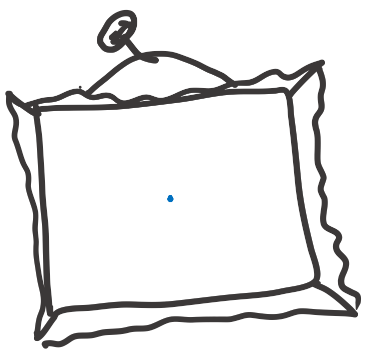
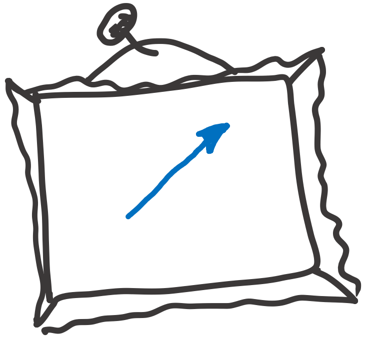
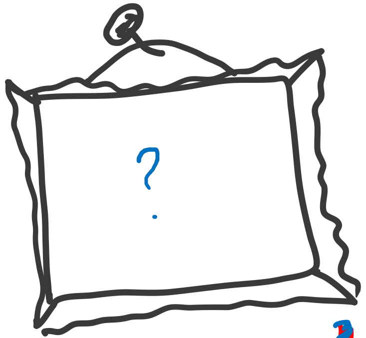
An Introduction to Tensor Calculus. Part 1: Scalars, Vectors and Tensors.



Скаляр. a



Вектор. $\vec{a}$



Тензор. $\overset{2}{T}_a$

N - размерность пространства

Скаляр	a	$\mathbb{R}^N$	хар-ся	$N^0 = 1$	компонентой
Вектор	$\vec{a}$	$\mathbb{R}^N$	хар-ся	$N^1 = N$	комп.
Тензор р. n	$\overset{n}{T}_a$	$\mathbb{R}^N$	хар-ся	N^n	комп.

a

скаляр

$$\vec{a} = \left[\!\left[\begin{matrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_N \end{matrix} \right]\!\right]$$

вектор

$$\overset{2}{T}_a = \left[\!\left[\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1N} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2N} \\ \vdots & & & \\ a_{N1} & a_{N2} & \dots & a_{NN} \end{matrix} \right]\!\right]$$

тензор 2р

$\mathbb{R}^N$

[[ ]] - для комп. тензоров

Пр. Эйнштейна ; a $\vec{a} = [\![a_i]\!]$ $(i = 1 \dots N)$, $T_a = [\![a_{ij}]\!]$

$\mathbb{R}^N$

$a_i \sim a_1 \ a_2 \dots a_N$

$a_{ii} \sim a_{11} + a_{22} + \dots + a_{NN}$

$a_i b_i \sim a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots a_N b_N$; $a_i b_j = \begin{bmatrix} a_1 b_1 & a_1 b_2 & \dots & a_1 b_N \\ \vdots & & & \\ a_N b_1 & a_N b_2 & \dots & a_N b_N \end{bmatrix}$

Искл. Нуре

$a_{ii} = c_i \sim a_{11} = c_1$, $a_{22} = c_2$, ... $a_{NN} = c_N$

$i \ j$

$1 \ 1$
$1 \ 2$ } 1 стр
$\vdots$
$1 \ N$

$2 \ 1$
$2 \ 2$
$\vdots$
$2 \ N$

$i \ j \ k$

$1 \ 1 \ 1$

① $c_{ij} = a_{ik} b_{kj} \sim$? $c_{11} = a_{11} b_{11} + a_{12} b_{21} + \dots \dots a_{1N} b_{N1}$.

c_{12}

$\vdots$

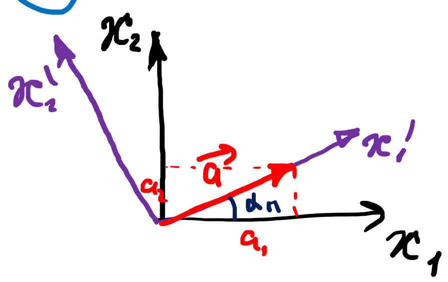
② $\mathbb{R}^3$

$a_{ij} a_{ji}$ $\quad c_i = \epsilon_{ijk} a_j b_k$ $\quad c_{ij} = a_i b_j$.

$\mathbb{R}^N$ $i, j, k \ldots = 1 \ldots N$. Ком-ты тензоров ранга 1 и выше изм. при повороте координат

	Т-р 0 р	Т-р 1 го ранга	Т-р n-го ранга
Нач. коорд X_i	a	$\vec{a} = [\![a_i]\!]$	$\overset{n}{T}_a = [\![a_{\underbrace{i,j\ldots k}_{n}}]\!]$
После поворота X_i'	a	$\vec{a}' = [\![a_i']\!]$	$\overset{n}{T}_a = [\![a'_{i,j\ldots k}]\!]$

П1 $\mathbb{R}^2$



$x_i : \vec{a} = [\![a_i]\!]$

$x_i' : \vec{a} = [\![a_i']\!]$

$$\boxed{\alpha_{ij} = \cos \widehat{X_i' X_j}} \sim \mathbb{R}^N$$

$$\alpha_{11} = \cos \widehat{X_1' X_1}$$

$((\alpha_{ij}))$ – матричн. скобки

Обобщ. опред. : $\mathbb{R}^N$

Тензор n-го ранга это мат. вел-на, хар. N^n комп., кажд. из кот. при повороте коорд. изм. по закону:

$\boxed{a' = a}$ скаляр Т-ор 0-го ранга

$\boxed{a_i' = \alpha_{ij} a_j}$ вектор = Т-ор 1 ранга

$\boxed{a_{ij}' = \alpha_{ik} \alpha_{jm} a_{km}}$ Т-р 2 ранга

$\boxed{a_{i..j}' = \alpha_{ik} \ldots \alpha_{jm} a_{k \ldots m}}$ Т-ор ранга n

1.1. Транспонирование $M_a \to M_a^T$

$M_a^T = ((a^T_{ij}))$; $a^T_{ij} = a_{ji}$; $a^T_{11} = a_{11}$, $a^T_{12} = a_{21}$ ...

