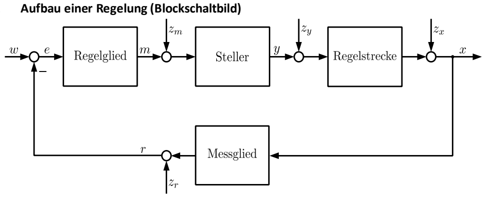
1. Grundbegriffe

1.1 Aufbau einer Regelung (Blockschaltbild)



Führungsgröße: w (Sollwert) | Regelgröße x (Istwert) | Regeldifferenz e (Abweichung)
Rückführgröße r | Reglerausgangsgröße m | Stellgröße y | Störgrößen z

2. Beschreibung linear dynamischer Systeme

2.1 Linearisierung nichtlinearer Systeme

$$x_a \approx f(AP) + \frac{\delta f}{\delta x_{e1}}\Big|_{AP}(x_{e1}-\bar{x}_{e1}) + \frac{\delta f}{\delta x_{e2}}\Big|_{AP}(x_{e2}-\bar{x}_{e2}) + \dots + \frac{\delta f}{\delta x_{en}}\Big|_{AP}(x_{en}-\bar{x}_{en})$$
$$\Delta x_a = a_1\Delta x_{e1} + a_2\Delta x_{e2} + \dots + a_n\Delta x_{en}$$

3. Eigenschaften Übertragungsglieder im Zeitbereich

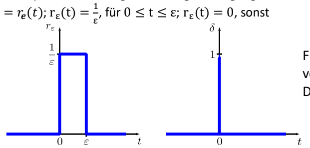
3.1 Dynamisches Übertragungsverhalten

3.1.1 Einheitssprung [$x_e(t) = \hat{x}_e\sigma(t)$; $G(s) = \frac{1}{s}$]

$$\sigma(t) = \begin{cases} 0 \text{ für } t<0 \\ 1 \text{ für } t\geq 0 \end{cases};\ h(t) = \frac{x_a(t)}{\hat{x}_e} = \frac{\text{Sprungantwort}}{\text{Sprunghöhe}}\quad G(s) = \frac{1}{s} = \frac{x_a(s)}{x_e(s)}$$

3.1.2 Dirac-Impuls [$\delta(t) = \lim_{\varepsilon\to 0} r_\varepsilon(t)$; $G(s) = 1$]

Rechteckimpuls mit einmaliger Stoßartiger Anregung durch die Eingangsgröße
$x_e(t) = r_\varepsilon(t)$; $r_\varepsilon(t) = \frac{1}{\varepsilon}$, für $0 \le t \le \varepsilon$; $r_\varepsilon(t) = 0$, sonst



Für $\varepsilon \to 0$ spricht man vom Einheits- oder Dirac-Impuls $\delta(t)$:
$$\delta(t) = \lim_{\varepsilon\to 0} r_\varepsilon(t)$$

3.1.3 Sinusfunktion [$x_e(t) = \hat{x}_e\sin(\omega t)$]

3.2 Proportionalglieder

3.2.1 P-Glied

Übertragungsverhalten/-funktion: $x_a(t) = K_P x_e(t)$
Übergangsfunktion: $h(t) = K_p$
Frequenzgang: $G(j\omega) = K_p$

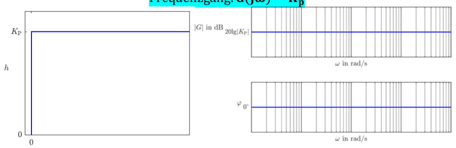
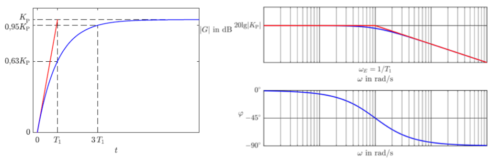


Bild 5.2: Bode-Diagramm eines P-Glieds

3.2.2 PT₁-Glied

Übertragungsverhalten: $T_1\dot{x}_a + x_a(t) = K_P x_e(t)$
Übergangsfunktion: $h(t) = K_p(1 - e^{-\frac{t}{T_1}})$

$$G(j\omega) = \frac{K_p}{T_1 j\omega + 1};\ |G(j\omega)| = \frac{|K_p|}{\sqrt{(T_1\omega)^2+1}};\ \varphi(\omega) = -\arctan T_1\omega$$



3.2.3 PT₂-Glied

Übertragungsverhalten: $\frac{1}{\omega_0^2}\ddot{x}_a + \frac{2D}{\omega_0}\dot{x}_a + x_a(t) = K_P x_e(t)$

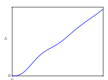
Aperiodischer Fall (D > 1) (zwei reele, negative λ)

Übergangsfunktion: $h(t) = K_p\left[1 + \frac{1}{\lambda_1-\lambda_2}\cdot(\lambda_2 e^{\lambda_1 t} - \lambda_1 e^{\lambda_2 t})\right]$
$$\lambda_{1,2} = -D\omega_0 \pm \omega_0\sqrt{D^2-1}$$

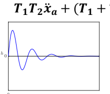
Aperiodischer Grenzfall (D = 1) (zwei gleiche, negative λ)

Übergangsfunktion: $h(t) = K_p[1 - (1+\omega_0 t)e^{-\omega_0 t}]$

Aperiodischer Fall und Aperiodischer Grenzfall ($D \geq 1$) können auch als Reihenschaltung von zwei PT₁-Gliedern betrachtet werden:
$$T_1T_2\ddot{x}_a + (T_1+T_2)\dot{x}_a + x_a(t) = K_P x_e(t)$$

