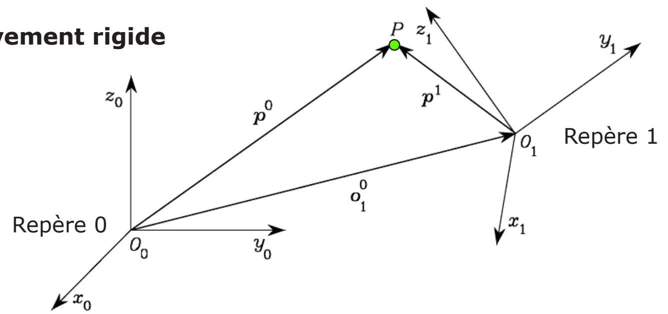
Cinématique

Mouvement rigide



- La transformation de coordonnées d'un point *P* entre les repères 0 et 1 est:

$$\mathbf{p}^0 = \mathbf{o}_1^0 + \mathbf{R}_1^0\,\mathbf{p}^1$$

- Si on calcule la dérivée par rapport au temps de cette expression, on trouve:

$$\dot{\mathbf{p}}^0 = \dot{\mathbf{o}}_1^0 + \mathbf{R}_1^0\,\dot{\mathbf{p}}^1 + \dot{\mathbf{R}}_1^0\,\mathbf{p}^1$$

Rotations élémentaires: sommaire

Diapo à imprimer pour le DS

$$\mathbf{R}_x(\gamma) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\gamma & -\sin\gamma \\ 0 & \sin\gamma & \cos\gamma \end{bmatrix}$$

Matrice de rotation autour de l'axe x d'un angle γ

$$\mathbf{R}_y(\beta) = \begin{bmatrix} \cos\beta & 0 & \sin\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\beta & 0 & \cos\beta \end{bmatrix}$$

Matrice de rotation autour de l'axe y d'un angle β

$$\mathbf{R}_z(\alpha) = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Matrice de rotation autour de l'axe z d'un angle α

Remarque:
Pour les rotations élémentaires, la propriété suivante est vérifiée:

$$\mathbf{R}_x(-\gamma) = \mathbf{R}_x^T(\gamma), \quad \mathbf{R}_y(-\beta) = \mathbf{R}_y^T(\beta), \quad \mathbf{R}_z(-\alpha) = \mathbf{R}_z^T(\alpha)$$

Composition de matrices de rotation

Considérons un repère initialement aligné avec $O\text{-}x_0\,y_0\,z_0$

La rotation définie par $\mathbf{R}_2^0$ peut être obtenue en **deux étapes**:

1. Tourne le repère avec $\mathbf{R}_1^0$ pour l'aligner avec $O\text{-}x_1 y_1 z_1$
2. Tourne le repère, maintenant aligné avec $O\text{-}x_1 y_1 z_1$, en utilisant $\mathbf{R}_2^1$ pour l'aligner avec $O\text{-}x_2\,y_2\,z_2$

Remarque [repère courant]:

- De façon générale, une rotation d'ensemble peut être exprimée comme une sequence de n *rotations partielles*
- Chaque rotation est définie par rapport à la **précédente**
- Le repère par rapport à lequel la rotation se produit est appelé **repère courant**
- La composition de rotations successives est obtenue par **multiplication à droite** des matrices de rotation, en suivant l'ordre donné des rotations:

$$\mathbf{R}_n^0 = \underrightarrow{\mathbf{R}_1^0\,\mathbf{R}_2^1}\cdots\mathbf{R}_{n-1}^{n-2}\,\mathbf{R}_n^{n-1}$$

Matrices homogènes

- Si on utilise cette représentation pour les vecteurs $\mathbf{p}^0$ et $\mathbf{p}^1$, on peut écrire la transformation de coordonnées en utilisant *une seule matrice* 4 × 4:

$$\mathbf{A}_1^0 = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_1^0 & \mathbf{o}_1^0 \\ \mathbf{0}_{1\times 3} & 1 \end{bmatrix}$$

