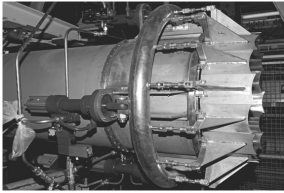


## TD



## Tuyère à ouverture variable

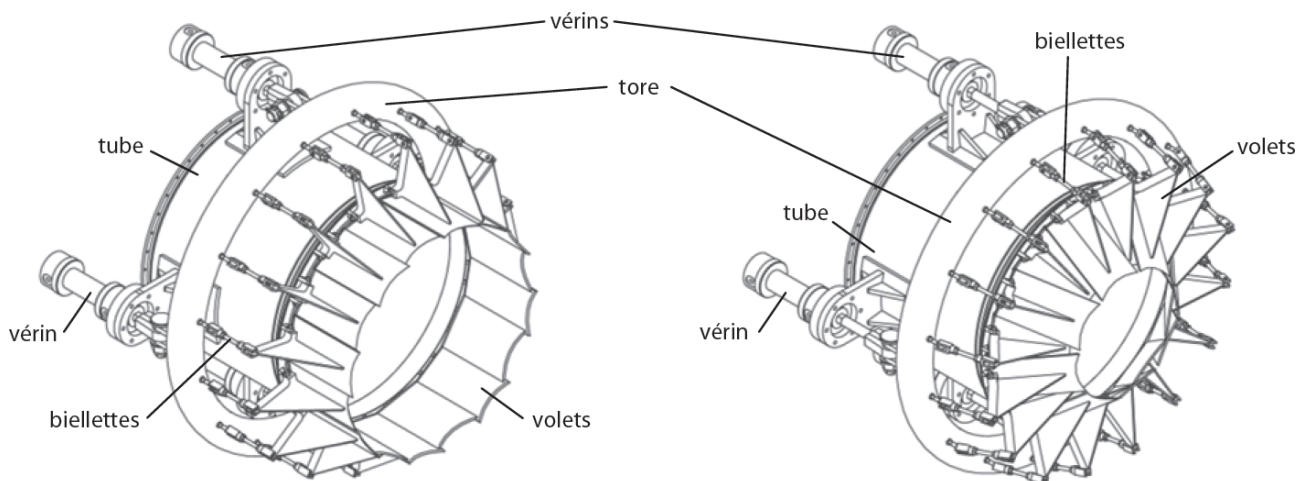
Banque PT – SIA 2011

Savoirs et compétences :

- Mod2.C34 : chaînes de solides;
- Mod2.C34 : degré de mobilité du modèle;
- Mod2.C34 : degré d'hyperstatisme du modèle;
- Mod2.C34.SF1 : déterminer les conditions géométriques associées à l'hyperstatisme;
- Mod2.C34 : résoudre le système associé à la fermeture cinématique et en déduire le degré de mobilité et d'hyperstatisme.

## Mise en situation

Dans le but de calibrer un banc d'essai de turboréacteur, les ingénieurs de la DGA (Direction Générale de l'Armement) a conçu une tuyère à ouverture variable afin de se substituer au turboréacteur.

