RECHERCHE OPÉRATIONNELLE I

Chapitre 2 : du modèle à la résolution graphique.

A. METRANE
ab.metrane@gmail.com

13 septembre 2021

Outline

Introduction

Après avoir illustré par des exemples, comment un problème pratique peut être modélisé par un programme linéaire, l'étape qui va suivre sera certainement celle de la résolution de ce problème mathématique. La méthode graphique est l'une des premières méthodes utilisées à ce sujet. Si on parle de résolution graphique alors on doit se limiter à une représentation à deux variables et au plus à trois variables. Ceci indique que dans ce chapitre on examinera seulement les programmes linéaires à deux variables de décision.

Une des conditions de la réussite de notre représentation graphique est le choix d’un système d’axes. Un mauvais choix peut rendre notre représentation non claire et imprécise.

A cause des contraintes de non-négativité des variables de décision, nous nous intéressons seulement au cadran positif.
Cette région s’appelle la région des solutions possibles du problème.

Problème de médecine

Prenons l'exemple relatif au problème de médecine. Le programme linéaire est le suivant :

$$Min\ z = x + y.$$

$$
\begin{array}{lrcl}
s.c & 2x + y & \geq & 12 \\
 & 5x + 8y & \geq & 74 \\
 & x + 6y & \geq & 24 \\
 & x & \geq & 0 \text{ et } y \geq 0
\end{array}
$$

C'est quoi le bon choix qui se base sur une lecture des différents paramètres pour ce programme linéaire ?

Solutions réalisables

Parmi les solutions possibles d’un problème, il y a ceux qui vont satisfaire toutes les contraintes du programme, appelés solutions réalisables, et ceux qui vont satisfaire une partie ou aucune de ces contraintes, appelés solutions non réalisables.

Solutions réalisables

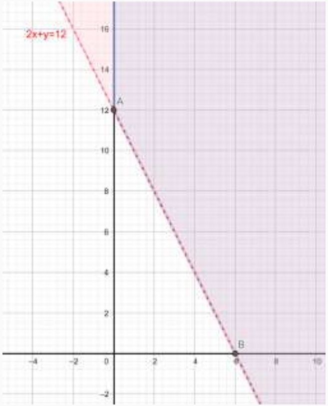
Parmi les solutions possibles d’un problème, il y a ceux qui vont satisfaire toutes les contraintes du programme, appelés solutions réalisables, et ceux qui vont satisfaire une partie ou aucune de ces contraintes, appelés solutions non réalisables.

Une représentation graphique des inégalités (des contraintes) va nous permettre de déterminer l’ensemble des solutions réalisables.

Exemple de médecine

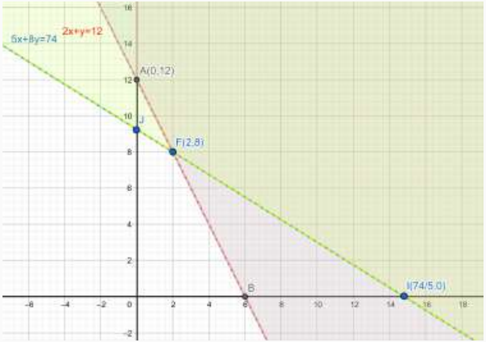
Dessiner la région réalisable du problème de médcine.

$\rightarrow$ On commence par la droite : $2x + y = 12$:



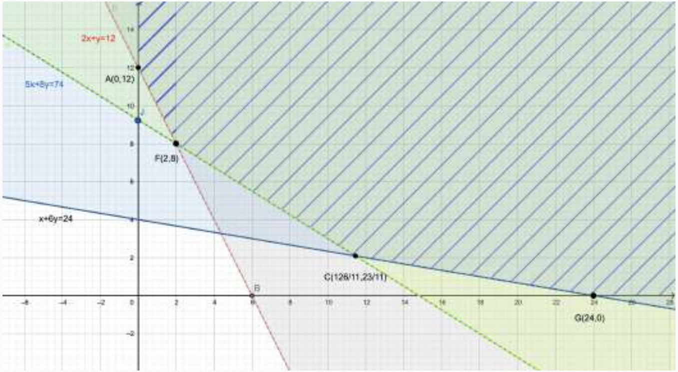
Pour trouver la partie du quadrant positive qui verifie $2x + y \geq 12$, il suffit de tester avec un point qui n'appartient pas à la droite (souvent $(0, 0)$).