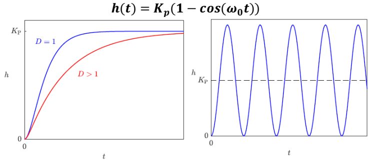


IT₂-Glied

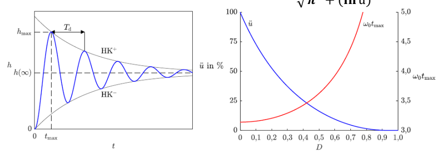


DT₂-Glied

Ungedämpfter Fall (D = 0) (rein imaginäres Wurzelpaar)
$$h(t) = K_p(1 - \cos(\omega_0 t))$$



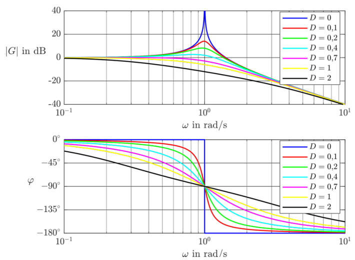
Periodischer Fall (0 < D < 1) (zwei konjugiert komplexe Eigenwerte)
$$\lambda_{1,2} = -D\omega_0 \pm j\omega_0\sqrt{1-D^2};\ \omega_d = \omega_0\sqrt{1-D^2}$$
ω_0: Eigenkreisfrequenz der ungedämpften Schwingung
D: Dämpfungsgrad
ω_d: Eigenkreisfrequenz der gedämpften Schwingung
$$h(t) = K_P\left[1 - \frac{e^{-D\omega_0 t}}{\sqrt{1-D^2}}\sin(w_d t + \varphi)\right];\ \varphi = \arccos(D)$$
Die Periodendauer der Schwingung beträgt: $T_d = \frac{2\pi}{\omega_d} = \frac{2\pi}{\omega_0\sqrt{1-D^2}}$
Die Gleichungen der Hüllkurven lauten: $HK^{\pm} = K_p\left(1 \pm \frac{e^{-D\omega_0 t}}{\sqrt{1-D^2}}\right)$
$$\text{Überschwingzeit: } t_{max} = \frac{\pi}{\omega_d} = \frac{\pi}{\omega_0\sqrt{1-D^2}}$$
$$\max(\text{Übergangsfunktion}): h_{max} = h(t_{max}) = K_p\left(1 + e^{-\frac{\pi D}{\sqrt{1-D^2}}}\right)$$
$$\text{Überschwingweite: } ü = \frac{h_{max}-h_\infty}{h_\infty} = e^{-\frac{\pi D}{\sqrt{1-D^2}}};$$
$$\text{Aufgelöst nach Dämpfungsgrad: } D = \frac{|\ln ü|}{\sqrt{\pi^2 + (\ln ü)^2}}$$

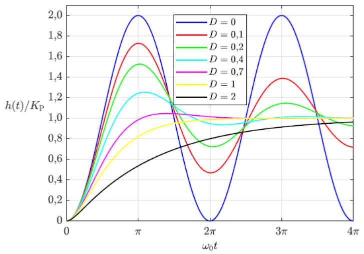


D	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
ü	100 %	72,9 %	52,7 %	37,2 %	25,4 %	16,3 %	9,5 %	4,6 %	1,5 %	0,2 %

Instabiles Verhalten (D < 0) (zwei positiv reell oder komplex konjugierte mit positiven Realteil Eigenwerte)
$$\lambda_{1,2} = |D|\omega_0 \pm \omega_0\sqrt{D^2-1}$$

Frequenzgang schwingfähiger PT₂-Glieder (D ≤ 1):
$$G(j\omega) = \frac{K_p}{\frac{1}{\omega_0^2}(j\omega)^2 + \frac{2D}{\omega_0}j\omega + 1} = \frac{K_p\omega_0^2}{(j\omega)^2 + 2D\omega_0 jw + \omega_0^2}$$
$$\text{Resonanzkreisfrequenz } (D < 1/\sqrt{2}):\ \omega_r = \omega_0\sqrt{1-2D^2}$$
$$\text{Resonanzüberhöhung: } |G(j\omega_r)| = \frac{|K_p|}{2D\sqrt{1-D^2}}.$$





3.3 Integrierglieder

3.3.1 I-Glied

Übertragungsverhalten: $x_a(t) = K_I\int x_e(t)\,dt$
Übertragungsfunktion: $h(t) = K_I\int_0^t \sigma(\tau)\,d\tau = K_I t$
Frequenzgang: $G(j\omega) = \frac{K_I}{j\omega} = -j\frac{K_I}{\omega}$

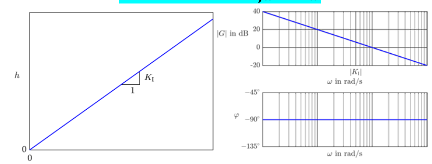


Bild 5.7: Bode-Diagramm eines I-Glieds

3.3.2 IT₁-Glied

Übertragungsverhalten: $T_1\dot{x}_a + x_a(t) = K_I\int x_e(t)\,dt$
Übergangsfunktion: $h(t) = K_I(t - T_1 e^{-\frac{t}{T_1}})$
Frequenzgang: $G(j\omega) = \frac{K_I}{T_1(j\omega)^2 + j\omega} = \frac{K_I}{j\omega(T_1 j\omega + 1)}$