Matrice de transformation homogène

- Puisque $\mathbf{o}_1^0 \in \mathbb{R}^3$ et $\mathbf{R}_1^0 \in \mathrm{SO}(3)$, la matrice $\mathbf{A}_1^0$ appartient au *groupe spécial euclidien* de dimension 3:

$$\mathrm{SE}(3) = \mathbb{R}^3 \times \mathrm{SO}(3)$$

- La **pose** du repère 1 par rapport au repère 0 est définie par le couple:

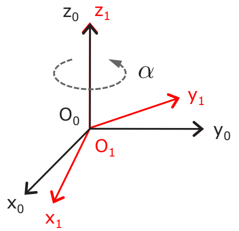
$$(\mathbf{o}_1^0,\, \mathbf{R}_1^0)$$

Nous avons *6 paramètres*: 3 définissant la *translation* et 3 définissant la *rotation* (par ex. les angles de roulis-tangage-lacet)

Matrices homogènes

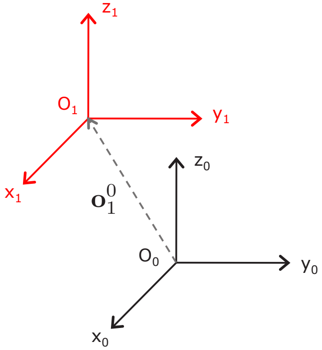
Exemple 1 (Rotation simple autour de l'axe z)

$$A_1^0 = \begin{bmatrix} R_z(\alpha) & 0_{3\times 1} \\ 0_{1\times 3} & 1 \end{bmatrix}$$



Exemple 2 (Translation simple)

$$A_1^0 = \begin{bmatrix} I_3 & o_1^0 \\ 0_{1\times 3} & 1 \end{bmatrix}$$



10

5

5. Exercices

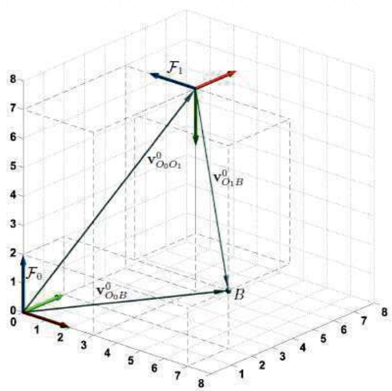
Prof. Olfa Boubaker - INSAT

16

6

8

Dans le cas des référentiels en trois dimensions, nous n'allons pas libeller leurs axes (< x >, < y >, < z >) mais plutôt dessiner les axes x en rouge, les axes y en vert, et les axes z en bleu, comme dans les logiciels de CAO.



Transformation de coordonnées dans l'espace.

$$v^1_{O_1B} = \begin{bmatrix} -3 \\ 5 \\ -4 \end{bmatrix},$$

alors que la position de l'origine du référentiel $\mathcal{F}_1$ par rapport au référentiel $\mathcal{F}_0$ est

$$v^0_{O_0O_1} = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 7 \end{bmatrix}.$$

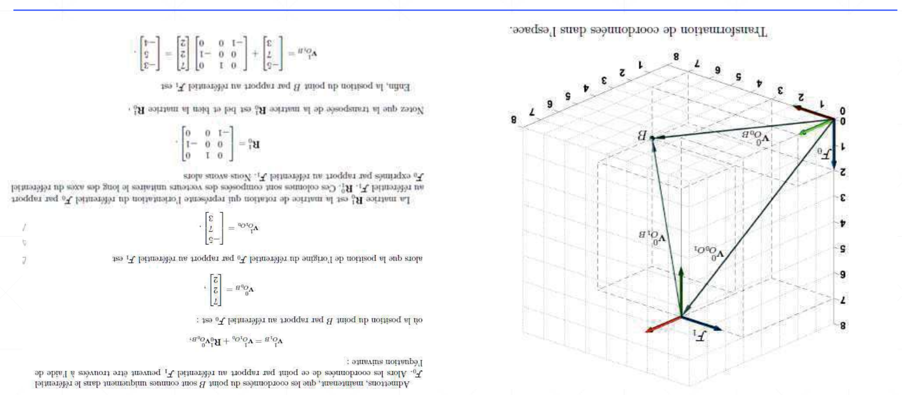
les axes des deux référentiels sont parallèles ou orthogonaux

$$R_1^0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ainsi, la position du point B par rapport au référentiel $\mathcal{F}_0$ est

$$v^0_{O_0B} = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 7 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 \\ 5 \\ -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

