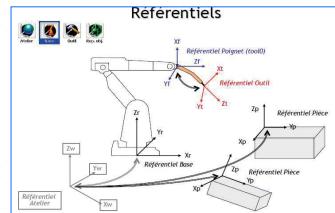


1. Motivations

- Un manipulateur peut être représenté comme une chaîne cinématique de segments reliés par l'intermédiaire d'articulations **rotoides** ou **prismatiques**.
- Le mouvement résultant de la structure est obtenu par composition des mouvements élémentaires de chaque segment par rapport au précédent.
- Afin de manipuler un objet dans l'espace, il est nécessaire de décrire la **position** et l'**orientation** (**pose**) de l'effeccteur.



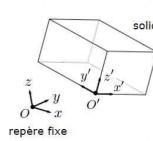
Prof. Olla Boubaker - INSAT

5

1. Motivations

La **pose** d'un corps rigide (ou solide) dans l'espace 3D peut être complètement décrite par **6 paramètres indépendants**:

- **3 paramètres indépendants définissent la position** d'un point, noté O' , du solide dans le repère fixe $O-xyz$ (ex. coordonnées cartésiennes, cylindriques ou sphériques)
- **3 paramètres indépendants déterminent l'orientation** du solide autour du point O' (ex. les angles d'Euler)

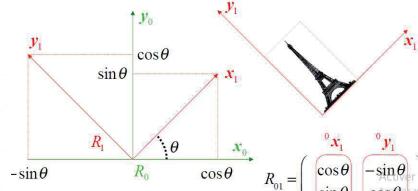


Prof. Olla Boubaker - INSAT

6

2. Exemple introductif: Positionnement en 2D

- Représentation de la rotation :



Prof. Olla Boubaker - INSAT

8

2. Exemple introductif: Positionnement en 2D

- Propriétés :

$$R_{01} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \Rightarrow \det \{R_{01}\} = \cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$$

$$\Rightarrow R_{01}^{-1} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} = R_{01}^T = R_{10}$$

Ce type de matrice 2×2 appartient au groupe spécial orthogonal d'ordre 2 noté $SO(2)$.

Prof. Olla Boubaker - INSAT

9

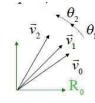
2. Exemple introductif: Positionnement en 2D

Composition

- Transformation de coordonnées :
- $${}^1P = R_{12} {}^2P$$
- $${}^0P = R_{01} {}^1P$$
- $$\Rightarrow {}^0P = R_{01} R_{12} {}^2P = R_{02} {}^2P$$



- Opérateur de rotation :
- $$\vec{v}_1 = R_{01} \vec{v}_0 \quad \vec{v}_2 = R_{02} \vec{v}_1$$
- $$\Rightarrow \vec{v}_2 = R_{02} R_{01} \vec{v}_0$$



Prof. Olla Boubaker - INSAT

11

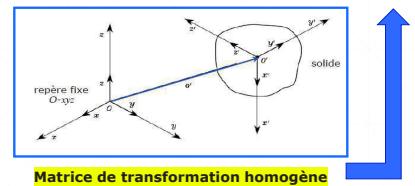


3. Représentations de l'orientation d'un corps rigide dans l'espace 3D

1. Motivations

Pour décrire la pose d'un solide dans l'espace 3D, on a besoin de connaître :

- La **Position** d'un point sur le solide (O') par rapport au repère fixe [**Translation**]
- Les Composants des vecteurs unitaires du repère attaché au solide avec origine O' , par rapport au repère fixe [**Rotation**]



Prof. Olla Boubaker - INSAT

7

2. Exemple introductif: Positionnement en 2D

Changement de repère

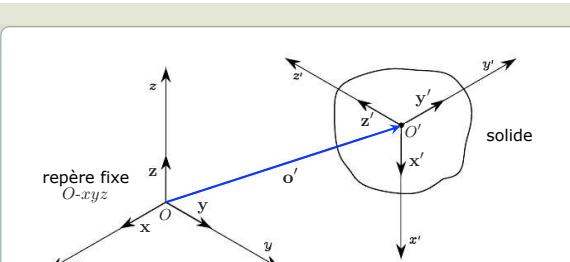
$${}^1P \begin{pmatrix} {}^1x_p \\ {}^1y_p \end{pmatrix} \quad {}^0P \begin{pmatrix} {}^0x_p = {}^1x_p \cos \theta - {}^1y_p \sin \theta \\ {}^0y_p = {}^1x_p \sin \theta + {}^1y_p \cos \theta \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow {}^0P = R_{01} {}^1P$$

$${}^0\vec{v}' = {}^1\vec{v} = R_{01} {}^0\vec{v} = R_\theta {}^0\vec{v}$$

Prof. Olla Boubaker - INSAT

10



La **position** du point O' du solide par rapport au repère fixe $O-xyz$ s'exprime par l'équation:

$$o' = o'_x x + o'_y y + o'_z z$$

où x, y, z sont les vecteurs unitaires (leur norme est 1) des axes du repère $O-xyz$ et o'_x, o'_y, o'_z sont les composantes du vecteur o' $\in \mathbb{R}^3$ le long de chacun des trois axes