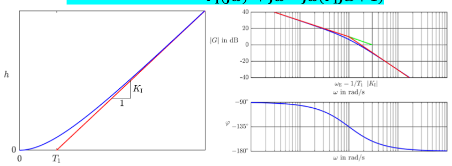


Bild 5.8: Bode-Diagramm eines IT₁-Glieds

3.4 Differenzierglieder

3.4.1 D-Glied

Übertragungsverhalten: $x_a(t) = K_D\dot{x}_e(t)$
Übergangsfunktion: $h(t) = K_D\delta(t)$
Frequenzgang: $G(j\omega) = K_D j\omega$

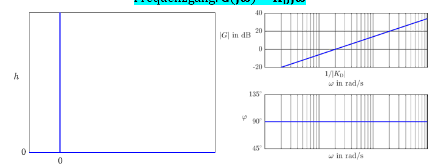


Bild 5.10: Bode-Diagramm eines D-Glieds

3.4.2 DT₁-Glied

Übertragungsverhalten: $T_1\dot{x}_a + x_a(t) = K_D\dot{x}_e(t)$
Übergangsfunktion: $h(t) = \frac{K_D}{T_1}e^{-\frac{t}{T_1}}$
Frequenzgang: $G(j\omega) = \frac{K_D j\omega}{T_1 j\omega + 1}$

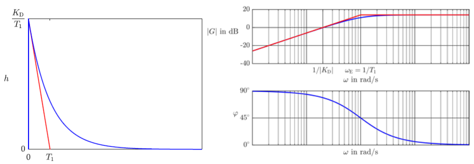
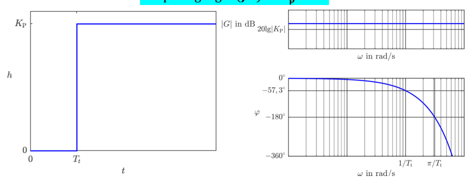


Bild 5.11: Bode-Diagramm eines DT₁-Glieds

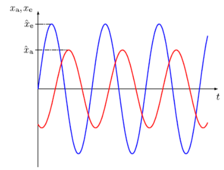
3.5 Totzeitsystem (schlecht für Regelung -> wird langsam)

Übertragungsverhalten: $x_a(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t < T_t \\ K_P x_e(t - T_t) & \text{für } t \geq T_t \end{cases}$
Frequenzgang: $G(j\omega) = K_p e^{-j\omega T_t}$



4. Beschreibung linear dynamischer Systeme im Frequenzbereich

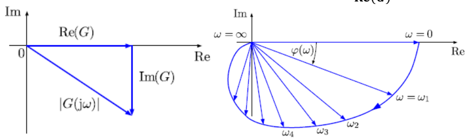
4.1 Frequenzgang

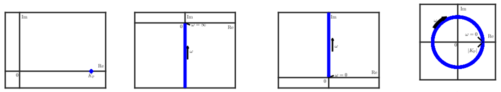


$$G(j\omega) = \frac{x_a(t)}{x_e(t)} = \frac{\hat{x}_a(j\omega)e^{j(\omega t + \varphi(\omega))}}{\hat{x}_e e^{j\omega t}} = \frac{\hat{x}_a(j\omega)}{\hat{x}_e}e^{j\varphi(\omega)}$$
$$\dot{x}_a = j\omega x_a(t);\ \ddot{x}_a = (j\omega)^2 x_a(t);\ \dot{x}_e = j\omega x_e(t);\ usw.$$
$$(a_n(j\omega)^n + \dots + a_1(j\omega)^1 + a_0)x_a(t) == (b_q(j\omega)^q + \dots + b_1(j\omega)^1 + b_0)x_e(t)$$
$$G(jw) = \frac{x_a(t)}{x_e(t)} = \frac{X_a(j\omega)}{X_e(j\omega)} = \frac{b_q(j\omega)^q + \dots + b_1(j\omega)^1 + b_0}{a_n(j\omega)^n + \dots + a_1(j\omega)^1 + a_0}$$

4.2 Ortskurve

$$\mathrm{Re}(G) = |G(j\omega)|\cos\varphi;\ \mathrm{Im}(G) = |G(j\omega)|\sin\varphi$$
$$|G(jw)| = \sqrt{Re^2(G) + Im^2(G)};\ \varphi(\omega) = \arctan\frac{\mathrm{Im}(G)}{\mathrm{Re}(G)}$$





Ortskurve P-Glied | Ortskurve I-Glied | Ortskurve D-Glied | Ortskurve Totzeitglied

4.3 Bode-Diagramm (Diagramme siehe 3.)

$$|G(j\omega)|_{dB} = 20\lg|G(j\omega)|$$
Dezibel-Rechnung: $X_{dB} = 20\cdot\log(X)$; $X = 10^{\frac{X_{dB}}{20}}$
(Bei Leistungen 10 anstatt 20; log ist 10er Logarithmus)

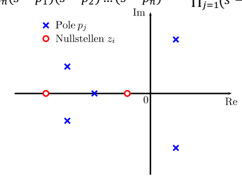
4.4 Laplace-Transformation

$$\mathcal{L}\{\sigma(t)\} = \int_0^\infty \sigma(t)e^{-st}\,dt = \left[-\frac{1}{s}e^{-st}\right]_0^\infty = \frac{1}{s}$$

Eigenschaft	Zeitbereich		Bildbereich
Linearitätssatz (Additionssatz)	$a_1 f_1(t) + a_2 f_2(t)$	⊶	$a_1F(s) + a_2F(s)$
Ähnlichkeitssatz	$f(at)$	⊶	$\frac{1}{a}F\left(\frac{s}{a}\right)$
Verschiebungssatz	$f(t-T_t), T_t > 0$	⊶	$e^{-sT_t}F(s)$
Dämpfungssatz	$e^{at}f(t)$	⊶	$F(s-a)$
Differenziationssatz	$f^{(n)}(t), n > 0$	⊶	$s^nF(s) - \sum_{k=1}^{n} s^{k-1}f^{(n-k)}(-0)$
Integrationssatz	$\int_0^\infty f(\tau)\,d\tau$	⊶	$\frac{1}{s}F(s)$

