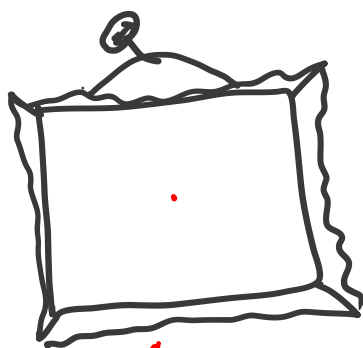
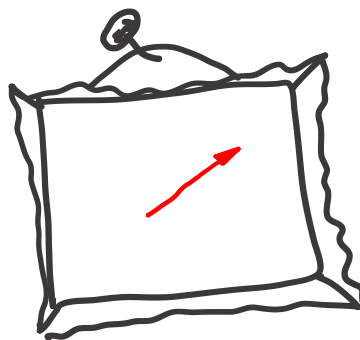


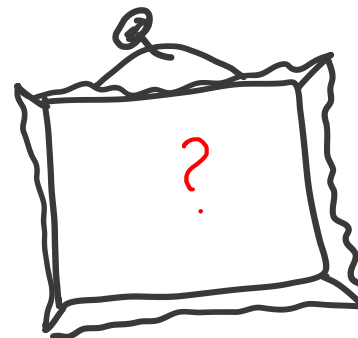
# An Introduction to Tensor Calculus. Part 1: Scalars, Vectors and Tensors.



Скаляр



Вектор



Тензор

$N$  - разм. пространство.

Скаляр  $a \in \mathbb{R}^N$  хар-ей  $N^0 = 1$  компонент

Вектор  $\vec{a} \in \mathbb{R}^N$  хар-ей  $N^1 = N$  компонент

Тензор  $T_a^{n-ранг} \in \mathbb{R}^N$  хар-ей  $N^n$  компонент

$a$   
скаляр

$$\vec{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_N \end{bmatrix} = [a_i] \quad T_a^2 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = [a_{ij}]$$

Т-ор 2 ранга

номер строки  
номер столбца

вектор

# An Introduction to Tensor Calculus. Part 1: Scalars, Vectors and Tensors.

Правило Эйнштейна

$$\vec{a} = [a_i] = [a_1 \ a_2 \ a_3]$$

$$= [a_j] = [a_1 \ a_2 \ a_3]$$

$$a_i \geq \text{норми} \quad \begin{matrix} (i=1 \dots 3) \\ (j=1 \dots 3) \end{matrix}$$

скал.

скал.

$a_i$

$a_1, a_2, a_3$

$a_{ii}$

$a_{11} + a_{22} + a_{33}$

$a_i b_i$

$a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$

$a_{ij}$

$a_{11} \ a_{12} \ a_{13}$

$a_{21} \ a_{22} \ a_{23}$

$a_{31} \ a_{32} \ a_{33}$

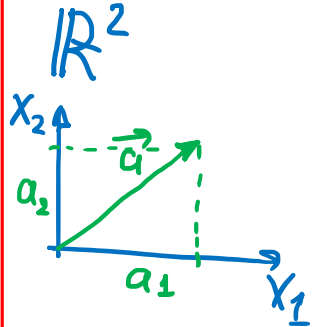
$(i, j = 1 \dots 3)$

$a_{ij} b_{ij}$

$a_{11} b_{11} + a_{12} b_{12} + a_{13} b_{13} +$   
 $+ a_{21} b_{21} + a_{22} b_{22} + a_{23} b_{23} +$   
 $+ a_{31} b_{31} + a_{32} b_{32} + a_{33} b_{33}.$

