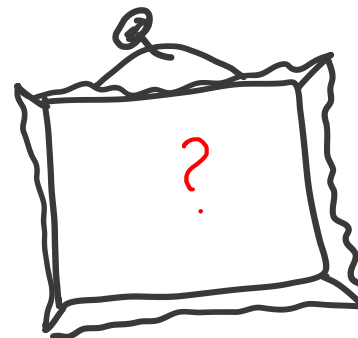
An Introduction to Tensor Calculus. Part 1: Scalars, Vectors and Tensors.



Скаляр



Вектор



Тензор

N - разм. пространство.

Скаляр $a \in \mathbb{R}^N$ хар-ея $N^0 = 1$ компонент

Вектор $\vec{a} \in \mathbb{R}^N$ хар-ея $N^1 = N$ компонент

Тензор $T_a^{n-ранг} \in \mathbb{R}^N$ хар-ея N^n компонент

a
скаляр

$$\vec{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_N \end{bmatrix} = [a_i] \quad T_a^2 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = [a_{ij}]$$

Т-ор 2 ранга

номер строки
номер столбца

вектор

An Introduction to Tensor Calculus. Part 1: Scalars, Vectors and Tensors.

Правило Эйнштейна

$$\vec{a} = [a_i] = [a_1 \ a_2 \ a_3]$$

$$= [a_j] = [a_1 \ a_2 \ a_3]$$

$$a_i \geq \text{норми} \quad \begin{matrix} (i=1 \dots 3) \\ (j=1 \dots 3) \end{matrix}$$

скал.

скал.

a_i

a_1, a_2, a_3

a_{ii}

$a_{11} + a_{22} + a_{33}$

$a_i b_i$

$a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$

a_{ij}

$a_{11} \ a_{12} \ a_{13}$

$a_{21} \ a_{22} \ a_{23}$

$a_{31} \ a_{32} \ a_{33}$

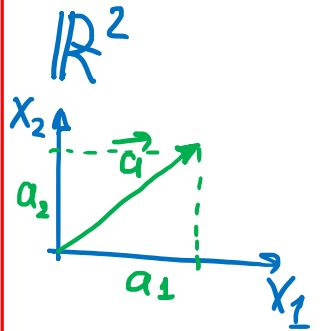
$(i, j = 1 \dots 3)$

$a_{ij} b_{ij}$

$a_{11} b_{11} + a_{12} b_{12} + a_{13} b_{13} +$
 $+ a_{21} b_{21} + a_{22} b_{22} + a_{23} b_{23} +$
 $+ a_{31} b_{31} + a_{32} b_{32} + a_{33} b_{33}.$

$N^{\text{кончик}}$

\mathbb{R}^3



$i \ j$

1	1
1	2
2	1
2	2
2	3
3	1
3	2
3	3

1 1
1 2
1 3
2 1
2 2
2 3
3 1
3 2
3 3

An Introduction to Tensor Calculus. Part 1: Scalars, Vectors and Tensors. Use. Type

$$c_i = a_{ij} b_j \quad \sim$$

$$c_1 = a_{11} b_1 + a_{12} b_2 + a_{13} b_3,$$

$$c_2 = a_{21} b_1 + a_{22} b_2 + a_{23} b_3,$$

$$c_3 = a_{31} b_1 + a_{32} b_2 + a_{33} b_3,$$

$$c_{ik} = a_{ij} b_{jk}$$

$$c_{11} = a_{11} b_{11} + a_{12} b_{21} + a_{13} b_{31},$$

$$c_{12} =$$

$$c_{13} =$$

$$c_{21} =$$

$$c_{22} =$$

$$c_{23} =$$

$$c_{31} =$$

$$c_{32} =$$

$$c_{33} =$$

$$c_i = \epsilon_{ijk} a_j b_k$$

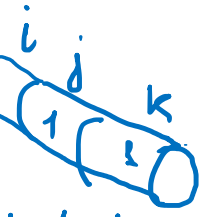
$$c_0 = \epsilon_{011} a_1 b_1 + \epsilon_{112} a_1 b_2 + \epsilon_{113} a_1 b_3 + \epsilon_{121} a_2 b_1 + \dots$$

$$c_2 =$$

$$c_3 =$$



1	1
1	2
1	3
2	1
2	2
2	3
3	1
3	2
3	3



1	1	1
1	1	2
1	1	3
1	2	1
1	2	2
1	2	3

An Introduction to Tensor Calculus. Part 1: Scalars, Vectors and Tensors.

$$\mathbb{R}^N \quad i, k, j, \dots = 1 \dots N$$

Компоненты Т-ов ранга 1 и выше изменяются при повороте координат.