1.2. Симметричная M_b и альтерн. M_c части м-ци M_a

$$M_b = \frac{1}{2}(M_a + M_a^T) \to b_{ij} = \frac{1}{2}(a_{ij} + a_{ji})$$

$$M_c = \frac{1}{2}(M_a - M_a^T) \to c_{ij} = \frac{1}{2}(a_{ij} - a_{ji})$$

$$\boxed{M_b + M_c = M_a}$$

1.3. Умножение м-ц

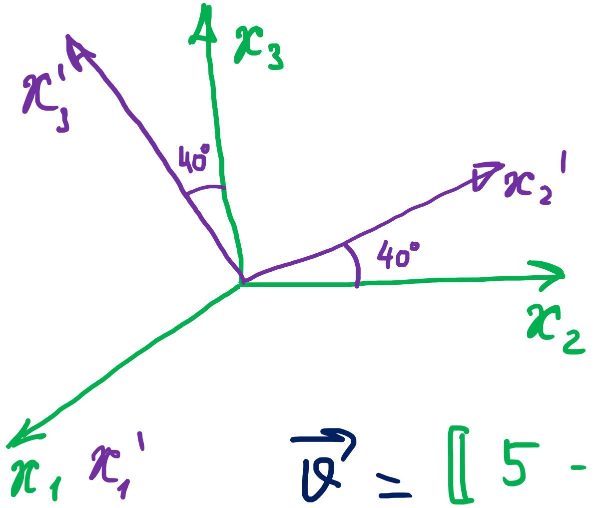
$M_d = M_b M_c$ $\qquad d_{ij} = b_{ik} c_{kj}$

$d_{11} = b_{11} c_{11} + b_{12} c_{21} + b_{13} c_{31}$.

$d_{12} = b_{11} c_{12}$

1.2. Определить комп-ты матрицы.

1.3. Преобразовать комп-ты вектора $\vec{v}$ и тензора T_a



Поворот вокр x_1 на 40°

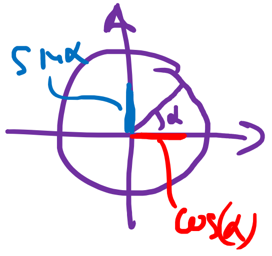
$$\alpha_{ij} = \cos \widehat{X_i' X_j} = \begin{pmatrix} \cos(0^\circ) & \cos(90^\circ) & \cos(90^\circ) \\ \cos(90^\circ) & \cos(40^\circ) & \cos(50^\circ) \\ \cos(90^\circ) & \cos(130^\circ) & \cos(40^\circ) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0.766 & 0.643 \\ 0 & -0.643 & 0.766 \end{pmatrix}.$$

$$\vec{v} = [5 \;\; -1 \;\; 2] = [5 \;\; 0{,}52 \;\; 2{,}18].$$

$$\boxed{v_i' = \alpha_{ij} v_j}$$

$$v_1' = \alpha_{11} v_1 + \alpha_{12} v_2 + \alpha_{13} v_3 =$$

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2} = \sqrt{v_i v_i}$$



Действия над тензорами. R^N

Тензорная форма | Скалярная форма

1. Сумма

$$\overset{n}{T}_c = \overset{n}{T}_a + \overset{n}{T}_b \qquad \underbrace{c_{i..j}}_{n} = a_{i..j} + b_{i..j}.$$

2. П-скалярное произв.

$$\overset{m+n-2p}{T}_c = \overset{m}{T}_a \, ⓟ \, \overset{n}{T}_b \qquad c_{i..j\,r..s} = \underbrace{a_{i..j\,k..l}}_{m} \cdot \underbrace{b_{k..l\,r..s}}_{n}$$

2.1. $m=n=p=0$

$$\overset{0}{T}_c = \overset{0}{T}_a ⓞ \overset{0}{T}_b \qquad c = a\,b$$

2.2. $m=n=p=1$

$$\overset{0}{T}_c = \overset{1}{T}_a \cdot \overset{1}{T}_b \qquad c = a_i b_i$$

2.3 $m>1,\ n=p=0$

$$\overset{m}{T}_c = \overset{m}{T}_a \cdot \overset{0}{T}_b \qquad \underbrace{c_{i..j}}_{m} = a_{i..j}\, b$$

2.4 $m=n=p>1$ — полное скалярное пр-е

$$\overset{0}{T}_c = \overset{m}{T}_a \cdot \overset{n}{T}_b \qquad c = \underbrace{a_{i..j}}_{m} \underset{=}{} \underbrace{b_{i..j}}_{n}$$

2.5 $m=n,\ p=0$ — тензорное произв.

$$\overset{m+n}{T}_c = \overset{m}{T}_a \otimes \overset{n}{T}_b \qquad c_{i..j\,r..s} = a_{i..j}\, b_{r..s}$$

П $m=n=1,\ p=0$

$$\overset{2}{T}_c = \vec{a} \otimes \vec{b} \qquad c_{ik} = a_i b_k$$

ⓘ ⓛ ...

ⓟ $\to \cdot$

ⓞ $\to \otimes$

$c_{11} = a_1 b_1$
$c_{12} = a_1 b_2$
$c_{13} = a_1 b_3$

Тенз. Скалярные

3. П-векторные пр-е

$$\overset{m+n-p}{T}_c = \overset{m}{T}_a \times_p \overset{n}{T}_b$$

$$c_{i..j\,f..t\,u..r} = \overbrace{\epsilon_{fvq}\dots}^{p}\;\epsilon_{tkr}\, a_{i..j\,\overbrace{v..k}^{p}}\, b_{q..r\,u..w}.$$

Символ Леви-Чивита

$$\epsilon_{i..j} = \begin{cases} 1, & \text{если перестановка четная} \\ -1, & \text{если —//—//— нечетная} \\ 0 & \text{— ост. сл.} \end{cases}$$

$$R^3 \quad \epsilon_{ijk} = \begin{cases} 1 & (123,\ 231,\ 312) \\ -1 & (132\ \ 321\ \ 213) \\ 0 \end{cases}$$

$i, j, k = 1 \dots 3$

1 2 3

3.1. $m = n = p = 1$
cross product

$$\overset{1}{T}_c = \overset{1}{T}_a \times \overset{1}{T}_b \qquad c_f = \epsilon_{fvq}\, a_v\, b_q$$

П $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$, R^3,

$$c_1 = \cancel{\epsilon_{111} a_1} b_1 + \cancel{\epsilon_{112} a_1} b_2 + \cancel{\epsilon_{113} a_1} b_3 + \cancel{\epsilon_{121} a_2} b_1 + \cancel{\epsilon_{122} a_2} b_2 + \underset{=1}{\epsilon_{123}} a_2 b_3 + \cancel{\epsilon_{131} a_3} b_1 + \underset{=-1}{\epsilon_{132}} a_3 b_2 + \cancel{\epsilon_{133} a_3 b_3} =$$

$$= \underline{a_2 b_3 - a_3 b_2}$$

$$\vec{c} = \left\| \begin{matrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{matrix} \right\|$$

$$c_2 = \epsilon_{231} a_3 b_1 + \epsilon_{213} a_1 b_3 = \underline{a_3 b_1 - a_1 b_3}.$$

$$c_3 = \epsilon_{312} a_1 b_2 + \epsilon_{321} a_2 b_1 = \underline{a_1 b_2 - a_2 b_1}$$

01.09.2021. Лекция **1. –** Кинематика сплошных сред

1.1 Напоминание

1.2 Лагранжевы и Эйлеровы координаты

малые деф.