$N^{\text{кончик}}$

$\mathbb{R}^3$



$i \ j$

1	1
1	2
1	3
2	1
2	2
2	3
3	1
3	2
3	3

1 1  
1 2  
1 3  
2 1  
2 2  
2 3  
3 1  
3 2  
3 3

# An Introduction to Tensor Calculus. Part 1: Scalars, Vectors and Tensors. Use. Type

$$c_i = a_{ij} b_j \quad \sim$$

$$c_1 = a_{11} b_1 + a_{12} b_2 + a_{13} b_3,$$

$$c_2 = a_{21} b_1 + a_{22} b_2 + a_{23} b_3,$$

$$c_3 = a_{31} b_1 + a_{32} b_2 + a_{33} b_3,$$

$$c_{ik} = a_{ij} b_{jk}$$

$$c_{11} = a_{11} b_{11} + a_{12} b_{21} + a_{13} b_{31},$$

$$c_{12} =$$

$$c_{13} =$$

$$c_{21} =$$

$$c_{22} =$$

$$c_{23} =$$

$$c_{31} =$$

$$c_{32} =$$

$$c_{33} =$$

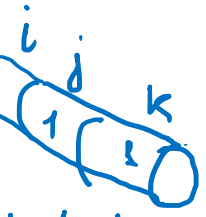
$$c_i = \epsilon_{ijk} a_j b_k$$

$$c_0 = \epsilon_{011} a_1 b_1 + \epsilon_{112} a_1 b_2 + \epsilon_{113} a_1 b_3 + \epsilon_{121} a_2 b_1 + \dots$$

$$c_2 =$$

$$c_3 =$$



$$\begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix}$$


$$\begin{matrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{matrix}$$

# An Introduction to Tensor Calculus. Part 1: Scalars, Vectors and Tensors.

$$\mathbb{R}^N \quad i, k, j, \dots = 1 \dots N$$

Компоненты Т-ов ранга 1 и выше изменяются при повороте координат.

Т-ор 0 ранга

Тен-р 1 ранга

Т-р n-го ранга

Низ. коорд.  $x_i$

$a$

$$\vec{a} = [a_i]$$

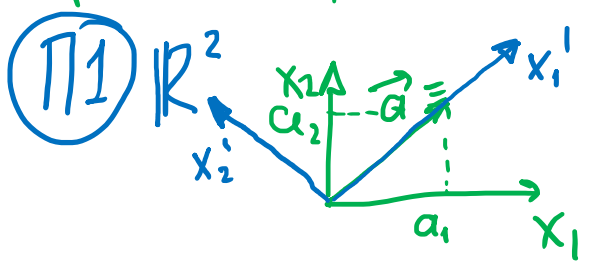
$$\vec{T}_a = [a_{ijk \dots m}]$$

После поворота  $x'_i$

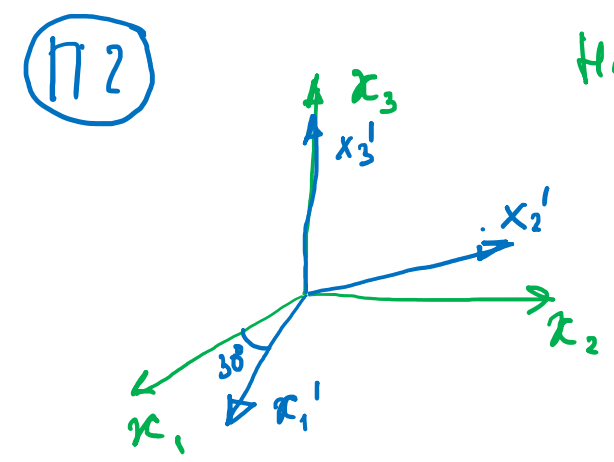
$a$

$$\vec{a} = [a'_i]$$

$$\vec{T}_a = [a'_{ijk \dots m}]$$



Матрица косинусов  $\alpha_{ij} = \cos \angle x'_i x_j \sim \mathbb{R}^N$



Найти  $\alpha_{ij}$  после поворота коорд. 80к руг  $x_3$  на  $30^\circ$

$$(\alpha_{ij}) = \begin{pmatrix} \alpha_{11} \cos(30^\circ) & \alpha_{12} \cos(60^\circ) & \alpha_{13} \cos(90^\circ) \\ \alpha_{21} \cos(120^\circ) & \alpha_{22} \cos(30^\circ) & \alpha_{23} \cos(90^\circ) \\ \alpha_{31} \cos(90^\circ) & \alpha_{32} \cos(30^\circ) & \alpha_{33} \cos(0^\circ) \end{pmatrix}$$