7

Prof. Olla Boubaker - INSAT

12

• Afin de décrire l'**orientation** du solide, considérons un repère attaché au corps et exprimons ses vecteurs unitaires par rapport au repère $O\text{-}xyz$

• Soit $O'\text{-}x'y'z'$ un tel repère avec origine O' et soient x', y', z' les vecteurs unitaires des axes

• Ces vecteurs sont exprimés par rapport au repère $O\text{-}xyz$ par les équations:

$$x' = x'_x x + x'_y y + x'_z z$$

$$y' = y'_x x + y'_y y + y'_z z$$

$$z' = z'_x x + z'_y y + z'_z z$$

• Sous forme compacte, les vecteurs unitaires x', y', z' qui décrivent l'orientation du solide par rapport à $O\text{-}xyz$, peuvent être combinés dans la matrice 3×3 :

$$\mathbf{R} = [x' \ y' \ z'] = \begin{bmatrix} x'_x & y'_x & z'_x \\ x'_y & y'_y & z'_y \\ x'_z & y'_z & z'_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x^T x & y^T x & z^T x \\ x^T y & y^T y & z^T y \\ x^T z & y^T z & z^T z \end{bmatrix}$$

qui est appelée **matrice de rotation**. On dit que x' est le *cosinus directeur* reliant x à x' (et de même pour les autres 8 éléments de \mathbf{R})

8

Propriétés des matrices de rotation

• Les colonnes d'une matrice de rotation sont *orthogonales* à deux à deux,

$$x^T y' = 0, \quad y^T z' = 0, \quad z^T x' = 0$$

est leur norme est égale à 1:

$$x^T x' = 1, \quad y^T y' = 1, \quad z^T z' = 1$$

Par conséquent, \mathbf{R} est une **matrice orthogonale**, c'est-à-dire:

$$\mathbf{R}^T \mathbf{R} = \mathbf{I}_3$$

Si on multiplie à droite chaque côté de l'équation précédente par \mathbf{R}^{-1} on trouve que:

$$\mathbf{R}^T = \mathbf{R}^{-1}$$

c'est-à-dire, la transposée d'une matrice de rotation est égale à son inverse.

• En plus de conserver les *longueurs*, les matrices de rotation doivent également conserver l'*orientation*, donc il faut que $\det(\mathbf{R}) = 1$ (vrai, si le repère est *direct*)

$$\text{SO}(3) \triangleq \{\mathbf{R} \in \mathbb{R}^{3 \times 3} : \mathbf{R}^T \mathbf{R} = \mathbf{I}_3, \det(\mathbf{R}) = 1\} \quad \text{Groupe spécial orthogonal de dimension 3}$$

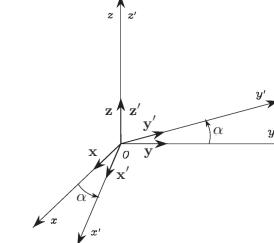
9

Rotations élémentaires

• Considérons les rotations qu'on peut obtenir à partir de **rotations élémentaires** autour des axes x, y, z

• Ces rotations sont **positives** si elles sont faites autour des axes relatifs, dans le sens *anti-horaire*

Exemple: le repère $O\text{-}xyz$ est pivoté d'un angle α autour de l'axe z et $O\text{-}x'y'z'$ est le repère résultant



10

Rotations élémentaires

• Les vecteurs unitaires de $O\text{-}x'y'z'$ peuvent être exprimés par rapport au repère $O\text{-}xyz$ comme:

$$\mathbf{x}' = \begin{bmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{y}' = \begin{bmatrix} -\sin \alpha \\ \cos \alpha \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{z}' = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

• La matrice de rotation de $O\text{-}x'y'z'$ par rapport à $O\text{-}xyz$ engendrée, est donc:

$$\mathbf{R}_z(\alpha) = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

De la même façon, on peut trouver la matrice de rotation autour de l'axe x d'un angle β et la matrice de rotation autour de l'axe y d'un angle γ

Remarque: Ces matrices seront utiles pour décrire des rotations dans l'espace 3D autour d'axes quelconques

11

Rotations élémentaires: sommaire

Diapo à imprimer pour le DS

$$\mathbf{R}_x(\gamma) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \gamma & -\sin \gamma \\ 0 & \sin \gamma & \cos \gamma \end{bmatrix} \quad \text{Matrice de rotation autour de l'axe } x \text{ d'un angle } \gamma$$

$$\mathbf{R}_y(\beta) = \begin{bmatrix} \cos \beta & 0 & \sin \beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \beta & 0 & \cos \beta \end{bmatrix} \quad \text{Matrice de rotation autour de l'axe } y \text{ d'un angle } \beta$$

$$\mathbf{R}_z(\alpha) = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{Matrice de rotation autour de l'axe } z \text{ d'un angle } \alpha$$