7



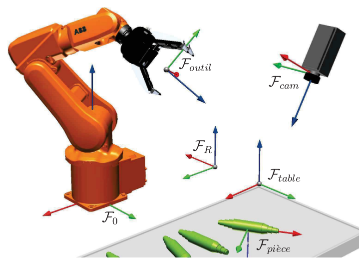


FIGURE 5.4 – Exemple de transformations de coordonnées.

5.4 Transformations de coordonnées successives

En robotique, nous avons souvent besoin de plusieurs référentiels : le référentiel de la base, le référentiel de l'atelier, le référentiel d'une caméra, le référentiel d'un objet, etc. Souvent, la pose d'un objet sera donnée par rapport à un référentiel, qui est défini par rapport à un autre référentiel, qui est défini par rapport au référentiel de la base du robot. La figure 5.4 illustre un exemple d'une telle situation. Le système de vision calcule la pose de la pièce, c'est-à-dire, de son référentiel $\mathcal{F}_{pièce}$) par rapport au référentiel de la caméra, $\mathcal{F}_{cam}$, et plus précisément le vecteur de position $\mathbf{v}^{cam}_{O_{cam}O_{pièce}}$ et la matrice de rotation $\mathbf{R}^{cam}_{pièce}$. Le référentiel de la caméra est défini par rapport au référentiel de l'atelier, $\mathcal{F}_R$, à l'aide du vecteur de position $\mathbf{v}^{R}_{O_RO_{cam}}$ et de la matrice de rotation $\mathbf{R}^{R}_{cam}$. Enfin, le référentiel de l'atelier est défini par rapport au référentiel de la base du robot, $\mathcal{F}_0$, à l'aide du vecteur de position $\mathbf{v}^{0}_{O_0O_R}$ et de la matrice de rotation $\mathbf{R}^0_R$.

Voici alors le calcul que le contrôleur du robot doit effectuer afin de pouvoir saisir la pièce :

$$\mathbf{v}^0_{O_0O_{pièce}} = \mathbf{v}^0_{O_0O_R} + \mathbf{R}^0_R\mathbf{v}^R_{O_RO_{pièce}} = \mathbf{v}^0_{O_0O_R} + \mathbf{R}^0_R\left(\mathbf{v}^R_{O_RO_{cam}} + \mathbf{R}^R_{cam}\mathbf{v}^{cam}_{O_{cam}O_{pièce}}\right), \tag{5.30}$$

pour la position de la pièce par rapport au référentiel de la base du robot et

$$\mathbf{R}^0_{pièce} = \mathbf{R}^0_R\mathbf{R}^R_{cam}\mathbf{R}^{cam}_{pièce}, \tag{5.31}$$

pour l'orientation de la pièce par rapport au référentiel de la base du robot.

Ce type de calcul n'est pas intuitif ni compact. Une méthode de calcul plus conviviale sera alors introduite dans le chapitre suivant.

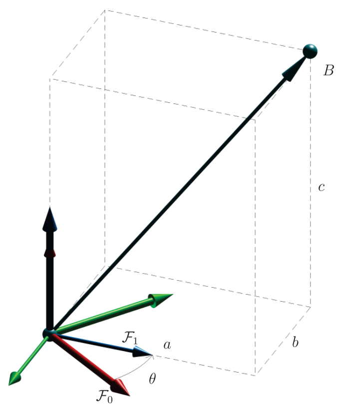


FIGURE 5.5 – Question 5.1.

