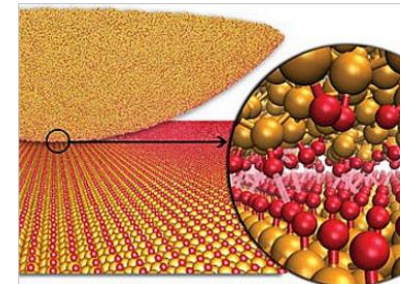
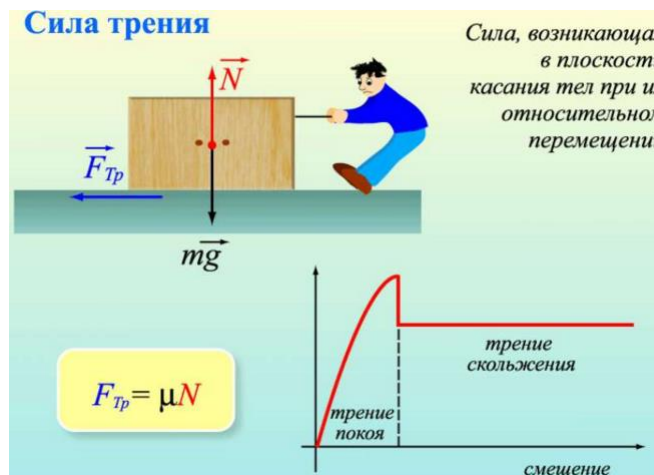
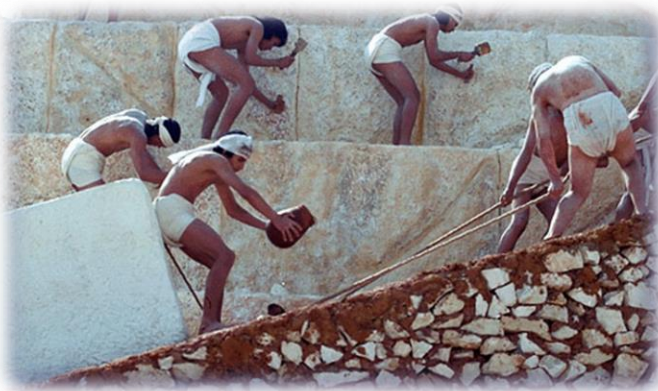


Триботехника

Лекция на тему: «Физика контакта твердых тел»

Докт.техн.наук, профессор кафедры
мехатроники, механики и робототехники
Корнаев Алексей Валерьевич

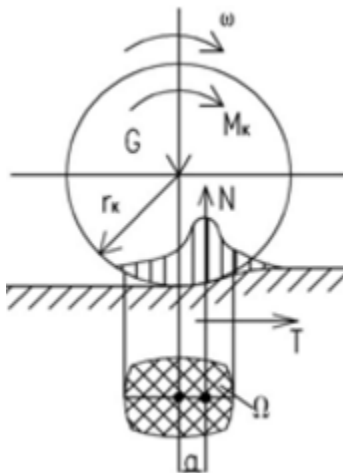


План лекции

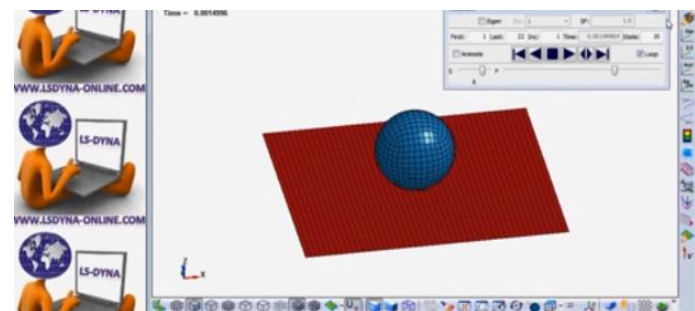
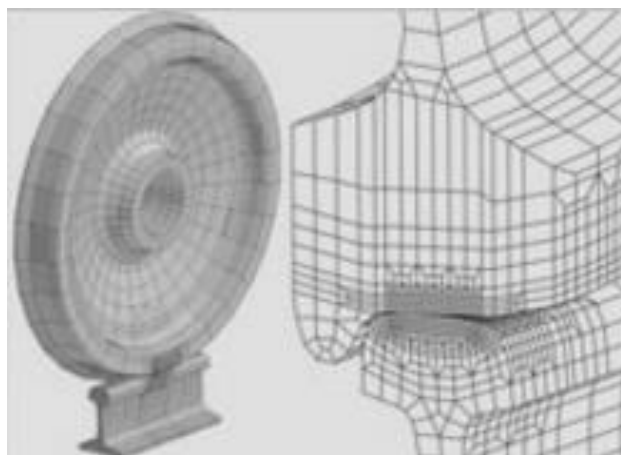
План лекции:

Напоминание

1. Суть и практическая значимость контактных задач
2. Методы решения контактных задач
3. Контактная задача Герца
4. Современное программное обеспечение решения контактных задач



Вид уравнения	Тензорная форма записи	Скалярная форма записи	Суммарное количество	
			неизвестных	уравнений
Уравнение движения	$\nabla \cdot T_{\sigma} + \rho \vec{f} = \rho \frac{d\vec{v}}{dt}$	$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_i} + \rho f_i = \rho \frac{dV_i}{dt}$	9 шт. σ_{ij}, V_i	3 шт.
Обобщенный закон Р.Гука	$D_{\sigma} = 2\mu D_{\xi},$ $S_{\sigma} = (3\lambda + 2\mu)S_{\xi}$	$\left(\sigma_{ij} - \delta_{ij} \frac{\sigma_{mm}}{3} \right) = 2\mu \left(\xi_{ij} - \delta_{ij} \frac{\xi_{kk}}{3} \right),$ $\sigma_{mm} = (3\lambda + 2\mu)\xi_{kk}$	17 шт. + $\xi_{ij},$ σ_0	9 шт.
Уравнение неразрывности	$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{v}) = 0$	$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial (\rho V_i)}{\partial x_i} = 0$	16 шт.	10 шт.
Формула Дж.Стокса	$T_{\xi} = \frac{1}{2} (\nabla \otimes \vec{v} + \vec{v} \otimes \nabla)$	$\xi_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial V_i}{\partial x_j} + \frac{\partial V_j}{\partial x_i} \right)$	16 шт.	16 шт.
Уравнение баланса тепла	$\frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{c\rho} \nabla \cdot (k \nabla \theta) + \frac{T_{\sigma} \cdot T_{\xi}}{c\rho}$		17 шт. + θ	17 шт.
Реологическое уравнение		$\mu = \mu(T_{\xi}, S_{\sigma}, \theta).$	18 шт.	18 шт.







2. Методы решения контактных задач

*Методы и подходы
к решению контактных задач*

*Механика сплошных
сред*

Гибридные методы

Молекулярная динамика



2. Методы решения контактных задач

Методы и подходы
к решению контактных задач

Механика сплошных
сред

Гибридные методы

Молекулярная динамика



2. Методы решения контактных задач

Математическая постановка краевых задач механики сплошных сред

Начальные условия



Множество уравнений в математической постановке задачи



Граничные условия



Вид уравнения	Тензорная форма записи	Скалярная форма записи	Суммарное количество	
			неизвестных	уравнений
Уравнение движения	$\nabla \cdot T_{\sigma} + \rho \vec{f} = \rho \frac{d\vec{V}}{dt}$	$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_i} + \rho f_i = \rho \frac{dV_i}{dt}$	9 шт. σ_{ij}, V_i	3 шт.
Обобщенный закон Р.Гука	$D_{\sigma} = 2\mu D_{\xi},$ $S_{\sigma} = (3\lambda + 2\mu)S_{\xi}$	$\left(\sigma_{ij} - \delta_{ij} \frac{\sigma_{mm}}{3} \right) = 2\mu \left(\xi_{ij} - \delta_{ij} \frac{\xi_{kk}}{3} \right),$ $\sigma_{mm} = (3\lambda + 2\mu)\xi_{kk}$	17 шт. + $\xi_{ij},$ σ_0	9 шт.
Уравнение неразрывности	$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{V}) = 0$	$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial (\rho V_i)}{\partial x_i} = 0$	16 шт.	10 шт.
Формула Дж.Стокса	$T_{\xi} = \frac{1}{2} (\nabla \otimes \vec{V} + \vec{V} \otimes \nabla)$	$\xi_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial V_i}{\partial x_j} + \frac{\partial V_j}{\partial x_i} \right)$	16 шт.	16 шт.
Уравнение баланса тепла	$\frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{c\rho} \nabla \cdot (k \Delta \theta) + \frac{T_{\sigma} \cdot T_{\xi}}{c\rho}$		17 шт. + θ	17 шт.
Реологическое уравнение		$\mu = \mu(T_{\xi}, S_{\sigma}, \theta).$	18 шт.	18 шт.