Remarque:

Pour les rotations élémentaires, la propriété suivante est vérifiée:

$$\mathbf{R}_x(-\gamma) = \mathbf{R}_x^T(\gamma), \quad \mathbf{R}_y(-\beta) = \mathbf{R}_y^T(\beta), \quad \mathbf{R}_z(-\alpha) = \mathbf{R}_z^T(\alpha)$$

12

Représentation d'un vecteur

Mais \mathbf{p} et \mathbf{p}' sont deux représentations du même point P , donc

$$\mathbf{p} = p'_x \mathbf{x}' + p'_y \mathbf{y}' + p'_z \mathbf{z}' = [x' \ y' \ z'] \mathbf{p}'$$

Mais cela signifie que (rappel les équations vues précédemment):

$$\mathbf{p} = \mathbf{R} \mathbf{p}'$$

\mathbf{R} représente la matrice de transformation qui permet d'exprimer les coordonnées du point P dans le repère $O\text{-}xyz$, en fonction des coordonnées du même point dans le repère $O\text{-}x'y'z'$

\mathbf{R} est une *matrice orthogonale*. Donc la transformation inverse est simplement:

$$\mathbf{p}' = \mathbf{R}^T \mathbf{p}$$

13

Représentation d'un vecteur

Exemple:

Deux repères avec la même origine et une rotation relative d'un angle α autour de l'axe z

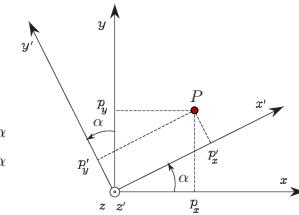
\mathbf{p}, \mathbf{p}' : coordonnées du point P dans les repères $O\text{-}xyz$ et $O\text{-}x'y'z'$

On trouve facilement que:

$$p_x = p'_x \cos \alpha - p'_y \sin \alpha$$

$$p_y = p'_x \sin \alpha + p'_y \cos \alpha$$

$$p_z = p'_z$$



Remarque:

La matrice $\mathbf{R}_z(\alpha)$ représente non seulement l'orientation d'un repère par rapport à un autre, mais elle décrit également la *transformation d'un vecteur dans un repère en un autre avec la même origine*

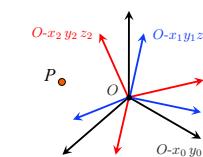
15

Composition de matrices de rotation

Problème: comment composer plusieurs rotations ?

Considérons **trois repères** $O\text{-}x_0 y_0 z_0$, $O\text{-}x_1 y_1 z_1$, $O\text{-}x_2 y_2 z_2$ avec la *même origine* O

$\mathbf{p}^0, \mathbf{p}^1, \mathbf{p}^2 \in \mathbb{R}^3$: coordonnées d'un point P dans les trois repères



16

Composition de matrices de rotation

Soit \mathbf{R}_i^j la matrice de rotation du repère i par rapport au repère j

Donc

$$\mathbf{p}^1 = \mathbf{R}_2^1 \mathbf{p}^2$$

De même, nous avons:

$$\mathbf{p}^0 = \mathbf{R}_1^0 \mathbf{p}^1$$

$$\mathbf{p}^0 = \mathbf{R}_2^0 \mathbf{p}^2$$

Mais alors on peut conclure que:

$$\boxed{\mathbf{R}_2^0 = \mathbf{R}_1^0 \mathbf{R}_2^1}$$

17

Composition de matrices de rotation

Problème fondamental: le produit matriciel n'est pas commutatif !

En général, deux rotations ne commutent pas et la composition dépend de l'ordre de chaque rotation, à savoir:

$$\boxed{\mathbf{R}_1^0 \mathbf{R}_2^1 \neq \mathbf{R}_2^1 \mathbf{R}_1^0}$$

Exemple:

$$\mathbf{R}_x(\pi/4) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \\ 0 & \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{R}_y(\pi/6) = \begin{bmatrix} \sqrt{3}/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1/2 & 0 & \sqrt{3}/2 \end{bmatrix}$$