5.5 Exercices

5.1. Répondre aux différentes questions en rapport avec la figure 5.5 :
   (a) Donner le vecteur de position $\mathbf{v}^0_{O_0O_1}$.
   (b) Donner la matrice de rotation $\mathbf{R}^0_1$.
   (c) Donner le vecteur de position $\mathbf{v}^1_{O_1B}$.
   (d) Donner le vecteur de position $\mathbf{v}^0_{O_0B}$.

5.2. Répondre aux différentes questions en rapport avec la figure 5.6 :
   (a) Donner le vecteur de position $\mathbf{v}^0_{O_0O_1}$.
   (b) Donner la matrice de rotation $\mathbf{R}^0_1$.

5.3. Répondre aux différentes questions en rapport avec la figure 5.7 :
   (a) Donner le vecteur de position $\mathbf{v}^0_{O_0O_1}$.
   (b) Donner la matrice de rotation $\mathbf{R}^0_1$.

5.4. Répondre aux différentes questions en rapport avec la figure 5.8 :
   (a) Donner le vecteur de position $\mathbf{v}^0_{O_0O_1}$.
   (b) Donner la matrice de rotation $\mathbf{R}^0_1$.

5.5. Répondre aux différentes questions en rapport avec la figure 5.9 :
   (a) Donner le vecteur de position $\mathbf{v}^0_{O_0O_1}$.
   (b) Donner la matrice de rotation $\mathbf{R}^0_1$.
   (c) Donner le vecteur de position $\mathbf{v}^1_{O_1B}$.
   (d) Donner le vecteur de position $\mathbf{v}^0_{O_0B}$.

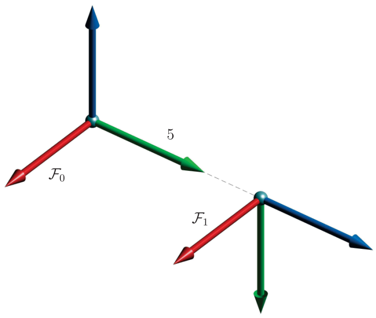


FIGURE 5.6 – Question 5.2.

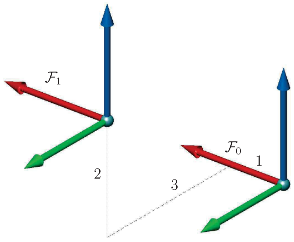


FIGURE 5.7 – Question 5.3.

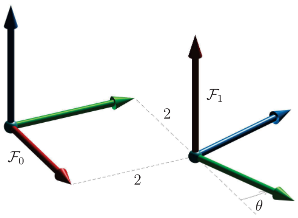


FIGURE 5.8 – Question 5.4.

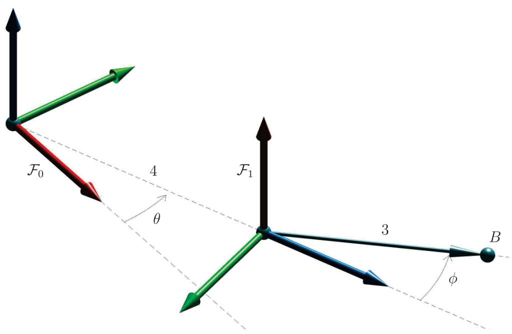


FIGURE 5.9 – Question 5.5.

5.6 Réponses aux exercices

5.1. $\mathbf{v}^0_{O_0O_1} = \begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$, $\mathbf{R}^0_1 = \begin{bmatrix}0 & \sin\theta & \cos\theta\\0 & -\cos\theta & \sin\theta\\1 & 0 & 0\end{bmatrix}$, $\mathbf{v}^1_{O_1B} = \begin{bmatrix}c\\-b\\a\end{bmatrix}$, $\mathbf{v}^0_{O_0B} = \begin{bmatrix}-b\sin\theta + a\cos\theta\\b\cos\theta + a\sin\theta\\c\end{bmatrix}$.

5.2. $\mathbf{v}^0_{O_0O_1} = \begin{bmatrix}0\\5\\0\end{bmatrix}$, $\mathbf{R}^0_1 = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 0 & 1\\0 & -1 & 0\end{bmatrix}$.