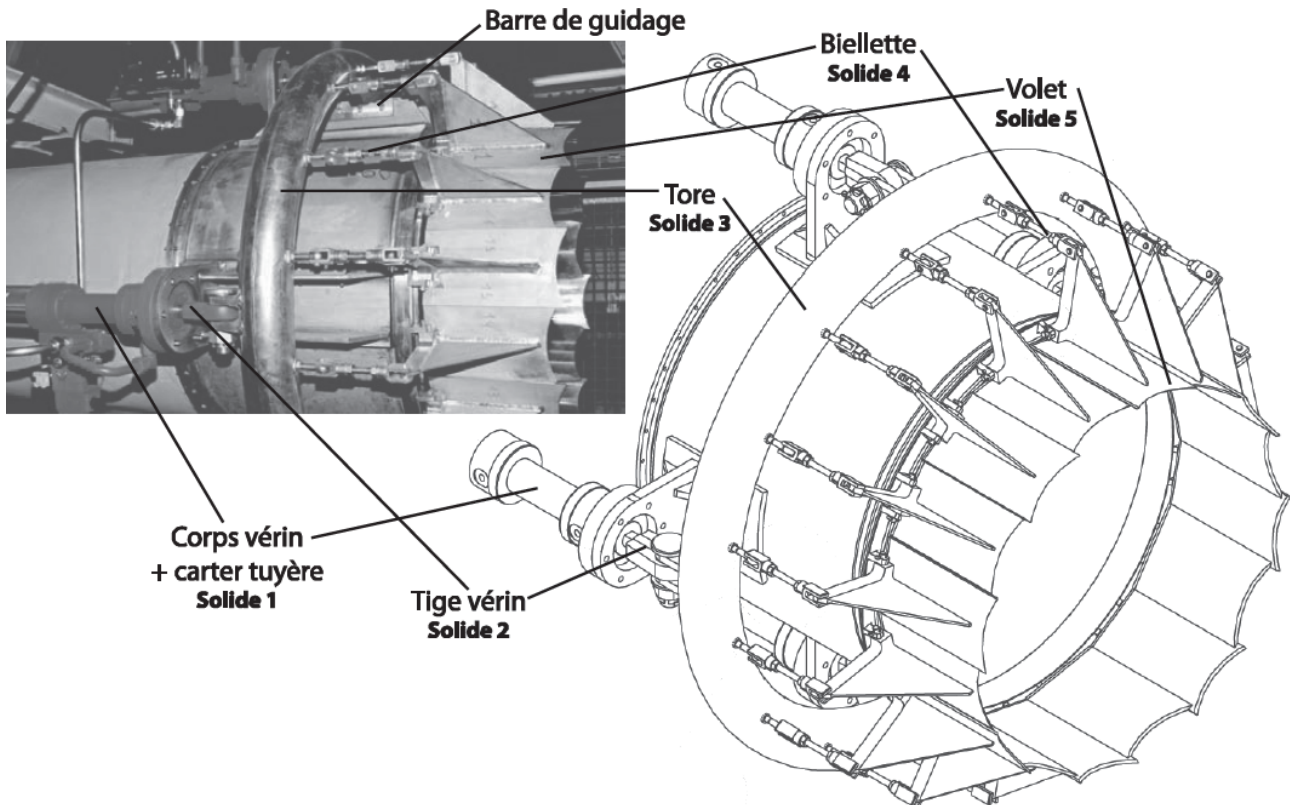


**Objectif** L'objectif est de valider le choix de conception de la structure mécanique permettant de transmettre l'énergie mécanique aux volets.

Le mouvement de chacun des volets doit être identique. Pour cela, les exigences suivantes doivent être vérifiées :

- le mouvement de rotation des volets autour d'un axe orthogonal à l'axe de la veine fluide doit respecter les exigences suivantes :
  - position de l'axe de rotation : orthogonal;
  - débattement angulaire :  $40^\circ \pm 0,5^\circ$ ;
  - précision angulaire :  $0,2^\circ$ ;
- commande simultanée des 16 volets :
  - interface unique en liaison glissière par rapport à la tuyère;
  - nombre d'actionneurs : minimum;
  - rigidité globale :  $\Delta x < 0.2 \text{ mm}$ ;
  - temps de montée en vitesse : inférieur à 0.1 s.
- adaptation aux efforts aérodynamiques :
  - résistance : 50% de la limite élastique;
  - déformation : compatible avec la précision.

La figure suivante présente les éléments de la solution adoptée par le bureau d'étude.



Pour synchroniser la commande des volets, on a adopté une solution consistant à les relier à une pièce unique en forme de tore entourant la tuyère et dont le déplacement assure la commande de tous les volets simultanément. Le tore repose sur deux barres de guidage fixées dans la partie supérieure du carter et parallèles à l'axe de la tuyère. Il est actionné par quatre vérins hydrauliques. On cherche, dans cette partie, à valider le critère d'appréciation sur la rigidité globale de la structure de commande des volets à interface unique.

Les notations adoptées sont les suivantes.