4.5 Übertragungsfunktion

$$G(s) = \frac{x_a(s)}{x_e(s)} = \frac{b_q s^q + \dots + b_2 s^2 + b_1 s + b_0}{a_n s^n + \dots + a_2 s^2 + a_1 s + a_0} = \frac{Z(s)}{N(s)}$$
Dies ausmultiplizieren, um allgemeine lineare DGL zu erhalten
$$G(s) = \frac{b_q(s-z_1)(b-z_2)\dots(s-z_q)}{a_n(s-p_1)(s-p_2)\dots(s-p_n)} = K\frac{\prod_{i=1}^{q}(s-z_i)}{\prod_{j=1}^{n}(s-p_j)}, q \le z$$

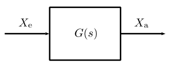


Stabilität: sämtliche Pole *negativen* Realteil (Eigenbewegung klingt ab),(grenzstabil: Schwingung),(instabil: größer werdende Schwingung)
Nullstellen: kein Einfluss auf die prinzipielle Eigenbewegung, aber entscheidender Einfluss auf den Amplitudenverlauf
Phasenminimumsysteme: nur Nullstellen und Pole mit negativem Realteil
Kausalität: Eingangsgröße x_e keine höheren Ableitungen als Ausgangsgröße x_a
Sprungfähig: Eingangsgröße x_e und Ausgangsgröße x_a haben dieselbe höchste Ableitung

Schaltungen von Blockschaltbildern

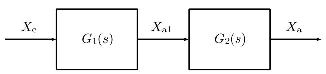
4.5.1 Allgemein

$X_a(s) = G(s)X_e(s)$



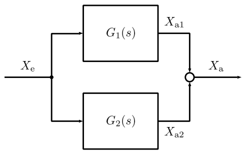
4.5.2 Reihenschaltung

$G_{ges}(s) = G_1(s)G_2(s)$



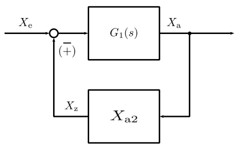
4.5.3 Parallelschaltung

$G_{ges}(s) = G_1(s) + G_2(s)$



4.5.4 Rückkopplung

$$G_{ges}(s) = \frac{G_1(s)}{1 \pm G_1(s)G_2(s)}$$



5. Eigenschaften wichtiger Übertragungsglieder im Frequenzbereich

5.1 Reihenschaltung

$$\left|G_{ges}(j\omega)\right| = |G_1(j\omega)||G_2(j\omega)|;\ \varphi_{ges}(\omega) = \varphi_1(\omega) + \varphi_2(\omega)$$

$$\left|G_{ges}(j\omega)\right|_{dB} = |G_1(j\omega)|_{dB} + |G_2(j\omega)|_{dB}$$

5.2 Zeitkonstantenform

$G(j\omega) = K$	P-Verhalten
$\cdot\ (j\omega)^p$	I_p- oder D_p-Verhalten
$\cdot \prod_i \left(j\frac{\omega}{\omega_{Ei}} \pm 1\right)^{\pm 1}$	Nenner/Zähler 1. Grades
$\cdot \prod_i \left(\frac{1}{\omega_{Ei}^2}(j\omega)^2 \pm \frac{2D_i}{w_{Ei}}j\omega + 1\right)^{\pm 1}$	Nenner/Zähler 2. Grades* (D≤1)
$\cdot\ e^{-j\omega T_t}$	Totzeit

**** Falls $D > 1$: Zerlegen in zwei Linearfaktoren.***

5.3 Asymptotenkonstruktion im Bode-Diagramm

a) Frequenzgang in Zeitkonstantenform

b) Sortierung der Faktoren erster und zweiter Ordnung in aufsteigender Reihenfolge ihrer Eckfrequenzen

c) Bei kleinen Kreisfrequenzen ω beginnend Amplitudengang durch den Punkt $(1, 20\,lg|K|)$ bis zur ersten Eckfrequenz eine Asymptote mit der Steigung $p \cdot 20\,dB\,/\,Dekade$ einzeichnen

d) An der ersten Eckfrequenz ändert sich die Steigung der Asymptote um $\pm 20\,dB\,/\,Dekade$ (System erster Ordnung) bzw. um $\pm 40\,dB\,/\,Dekade$ (System zweiter Ordnung). Asymptote bis zur nächsten Eckfrequenz zeichnen und ggf. vorgehen wiederholen

e) Phasengang für die reinen P-, I-, D-Anteile mit $\varphi(\omega) = p \cdot 90°$

f) Antragen der einzelnen Phasengänge der Systeme erster und zweiter Ordnung anhand der Tabelle