5.3. $\mathbf{v}^0_{O_0O_1} = \begin{bmatrix}1\\3\\2\end{bmatrix}$, $\mathbf{R}^0_1 = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}$.

5.4. $\mathbf{v}^0_{O_0O_1} = \begin{bmatrix}2\\2\\0\end{bmatrix}$, $\mathbf{R}^0_1 = \begin{bmatrix}0 & \cos\theta & -\sin\theta\\0 & \sin\theta & \cos\theta\\1 & 0 & 0\end{bmatrix}$.

5.5. $\mathbf{v}^0_{O_0O_1} = \begin{bmatrix}4\cos\theta\\4\sin\theta\\0\end{bmatrix}$, $\mathbf{R}^0_1 = \begin{bmatrix}0 & \sin\theta & \cos\theta\\0 & -\cos\theta & \sin\theta\\1 & 0 & 0\end{bmatrix}$, $\mathbf{v}^1_{O_1B} = \begin{bmatrix}0\\-3\sin\phi\\3\cos\phi\end{bmatrix}$,

$\mathbf{v}^0_{O_0B} = \begin{bmatrix}4\cos\theta - 3\sin\theta\sin\phi + 3\cos\theta\cos\phi\\4\sin\theta + 3\cos\theta\sin\phi + 3\sin\theta\cos\phi\\0\end{bmatrix}$.

6.4 Exercices

6.1. Calculer les éléments des différentes matrices homogènes demandées.

(a) Dans le cas des deux référentiels montrés à la figure 6.2, trouver les matrices homogènes de transformation de base $\mathbf{H}_{trans}$ et $\mathbf{H}_{rot,z}$, et calculer la matrice résultante $\mathbf{H}_1^0$.

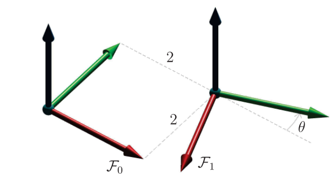


FIGURE 6.2 – Exercice 6.1(a).

(b) Dans le cas des deux référentiels montrés à la figure 6.3, trouver les matrices homogènes de transformation de base permettant de calculer $\mathbf{H}_1^0$.

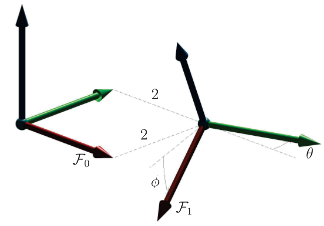


FIGURE 6.3 – Exercoce 6.1(b).

(c) Dans le cas des trois référentiels montrés à la figure 6.4, trouver les matrices suivantes :

i. $\mathbf{H}_1^0$;

ii. $\mathbf{H}_2^1$;

iii. $\mathbf{H}_2^0$, en fonction de $\mathbf{H}_1^0$ et $\mathbf{H}_2^1$.

(d) Dans le cas des trois référentiels montrés à la figure 6.5, trouver les matrices suivantes :

i. $\mathbf{H}_1^0$;

ii. $\mathbf{H}_2^0$;

iii. $\mathbf{H}_2^1$, en fonction de $\mathbf{H}_1^0$ et $\mathbf{H}_2^0$.

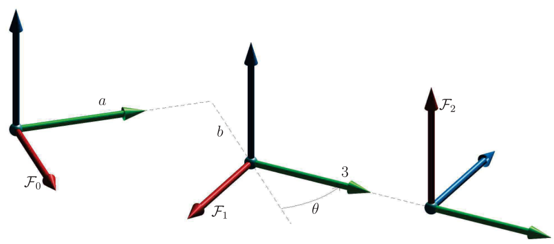


FIGURE 6.4 – Exercice 6.1(c).