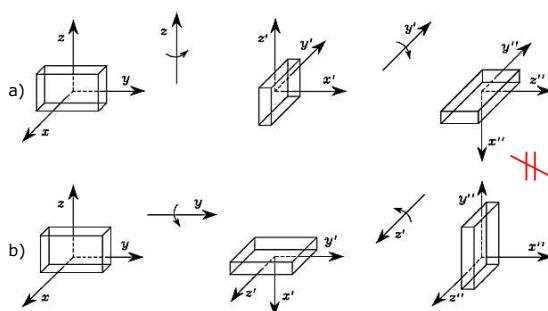
$$\mathbf{R}_y(\pi/6) \mathbf{R}_x(\pi/4) = \begin{bmatrix} \sqrt{3}/2 & \sqrt{2}/4 & \sqrt{2}/4 \\ 0 & \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \\ -1/2 & \sqrt{6}/4 & \sqrt{6}/4 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{R}_x(\pi/4) \mathbf{R}_y(\pi/6) = \begin{bmatrix} \sqrt{3}/2 & 0 & 1/2 \\ \sqrt{2}/4 & \sqrt{2}/2 & -\sqrt{6}/4 \\ -\sqrt{2}/4 & \sqrt{2}/2 & \sqrt{6}/4 \end{bmatrix}$$

20

Composition de matrices de rotation

• Rotations successives d'un objet autour des axes du **repère courant**



21

Représentations de l'orientation

• Les matrices de rotation fournissent une **description redondante** de l'orientation d'un corps

• En effet, une matrice de rotation \mathbf{R} comprend 9 éléments:

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix}$$

• Toutefois nous avons 6 relations indépendantes entre ces éléments (les contraintes d'orthogonalité et de normalité des colonnes de \mathbf{R}):

$$r_{11}r_{12} + r_{21}r_{22} + r_{31}r_{32} = 0 \quad r_{11}^2 + r_{21}^2 + r_{31}^2 = 1$$

$$r_{11}r_{13} + r_{21}r_{23} + r_{31}r_{33} = 0 \quad r_{12}^2 + r_{22}^2 + r_{32}^2 = 1$$

$$r_{12}r_{13} + r_{22}r_{23} + r_{32}r_{33} = 0 \quad r_{13}^2 + r_{23}^2 + r_{33}^2 = 1$$

Conclusion: 3 paramètres sont suffisants pour décrire l'orientation d'un corps

Une représentation de l'orientation en fonction de 3 paramètres indépendants est dite **représentation minimale**

23

Représentations de l'orientation

• Une **représentation minimale** de l'orientation peut être obtenue en utilisant un ensemble de **trois angles**: $\phi = [\varphi, \theta, \psi]^T$

• Une **matrice de rotation générique** peut être obtenue en composant une séquence opportune de **3 rotations élémentaires** (Théor. d'Euler, 1776)
Attention: il faut garantir que deux rotations successives ne sont pas faites autour d'axes parallèles

Cela veut dire que **12 ensembles différents d'angles** sont admissibles parmi les $3^3 = 27$ combinaisons possibles:

ZXZ, XYX, YZY, ZYZ, ZXZ, XYY (angles « propres »)

XYZ, YZX, ZXY, XZY, YZX, YXZ (angles de Tait-Bryan)

Chaque ensemble constitue un triplet d'**angles d'Euler**



Leonhard Euler (1707-1783)

Deux triplets d'angles d'Euler très utilisés sont:

1. Les angles ZYX
2. Les angles ZYX ou angles **roulis-tangage-lacet** (roll-pitch-yaw, en anglais)

24

Composition de matrices de rotation

Remarque [repère fixe]:

- Les rotations successives peuvent aussi être spécifiées toujours par rapport au **repère initial**
- On dit que les rotations sont faites par rapport à un **repère fixe**
- La composition de rotations successives est obtenue par **multiplication à gauche** des matrices de rotation en suivant l'ordre donné des rotations:

$$\mathbf{R}_n^0 = \mathbf{R}_{n-1}^{n-1} \mathbf{R}_{n-2}^{n-2} \cdots \mathbf{R}_2^1 \mathbf{R}_1^0$$

Remarque:

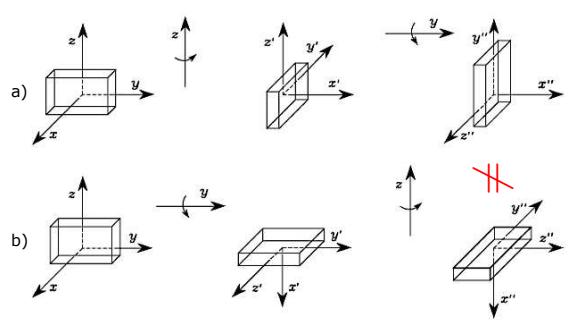
Conformément à notre notation, nous avons que:

$$\mathbf{R}_i^j = (\mathbf{R}_j^i)^{-1} = (\mathbf{R}_j^i)^T$$

19

Composition de matrices de rotation

• Rotations successives d'un objet autour des axes du **repère fixe**

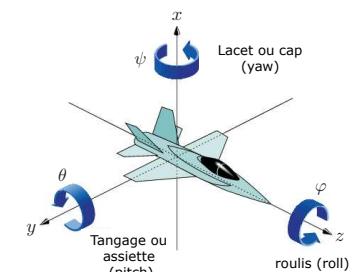


22

Angles roulis-tangage-lacet

• Représentation de l'orientation utilisée en (aéro)nautique pour décrire l'attitude d'un avion