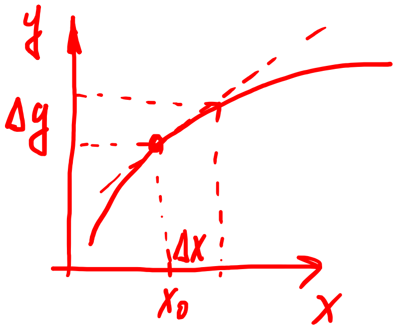
1.3 Перемещения и деформации. Формула Коши

1.4 Условие совместности деформаций

1.5 Поле скоростей

1.6 Тензор скоростей деформаций

1.7 Условие совместности скоростей деформаций



$$\Delta y = \underbrace{tg\alpha\, \Delta x}_{dy} + \delta(x, \Delta x) \qquad \boxed{dy = y' dx}$$

$$\Delta x \to 0 \qquad \Delta y \approx y' dx$$

$$y = x \qquad dy = dx = 1\Delta x \Rightarrow dx = \Delta x$$

$$dy = y' dx \qquad \boxed{y' = \frac{dy}{dx}} \qquad \frac{\partial y}{\partial x}$$

Функция

$y(x) = x^2$

$y(2) = 4$

число, число

Функционал

$J[y(x)] = \int_0^1 y(x)dx$

$J[x^2] = \frac{1}{3}$

ф-я, число

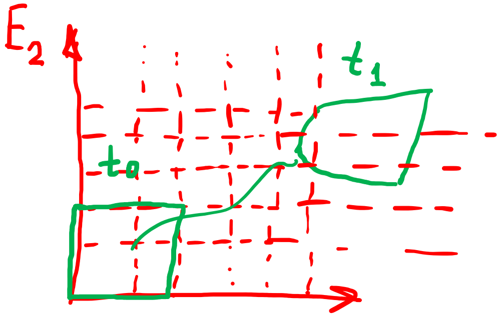
Оператор

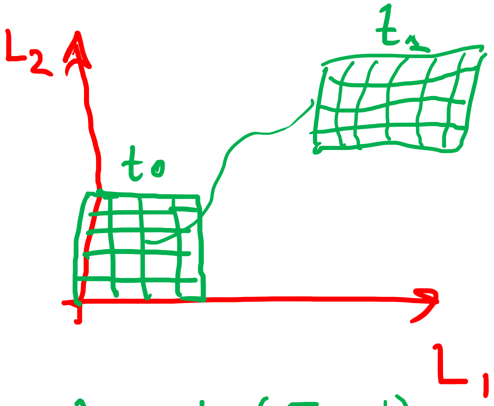
$\frac{\partial y}{\partial x}$

$y = x^2$ — ф-я

$\frac{\partial y}{\partial x} = 2x$ — ф-я.

1.2. Лагр и Эйл. подходы.





$E_i = E_i(L_j, t)$ $\qquad$ $L_i = L_i(E_j, t) \rightarrow \boxed{\dfrac{d\vec{L}}{dt} = 0}$

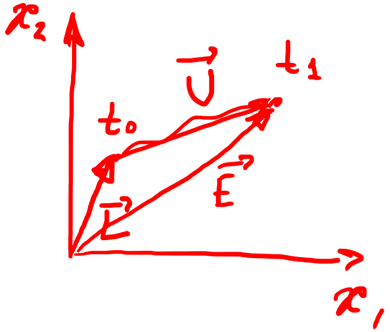
$\nabla\varphi = [\![\dfrac{\partial\varphi}{\partial x_i}]\!]$

$\nabla\cdot\vec{a} = \dfrac{\partial a_i}{\partial x_i}$

$\nabla\cdot T_a = [\![\dfrac{\partial a_{ij}}{\partial x_i}]\!]$

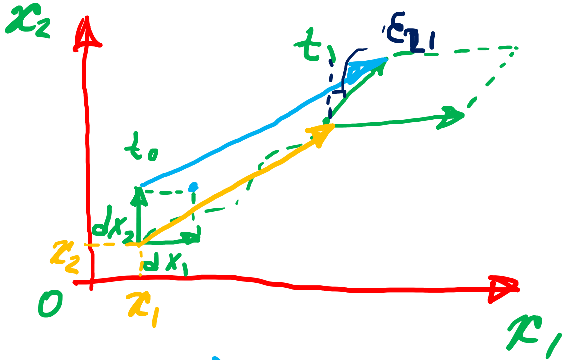
$\nabla\otimes\vec{a} = [\![\dfrac{\partial a_j}{\partial x_i}]\!]$

1.3



$\vec{U} = \vec{E} - \vec{L}$

$d\Omega$



$\vec{U}(x_1, x_2)$

$\vec{U}(x_1, x_2 + dx_2)$

$\vec{U}(x_1 + dx_1, x_2)$

$\vec{U}(x_1 + dx_1, x_2 + dx_2)$

$d\vec{U} = (\vec{U}\otimes\nabla)\cdot d\vec{x}$ $\qquad$ $\nabla\otimes\vec{U}$ – дисторция $\qquad$ Distortion

$\left\|\dfrac{\partial U_j}{\partial x_i}\right\| \ll 1$

$T_\varepsilon = [\![\varepsilon_{ij}]\!] = \frac{1}{2}(\nabla\otimes\vec{U} + \vec{U}\otimes\nabla)$; $\boxed{\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u_j}{\partial x_i} + \dfrac{\partial u_i}{\partial x_j}\right)}$ – ф-ла Коши в кинем.

ε_{ii} – лин. деф $\qquad$ $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji}$ – сдвиг

По станд. проц. T_ε можно прив. к диаг. виду $T_\varepsilon = \left[\!\left[\begin{matrix}\varepsilon_1 & 0 & 0\\ 0 & \varepsilon_2 & 0\\ 0 & 0 & \varepsilon_3\end{matrix}\right]\!\right]$

$\varepsilon_1 \geqslant \varepsilon_2 \geqslant \varepsilon_3$

По др. станд. проц. $T_\varepsilon = \underset{\text{хар. изм объема}}{S_\varepsilon} + \underset{\text{формы}}{D_\varepsilon}$

$\varepsilon_0 = \frac{\varepsilon_{ii}}{3} = \frac{\varepsilon_{11}+\varepsilon_{22}+\varepsilon_{33}}{3}$; $S_\varepsilon = \varepsilon_0 T_\delta$, $T_\delta = [\![\delta_{ij}]\!]$.