g) Grafische Addition der einzelnen Phasengänge

Faktor	Steigungsänderung Amplitudengang	Asymptoten Phasengang
$\left(j\frac{\omega}{\omega_{Ei}} + 1\right)^{\pm 1}$	$\pm 20\,dB/Dek.$	• bis $0{,}1\omega_E$: Asymptote bei 0° • ab $10\omega_E$: Asymptote bei $\pm 90°$
$\left(j\frac{\omega}{\omega_{Ei}} - 1\right)^{\pm 1}$	$\pm 20\,dB/Dek.$	• bis $0{,}1\omega_E$: Asymptote bei $\pm 180°$ • ab $10\omega_E$: Asymptote bei $\pm 90°$
$\left(\frac{1}{\omega_{Ei}^2}(j\omega)^2 + \frac{2D_i}{\omega_{Ei}}j\omega + 1\right)^{\pm 1}$	$\pm 40\,dB/Dek.$	• bis $0{,}5\,lg\left(\frac{2}{D}\right)\omega_E$: Asymptote bei 0° • ab $\frac{2}{lg\left(\frac{2}{D}\right)}\omega_E$: Asymptote bei $\pm 180°$
$\left(\frac{1}{\omega_{Ei}^2}(j\omega)^2 - \frac{2D_i}{\omega_{Ei}}j\omega + 1\right)^{\pm 1}$	$\pm 40\,dB/Dek.$	• bis $0{,}5\,lg\left(\frac{2}{D}\right)\omega_E$: Asymptote bei $\pm 360°$ • ab $\frac{2}{lg\left(\frac{2}{D}\right)}\omega_E$: Asymptote bei $\pm 180°$
$e^{-j\omega T_t}$	keine Änderung	$\varphi(\omega) = -\frac{\omega T_t \cdot 180°}{\pi}$

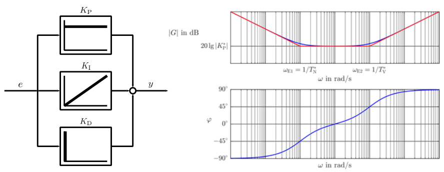
6. Regeleinrichtungen

6.1 PID-Regler

$$\text{Übertragungsverhalten: } \boldsymbol{y(t) = K_P e(t) + K_I \int_0^t e(\tau)\,d\tau + K_D \dot{e}(t)}$$

$$\text{Übergangsfunktion: } h(t) = K_\rho\left(1 + \frac{1}{T_N}t + T_V\delta(t)\right)$$

$$\boldsymbol{G(s) = K_\rho + \frac{K_I}{s} + K_D s = K_P\left(1 + \frac{1}{T_{NS}} + T_V s\right) = K_P\frac{T_N T_V s^2 + T_N s + 1}{T_N s}}$$



6.1.1 P-Regler und I-Regler

$$\text{P} - \text{Regler: } \boldsymbol{y(t) = K_P e(t);\ G(s) = K_\rho}$$

$$\text{I} - \text{Regler: } \boldsymbol{y(t) = K_I \int e(t)\,dt;\ G(s) = \frac{K_I}{s}}$$

6.1.2 PI-Regler

$$\boldsymbol{y(t) = K_P e(t) + K_I \int e(t)\,dt = K_P\left(e(t) + \frac{1}{T_N}\int e(t)\,dt\right)}$$

$$\boldsymbol{G(s) = K_\rho + \frac{K_I}{s} = K_P\left(1 + \frac{1}{T_{NS}}\right) = K_P\frac{T_N s + 1}{T_N s}}$$

6.1.3 PD-Regler

$$\boldsymbol{y(t) = K_P e(t) + K_D \dot{e}(t) = K_P\left(e(t) + T_V \dot{e}(t)\right)}$$

$$\boldsymbol{G(s) = K_\rho + K_D s = K_P(1 + T_V s)}$$

6.2 Zweipunktregler

$$\boldsymbol{y(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } e(t) \le 0 \\ y_{max} & \text{für } e(t) > 0 \end{cases}}$$

6.3 Ausgleich

Da bei *Proportionalgliedern* ein stationärer Zustand (Stabilität) erreicht wird, handelt es sich hierbei um eine Regelstrecke bzw. ein Regelglied *mit Ausgleich*. Bei *Integriergliedern* wird kein stationärer Zustand erreicht und sind daher Regelglieder *ohne Ausgleich*. *P-Regler mit Strecke ohne Ausgleich*, z.B. I-Strecke weist PT_1-Verhalten mit Verstärkung von $1\,/\,K_\rho$ und bleibender Regeldifferenz auf. *I-Regler mit Strecke ohne Ausgleich*, z.B. I-Strecke weist DT_2 mit Dämpfungsgrad $D = 0$ in Führungs- und Störverhalten auf ⇒ Dauerschwingungen in beiden Systemen ⇒ ungeeignet.

6.4 Auswirkungen Anteile

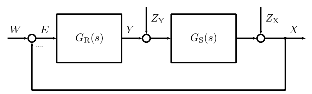
P-Anteil: zügiger Regelung, bleibende Regeldifferenz, „je größer die Regeldifferenz, desto größer muss die Stellgröße werden“

I-Anteil: vergleichsweise langsame Regelung, keine bleibende Regeldifferenz, „solange keine Regeldifferenz auftritt, muss die Stellgröße verändert werden“

D-Anteil: reagiert schnell, erkennt keine bleibende Regeldifferenz, „Je stärker sich die Regeldifferenz ändert, umso stärker muss der Regler eingreifen“

7. Regelkreis

7.1 Führungs- und Störverhalten des Standard-Regelkresies



$$\boldsymbol{G_w(s) = \frac{G_0(s)}{1 + G_0(s)};\ G_{ZY}(s) = \frac{G_S(s)}{1 + G_0(s)};\ G_{ZX}(s) = \frac{1}{1 + G_0(s)}}$$

Sollwerte idealer Regler: $G_w(s) = 1; G_{ZY}(s) = 0; G_{ZX}(s) = 0$

7.2 Zeitverhalten des geschlossenen Regelkreises

7.2.1 Regelgüte im stationären Zustand

$$e(\infty) = \lim_{t\to\infty} e(t) = \lim_{t\to\infty}\big(\omega(t) - x(t)\big)$$