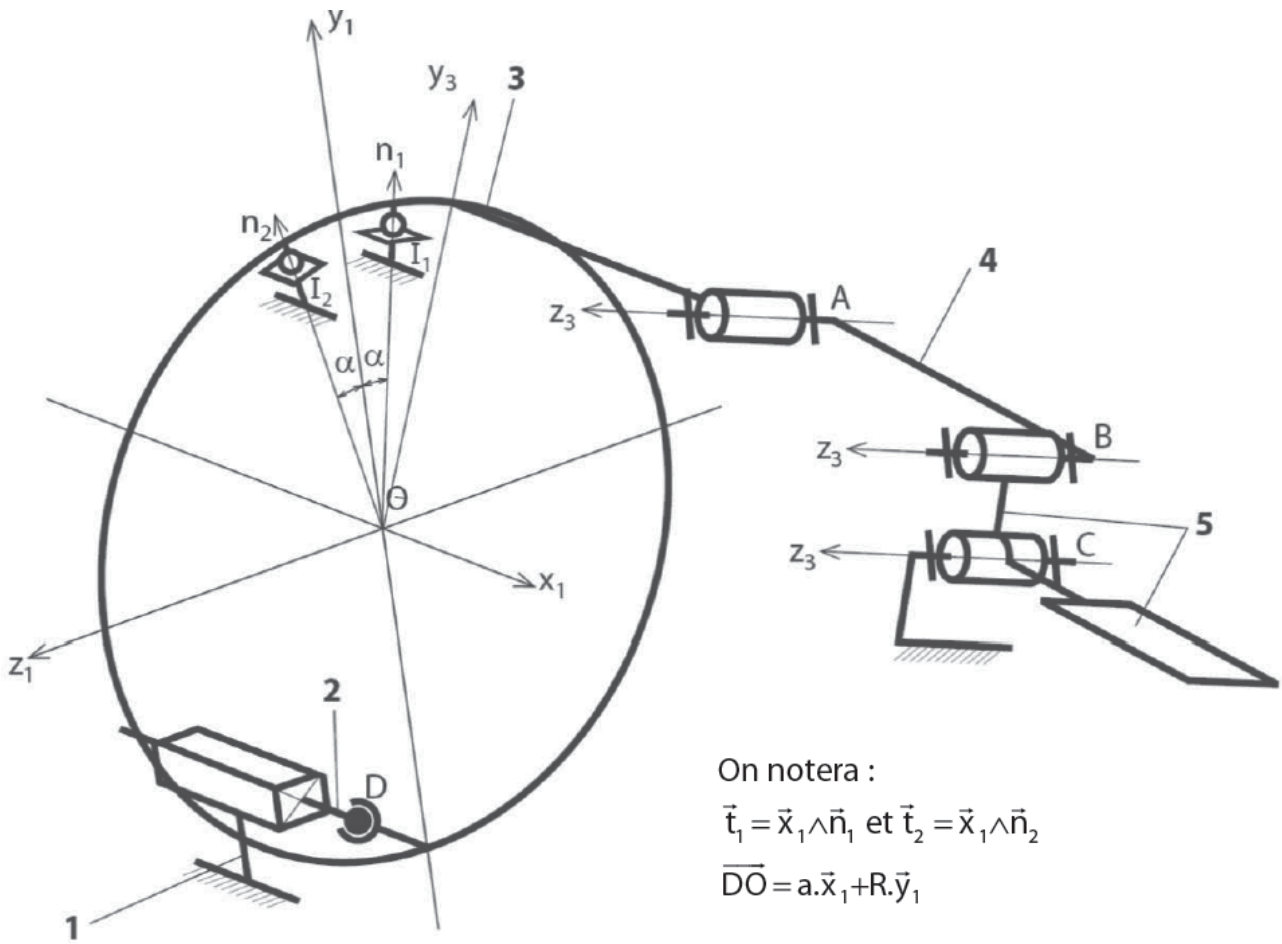
La base orthonormée directe liée au solide  $i$  :  $\mathcal{R}_i = (\vec{x}_i, \vec{y}_i, \vec{z}_i)$ . Le torseur cinématique du mouvement possible par une liaison  $L_k$ , d'un solide  $j$  par rapport à un solide  $i$  (ou par rapport au référentiel  $\mathcal{R}_i$  lié à celui-ci) réduit en  $A$ , sera noté  $\{\mathcal{V}_k\} = \left\{ \begin{matrix} p_k \vec{x} + q_k \vec{y} + r_k \vec{z} \\ u_k \vec{x} + v_k \vec{y} + w_k \vec{z} \end{matrix} \right\}_A$  où  $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$  est une base orthonormée associée à la liaison  $L_k$ .