$D_\varepsilon = T_\varepsilon - S_\varepsilon = [\![e_{ij}]\!]$

По др. станд. проц. $I^1 = e_{ii} = 0$, $I^2 = \frac{1}{2} e_{ij}e_{ji}$.

$\boxed{\Gamma = \sqrt{2 e_{ij} e_{ji}}}$ – инт. сдвиг. деф.

1.4 Усл. совм. деф.

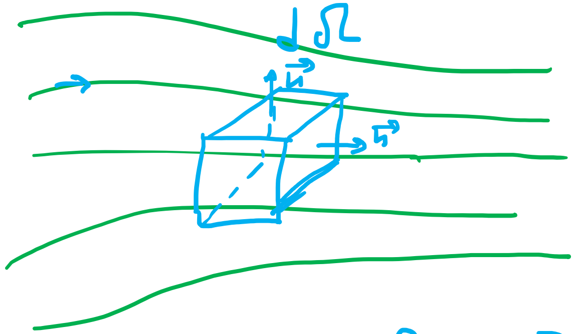
$\boxed{\nabla_2 \times T_\varepsilon = 0}$ у.с.д. Сен-Венана.

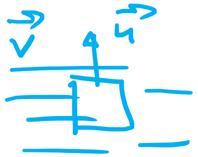
$\nabla_2 = \nabla \otimes \nabla = \left[\!\left[\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}\right]\!\right]$

1.5. Поле скоростей $\vec{V} = \vec{V}(x_i(t), t)$

$$\vec{V} = \frac{d\vec{U}}{dt}$$

$$\nabla \cdot \vec{V} = 0$$

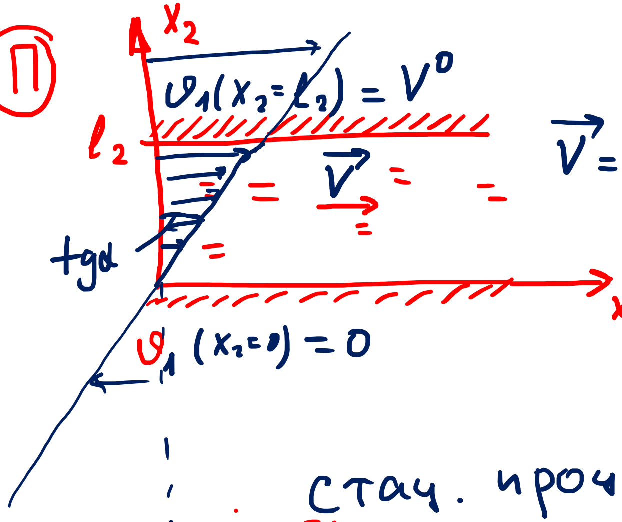




$$\int_S \vec{V}\cdot\vec{n}\, dS = \int_\Omega \nabla\cdot\vec{V}\, d\Omega$$

ф-ла Остроград-Гаусса

П

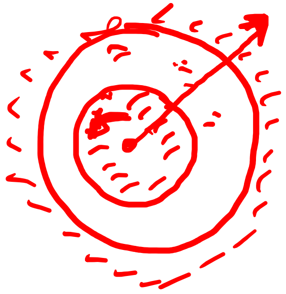


$\vec{V} = [\![v_1(x_2)\ 0]\!]$

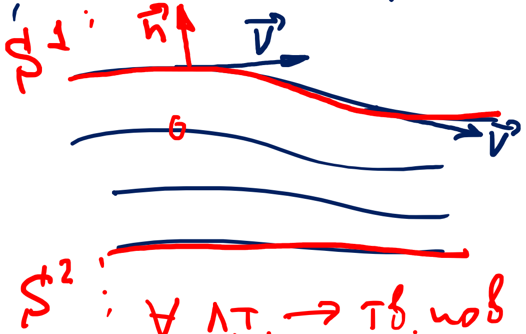
$$\boxed{v_1 = \frac{V^0}{l_2} x_2}$$

$v_1(0) = 0$

$v_1(l_2) = V^0$



стац. проц.

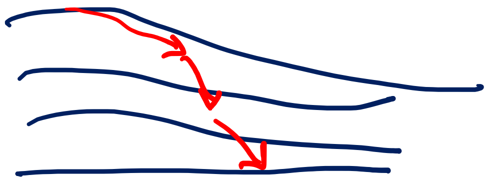


$$Q = \int_{S_1} \vec{n}\cdot\vec{V}\, dS_1 \overset{\text{“}}{=} 0$$

$\forall$ л.т. → тв. пов

Причина затверд.

нестац.



$$\boxed{\frac{\partial f(x_i(t), t)}{\partial t} = 0}$$

~~По станд. проч.~~

Тензор скор. деф-ий

$$\vec a = \frac{d\vec V(x_i(t),t)}{dt}, \qquad \frac{d\vec V}{dt} = \frac{\partial \vec V}{\partial t} + \underbrace{\vec V\cdot\big(\overbrace{\nabla\otimes\vec V}^{\text{скор. деф.}}\big)}_{\text{конвект. слаг.}}$$

$$T_\xi = [\![\xi_{ij}]\!] = \frac{1}{2}\left(\nabla\otimes\vec V + \vec V\otimes\nabla\right)$$ – ф. Стокса

$$\xi_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_j}{\partial x_i} + \frac{\partial v_i}{\partial x_j}\right)$$

По станд. проч. $T_\xi = \left[\!\!\left[\begin{matrix}\xi_1 & 0 & 0\\ 0 & \xi_2 & 0\\ 0 & 0 & \xi_3\end{matrix}\right]\!\!\right]$.

По др. ст. проч. $T_\xi = S_\xi + D_\xi$; $S_\xi = \xi_0 \cdot T_\delta$; $\xi_0 = \xi_{ii}/3$

$$D_\xi = [\![\eta_{ij}]\!] \to H = \sqrt{2\eta_{ij}\eta_{ij}} = 2\|\eta^{II}\|$$

инт. сдвиговых скоростей деф.

Усл. совм. скор. деф. $\boxed{\nabla_2 \times T_\xi = 0}$

ξ (кси)

H, η эта

Практика 1.