• Les angles (φ, θ, ψ) représentent des rotations définies dans un repère fixe attaché au centre de masse de l'avion



25

Angles roulis-tangage-lacet

La rotation décrite par les angles de roulis, tangage et lacet est obtenue comme la composition de 3 rotations élémentaires:

- Tourner le repère d'un angle ψ autour de l'axe x (lacet): rotation définie par $R_x(\psi)$
- Tourner le repère d'un angle θ autour de l'axe y (tangage): rotation définie par $R_y(\theta)$
- Tourner le repère d'un angle φ autour de l'axe z (roulis): rotation définie par $R_z(\varphi)$

L'orientation résultante du repère est obtenue en composant les rotations par rapport au repère ixe , et peut être calculée en multipliant à gauche les matrices de rotation élémentaires:

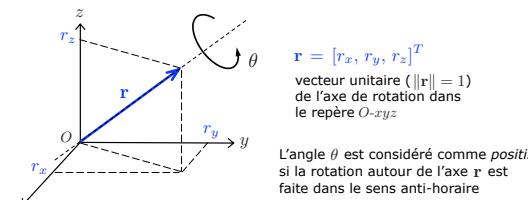
$$R(\phi) = R_z(\varphi) R_y(\theta) R_x(\psi) = \begin{bmatrix} c_\varphi c_\theta & c_\varphi s_\theta s_\psi - s_\varphi c_\psi & c_\varphi s_\theta c_\psi + s_\varphi s_\psi \\ s_\varphi c_\theta & s_\varphi s_\theta s_\psi + c_\varphi c_\psi & s_\varphi s_\theta c_\psi - c_\varphi s_\psi \\ -s_\theta & c_\theta s_\psi & c_\theta c_\psi \end{bmatrix}$$

où, pour plus de simplicité, $c_\varphi = \cos \varphi$, $s_\theta = \sin \theta$

26

Angle et axe

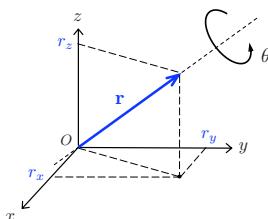
- Une représentation non minimale de l'orientation peut être obtenue en utilisant 4 paramètres qui expriment une rotation d'un angle θ autour d'un axe générique dans l'espace 3D
- Cette représentation peut être utile, par exemple, pour planifier la trajectoire de l'effecEUR d'un manipulateur



29

Angle et axe

- Si $\sin \theta = 0$, les équations précédentes ne sont pas définies
 - Pour résoudre le problème inverse, il faut travailler avec l'expression particulière de la matrice R dont on dispose et trouver des formules de résolution pour les deux cas: $\theta = \pi$ et $\theta = 0$
- Si $\theta = 0$ (rotation nulle), le vecteur unitaire r est arbitraire (*singularité de représentation*)



32

Angles roulis-tangage-lacet

Problème inverse: déterminer les angles de roulis, tangage et lacet qui correspondent à une matrice de rotation R donnée:

$$R = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix}$$

Si on compare cette expression avec $R(\phi)$, on trouve que la solution, pour $\theta \in (-\pi/2, \pi/2)$, est:

$$\begin{aligned} \varphi &= \text{Atan2}(r_{21}, r_{11}) \\ \theta &= \text{Atan2}(-r_{31}, \sqrt{r_{32}^2 + r_{33}^2}) \\ \psi &= \text{Atan2}(r_{32}, r_{33}) \end{aligned}$$

L'autre solution équivalente pour $\theta \in (\pi/2, 3\pi/2)$, est:

$$\begin{aligned} \varphi &= \text{Atan2}(-r_{21}, -r_{11}) \\ \theta &= \text{Atan2}(-r_{31}, -\sqrt{r_{32}^2 + r_{33}^2}) \\ \psi &= \text{Atan2}(-r_{32}, -r_{33}) \end{aligned}$$

27

Angles roulis-tangage-lacet

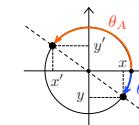
Remarque 1:

- Si $\cos \theta = 0$ les solutions précédentes sont dégénérées: dans ce cas, on peut uniquement déterminer la somme ou la différence de φ et ψ

- Les configurations qui correspondent aux angles $\theta = \pm \pi/2$ caractérisent les *singularités de représentation* des angles d'Euler

Remarque 2:

- $\text{Atan2}(y, x)$ est la fonction arc tangente à deux arguments
- $\text{Atan2}(y, x)$ calcule l'arc tangente du rapport y/x mais elle utilise le signe des arguments pour déterminer le bon quadrant de l'angle



$$\text{Atan2}(y, x) = \begin{cases} \arctan(y/x), & x > 0 \\ \arctan(y/x) + \pi, & y \geq 0, x < 0 \\ \arctan(y/x) - \pi, & y < 0, x < 0 \\ +\pi/2, & y > 0, x = 0 \\ -\pi/2, & y < 0, x = 0 \\ \text{non définie}, & y = 0, x = 0 \end{cases}$$

28

Angle et axe

Problème inverse: déterminer l'angle et l'axe qui correspondent à une matrice de rotation R donnée:

$$R = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix}$$

- Si $\sin \theta \neq 0$, on obtient:

$$\theta = \arccos \left(\frac{r_{11} + r_{22} + r_{33} - 1}{2} \right) \quad \text{Angle}$$

$$\mathbf{r} = \frac{1}{2 \sin \theta} \begin{bmatrix} r_{32} - r_{23} \\ r_{13} - r_{31} \\ r_{21} - r_{12} \end{bmatrix} \quad \text{Axe}$$

Remarques:

- Les deux expressions précédentes décrivent la rotation en fonction de quatre paramètres: l'angle et les trois composantes du vecteur unitaire de l'axe
- Cependant, on peut constater que les trois composantes r_x, r_y, r_z du vecteur \mathbf{r} ne sont pas indépendantes mais elles sont contraintes par la condition:

$$r_x^2 + r_y^2 + r_z^2 = 1$$

31

Quaternion unitaire

Les inconvénients de la représentation angle et axe peuvent être surmontés par une autre représentation à 4 paramètres, le **quaternion unitaire**, défini par:

$$\mathcal{Q} = \{\eta, \mathbf{e}\}$$

où

$$\begin{aligned} \eta &= \cos(\theta/2) : \text{partie scalaire} \text{ du quaternion} \\ \mathbf{e} &= [e_x, e_y, e_z]^T = \sin(\theta/2) \mathbf{r} : \text{partie vectorielle} \text{ du quaternion} \end{aligned}$$

avec la contrainte $\eta^2 + e_x^2 + e_y^2 + e_z^2 = 1$ dont le nom de quaternion *unitaire*. Les paramètres \mathbf{r} et θ sont les mêmes que pour la représentation angle et axe



33

Quaternion unitaire

Remarque:

Contrairement à la représentation angle et axe, une rotation de $-\theta$ autour de $-\mathbf{r}$ donne le même quaternion que celui associé à une rotation de θ autour de \mathbf{r}

- Matrice de rotation qui correspond à un quaternion unitaire $\mathcal{Q} = \{\eta, \mathbf{e}\}$ donné:

$$\mathbf{R}(\eta, \mathbf{e}) = \begin{bmatrix} 2(\eta^2 + e_x^2) - 1 & 2(\epsilon_x \epsilon_y - \eta \epsilon_z) & 2(\epsilon_x \epsilon_z + \eta \epsilon_y) \\ 2(\epsilon_x \epsilon_y + \eta \epsilon_x) & 2(\eta^2 + e_y^2) - 1 & 2(\epsilon_y \epsilon_z - \eta \epsilon_x) \\ 2(\epsilon_x \epsilon_z - \eta \epsilon_y) & 2(\epsilon_y \epsilon_z + \eta \epsilon_x) & 2(\eta^2 + e_z^2) - 1 \end{bmatrix}$$

- Les quaternions \mathcal{Q} et $-\mathcal{Q}$ décrivent la même matrice de rotation (les quaternions fournissent un double recouvrement du groupe $SO(3)$).

En dehors de cette ambiguïté, les quatre paramètres d'un quaternion décrivent une *rotation unique*

34

Quaternion unitaire

Problème inverse: déterminer le quaternion qui correspond à une matrice de rotation R donnée:

$$R = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix}$$

• Nous avons que:

$$\eta = \frac{1}{2} \sqrt{r_{11} + r_{22} + r_{33} + 1}$$

$$\epsilon = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \operatorname{sgn}(r_{32} - r_{23})\sqrt{r_{11} - r_{22} - r_{33} + 1} \\ \operatorname{sgn}(r_{13} - r_{31})\sqrt{r_{22} - r_{33} - r_{11} + 1} \\ \operatorname{sgn}(r_{21} - r_{12})\sqrt{r_{33} - r_{11} - r_{22} + 1} \end{bmatrix}$$

où la fonction *signe* est définie comme suit:

$$\operatorname{sgn}(x) \triangleq \begin{cases} 1 & \text{si } x \geq 0 \\ -1 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

35

Quaternion unitaire

Remarque:

- Dans la première équation de la diapo précédente nous avons supposé implicitement que $\eta = \cos(\theta/2) \geq 0$. Cela correspond à un angle $\theta \in [-\pi, \pi]$. Par conséquent, toute rotation peut être décrite