Le torseur des actions mécaniques transmissibles par la liaison  $L_k$  du solide  $i$  sur le solide  $j$ , réduit en  $A$  sera noté  $\{\mathcal{F}_k\} = \left\{ \begin{matrix} X_k \vec{x} + Y_k \vec{y} + Z_k \vec{z} \\ L_k \vec{x} + M_k \vec{y} + N_k \vec{z} \end{matrix} \right\}_A$  où  $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$  est une base orthonormée associée à la liaison  $L_k$ .

### Étude d'une commande avec un seul actionneur

**Objectif** On cherche, dans un premier temps, à estimer la capacité d'une structure composée d'un seul vérin à transmettre le mouvement attendu.

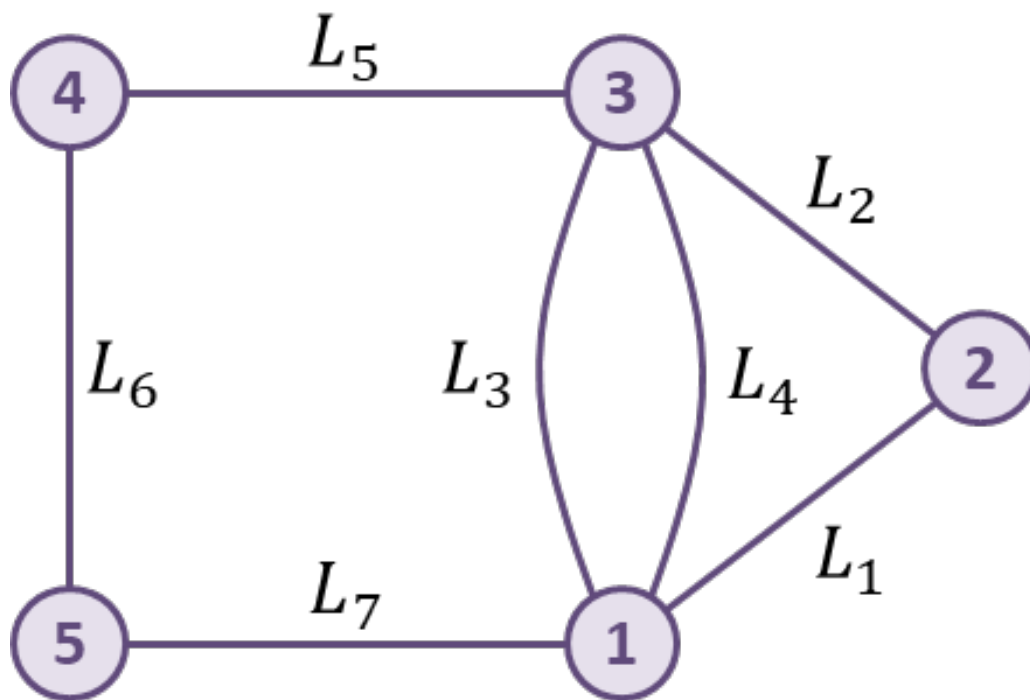
On précise que le solide 2 représente la tige du vérin et que les liaisons en  $I_1$  et  $I_2$  représentent les contacts du tore 3 avec les deux barres sur lesquelles il repose.



**Question 1** Compléter le graphe de structure en donnant chacune des liaisons et précisant les torseurs cinématiques et statiques.