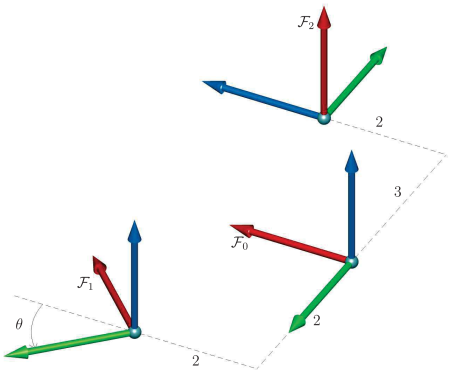


FIGURE 6.5 – Exercice 6.1(d).

6.2. Soit deux référentiels $\mathcal{F}_0$ et $\mathcal{F}_1$. À l'aide des matrices homogènes de transformation de base, faire les transformations demandées si la matrice $\mathbf{H}_1^0$ est :

$$\mathbf{H}_1^0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{6.37}$$

Vérifier vos résultats à l'aide d'un graphique. Écrire la routine RAPID qui modifie la matrice $\mathbf{H}_1^0$.

(a) Faire une rotation de 30° autour de l'axe z_0 du référentiel $\mathcal{F}_0$.

Solution :

$$\begin{aligned}
\mathbf{H}_2^0 &= \mathbf{H}_{rot,z}(30°)\mathbf{H}_1^0 \\
&= \begin{bmatrix} \cos 30° & -\sin 30° & 0 & 0 \\ \sin 30° & \cos 30° & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \cos 30° & -\sin 30° & 0 & 3\cos 30° - 5\sin 30° \\ \sin 30° & \cos 30° & 0 & 3\sin 30° + 5\cos 30° \\ 0 & 0 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0.866 & -0.500 & 0 & 0.098 \\ 0.500 & 0.866 & 0 & 5.830 \\ 0 & 0 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

La vérification graphique est montrée à la figure 6.6.

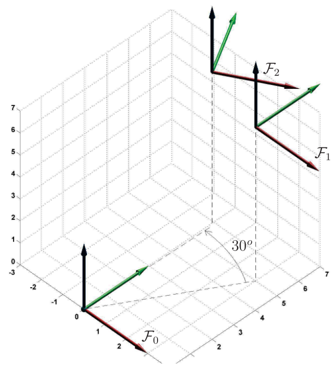


FIGURE 6.6 – Réponse à l'exercice 6.2(a).

Enfin voici le programme RAPID nécessaire pour faire le calcul de l'exercice 6.2(a), avec le résultat de l'exécution montré à la figure 6.7.

Exemple 6.6 – Code RAPID pour l'exercice 6.2(a)

```
MODULE Ex6_2a_solution

VAR pose V;
VAR pose Rot;
VAR pose reponse;
```



```
PROC main()
  ! le quaternion equivalent a aucune rotation est [1,0,0,0]
  H10:=[[3,5,7],[1,0,0,0]];
  Rot:=[[0,0,0],OrientZYX(30,0,0)];

  ! calcul
  reponse := PoseMult(Rot,H10);

  ! affiche le resultat
  TPErase;
  TPWrite "reponse ="\Pos:=reponse.trans;

ENDPROC
ENDMODULE
```

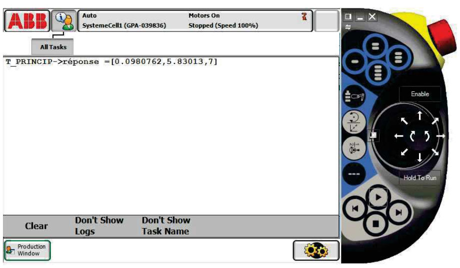


FIGURE 6.7 – Résultat de l'exécution du programme RAPID de l'exercice 6.2(a).

(b) Faire une rotation du référentiel $\mathcal{F}_1$ de −25° autour de l'axe x_0 du référentiel $\mathcal{F}_0$.

(c) Faire une rotation du référentiel $\mathcal{F}_1$ de 40° autour de son axe y_1.

(d) Faire une translation du référentiel $\mathcal{F}_1$ de 8 mm le long de l'axe y_0 du référentiel $\mathcal{F}_0$.