Дано: $$\begin{array}{cccc} & u_1 & u_2 & u_3 \\ \vec{U} = & [\![\, x_1x_2 & 5x_1 & 0 \,]\!] \end{array}$$

1. Найти T_ε. $\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)$

$$\varepsilon_{11} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial(x_1x_2)}{\partial x_1} + \frac{\partial(x_1x_2)}{\partial x_1}\right) = x_2$$

$$\varepsilon_{12} = \frac{1}{2}(x_1 + 5) = \frac{x_1+5}{2}$$

$$\varepsilon_{13} = \frac{1}{2}(\quad) = 0$$

$$\varepsilon_{21} = \frac{1}{2}(5 + x_1) = \frac{x_1+5}{2}$$

$$\varepsilon_{22} = \frac{1}{2}(0 + 0) = 0$$

$$\varepsilon_{23} = \frac{1}{2}(0 + 0) = 0$$

$$\varepsilon_{31} = \frac{1}{2}(0) = 0$$

$$\varepsilon_{32} = 0$$

$$\varepsilon_{33} = 0$$

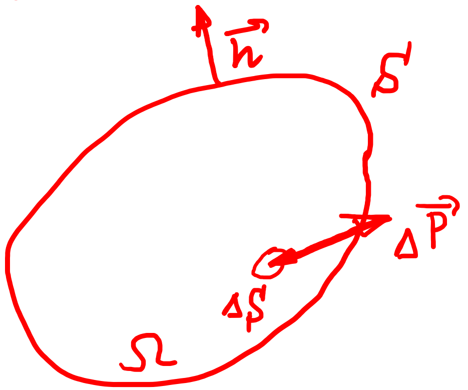
$$T_\varepsilon = \begin{bmatrix} x_2 & \frac{x_1+5}{2} & 0 \\ \frac{x_1+5}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

15.09.2021. Лекция 2. – Статика сплошных сред

Силы

Поверхн. (распр. по пов)

Объемные (распр. по объему)



$$\vec{\sigma}^n = \lim_{\Delta S \to 0} \frac{\Delta \vec{P}}{\Delta S} \qquad \left[\frac{Н}{м^2}\right] = [Па]$$

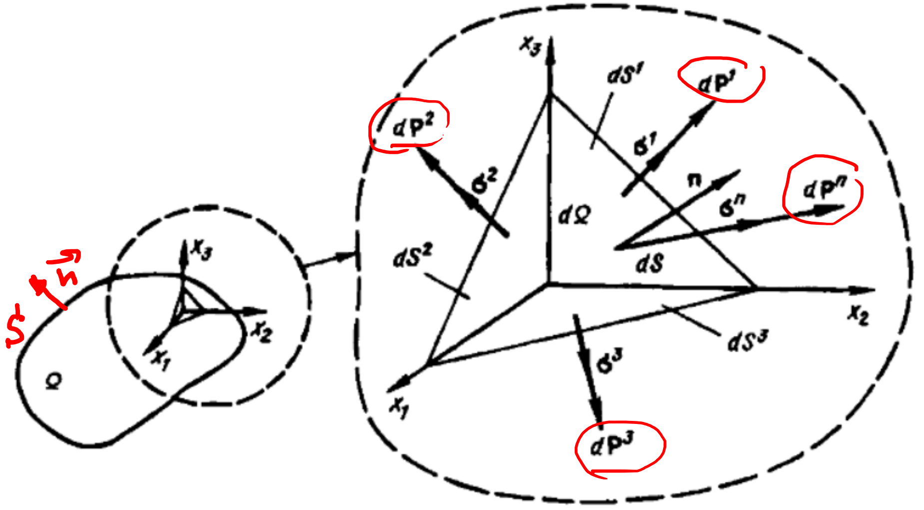
$$\boxed{\vec{\sigma}^n = \frac{d\vec{P}}{dS}}$$