**Correction**

Liaison	Caractéristique	Torseur cinématique	Torseur statique
$L_1$	Glissière de direction $\vec{x}_1$	$\begin{Bmatrix} 0 & u_1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 0 & L_1 \\ Y_1 & M_1 \\ Z_1 & N_1 \end{Bmatrix}$
$L_2$	Rotule de centre $D$ $\vec{x}_1$	$\begin{Bmatrix} p_2 & 0 \\ q_2 & 0 \\ r_2 & 0 \end{Bmatrix}_D$	$\begin{Bmatrix} X_2 & 0 \\ Y_2 & 0 \\ Z_2 & 0 \end{Bmatrix}_D$
$L_3$	Sphère-plan de normale $(I_1, \vec{n}_1)$	$\begin{Bmatrix} p_3 & u_3 \\ q_3 & 0 \\ r_3 & w_3 \end{Bmatrix}_{I_1}$	$\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ Y_3 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{I_1}$
$L_4$	Sphère-plan de normale $(I_2, \vec{n}_2)$	$\begin{Bmatrix} p_4 & u_4 \\ q_4 & 0 \\ r_4 & w_4 \end{Bmatrix}_{I_2}$	$\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ Y_4 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{I_2}$
$L_5$	Pivot $(A, \vec{z}_3)$	$\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ r_5 & 0 \end{Bmatrix}_A$	$\begin{Bmatrix} X_5 & L_5 \\ Y_5 & M_5 \\ Z_5 & 0 \end{Bmatrix}_A$
$L_6$	Pivot $(B, \vec{z}_3)$	$\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ r_6 & 0 \end{Bmatrix}_B$	$\begin{Bmatrix} X_6 & L_6 \\ Y_6 & M_6 \\ Z_6 & 0 \end{Bmatrix}_B$
$L_7$	Pivot $(C, \vec{z}_3)$	$\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ r_7 & 0 \end{Bmatrix}_C$	$\begin{Bmatrix} X_7 & L_7 \\ Y_7 & M_7 \\ Z_7 & 0 \end{Bmatrix}_C$



**Question 2** Déterminer la liaison équivalente  $L_{eq34}$  aux deux liaisons  $L_3$  et  $L_4$  situées entre le solide 1 et le solide 3. On attend une démonstration par le calcul. On précisera la forme du torseur des actions transmissibles  $\mathcal{F}_{eq34}$ .

**Correction**

Les liaisons sont en parallèles, on privilégie donc la méthode statique :  $\mathcal{F}_{eq34} = \{\mathcal{T}(3 \rightarrow 1_{L_3})\} + \{\mathcal{T}(3 \rightarrow 1_{L_4})\}$

$$\mathcal{F}_{eq34} = \left\{ \begin{Bmatrix} Y_3 \vec{n}_1 \\ 0 \end{Bmatrix}_O \right\} + \left\{ \begin{Bmatrix} Y_4 \vec{n}_2 \\ 0 \end{Bmatrix}_O \right\} = \left\{ \begin{Bmatrix} Y_3 \vec{n}_1 + Y_4 \vec{n}_2 \\ 0 \end{Bmatrix}_O \right\}.$$

$\vec{n}_1$  et  $\vec{n}_2$  ne sont pas colinéaires.  $\vec{x}_1$  est orthogonal à  $\vec{n}_1$  et  $\vec{n}_2$ . La liaison est donc une sphère cylindre d'axe  $(O, \vec{x}_1)$ .

**Question 3** Déterminer la liaison équivalente  $L_{eq12}$  aux deux liaisons  $L_1$  et  $L_2$  situées entre le solide 1 et le solide 3. On attend une démonstration par le calcul. On précisera la forme du torseur des actions transmissibles  $\mathcal{F}_{eq12}$ .