7.2.2 Grenzwertsätze

$$f(0) = \lim_{t\to 0} f(t) = \lim_{s\to\infty} sF(s);\ f(\infty) = \lim_{t\to\infty} f(t) = \lim_{s\to 0} sF(s)$$

7.2.3 Beispiel Führungsverhalten

$$e(\infty) = w(\infty) - x(\infty);$$

$$w(t) = \hat{w}\sigma(t) \Rightarrow w(\infty) = \lim_{t\to\infty} W(t) = \lim_{s\to 0} sW(s) = \lim_{s\to 0} s\frac{\hat{w}}{s} = \hat{w}$$

$$x(\infty) = \lim_{t\to\infty} x(t) = \lim_{s\to 0} sX(s) = \lim_{s\to 0} sG_w(s)W(s) = \lim_{s\to 0} sG_w(s)\frac{\hat{w}}{s}$$

$$\text{mit } \lim_{s\to 0} G_w(s) = 1 \Rightarrow x(\infty) = \hat{w} \Rightarrow e(\infty) = \hat{w} - \hat{w} = 0$$

8. Stabilität

Im *Pol-Nullstellen-Bild* eines *stabilen* Systems liegen alle Pole links von der imaginären Achse.

8.1 Hurwitz-Kriterium (keine Totzeit!) Totzeit hat kein Einfluss auf Stabilität

a) Notwendige Bedingungen: Alle Koeffizienten a_i sind positiv (bzw. negativ, mal -1):

$$a_i > O\ (i = 0, 1, 2, \dots, n)$$

b) Hinreichende Bed.: Die n führenden Hauptabschnittsdeterminanten D_i sind positiv:

$$D_i > O\ (i = 0, 1, 2, \dots, n)$$

$$D_1 = a_1;\ \omega_{krit}^2 = \frac{a_0}{a_2}\ (\text{Stabilitätsgrenze bei } D_i = 0)$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix} = a_1a_2 - a_0a_3 > 0 \Rightarrow a_1a_2 > a_0a_3;\ \omega_{krit}^2 = \frac{a_1}{a_3} = \frac{a_0}{a_2}$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{vmatrix} = a_1a_2a_3 - a_1^2a_4 - a_0a_3^2 > 0;\ \omega_{krit}^2 = \frac{a_1}{a_3}$$

Störverhalten

- Reaktion des Regelkreises auf unerwünschte Störungen
- Ziel: Minimierung oder Eliminierung der Auswirkungen von Störungen
- Störgrößenkompensation zur Kompensation der Störungen
- Stabilität des Systems bei auftretenden Störungen gewährleisten
- (Auswirkung von Vorsteuerung: keine, da w=0)

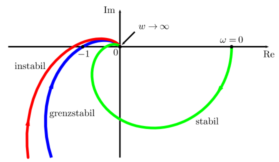
Führungsverhalten

- Fähigkeit des Regelkreises, einem vorgegebenen Sollwert zu folgen
- Ziel: Minimierung der Regelabweichung zwischen Ausgangssignal und Sollwert
- Verwendung von Regelalgorithmen wie PID-Reglern oder fortgeschritteneren Steuerungsmethoden
- Ausrichtung des Systems auf den gewünschten Verlauf bzw. die gewünschte Trajektorie

8.2 Vereinfachtes Nyquist-Kriterium (mit Totzeit!)

Hinweis: G_0 = offener Regelkreis

$\boldsymbol{G_0(j\omega_{krit}) = -1 = -1 + j0}$



$$|G_0(j\omega_D)| = 1 \text{ bzw. } |G_0(j\omega_D)|_{dB} = 0\,dB;\ \varphi_0(\omega_\pi) = -180°$$

ω_π: Phasenschnittkreisfrequenz; ω_D: Durchtrittskreisfrequenz

➢ Phasengang:

$\varphi_0(\omega_\pi) = -180°$

$|G_0(j\omega_\pi)|_{dB} < 0\,dB$ → stabil

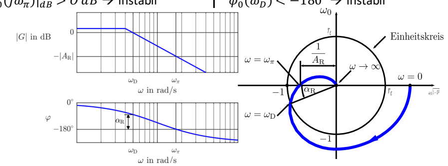
$|G_0(j\omega_\pi)|_{dB} > 0\,dB$ → instabil

➢ Amplitudengang:

$|G_0(j\omega_D)|_{dB} = 0\,dB$

$\varphi_0(\omega_D) > -180°$ → stabil (! VZ)

$\varphi_0(\omega_D) < -180°$ → instabil



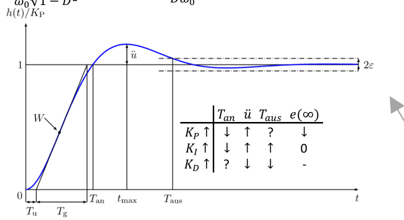
$$\text{Phasenreserve: } \alpha_R = \varphi_0(\omega_D) - (-180°) = \varphi_0(\omega_D) + 180°$$

$$\text{Amplitudenreserve: } |A_R|_{dB} = -|G_0(j\omega_\pi)|_{dB};\ A_R = \frac{1}{|G_0(j\omega_\pi)|}$$