$$\int d\vec{P} = \int \vec{\sigma}^n dS$$

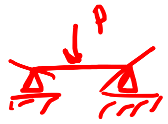
$$\vec{P} = \int_S \vec{\sigma}^n dS$$

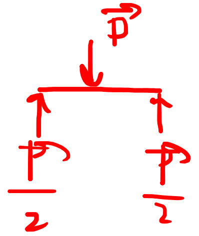
$\sigma^n = const$

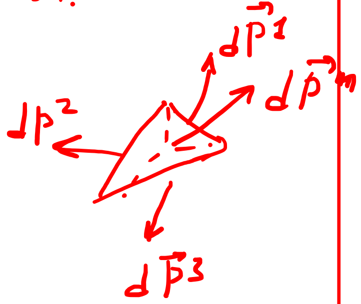
$P = \sigma^n S$

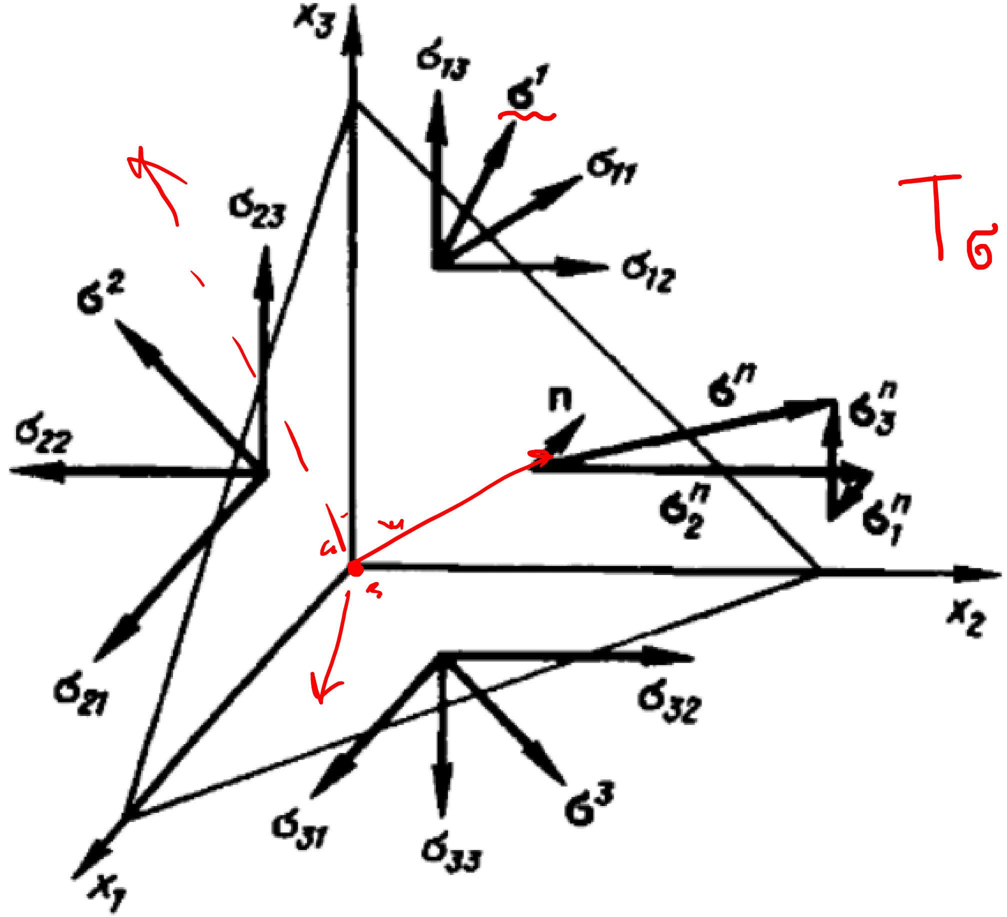


РОЗУ









$$T_\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix}$$

$$\vec{\sigma}^n = \frac{d\vec{P}^n}{dS}$$

$$\vec{\sigma}^i = \frac{d\vec{P}^i}{dS_i}$$

$n=2 \quad N=3 \quad N^n=9$

$$\sigma'_{ij} = \alpha_{ik}\,\alpha_{jm}\,\sigma_{km}$$

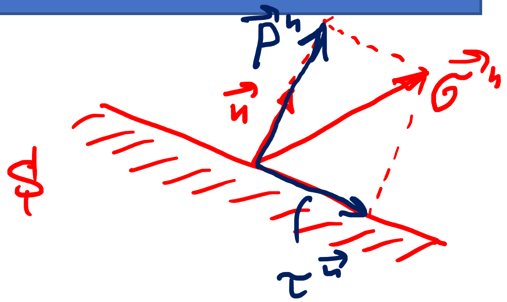
Формула О. Коши в статике

$$\boxed{\vec{\sigma}^{n} = \vec{n}\cdot T_{\sigma}}$$

полное напр на пов. хар. $\vec{n}$

→ объемные силы не вкл. поверх. напр. ! + 5 б.

T, τ (тау)

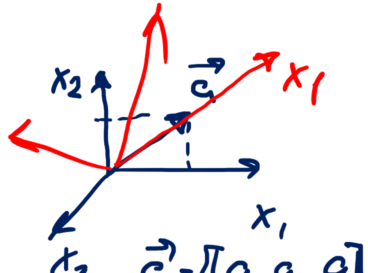


$$\vec{\sigma}^{n} = \vec{p}^{n} + \vec{\tau}^{n}$$

полн, норм (давл), кас

; $p^{n} = \vec{n}\cdot\vec{\sigma}^{n}$

$\vec{\tau}^{n} = \vec{\sigma}^{n} - \vec{p}^{n}$.



$\vec{a} = [[a_1\ a_2\ a_3]]$

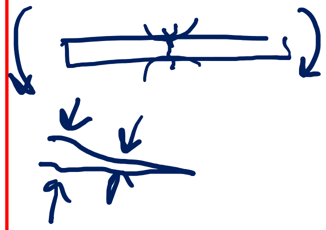
$\vec{a} = [[a_1\ 0\ 0]]$

По станд. проц. T_σ → к гл. виду $T_\sigma = \left[\left[\begin{matrix}\sigma_1 & 0 & 0\\ 0 & \sigma_2 & 0\\ 0 & 0 & \sigma_3\end{matrix}\right]\right]$ $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$

По др. св. проц. $T_\sigma = S_\sigma + D_\sigma$; $\sigma_0 = \dfrac{\sigma_{ii}}{3}$ – ср. напр. $\boxed{-\sigma_0 = p_0}$ - гидрост. давление

изм. объема, изм формы

$S_\sigma = \left[\left[\begin{matrix}\sigma_0 & 0 & 0\\ 0 & \sigma_0 & 0\\ 0 & 0 & \sigma_0\end{matrix}\right]\right]$ $D_\sigma = T_\sigma - S_\sigma$



$D_\sigma = [[s_{ij}]]$;

По др. св. проц. опр инв. т. напр I^1, I^2, I^3

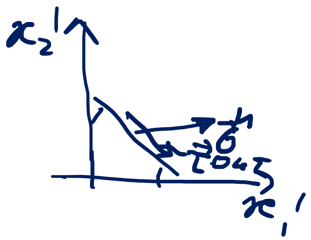
$$\tilde{T} = \sqrt{\tfrac{1}{2} s_{ij} s_{ji}}$$

инт. кас. напр.

Напр. на характерних площадках

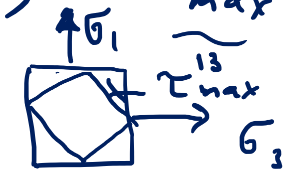
1. Гл. напр $\quad T_\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix}$

2. Площ. рівнонахил. к гл. → октаэдр.



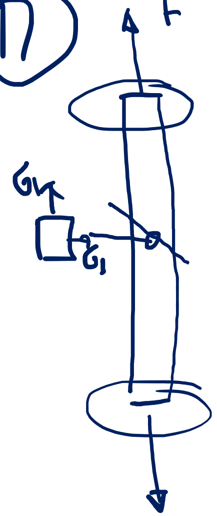
$$\underbrace{\tau^{окт} = \sqrt{\frac{2}{3}}\, T}$$

3. Площ. макс. (экстр. кас. напр) $\quad \tau^{i,j}_{max} = \dfrac{\sigma_i - \sigma_j}{2}$



$$\tau^{1,3}_{max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}$$

П



$\sigma_1 = \dfrac{F}{S}$

$$T_\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\tau^{13}_{max} = \frac{\sigma_1}{2}$$