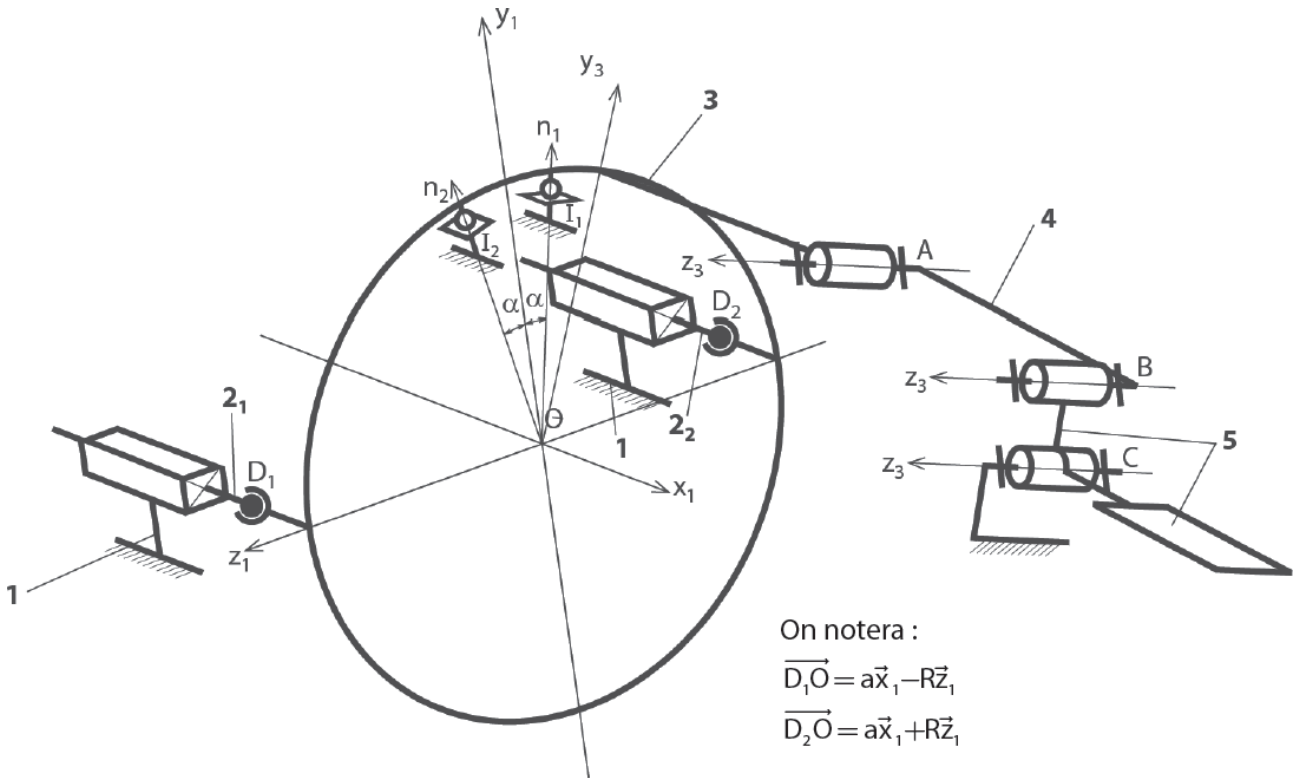
**Correction**

**Question 4** Déterminer la liaison équivalente  $L_{eq12}$  aux deux liaisons  $L_{eq34}$  et  $L_{eq12}$  situées entre le solide 1 et le solide 3. On attend une démonstration par le calcul. On précisera la forme du torseur des actions transmissibles  $\mathcal{F}_{eq}$ . Justifier que la commande avec un seul vérin ne satisfait pas le cahier des charges.

**Correction**

### Étude d'une commande avec deux actionneurs

**Objectif** On cherche, dans un deuxième temps, à estimer la capacité d'une structure composée de deux vérins à transmettre le mouvement attendu.



**Question 5** À partir du graphe de structure (graphe des liaisons) et en vous inspirant des résultats trouvés précédemment déterminer la liaison équivalente  $L_{eq1}$  aux liaisons  $L_{11}$ ,  $L_{21}$  et la liaison équivalente  $L_{eq2}$  aux liaisons  $L_{12}$  et  $L_{22}$  entre les solides 1 et 3.

**Correction**

**Question 6** Déterminer par la méthode de votre choix, la liaison équivalente  $L'_{eq1}$  aux deux liaisons  $L_{eq34}$ ,  $L_{eq1}$  et  $L_{eq2}$  situées entre le solide 1 et le solide 3. On précisera la forme du torseur des actions transmissibles  $\mathcal{F}'_{eq}$  puis le torseur cinématique cinématique  $\mathcal{V}'_{eq}$ . Le cahier des charges est-il vérifié pour une commande avec deux vérins?