2. Методы решения контактных задач

Методы и подходы
к решению контактных задач

Механика сплошных
сред

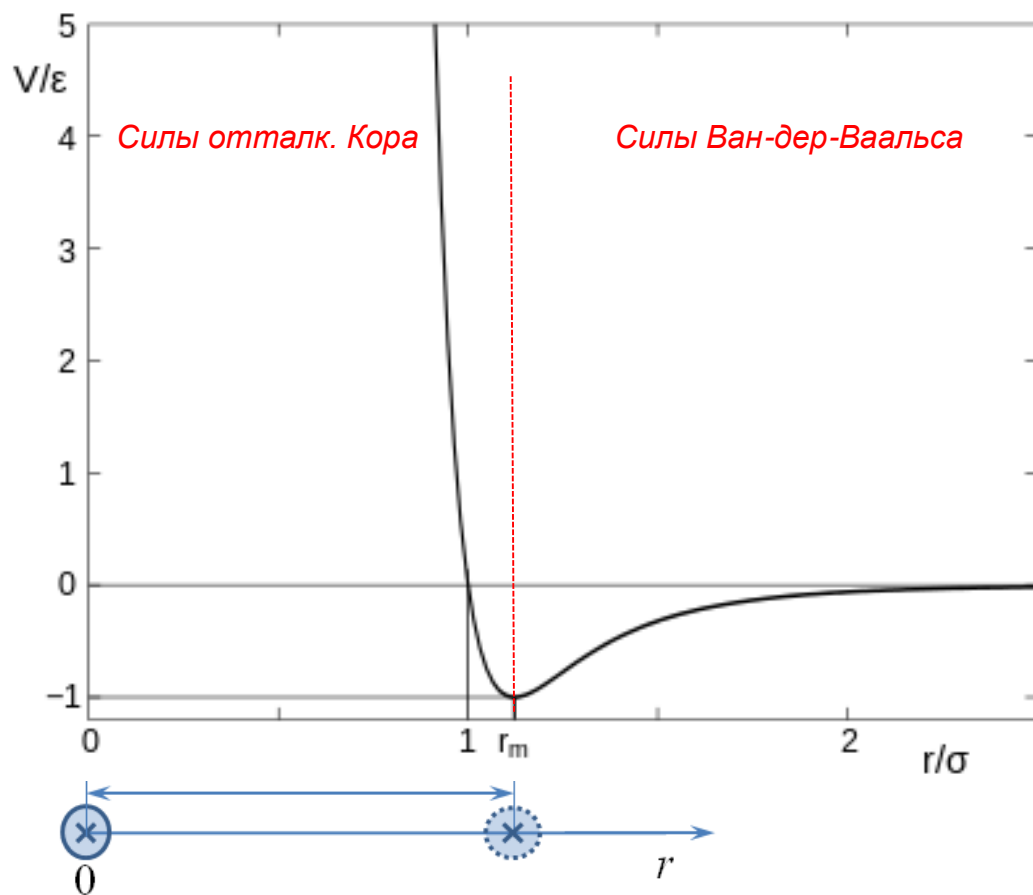
Гибридные методы

Молекулярная динамика

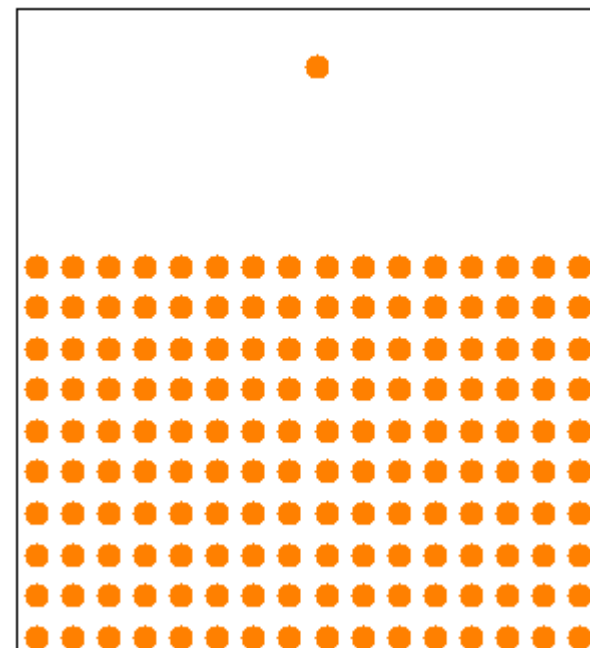


2. Методы решения контактных задач

Потенциал Леннарда-Джонса:
$$U_{i,j}(r_{i,j}) = 4\xi \left[\left(\frac{\sigma}{r_{i,j}} \right)^{12} - \left(\frac{\sigma}{r_{i,j}} \right)^6 \right].$$

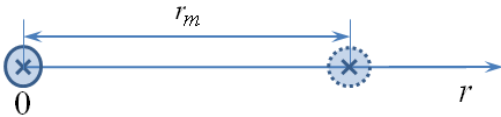


time 0.0041 ps





2. Методы решения контактных задач

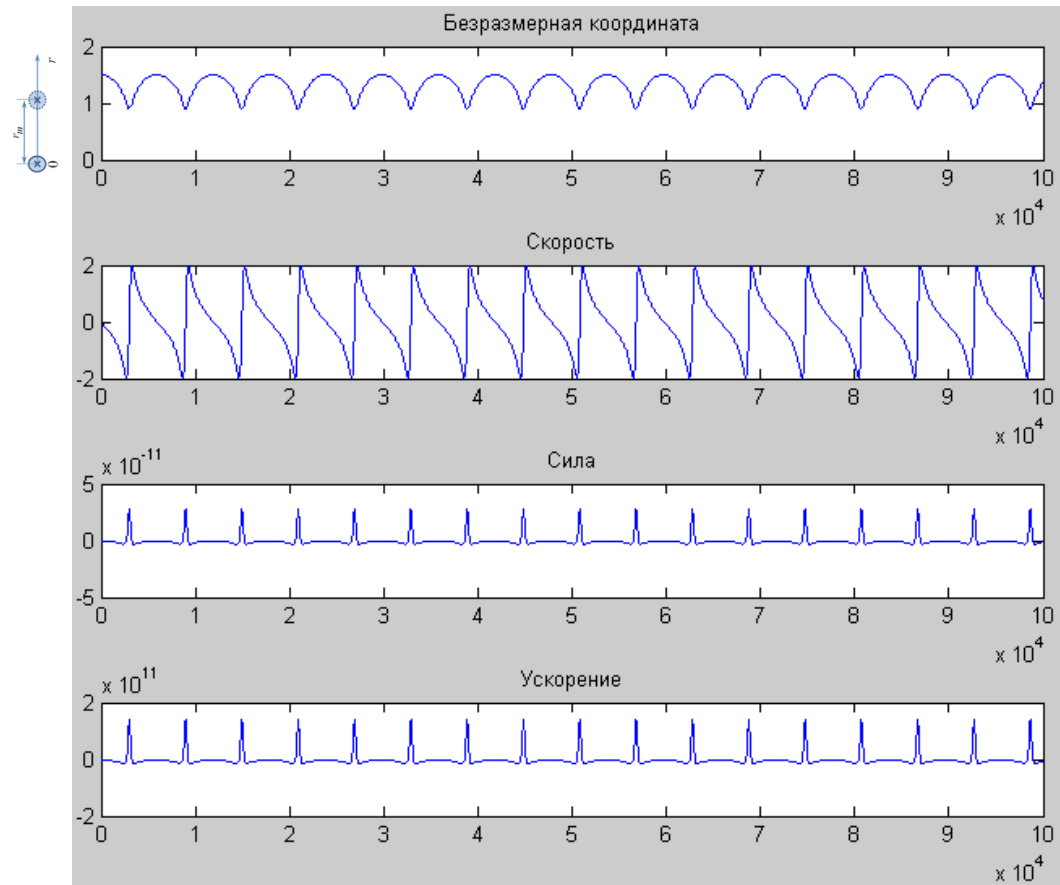


Потенциал Леннарда-Джонса:

$$U_{i,j}(r_{i,j}) = 4\xi \left[\left(\frac{\sigma}{r_{i,j}} \right)^{12} - \left(\frac{\sigma}{r_{i,j}} \right)^6 \right].$$