# An Introduction to Tensor Calculus. Part 1: Scalars, Vectors and Tensors.

Тензор  $n$ -го ранга это матем. вел-на, характеризующаяся в  $N$ -мерном пространстве  $N^n$  кол-вом компонент, каждая из которых при повороте коорд. изменяется по закону:

$$a' = a$$

Т-р 0-го ранга

$$a'_i = \alpha_{ik} a_k$$

Т-р 1-го ранга

$$a'_{ij} = \alpha_{ik} \alpha_{jm} a_{km}$$

Т-р 2-го ранга

$$a'_{i \dots j} = \alpha_{ik} \dots \alpha_{jm} a_{k \dots m}$$

Т-ор ранга  $n$

# An Introduction to Tensor Calculus. Part 1: Scalars, Vectors and Tensors.

Действия над тензорами (их матрицами)

1.1. Транспонирование  $T_a \rightarrow T_a^T$

$$T_a^T = ((a_{ij}^T)) \quad a_{ij}^T = a_{ji} \quad a_{11}^T = a_{11}, a_{12}^T = a_{21}, \dots$$

1.2. Симметрирование  $T_s$  и альтернирование  $T_c$  тензора  $T_a$

$$T_s = \frac{1}{2} (T_a + T_a^T) \quad s_{ij} = \frac{1}{2} (a_{ij} + a_{ji});$$

$$T_c = \frac{1}{2} (T_a - T_a^T) \quad c_{ij} = \frac{1}{2} (a_{ij} - a_{ji});$$

$$T_s + T_c = T_a$$

1.3. Сложение

$$T_c = T_a + T_s$$

$$c_{ij} = a_{ij} + s_{ij}$$

# An Introduction to Tensor Calculus. Part 1: Scalars, Vectors and Tensors.

1.4. Умножение на число

$$T_c = a T_b \quad c_{ij} = a \delta_{ij}$$

1.5. Пн-скалярное умножение (p-dot product)

$$T_c^{m+n-p} = T_a^n \odot T_b^m$$

$$c_{i...j r...s} = a_{\overbrace{i...j k...l}^{p \text{ штук}}} \delta_{\overbrace{k...l r...s}^m}$$

1.6.  $m=n=p=0$

$$T_c^0 = T_a^0 \cdot T_b^0$$

$$c = a \cdot \delta \quad - \text{скал. пр 2 экз.}$$

$m=n=p=1$

$$T_c^{1+1-2 \cdot 1} = T_a^1 \cdot T_b^1$$

$$c = \begin{matrix} a_k \\ \delta_k \end{matrix} \quad - \text{скал пр 2х вект}$$

$m \geq 1, n=p=0 \quad p=0 \odot \rightarrow \otimes$

$$T_c^m = T_a^0 \otimes T_b^m$$

$$c_{r...s} = a \delta_{\underbrace{r...s}_m} \quad - \text{умн. Т-ра на число}$$

$$P, p$$
  

$$\pi_4$$

$$\underline{a_i \delta_i} = a_1 \delta_1 + a_2 \delta_2 + a_3 \delta_3$$

$$\underline{A = \vec{F} \cdot \vec{u}}$$
  

сила перем.