- Par rapport aux formules d'inversion de la représentation angle et axe, il n'y a pas de singularités dans les deux équations de la diapo précédente

Inverse d'un quaternion et produit de quaternions

- Le quaternion extrait de la matrice $R^{-1} = R^T$ est noté Q^{-1} et on peut le calculer ainsi:

$$Q^{-1} = \{\eta, -\epsilon\}$$

- Soient $Q_1 = \{\eta_1, \epsilon_1\}$ et $Q_2 = \{\eta_2, \epsilon_2\}$ les quaternions qui correspondent aux matrices de rotation R_1 et R_2 , respectivement. Le quaternion qui correspond à leur produit $R_1 R_2$ est donné par:

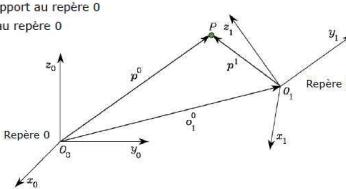
$$Q_1 * Q_2 = \{\eta_1 \eta_2 - \epsilon_1^T \epsilon_2, \eta_1 \epsilon_2 + \eta_2 \epsilon_1 + \epsilon_1 \times \epsilon_2\}$$

Si $Q_2 = Q_1^{-1}$, la formule précédente nous donne $\{1, 0\}$, l'élément neutre (ou identité) du produit. Comme le produit matriciel, le produit de quaternions n'est pas commutatif, à savoir $Q_1 * Q_2 \neq Q_2 * Q_1$

36

3. Matrices Homogènes

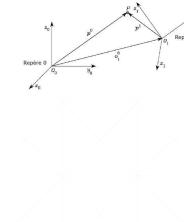
- P : point générique dans l'espace 3D
- p^0, p^1 : coordonnées du point P par rapport au repère 0 et 1
- o_1^0 : vecteur qui décrit l'origine du repère 1 par rapport au repère 0
- R_1^0 : matrice de rotation du repère 1 par rapport au repère 0



Prof. Olfa Boubaker - INSAT

13

3. Matrices Homogènes



14

Matrices homogènes

- La présence conjointe de produits et de sommes dans l'équation:

$$p^0 = o_1^0 + R_1^0 p^1$$

est peu pratique pour effectuer des calculs systématiques, dûs par exemple à des changements successifs de repère. On lui préfère une représentation matricielle, basée sur les **coordonnées homogènes**

La représentation en coordonnées homogènes consiste à doter toute notation vectorielle d'un *facteur d'échelle*, en introduisant une coordonnée supplémentaire

Soit par exemple un point P de l'espace, rapporté à un repère fixe, donné par:

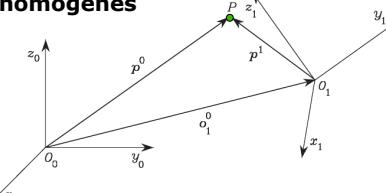
$$\mathbf{p} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}.$$

Alors la représentation du point P à l'aide de coordonnées homogènes est faite par:

$$\tilde{\mathbf{p}} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} \quad \text{où } a = \frac{x}{w}, b = \frac{y}{w}, c = \frac{z}{w}$$

7

Matrices homogènes



En pratique, on choisit un *facteur d'échelle unitaire* (à savoir $w = 1$)

Pour avoir une représentation compacte de la relation entre les coordonnées du même point P dans deux repères, nous utilisons donc la **représentation homogène** suivante:

$$\mathbf{p} \text{ "tilde"} \rightarrow \tilde{\mathbf{p}} = \begin{bmatrix} \mathbf{p} \\ 1 \end{bmatrix} \leftarrow \text{On rajoute une 4ième coordonnée, de valeur égale à 1, au vecteur } \mathbf{p}$$

8

Représentations de l'orientation

Sommaire des propriétés des 4 représentations de l'orientation d'un corps rigide dans l'espace 3D

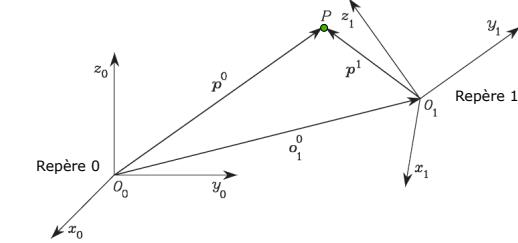
Représentation	Matrice de rotation	Angles d'Euler (ZY _Z , ZY _X , etc.)	Angle et axe	Quaternion unitaire
Globale	Oui	Non	Non	Oui
Unique	Oui	Non	Non	Non
Minimale	Non	Oui	Non	Non

Remarque:

Une représentation de l'orientation est dite *globale*, s'il n'y a pas de singularités dans le problème inverse

37

Matrices homogènes



On peut écrire la position du point P par rapport au repère 0 comme:

$$\mathbf{p}^0 = \mathbf{o}_1^0 + \mathbf{A}_1^0 \mathbf{p}^1$$

Transformation de coordonnées (translation + rotation) d'un vecteur entre le repère 1 et le repère 0