Уравнение движения каждого атома:

$$m_i \frac{d\vec{V}_i}{dt} = \sum_{j=1}^N \frac{dU_{i,j}}{dr_{i,j}} \frac{\vec{r}_{i,j}}{\|\vec{r}_{i,j}\|}.$$



Результаты расчета колебаний атома
около равновесного положения



2. Методы решения контактных задач

Методы молекулярной динамики

Достоинства

- возможность исследования на молекулярном уровне;
- возможность исследования свойств поверхностей трения;
- возможность исследования различных механизмов трения на молекулярном уровне;
- возможность исследования нестационарных, неизотермических задач.

Недостатки

- сложность испытания свойств материалов на молекулярном уровне
- ограниченное количество исследуемых частиц;
- ограниченный временной интервал расчета;
- сложность моделирования явления диссипации энергии.

i'd love to talk to
you later, avogadro...
can i get your number?

you gonna need
a bigger piece
of paper than
that, baby





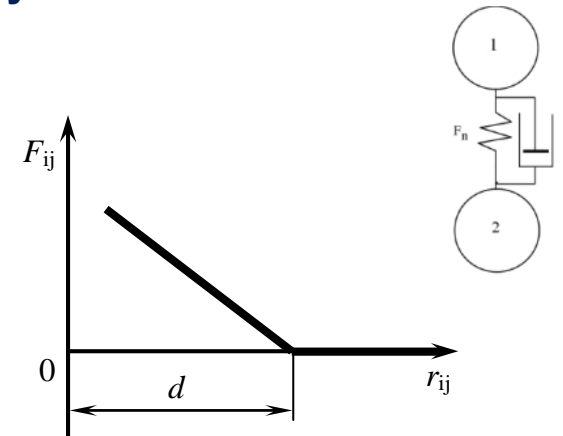
2. Методы решения контактных задач

Методы и подходы
к решению контактных задач

Механика сплошных
сред

Гибридные методы

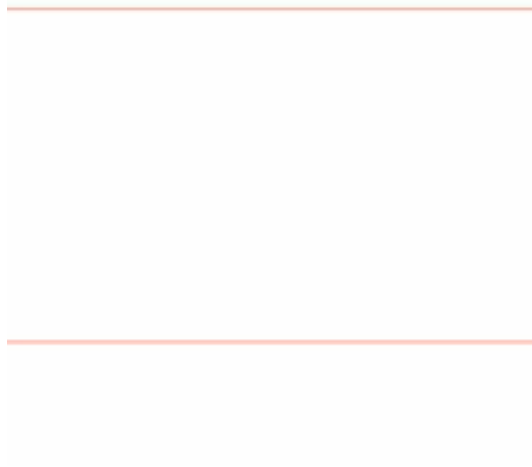
Молекулярная динамика



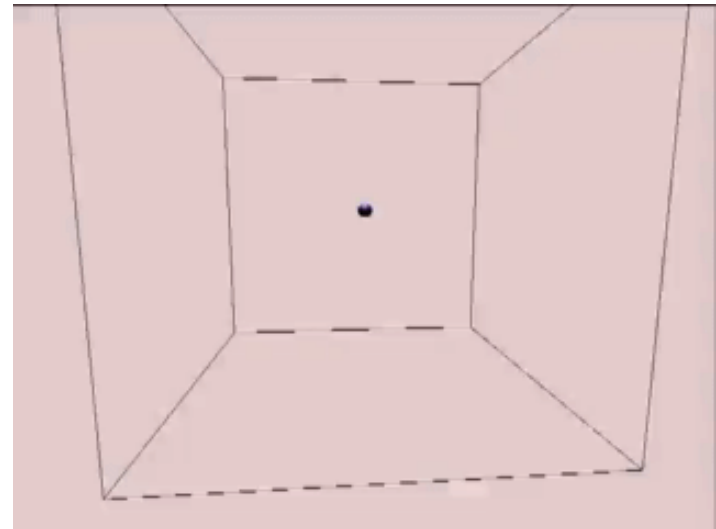


2. Методы решения контактных задач

Метод решеточных уравнений Больцмана



Метод гидродинамики сглаженных частиц





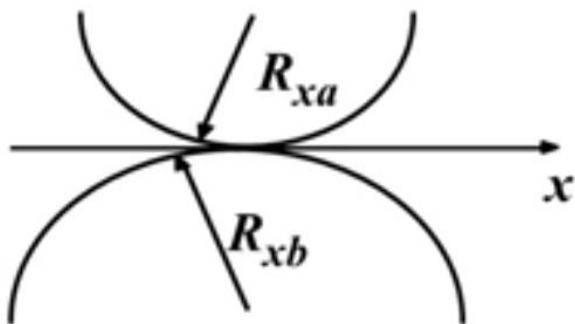
<http://www.youtube.com/watch?v=L5JYdbcBUSE>

3. Контактная задача Герца (1882г.)

Допущения:

- контактирующие поверхности имеют форму эллипсоидов;
- деформации упругие;
- силы адгезии малы;