**Correction**

## Étude de la structure adoptée par le constructeur

**Objectif** On cherche finalement à estimer la capacité de réalisation d'une structure composée des quatre vérins.

**Question 7** *Pour des raisons d'encombrement des vérins et de capacité à fournir les actions mécaniques de poussée, le bureau d'étude a finalement choisi de commander le tore avec 4 vérins pour obtenir la liaison glissière comme liaison équivalente entre les solides 1 et 3. Quel est, dans ces conditions, le degré d'hyperstatisme du groupe de liaisons initial réalisant la liaison glissière? Vous expliquerez brièvement, mais clairement votre raisonnement. Que pensez vous de ce résultat sur la capacité de réalisation de cette structure?*

**Correction**

### Question 1

Liaison	Désignation	Éléments géométriques	Torseur cinématique	Torseur des actions mécaniques transmissibles
L <sub>1</sub>	Glissière	suivant $\vec{x}_1$	$V_1 \equiv \begin{Bmatrix} 0 & u_1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}$	$F_1 \equiv \begin{Bmatrix} 0 & L_1 \\ Y_1 & M_1 \\ Z_1 & N_1 \end{Bmatrix}$
L <sub>2</sub>	rotule	De centre D	$V_1 \equiv \begin{Bmatrix} p_2 & 0 \\ q_2 & 0 \\ r_2 & 0 \end{Bmatrix}_D$	$F_1 \equiv \begin{Bmatrix} 0 & L_1 \\ 0 & M_1 \\ 0 & N_1 \end{Bmatrix}_D$
L <sub>3</sub>	ponctuelle	De normale $I_1 \vec{n}_1$	$V_3 \equiv \begin{Bmatrix} p_3 & u_3 \\ q_3 & 0 \\ r_3 & w_3 \end{Bmatrix}_{O, B_{locale}}$	$F_1 \equiv \begin{Bmatrix} X_1 & L_1 \\ 0 & M_1 \\ Z_1 & N_1 \end{Bmatrix}_{O, B_{locale}}$
L <sub>4</sub>	ponctuelle	De normale $I_2 \vec{n}_2$	$V_4 \equiv \begin{Bmatrix} p_4 & u_4 \\ q_4 & 0 \\ r_4 & w_4 \end{Bmatrix}_{O, B_{locale}}$	$F_1 \equiv \begin{Bmatrix} X_1 & L_1 \\ 0 & M_1 \\ Z_1 & N_1 \end{Bmatrix}_{O, B_{locale}}$
L <sub>5</sub>	pivot	D'axe $A \vec{z}_3$	$V_5 \equiv \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ r_5 & 0 \end{Bmatrix}_A$	$F_5 \equiv \begin{Bmatrix} X_5 & L_5 \\ Y_5 & M_5 \\ 0 & N_5 \end{Bmatrix}_A$
L <sub>6</sub>	pivot	D'axe $B \vec{z}_3$	$V_6 \equiv \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ r_6 & 0 \end{Bmatrix}_B$	$F_6 \equiv \begin{Bmatrix} X_6 & L_6 \\ Y_6 & M_6 \\ 0 & N_6 \end{Bmatrix}_B$
L <sub>7</sub>	pivot	D'axe $C \vec{z}_3$	$V_7 \equiv \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ r_7 & 0 \end{Bmatrix}_C$	$F_7 \equiv \begin{Bmatrix} X_7 & L_7 \\ Y_7 & M_7 \\ 0 & N_7 \end{Bmatrix}_C$

### Question 2

$$F_{eq34} = F_3 + F_4 = \begin{Bmatrix} Y_3 \vec{n}_1 + Y_4 \vec{n}_2 \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_o$$

$$F_{eq34} = \begin{Bmatrix} Y_3 (\cos \alpha \vec{y}_1 - \sin \alpha \vec{z}_1) + Y_4 (\cos \alpha \vec{y}_1 + \sin \alpha \vec{z}_1) \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_o$$

$$F_{eq34} = \begin{Bmatrix} (Y_3 + Y_4) \cos \alpha \vec{y}_1 + (Y_3 - Y_4) \sin \alpha \vec{z}_1 \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_o$$

$$F_{eq34} = \begin{Bmatrix} Y_{eq34} \vec{y}_1 + Z_{eq34} \vec{z}_1 \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_o$$

Donc la liaison équivalente  $L_{eq34}$  est une linéaire annulaire d'axe  $O, \vec{x}_1$

### Question 3

$$V_{eq12} = V_1 + V_2 = \begin{Bmatrix} \vec{0} \\ u_1 \vec{x}_1 \end{Bmatrix}_D + \begin{Bmatrix} p_2 \vec{x} + q_2 \vec{y} + r_2 \vec{z} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_D$$

$$V_{eq12} = \begin{Bmatrix} p_2 \vec{x} + q_2 \vec{y} + r_2 \vec{z} \\ u_1 \vec{x}_1 \end{Bmatrix}_D$$