9. Entwurf von Regelkreisen

$$\ddot{u} = e^{-\frac{\pi D}{\sqrt{1-D^2}}};\ t_{max} = \frac{\pi}{\omega_0\sqrt{1-D^2}};\ T_g = \frac{1}{\omega_0}e^{\frac{D}{\sqrt{1-D^2}}\arccos D}$$

$$T_{an} = \frac{\pi - \arccos D}{\omega_0\sqrt{1-D^2}};\ T_{aus} \le \frac{\left|\ln\left(\varepsilon \cdot \sqrt{1-D^2}\right)\right|}{D\omega_0};\ 2\varepsilon \text{ meist } \pm 2 - 5\% \text{ von } x(\infty)$$



	T_{an}	$\ddot{u}$	T_{aus}	$e(\infty)$
$K_P\uparrow$	↓	↑	?	↓
$K_I\uparrow$	↓	↑	↑	0
$K_D\uparrow$	?	↓	↓	-

$\ddot{u}$: Überschwingweite; t_{max}: Überschwingzeit; T_g: Ausgleichszeit; T_u: Verzugszeit; T_{an}: Anregelzeit; T_{aus}: Ausregelzeit/Einschwingzeit

wenn $\ddot{u} < 5\% \Rightarrow D > 0{,}69$, oft $D = \frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0{,}707 \Rightarrow \varphi = 45°, \ddot{u} = 4{,}32\%$

10. Methoden zum Entwurf und zur Applikation von Regelungen

10.1 Empirische Einstellregeln für Regelkreise

10.1.1 Sprungmethode nach Ziegler Nichols

Die beiden Zeitkonstanten T_1 und T_t werden mit Hilfe einer experimentell gewonnenen Übergangsfunktion bestimmt. Annäherung: $T_t \approx T_u; T_1 \approx T_g$

Regler	K_P	T_N	T_V
P	$\frac{T_1}{K_S T_t}$	–	–
PI	$0{,}9\frac{T_1}{K_S T_t}$	$3{,}3\,T_t$	–
PD	$1{,}2\frac{T_1}{K_S T_t}$	–	$0{,}25\,T_t$
PID	$1{,}2\frac{T_1}{K_S T_t}$	$2T_t$	$0{,}5\,T_t$

10.1.2 Schwingungsverfahren nach Ziegler Nichols

Vorschalten eines P-Reglers vor Regelstrecke und aufdrehen des Proportionalbeiwerts K_P bis zur Stabilitätsgrenze ($A_R = 0$) ⇒ $K_{P,krit}$ und T_{krit} an dieser Stelle.

Regler	K_P	T_N	T_V
P	$0{,}5\,K_{P,krit}$	–	–
PI	$0{,}45\,K_{P,krit}$	$0{,}83\,T_{krit}$	–
PID	$0{,}6\,K_{P,krit}$	$0{,}5\,T_{krit}$	$0{,}125\,T_{krit}$

10.1.3 Einstellregeln nach Chien, Hrones und Reswick

		Aperiodischer Verlauf kürzester Dauer (D=1)		Kleinste Schwingungsdauer mit 20% Überschwingen (D≈0,45)	
Regler	Parameter	Störsprung	Führungssprung	Störsprung	Führungssprung
P	K_P	$0{,}3\frac{T_g}{K_S T_u}$	$0{,}3\frac{T_g}{K_S T_u}$	$0{,}7\frac{T_g}{K_S T_u}$	$0{,}7\frac{T_g}{K_S T_u}$
PI	K_P	$0{,}6\frac{T_g}{K_S T_u}$	$0{,}35\frac{T_g}{K_S T_u}$	$0{,}7\frac{T_g}{K_S T_u}$	$0{,}6\frac{T_g}{K_S T_u}$
	T_N	$4\,T_u$	$1{,}2\,T_g$	$2{,}3\,T_u$	T_g
PID	K_P	$0{,}95\frac{T_g}{K_S T_u}$	$0{,}6\frac{T_g}{K_S T_u}$	$1{,}2\frac{T_g}{K_S T_u}$	$0{,}95\frac{T_g}{K_S T_u}$
	T_N	$2{,}4\,T_u$	T_g	$2\,T_u$	$1{,}35\,T_g$
	T_V	$0{,}42\,T_u$	$0{,}5\,T_u$	$0{,}42\,T_u$	$0{,}47\,T_u$

10.2 Analytische Berechnung der Reglerparameter

Regelstrecke		Regler	
Typ	Übertragungsfunktion	Typ	Übertragungsfunktion
IT_1	$G_s(s) = \frac{K_s}{s(T_1 s + 1)}$	P	$G_R(s) = K_P;\ K_P = \frac{1}{2K_s T_1}$
PT_1	$G_s(s) = \frac{K_s}{T_1 s + 1}$	I	$G_R(s) = \frac{K_I}{s};\ K_I = \frac{1}{2K_s T_1}$
PT_2	$G_s(s) = \frac{K_s}{(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)}$ $T_1 > T_2$	PI	$G_R(s) = K_P\frac{T_N s + 1}{T_N s}$; $T_N = T_1;\ K_P = \frac{T_N}{2K_s T_2}$
PT_n	eine große Zeitkonstante: $G_s(s) = \frac{K_s}{(T_1 s + 1)(T_\Sigma s + 1)}$ $T_1 \gg T_\Sigma;\ T_\Sigma = \sum_{i=2}^{n} T_i$	PI	$G_R(s) = K_P\frac{T_N s + 1}{T_N s}$; $T_N = T_1;\ K_P = \frac{T_N}{2K_s T_\Sigma}$
PT_n	zwei große Zeitkonstanten: $G_s(s) = \frac{K_s}{(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)(T_\Sigma s + 1)}$ $T_1 > T_2 \gg T_\Sigma;\ T_\Sigma = \sum_{i=3}^{n} T_i$	PID	$G_R(s) = K_P\frac{(T_N s + 1)(T_V s + 1)}{T_N s}$; $T_N = T_1;\ T_V = T_2;\ K_P = \frac{T_N}{2K_s T_\Sigma}$