- взаимное проникновение тел отсутствует;
- трение на площадке контакта мало;

Геометрия контакта:



Sphere	Cylinder	Conic frustum	Barrel shaped	Concave
 (a)				

Thrust	Radial inner	Radial outer
 (b)		

Thrust	Cylindrical inner	Cylindrical outer
 (c)		

$$\frac{1}{R_x} = \frac{1}{R_{xa}} + \frac{1}{R_{xb}}$$

$$\frac{1}{R_y} = \frac{1}{R_{ya}} + \frac{1}{R_{yb}}$$



Contact mechanics
– Part 1
[<http://www.youtube.com/watch?v=L5JYdbcBUSE>]

3. Контактная задача Герца (1882г.)

Допущения:

- контактирующие поверхности имеют форму эллипсоидов;
- деформации упругие;
- силы адгезии малы;
- взаимное проникновение тел отсутствует;
- трение на площадке контакта мало;

Characteristic elastic modulus and radius of curvature:

- Effective elastic modulus,

$$E' = 2 \left[\frac{(1 - \nu_1^2)}{E_1} + \frac{(1 - \nu_2^2)}{E_2} \right]^{-1}$$

- Combined radius,

$$R = \left[\frac{1}{R_x} + \frac{1}{R_y} \right]^{-1}$$

- Load and load per unit length, w and w'



Contact mechanics
– Part 1
[<http://www.youtube.com/watch?v=L5JYdbcBUSE>]

3. Контактная задача Герца (1882г.)

Допущения:

- контактирующие поверхности имеют форму эллипсоидов;
- деформации упругие;
- силы адгезии малы;
- взаимное проникновение тел отсутствует;
- трение на площадке контакта мало;

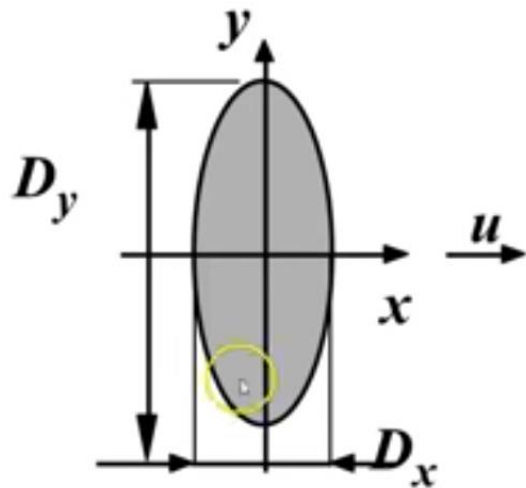
The surfaces are deformed and an elliptical contact occurs

$$D_x = 2 \left(\frac{6 \varepsilon w R}{\pi k E'} \right)^{1/3}, D_y = 2 \left(\frac{6 k^2 \varepsilon w R}{\pi E'} \right)^{1/3}$$

where ε and k are functions of R_x and R_y .