Т-ор 0 ранга

Тен-р 1 ранга

Т-р n-го ранга

Низ. коорд. x_i

a

$$\vec{a} = [a_i]$$

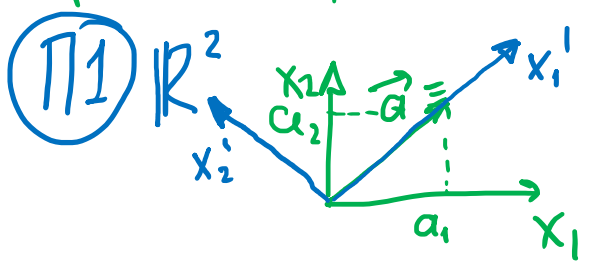
$$\vec{T}_a = [a_{ijk \dots m}]$$

После поворота x'_i

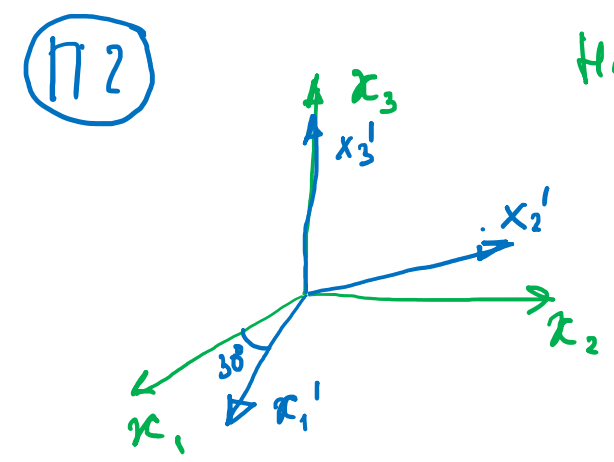
a

$$\vec{a} = [a'_i]$$

$$\vec{T}_a = [a'_{ijk \dots m}]$$



Матрица косинусов $\alpha_{ij} = \cos \angle x'_i x_j \sim \mathbb{R}^N$



Найти α_{ij} после поворота коорд. 80к руг x_3 на 30°

$$(\alpha_{ij}) = \begin{pmatrix} \alpha_{11} \cos(30^\circ) & \alpha_{12} \cos(60^\circ) & \alpha_{13} \cos(90^\circ) \\ \alpha_{21} \cos(120^\circ) & \alpha_{22} \cos(30^\circ) & \alpha_{23} \cos(90^\circ) \\ \alpha_{31} \cos(90^\circ) & \alpha_{32} \cos(30^\circ) & \alpha_{33} \cos(0^\circ) \end{pmatrix}$$

An Introduction to Tensor Calculus. Part 1: Scalars, Vectors and Tensors.

Тензор n -го ранга это матем. вел-на, характеризующаяся в N -мерном пространстве N^n кол-вом компонент, каждая из которых при повороте коорд. изменяется по закону:

$$a' = a$$

Т-р 0-го ранга

$$a'_i = \alpha_{ik} a_k$$

Т-р 1-го ранга

$$a'_{ij} = \alpha_{ik} \alpha_{jm} a_{km}$$

Т-р 2-го ранга

$$a'_{i \dots j} = \alpha_{ik} \dots \alpha_{jm} a_{k \dots m}$$

Т-ор ранга n

An Introduction to Tensor Calculus. Part 1: Scalars, Vectors and Tensors.

Действия над тензорами (их матрицами)

1.1. Транспонирование $T_a \rightarrow T_a^T$

$$T_a^T = ((a_{ij}^T)) \quad a_{ij}^T = a_{ji} \quad a_{11}^T = a_{11}, a_{12}^T = a_{21}, \dots$$

1.2. Симметрирование T_s и альтернирование T_c тензора T_a

$$T_s = \frac{1}{2} (T_a + T_a^T) \quad s_{ij} = \frac{1}{2} (a_{ij} + a_{ji});$$

$$T_c = \frac{1}{2} (T_a - T_a^T) \quad c_{ij} = \frac{1}{2} (a_{ij} - a_{ji});$$

$$T_s + T_c = T_a$$

1.3. Сложение

$$T_c = T_a + T_s$$

$$c_{ij} = a_{ij} + s_{ij}$$

An Introduction to Tensor Calculus. Part 1: Scalars, Vectors and Tensors.

§.4. Умножение на число

$$T_c = a T_b \quad c_{ij} = a \delta_{ij}$$

An Introduction to Tensor Calculus. Part 1: Scalars, Vectors and Tensors.

An Introduction to Tensor Calculus. Part 1: Scalars, Vectors and Tensors.

An Introduction to Tensor Calculus. Part 1: Scalars, Vectors and Tensors.