Types Inductifs Suppérieurs

mechap

15 juillet 2022

Ce document constitue une introduction aux types inductifs supérieurs en théorie des types homotopiques. Il sera assumé tout au long du présent article que le lecteur a connaissance des ressorts des constructions sémantiques faites en théorie des types, et plus généralement dans les mathématiques constructives.

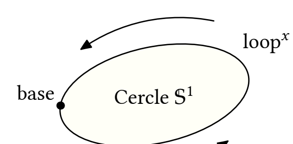
Supposons, deux catégories de modèles $\mathscr{M}$ et $\mathscr{N}$ qui présentent la même $(\infty, 1)$-catégorie $\mathscr{C}$. Alors toutes les opérations de théorie des types sont invariantes homotopiquement parlant, (c'est à dire qu'elles représentent des opérations qui respectent les équivalences homotopiques). Ainsi, toutes les constructions typées réalisées dans $\mathscr{M}$ et $\mathscr{N}$ entraînent des résultats équivalents.

Nous utiliserons ici, l'interprétation des types comme des ∞-groupoïdes [1] à travers le modèle géométrique utilisant les Kan complexes qui sont des objets fibrés.

1. Un ∞-groupoïde est un modèle homotopique abstrait d'espaces topologiques qui consiste en une une $(\infty, 1)$-catégorie. Il s'agit entre autre d'une collection d'objets et de morphismes entre ces objets, ainsi que des morphismes entre ces morphismes, etc...qui respectent les lois d'identité, de composition, et d'opération inverse pour chaque k-morphisme.

L'introduction des types inductifs supérieurs fut motivée par les interprétations homotopiques de la théorie des types dépendants de Martin-Löf comme une manière de construire des types correspondants aux complexes cellulaires, tels que des sphères, des tores, ...

> Par exemple, un cercle peut être construit comme un complexe cellulaire topologique avec un point (base) et un chemin (loop^x) avec chaque points de terminaison liés au point.
>
> En effet, l'interprétation des chemins comme correspondant à des éléments du type identité nous suggère de considérer un « type de cercle » $\mathbb{S}^1$ qui est généré inductivement par :
>
> un point $\text{base} : \mathbb{S}^1$ et une boucle d'identité $\text{loop} : \text{Id}_{\mathbb{S}^1}(\text{base}, \text{base})$



$\mathbb{S}^1$ est généré par le point base et le chemin loop

Bien qu'il puisse sembler étrange de considérer des « constructeurs inductifs » qui prennent des valeurs non pas dans le type inductif lui-même mais dans son type identité, il n'est pas difficile d'écrire des règles d'inférences pour de tels types dans le style habituel propre à la théorie des types dépendants, des règles de formation, et d'évaluation.

$$\frac{\dfrac{\Gamma \vdash \mathbb{S}^1 \text{ type}}{\Gamma \vdash x : \mathbb{S}^1} \qquad \Gamma \vdash f : \mathbb{S}^1 \to \mathscr{U}}{\Gamma \vdash f(x) : P(x) : \mathscr{U}}$$

$$\text{ap}_f : \prod_{x,y:\mathbb{S}^1} (x = y) \to (f(x) = f(y))$$

Dans le cas de $\mathbb{S}^1$, les termes base et loop sont des règles d'introduction, des constructeurs, tandis que la règle d'évaluation nous indique que pour définir un point $x : \mathbb{S}^1$, il suffit de donner un point $f(\text{base}) : P(\text{base})$ ainsi qu'une translation de la boucle $\text{ap}_f(\text{loop}) : \text{Id}_P^{\text{loop}}(f(\text{base}), f(\text{base}))$.

Pour prouver cela, il suffit d'appliquer le principe d'induction de $\mathbb{S}^1$ à la famille de types constant

$$\Gamma \vdash \lambda x.A \,:\, \mathbb{S}^1 \to \mathcal{U}$$

Nous pouvons maintenant nous intéresser aux types d'ordre supérieur.

De la même manière, un tore peut être construit comme un complexe cellulaire avec un point, deux chemins et un disque (2-cell) dont la limite traverse les chemins dans un ordre d'un côté et d'un autre de l'autre côté.

Cela suggère un type « tore » $\mathbb{T}^2$ qui est généré inductivement par deux identifications $(\mathrm{left}, \mathrm{right}) \;:\; \mathrm{Id}_{\mathbb{T}^2}(\mathrm{base}, \mathrm{base})$ et une identification itérée $\mathrm{sq} \;:\; \mathrm{Id}_{\mathrm{Id}_{\mathbb{T}^2}(\mathrm{base},\mathrm{base})}(\mathrm{left} \cdot \mathrm{right}, \mathrm{right} \cdot \mathrm{left})$ où $\cdot$ désigne la concaténation d'identifications.

Tore $\mathbb{T}^2$