For a line contact $k \rightarrow \infty$ and

$$D_x = 2b = \sqrt{8 w' R_x / \pi E'}$$





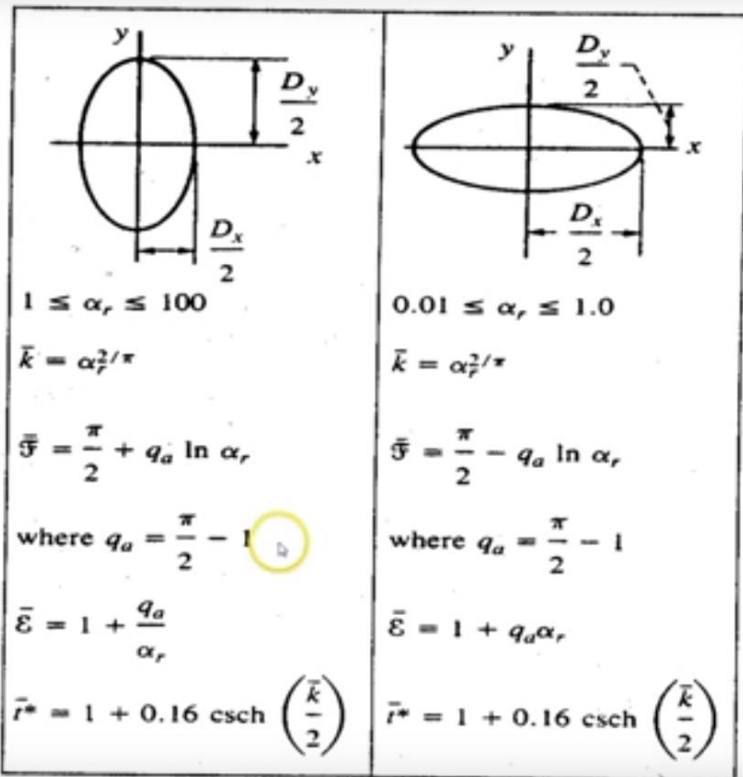
3. Контактная задача Герца (1882г.)

Contact mechanics
– Part 1
[<http://www.youtube.com/watch?v=L5JYdbcBUSE>]

Допущения:

- контактирующие поверхности имеют форму эллипсоидов;
- деформации упругие;
- силы адгезии малы;
- взаимное проникновение тел отсутствует;
- трение на площадке контакта мало;

[From Hamrock and Brewe (1983)]



Simplified
equations

$$\alpha_r = \frac{R_y}{R_x}$$

$$k = \frac{D_y}{D_x}$$



Contact mechanics
– Part 1
[<http://www.youtube.com/watch?v=L5JYdbcBUSE>]

3. Контактная задача Герца (1882г.)

Допущения:

- контактирующие поверхности имеют форму эллипсоидов;
- деформации упругие;
- силы адгезии малы;
- взаимное проникновение тел отсутствует;
- трение на площадке контакта мало;

• Elliptical contact:

$$p = p_h \sqrt{1 - \left(\frac{2x}{D_x}\right)^2 - \left(\frac{2y}{D_y}\right)^2}$$

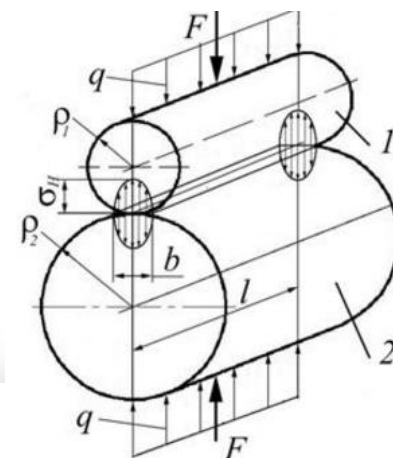
$$p_h = \frac{6w}{\pi D_x D_y}$$

• Line contact:

$$p = p_h \sqrt{1 - \left(\frac{x}{b}\right)^2}$$

$$p_h = \sqrt{w' E' / 2\pi R_x}$$

p_h = the maximum "Hertz" pressure





Contact mechanics
– Part 1
[<http://www.youtube.com/watch?v=L5JYdbcBUSE>]

3. Контактная задача Герца (1882г.)