# An Introduction to Tensor Calculus. Part 1: Scalars, Vectors and Tensors.

$$m=n=1, p=0$$

$$T_c = T_a^1 \otimes T_b^1$$

$$c_{ir} = a_i b_r$$

1.6  $n$ -devo prod  $n$ -e (p-cross product)

$$T_c^{m+n-p} = T_a^m \times_p T_b^n$$

$$c_{i...j f...t u...r} =$$

$$= \epsilon_{f v q} \dots \epsilon_{t k w} a_{i...j v...k} b_{q...w u...r}$$

p-wt k

ex.  $m=n=p=1$

$$T_c^{1+1-1} = T_a^1 \times T_b^1$$

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$$

$$c_f = \epsilon_{f v q} a_v b_q$$

$$c_1 = a_2 b_3 - a_3 b_2$$

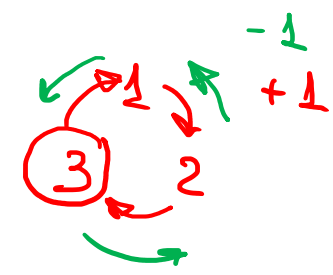
$$c_2 = a_3 b_1 - a_1 b_3$$

$$c_3 = a_1 b_2 - a_2 b_1$$

$$c = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \vec{e}_1 (a_2 b_3 - a_3 b_2) + \vec{e}_2 (a_3 b_1 - a_1 b_3) + \vec{e}_3 (a_1 b_2 - a_2 b_1) =$$

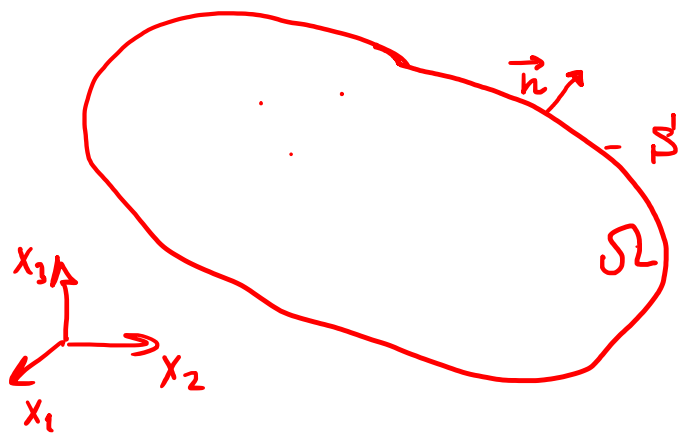
+ 312  
- 321

Символ  
Левый-Числитель  
 $\epsilon_{f v q} = \begin{cases} -1 - \text{перест.} \\ 1 - \text{нет.} \\ 0 - \text{одн.} \end{cases}$





## Анализ тензорных полей.



Рассм. область  $\Omega$  с пов-ю  $S$ , характеризующейся внешней нормалью  $\vec{n}$ .

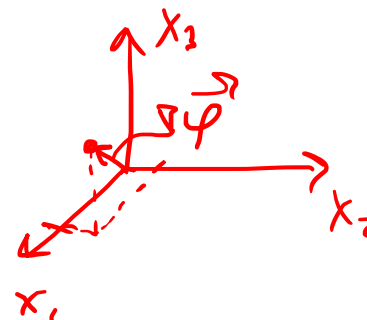
Если в кажд. т. пространства  $\Omega$  задан тензор, то говорят, что задано тензорное поле

2.1  $\nabla \varphi = \left[ \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right]$  - градиент (напр. напр. роста),  $\nabla = \left[ \frac{\partial}{\partial x_i} \right]$  - оператор Гамильтона

$$\varphi = 5x_1x_2 + 10x_1x_3$$

$$\nabla \varphi = [5x_2 + 10x_3, 5x_1, 10x_1]$$

$$\nabla \varphi(x_1=5, x_2=2, x_3=10) = [105, 25, 50]$$



Кочич НБ.

Аналит. геом.  
и напр. тензор.  
анализа.

Анализ тензорных полей.

Анализ тензорных полей.

# Анализ тензорных полей.

# Анализ тензорных полей.

# Анализ тензорных полей.

# Анализ тензорных полей.

# Анализ тензорных полей.



# An Introduction to Tensor Calculus. Part 1: Scalars, Vectors and Tensors.