$\rightarrow$ Pour la contrainte $5x + 8y = 74$:



On n'utilise que la droite passe par les points (2,8) et (10,3). On teste toujours que le point (0,0) pour identifier la partie $5x + 8y \geq 74$.

$\rightarrow$ Pour la contrainte $x + 6y = 24$:



On retrouve alors que les solutions réalisables réside dans un domaine non borné.

Résolution graphique

Si nous retraçons l'ensemble des droites parallèles relatives à différentes valeurs de la fonction objectif sur la figure qui représente l'ensemble des solutions réalisables, on peut localiser la solution optimale. Elle correspond à la solution réalisable qui intercepte la droite à la plus petite valeur de z.

Exemple de médecine

Pour z fixé, La fonction objectif $z = x + y$ est une droite de coefficient directeur -1. On peut tracer tous les droites pour localiser l'optimum mais cette démarche n'est pas précise.

On remarque que la solution optimale du problème de médecine est un point extrême qui se trouve sur le bord de l’ensemble des solutions. Une telle solution est dite solution réalisable de base.

Résolution par énumération

On peut admettre le résultat suivant : Si un programme linéaire admet une solution optimale alors il existe une solution réalisable de base pour laquelle la fonction objectif atteint la valeur optimale.

Une méthode de résolution du programme linéaire consiste donc à déterminer les solutions réalisables de base (les points d’intersection des droites qui forment les contraintes) et à calculer pour chaque point la valeur de la fonction objectif. La solution du programme linéaire est la solution à qui on associe la valeur optimale de la fonction objectif.

Exemple de médecine

À l’aide de la méthode de résolution par énumération, retrouvons la solution du problème de médecine.

Exemple de médecine

À l'aide de la méthode de résolution par énumération, retrouvons la solution du problème de médecine.

Listons ici les sommets de notre domaine réalisable :

Le point A est l'intersection de la première contrainte avec la droite $x = 0$:

$$\begin{cases} 2x + y = 12 \\ x = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow x = 0, y = 12$$

Le point F est l'intersection de la première et la deuxième contrainte :

$$\begin{cases} 2x + y = 12 \\ 5x + 8y = 74 \end{cases} \quad \Rightarrow x = 2, y = 8$$

Le point C est l'intersection de la la deuxième et la troisième contrainte :

$$\begin{cases} x + 6y = 24 \\ 5x + 8y = 74 \end{cases} \quad \Rightarrow x = \frac{126}{11}, y = \frac{23}{11}$$

Le point G est l'intersection de la deuxième contrainte avec la droite $y = 0$:

$$\begin{cases} x + 6y = 24 \\ y = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow x = 24, y = 0$$

Évaluation des solutions de base réalisable

Pour chaque sommet énuméré, nous évaluons la fonction objectif :

$$z_A = x_A + y_A = 0 + 12 = 12$$
$$z_F = x_F + y_F = 2 + 8 = 10$$
$$z_C = x_C + y_C = \frac{126}{11} + \frac{23}{11} = \frac{149}{11}$$
$$z_G = x_G + y_G = 24 + 0 = 24$$

On trouve alors que l'optimum $z = 10$ est réalisé au point F : $x = 2, y = 8$.

Exemple : Problème d'agriculture

Résoudre à l'aide de la méthode d'énumération' le problème d'agriculture suivant vu dans le chapitre 1 :

$$Max\ z = 1000x_1 + 2000x_2$$

$$\begin{array}{lrcl} s.c & x_1 + x_2 & \leq & 150 \\ & 4x_1 + 2x_2 & \leq & 440 \\ & x_1 + 4x_2 & \leq & 480 \\ & x_1 & \leq & 90 \\ & x_1 \geq 0 \text{ et } x_2 & \geq & 0 \end{array}$$

Exemple1 : Problèmes particuliers

Résoudre à l'aide de la méthode d'énumération Le problème suivant :

$$Max\ z = -2x + 3y$$

$$s.c \qquad \begin{array}{rcl} 2x - 3y & \leq & 6 \\ x & \leq & 5 \\ x & \geq & 0 \text{ et } y \geq 0 \end{array}$$

Exemple2 : : Problèmes particuliers

$$Max\ z = x + 3y$$

$$
s.c \qquad \begin{array}{rcl}
2x + 6y & \leq & 30 \\
x & \leq & 10 \\
y & \leq & 4 \\
x & \geq & 0 \text{ et } y \geq 0
\end{array}
$$