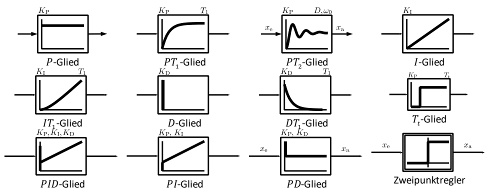
10.3 Optimierung der Reglerparameter

Quadratische Regelfläche: $Q_{sqrt,opt} = \frac{1}{\omega_0}\hat{w};\ D_{opt} = 0{,}5$

Betragsregelfläche: $Q_{sqrt,opt} = 1{,}605\hat{w};\ D_{opt} = 0{,}659$

ITAE-Kriterium: $Q_{sqrt,opt} = 1{,}952\hat{w};\ D_{opt} = 0{,}753$

11. Blockschaltbilder



12. Korrespondenztabelle der Laplace-Transformation

$\boldsymbol{f(t)}$		$\boldsymbol{F(s)}$			
$\sigma(t)$	∘—•	$\frac{1}{s}$	$sin(\omega t)$	∘—•	$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$
$\delta(t)$	∘—•	1	$cos(\omega t)$	∘—•	$\frac{s}{s^2 + \omega^2}$
$t^n, n > 0$	∘—•	$\frac{n!}{s^{n+1}}$	$e^{-at}\,sin(\omega t)$	∘—•	$\frac{\omega}{(s + a)^2 + \omega^2}$
$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}e^{-at}, n > 0$	∘—•	$(s + a)^{-n}$	$f(t - T_t), T_t > 0$	∘—•	$F(s)e^{-sT_t}$
$1 - e^{-at}$	∘—•	$\frac{a}{s(s + a)}$	$\dot{f}(t)$	∘—•	$sF(s) - f(-0)$
$t^n e^{-at}, n > 0$	∘—•	$\frac{n!}{(s + a)^{n+1}}$	$\ddot{f}(t)$	∘—•	$s^2F(s) - sf(-0) - \dot{f}(-0) \cdot$
			$f^{(n)}(t), n > 0$	∘—•	$s^nF(s) - \sum_{k=1}^{n} s^{k-1}f^{(n-k)}(-0)$

Glied	Systembeschreibung	Übertragungsfunktion
P	$x_a(t) = K_P x_e(t)$	$G(s) = K_P$
PT_1	$T_1\dot{x}_a + x_a(t) = K_P x_e(t)$	$G(s) = \frac{K_P}{T_1 s + 1}$
PT_2 ($D \geqslant 1$)	$T_1T_2\ddot{x}_a + (T_1 + T_2)\dot{x}_a + x_a(t) = K_P x_e(t)$	$G(s) = \frac{K_P}{(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)}$
PT_2	$\frac{1}{\omega_0^2}\ddot{x}_a + \frac{2D}{\omega_0}\dot{x}_a + x_a(t) = K_P x_e(t)$	$G(s) = \frac{K_P}{\frac{1}{\omega_0^2}s^2 + \frac{2D}{\omega_0}s + 1}$
I	$x_a(t) = K_I \int x_e(t)\,dt$	$G(s) = \frac{K_I}{s}$
IT_1	$T_1\dot{x}_a + x_a(t) = K_I \int x_e(t)\,dt$	$G(s) = \frac{K_I}{s(T_1 s + 1)}$
D	$x_a(t) = K_D\dot{x}_e$	$G(s) = K_D s$
DT_1	$T_1\dot{x}_a + x_a(t) = K_D\dot{x}_e$	$G(s) = \frac{K_D s}{T_1 s + 1}$
PI	$x_a(t) = K_P x_e(t) + K_I \int x_e(t)\,dt$ $= K_P\left(x_e(t) + \frac{1}{T_N}\int x_e(t)\,dt\right)$	$G(s) = K_P + \frac{K_I}{s}$ $= K_P\frac{T_N s + 1}{T_N s}$
PD	$x_a(t) = K_P x_e(t) + K_D\dot{x}_e$ $= K_P(x_e(t) + T_V\dot{x}_e)$	$G(s) = K_P + K_D s$ $= K_P(1 + T_V s)$
PID	$x_a(t) = K_P x_e(t) + K_I \int x_e(t)\,dt + K_D\dot{x}_e$ $= K_P\left(x_e(t) + \frac{1}{T_N}\int x_e(t)\,dt + T_V\dot{x}_e\right)$	$G(s) = K_P + \frac{K_I}{s} + K_D s$ $= K_P\left(1 + \frac{1}{T_N s} + T_V s\right)$
T_t	$x_a(t) = K_P x_e(t - T_t)\quad (t \geqslant T_t)$	$G(s) = K_P e^{-T_t s}$

$$\log_b(u \cdot v) = \log_b(u) + \log_b(v)$$

$$\log_b\left(\frac{u}{v}\right) = \log_b(u) - \log_b(v)$$

$$\log_b(u^z) = z\log_b(u)$$

$$\log_b(1) = 0, \quad \log_b(b) = 1$$

Strecke \ Regler	P	I	PI	PD	PID
P	–	++	++	–	–
PT_1	–	+	+	+	–
PT_2	–	–	+	–	++
PT_n	–	+	++	–	+++
T_t	–	++	++	–	–
PT_1T_t	–	+	++	–	–
I	++	– –	+	+	+
IT_1	+	– –	+	+	+