Допущения:

- контактирующие поверхности имеют форму эллипсоидов;
- деформации упругие;
- силы адгезии малы;
- взаимное проникновение тел отсутствует;
- трение на площадке контакта мало;

Special case: Ball on plane

Ball radius R_x , load w

$$p_{\max} = p_h = \frac{3w}{2\pi a^2}$$

Maximum pressure

$$a = \left(\frac{3wR_x}{2E'} \right)^{1/3}$$

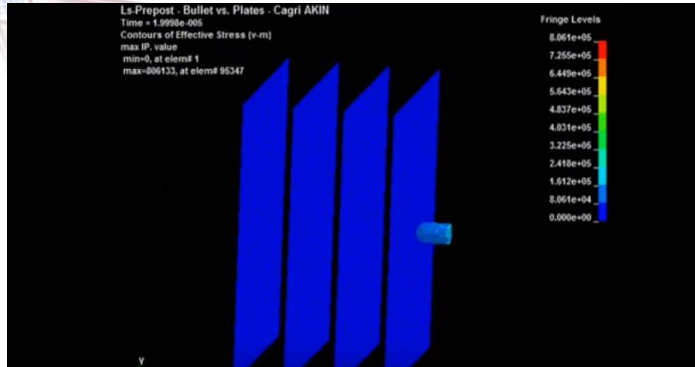
Contact radius

$$p_h = \frac{1}{\pi} \left(\frac{3}{2} \right)^{1/3} w^{1/3} \left(\frac{E'}{R_x} \right)^{2/3}$$

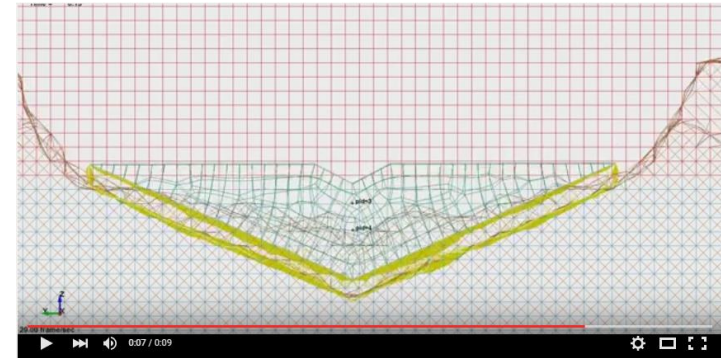
$$\delta = \frac{a^2}{R_x} = \left(\frac{3wE'}{2\sqrt{R_x}} \right)^{2/3}$$

Maximum (centre) deformation

4. Современное программное обеспечение решения контактных задач

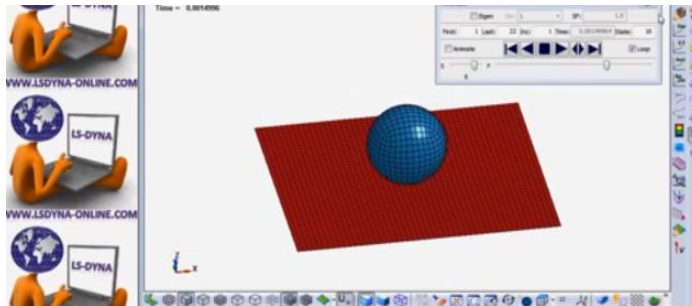


<http://www.youtube.com/watch?v=vPo6lOgLjPk&feature=related>

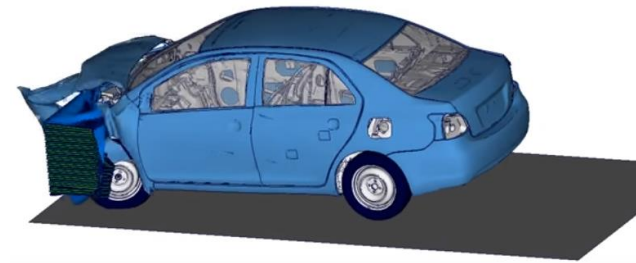


Simulation of a wedge drop on Ls-Dyna: Mesh 0.003, Contact: OWStoS. Zoom

<http://www.youtube.com/watch?v=y2X3QRecTNs>



http://www.youtube.com/watch?v=Ty_punt_Y50



<http://www.youtube.com/watch?v=hLwaUoSaB-c>