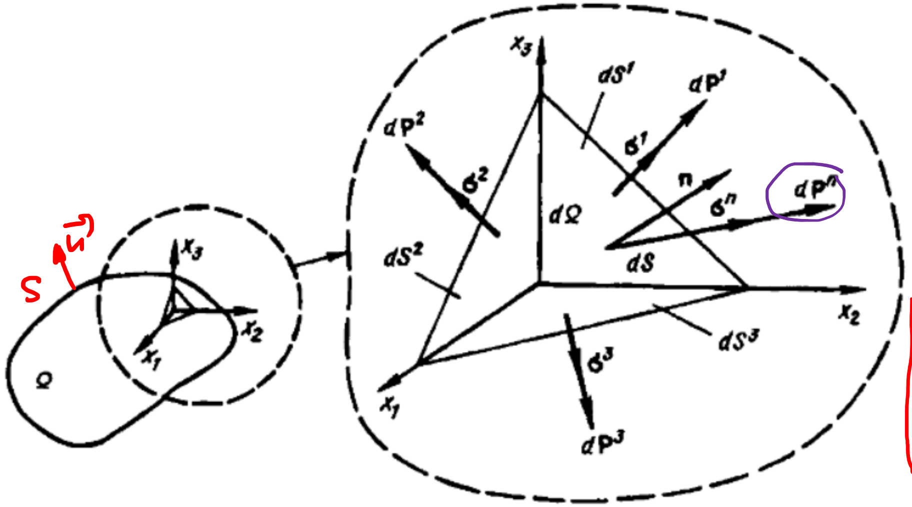
$$T = \sqrt{\frac{1}{2} S_{ij} S_{ji}} = \sqrt{\frac{1}{2}\left(S_{11}S_{11} + S_{12}S_{21} + S_{13}S_{31} + \dots\right)}$$

22.09.2021. Лекция **3.** – Динамика сплошных сред

1. Разминка
2. Лирическое отступление: дифференц. сложных функций
3. Уравнение неразрывности
4. Уравнение движения
5. Баланс мощностей
6. Уравнение баланса тепла

$\Delta \vec{P}^n$ $\quad \boxed{\Delta S^i = \Delta S\, n_i} \quad \vec{n} = [n_i]$ $\qquad \Delta S = \dfrac{\Delta S^i}{n_i}$

На ф.р. тела действ. внеш. сила $\Delta \vec{P}^n + \Delta \vec{P}^i$ + объемная $\vec{g}\rho\Delta\Omega$. Предп. 2 точ. тела в равн.



$$\boxed{\vec{\sigma}^i = \lim \frac{\Delta \vec{P}^i}{\Delta S^i}}$$

$$\Delta \vec{P}^n = \Delta \vec{P}^1 + \Delta \vec{P}^2 + \Delta \vec{P}^3 + \vec{g}\rho\Delta\Omega$$

$\Delta x_i \ll 1$

$\Delta\Omega = \Delta x_1 \Delta x_2 \Delta x_3$

Доказать $\vec{\sigma}^n = \vec{\sigma}^i n_i$.

$\vec{\sigma}^n = T_\sigma \cdot \vec{n}$

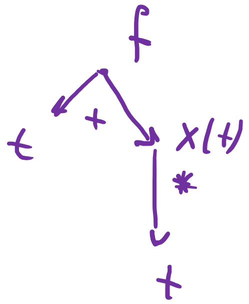
5 min.

$$\lim_{\Delta S \to 0} \frac{\Delta \vec{P}^n}{\Delta S} = \lim_{\Delta S \to 0} \frac{\Delta \vec{P}^1}{\Delta S_1} n_1 + \lim_{\Delta S \to 0} \frac{\Delta \vec{P}^2}{\Delta S_2} n_2 + \lim_{\Delta S \to 0} \frac{\Delta \vec{P}^3}{\Delta S_3} n_3 + \lim_{\Delta S \to 0} \vec{g}\rho \frac{\Delta\Omega}{\Delta S}$$

$$\underline{\vec{\sigma}^n = \vec{\sigma}^1 n_1 + \vec{\sigma}^2 n_2 + \vec{\sigma}^3 n_3} + 0$$

Л.о.

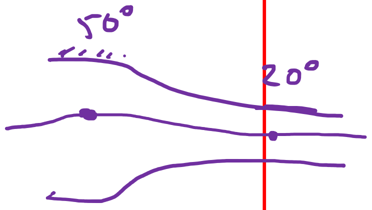
$$f(t) = \sin(t^2), \quad x(t) = t^2, \Rightarrow f(x(t)) = \sin x$$



$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} = \cos x \cdot 2t = 2t\cos(t^2)$$

$$\Theta = \Theta(x_i(t), t)$$

$$\frac{d\Theta}{dt} = \frac{\partial \theta}{\partial t} + \underbrace{\frac{\partial \theta}{\partial x_i}\frac{dx_i}{dt}}_{\text{конв. слаг.}} = \frac{\partial \theta}{\partial t} + \underbrace{\frac{\partial \theta}{\partial x_j} V_j}$$



$$\vec{V} = \vec{V}(x_i(t), t)$$

$$\frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{V}}{\partial x_i} V_i$$

3. Уравн. неразр.

$$m = \int_{\Omega} \rho \, d\Omega = const \rightarrow \boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{V}) = 0}$$

+5б.

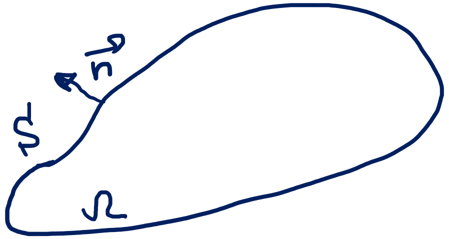
г.с. ф-е прот. стационарна $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$ $\quad \nabla \cdot (\rho \vec{V}) = 0$

г.с 2. $\rho = const$. $\quad \underline{\nabla \cdot \vec{V} = 0}$ – усл. несж.

4.

4. Ур-е движения

$$\vec{\sigma}^n = \frac{d\vec{P}}{dS}$$



$\vec{f}$ – массовая сила (e.g. $\vec{g}$)

$$\int\limits_{\Omega}\left(\vec{f} - \frac{d\vec{v}}{dt}\right)\rho\, d\Omega + \int\limits_{S}\vec{\sigma}^n dS = 0; \quad \int\limits_{\Omega}\frac{d\vec{v}}{dt}\rho\, d\Omega = \int\limits_{S}\vec{\sigma}^n dS + \int\limits_{\Omega}\vec{f}\rho\, d\Omega.$$

$$\vec{\sigma}^n = T_\sigma\cdot\vec{n}, \quad \int\limits_{S} T_\sigma\cdot\vec{n}\, dS = \int\limits_{\Omega}\nabla\cdot T_\sigma\, d\Omega$$

$$\int\limits_{\Omega}\left[\nabla\cdot T_\sigma + \vec{f}\rho - \frac{d\vec{v}}{dt}\rho\right] d\Omega = 0.$$ Согл. лемме об инт. по произв. объему

$$\boxed{\rho\frac{d\vec{v}}{dt} = \nabla\cdot T_\sigma + \vec{f}\rho}$$

3 ур $\quad v_1, v_2, v_3, \rho, [\![\sigma_{ij}]\!]$

ч.с. $\vec{f}\to 0, \quad \frac{d\vec{v}}{dt}\to 0$

$$\boxed{\nabla\cdot T_\sigma = 0}$$ ур-е равн.