6

Matrices homogènes

- Si on utilise cette représentation pour les vecteurs \mathbf{p}^0 et \mathbf{p}^1 , on peut écrire la transformation de coordonnées en utilisant une seule matrice 4×4 :

$$\mathbf{A}_1^0 = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_1^0 & \mathbf{o}_1^0 \\ \mathbf{0}_{1 \times 3} & 1 \end{bmatrix} \quad \text{Matrice de transformation homogène}$$

- Puisque $\mathbf{o}_1^0 \in \mathbb{R}^3$ et $\mathbf{R}_1^0 \in \text{SO}(3)$, la matrice \mathbf{A}_1^0 appartient au groupe spécial euclidien de dimension 3:

$$\text{SE}(3) = \mathbb{R}^3 \times \text{SO}(3)$$

- La **pose** du repère 1 par rapport au repère 0 est définie par le couple:

$$(\mathbf{o}_1^0, \mathbf{R}_1^0)$$

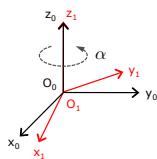
Nous avons 6 paramètres: 3 définissant la *translation* et 3 définissant la *rotation* (par ex. les angles de roulis-tangage-lacet)

9

Matrices homogènes

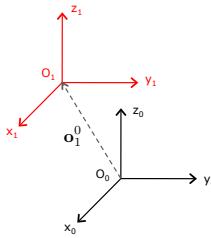
Exemple 1 (Rotation simple autour de l'axe z)

$$\mathbf{A}_1^0 = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_z(\alpha) & \mathbf{0}_{3 \times 1} \\ \mathbf{0}_{1 \times 3} & 1 \end{bmatrix}$$



Exemple 2 (Translation simple)

$$\mathbf{A}_1^0 = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_3 & \mathbf{o}_1^0 \\ \mathbf{0}_{1 \times 3} & 1 \end{bmatrix}$$



10

Matrices homogènes

- La transformation d'un vecteur du repère 1 au repère 0 est exprimée par une seule matrice qui contient la *matrice de rotation* du repère 1 par rapport au repère 0 et le *vecteur de translation* de l'origine du repère 0 à l'origine du repère 1:

$$\tilde{\mathbf{p}}^0 = \mathbf{A}_1^0 \tilde{\mathbf{p}}^1$$

- La **transformation inverse** entre le repère 0 et le repère 1 est décrite par la matrice \mathbf{A}_0^1 qui vérifie l'équation:

$$\tilde{\mathbf{p}}^1 = \mathbf{A}_0^1 \tilde{\mathbf{p}}^0 = (\mathbf{A}_1^0)^{-1} \tilde{\mathbf{p}}^0$$

- En utilisant les propriétés des matrices partitionnées*, on trouve que:

$$(\mathbf{A}_1^0)^{-1} = \begin{bmatrix} (\mathbf{R}_1^0)^T & -(\mathbf{R}_1^0)^T \mathbf{o}_1^0 \\ \mathbf{0}_{1 \times 3} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_0^1 & -\mathbf{R}_0^1 \mathbf{o}_1^0 \\ \mathbf{0}_{1 \times 3} & 1 \end{bmatrix}$$

*Remarque

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{mn \times mn}, \quad \mathbf{M}^{-1} = \begin{bmatrix} (\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{D}^{-1}\mathbf{C})^{-1} & -\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}(\mathbf{D} - \mathbf{C}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B})^{-1} \\ -\mathbf{D}^{-1}\mathbf{C}(\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{D}^{-1}\mathbf{C})^{-1} & (\mathbf{D} - \mathbf{C}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B})^{-1} \end{bmatrix}$$

$\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times m}, \mathbf{D} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ inversibles

11

Matrices homogènes

Attention: les matrices homogènes ne satisfont pas la propriété d'*orthogonalité*. En conséquence, en général:

$$\mathbf{A}^{-1} \neq \mathbf{A}^T$$

En conclusion:

- Une matrice homogène permet d'exprimer la transformation de coordonnées entre deux repères génériques *sous forme compacte*
- Si les repères ont la *même origine*, la matrice homogène se réduit à la *matrice de rotation* définie précédemment (voir l'Exemple 1)
- Comme pour les matrices de rotation, on peut *composer* une séquence de transformations de coordonnées grâce au produit matriciel:

$$\tilde{\mathbf{p}}^0 = \mathbf{A}_1^0 \mathbf{A}_2^1 \cdots \mathbf{A}_n^{n-1} \tilde{\mathbf{p}}^n$$

où \mathbf{A}_i^{i-1} est la matrice de transformation qui met en relation la description d'un point dans le repère i avec la description du même point dans le repère $i-1$

12