Donc la liaison équivalente  $L_{eq12}$  est une linéaire annulaire d'axe  $D, \vec{x}_1$   $F_{eq34} = \begin{Bmatrix} Y_{eq12} \vec{y}_1 + Z_{eq12} \vec{z}_1 \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_D$

#### Question 4

$$F_{eq} = F_{eq34} + F_{eq12} = \begin{Bmatrix} Y_{eq34} \vec{y}_1 + Z_{eq34} \vec{z}_1 \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_O + \begin{Bmatrix} Y_{eq12} \vec{y}_1 + Z_{eq12} \vec{z}_1 \\ \overrightarrow{OD} \wedge (Y_{eq12} \vec{y}_1 + Z_{eq12} \vec{z}_1) \end{Bmatrix}_O$$

$$F_{eq} = \begin{Bmatrix} Y_{eq} \vec{y}_1 + Z_{eq} \vec{z}_1 \\ (a \vec{x}_1 + R \vec{y}_1) \wedge (Y_{eq12} \vec{y}_1 + Z_{eq12} \vec{z}_1) \end{Bmatrix}_O$$

$$F_{eq} = \begin{Bmatrix} Y_{eq} \vec{y}_1 + Z_{eq} \vec{z}_1 \\ a Y_{eq12} \vec{z}_1 - a Z_{eq12} \vec{y}_1 + R Z_{eq12} \vec{x}_1 \end{Bmatrix}_O$$

$$F_{eq} = \begin{Bmatrix} Y_{eq} \vec{y}_1 + Z_{eq} \vec{z}_1 \\ a Y_{eq12} \vec{z}_1 + Z_{eq12} (R \vec{x}_1 - a \vec{y}_1) \end{Bmatrix}_O$$

Posons  $\vec{x}_{eq}$  le vecteur normal au plan  $(\overrightarrow{OD}, \vec{z}_1)$

$$F_{eq} = \begin{Bmatrix} Y_{eq} \vec{y}_1 + Z_{eq} \vec{z}_1 \\ L_{eq12} \vec{x}_{eq} + N_{eq} \vec{z}_1 \end{Bmatrix}_O \quad V_{eq} = \begin{Bmatrix} q_{eq} \vec{y}_{eq} \\ u_1 \vec{x}_1 \end{Bmatrix}_D \quad \text{Ce torseur ne correspond à aucune liaison normalisée.}$$

Le mouvement attendu entre les solides **3** et **1** est une translation rectiligne de direction  $x_1$  qui correspond à une liaison glissière entre ces deux solides. La liaison réalisée par une structure à un seul vérin ne réalise pas une liaison glissière et ne satisfait donc pas au cahier des charges.

#### Question 5

La liaison équivalente  $L_{eq1}$  est une linéaire annulaire d'axe  $D_1, \vec{x}_1$

La liaison équivalente  $L_{eq2}$  est une linéaire annulaire d'axe  $D_2, \vec{x}_1$

#### Question 6

A partir de Q47, les deux liaisons  $L_{eq1}$  et  $L_{eq2}$  donnent les torseurs au point O' milieu de  $D_1 D_2$

$$F_{eq12} = \begin{Bmatrix} Y_{eq12} \vec{y}_1 + Z_{eq12} \vec{z}_1 \\ L_{eq12} \vec{y}_1 + N_{eq12} \vec{z}_1 \end{Bmatrix}_{O'} \quad V_{eq12} = \begin{Bmatrix} r_{eq12} \vec{z}_1 \\ u_{eq12} \vec{x}_1 \end{Bmatrix}_{O'}$$

La liaison  $L_{eq34}$  supprime la rotation. Donc la liaison équivalente est une liaison glissière suivant  $x_1$ .

Le cahier des charges est donc vérifié.

#### Question 7

La liaison glissière est réalisée par 4 liaisons linéaires annulaires en parallèles entre 3 et 1 qui génèrent chacune 4 inconnues cinématiques.

$$H = E_c - I_c + m_c = 18 - 16 + 1 = 3$$

Donc 3 inconnues hyperstatiques qui imposeront 3 conditions dimensionnelles ou géométriques.