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$$

5. Баланс мощностей

По опр. $\text{Ext} = \int\limits_S \vec{\sigma}^n \cdot \vec{V}\, dS = \int\limits_\Omega \nabla\cdot(T_\sigma \cdot \vec{V})\, d\Omega$

$\vec{\sigma}^n \cdot \vec{V} = T_\sigma \cdot \vec{n} \cdot \vec{V} = (T_\sigma \cdot \vec{V}) \cdot \vec{n}$

Можно доказать, что $\nabla\cdot(T_\sigma \cdot \vec{V}) = \underline{(\nabla \cdot T_\sigma)\cdot \vec{V}} + T_\sigma \cdot (\nabla \otimes \vec{V}) =$ ~ 5 б.

$= (\nabla \cdot T_\sigma)\cdot \vec{V} + T_\sigma \cdot T_\xi =$ ~ 5 б.

$= (\nabla \cdot T_\sigma)\cdot \vec{V} + D_\sigma \cdot D_\xi + \underline{3\sigma_0 \xi_0}\,.$ ~ 5 б.

Умн. ур-е дв. $\cdot \vec{V}$

$\int\limits_\Omega \left[\rho\left(\vec{f} - \frac{d\vec{V}}{dt}\right)\cdot \vec{V} + \underline{(\nabla\cdot T_\sigma)\cdot \vec{V}}\right] d\Omega = 0\,;$ $\int\limits_\Omega \left[\rho\left(\vec{f} - \frac{d\vec{V}}{dt}\right)\cdot \vec{V} + \underline{\nabla\cdot(T_\sigma \cdot \vec{V})} - T_\sigma \cdot (\nabla\otimes \vec{V})\right] d\Omega = 0$

$$\boxed{\int\limits_\Omega \rho \vec{f}\cdot\vec{V}\, d\Omega + \int\limits_S \vec{\sigma}^n \cdot \vec{V}\, dS = \int\limits_\Omega \rho \frac{d\vec{V}}{dt}\cdot \vec{V}\, d\Omega + \int\limits_\Omega T_\sigma \cdot (\nabla\otimes \vec{V})\, d\Omega}$$

акт. мощность $\qquad\qquad$ реакт. м-ть

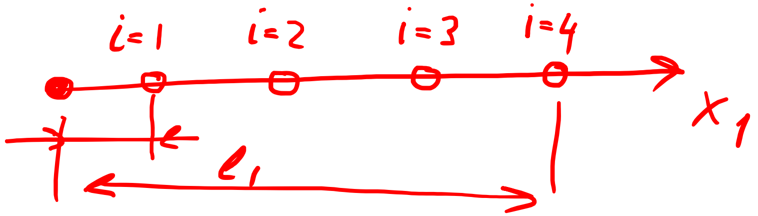
13.10.2021. Динамика (продолжение) + Реология

③ Дано. $\frac{dp}{dx_1} = 5$. Г.у. при $x_1 = 0$, $p(0) = 10^5$ Па =

Найти давл. в инт. $0 \le x_1 \le l_1$, в $N=4$ точках

$$\frac{dp}{dx_1} \approx \frac{p^i - p^{i-1}}{\Delta x_1} \Rightarrow \boxed{p^i - p^{i-1} = 5\Delta x_1}$$ - Nши

$\Delta x_1 = \frac{l_1}{N}$



$i=1$: $p^1 = 5\Delta x_1 - p^0$

$i=2$: $p^2 - p^1 = 5\Delta x_1$

⋮

$$\boxed{\underline{\Lambda} \cdot p = \Gamma}$$

$$\overset{\underline{\Lambda}}{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}} \cdot \overset{p}{\begin{pmatrix} p^1 \\ p^2 \\ p^3 \\ p^4 \end{pmatrix}} = \overset{\Gamma}{\begin{pmatrix} 5\Delta x_1 - p^0 \\ 5\Delta x_1 \\ 5\Delta x_1 \\ 5\Delta x_1 \end{pmatrix}}$$

Ур-е баланса тепла.

За dt в теле выделилось тепло dQ_1 за счет деформирования (движения), кот. израсх. на передачу части тепла другим телам dQ_2 за счет теплопроводности и на повышение темп. поля Ω dQ_3

$$dQ_1 = dQ_2 + dQ_3 .$$

Гипотеза 1.: внутр. энерг. деф. полностью превр. в тепло dQ_1

$$dQ_1 = \left(\int_\Omega T_\sigma \cdot T_\xi \, d\Omega\right) dt$$

Гип. 2: $\exists$ тепловой поток $dQ_2 = \left(\int \vec{q} \cdot \vec{n} \, dS\right) dt = \left(\int_\Omega \nabla \cdot \vec{q} \, d\Omega\right) dt$

Гип. 3: $\underline{\vec{q} = -k \nabla \theta}$, где θ – температура.

$$dQ_3 = \int_\Omega \rho c \, d\theta \, d\Omega$$

$(Q = c m \Delta T)$

$$\int_\Omega T_\sigma \cdot T_\xi \, d\Omega = \int_\Omega \nabla \cdot \vec{q} \, d\Omega + \int_\Omega \left(\rho c \frac{d\theta}{dt}\right) d\Omega ; \to$$

ур-е баланса тепла

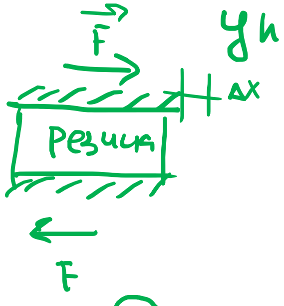
$$\boxed{\frac{d\theta}{dt} = \frac{\nabla \cdot (k \nabla \theta)}{\rho c} + \frac{T_\sigma \cdot T_\xi}{\rho c}}$$

Реология

Связь напряженного (T_σ) и деформированного (T_ε, T_ξ) состояний определяется **экспериментально**

Среды

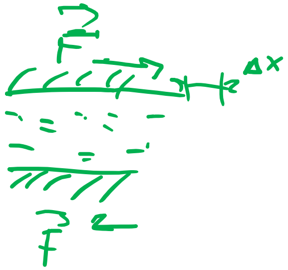
упр.



$F = -k\Delta x$

$T_\sigma = T_\sigma(T_\varepsilon)$

пластич. вязких



$F = -\gamma V$

$T_\sigma = T_\sigma(T_\xi)$

$$\boxed{D_\sigma = 2\mu D_\xi}$$

$\sigma_1 = \frac{F}{S}$

$$T_\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow T'$$