(e) Faire une rotation du référentiel $\mathcal{F}_1$ de 30° autour de l'axe x_0 du référentiel $\mathcal{F}_0$, suivi d'une translation de 3 mm le long de l'axe y_0 du référentiel $\mathcal{F}_0$.

(f) Faire une rotation du référentiel $\mathcal{F}_1$ de 30° autour de l'axe y_0 du référentiel $\mathcal{F}_0$, suivi d'une translation de 5 mm le long de l'axe z du nouveau référentiel.

(g) Faire une translation du référentiel $\mathcal{F}_1$ de −2 mm le long de l'axe x_0 du référentiel $\mathcal{F}_0$, suivi d'une rotation de 15° autour de l'axe y_2 du nouveau référentiel.

6.3. Soit la cellule robotique montrée à la figure 6.8. Poser les équations qui permetraient de trouver les matrices homogènes demandées.

(a) Poser l'équation pour $\mathbf{H}_{table}^{cam}$, en fonction de $\mathbf{H}_{table}^0$ et $\mathbf{H}_{cam}^0$.

Solution : $\mathbf{H}_{table}^{cam} = (\mathbf{H}_{cam}^0)^{-1}\mathbf{H}_{table}^0$.

(b) Poser l'équation pour $\mathbf{H}_{pièce}^{table}$, en fonction de $\mathbf{H}_{cam}^{table}$ et $\mathbf{H}_{pièce}^{cam}$.

(c) Poser l'équation pour $\mathbf{H}_{table}^R$, en fonction de $\mathbf{H}_{table}^0$ et $\mathbf{H}_0^R$.

(d) Poser l'équation pour $\mathbf{H}_{cam}^0$, en fonction de $\mathbf{H}_0^R$, $\mathbf{H}_{table}^R$ et $\mathbf{H}_{cam}^{table}$.

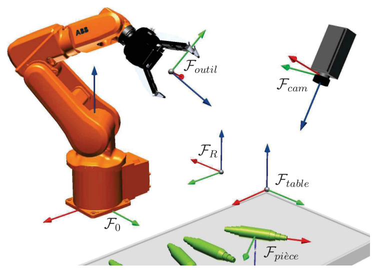


FIGURE 6.8 – Exercice 6.3.

6.4. Dessiner les référentiels (a) $\mathcal{F}_1$ et (b) $\mathcal{F}_2$ dont les poses par rapport au référentiel $\mathcal{F}_0$ sont définies par les deux matrices homogènes suivantes :

$$\mathbf{H}_1^0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 20 \\ 1 & 0 & 0 & -30 \\ 0 & -1 & 0 & 55 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \ \mathbf{H}_2^0 = \begin{bmatrix} 0.866 & 0 & -0.5 & 10 \\ 0.5 & 0 & 0.866 & -10 \\ 0 & -1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

6.5. Un référentiel $\mathcal{F}_b$ coïncide au départ avec un référentiel $\mathcal{F}_a$. On fait tourner $\mathcal{F}_b$ de 30° autour de l'axe z_a du référentiel $\mathcal{F}_a$, puis de 45° autour de l'axe x du nouveau référentiel.

(a) Donner la matrice homogène $\mathbf{H}_b^a$.

(b) Écrire les instructions RAPID pour réaliser ce calcul, si $\mathcal{F}_a$ est le référentiel de l'atelier et $\mathcal{F}_b$ correspond à un robtarget.

6.6. Un référentiel est obtenu par une série de transformations à partir d'un référentiel de départ. Suite à la liste des transformations suivantes, définir la matrice homogène décrivant la pose du référentiel.

(a) Rotation de 180° autour de l'axe y du référentiel de départ.

(b) Translation de $(7, 12, -4)$ par rapport au référentiel de départ.

(c) Rotation de 30° autour de l'axe x du nouveau référentiel.

Écrire le programme RAPID réalisant ce calcul, à l'aide de la fonction RelTool.

6.7. Le dessin de la figure 6.9 illustre les référentiels wfeuille et wtable ainsi que le référentiel de l'outil du robot, tpince. La feuille sur la table est de format A4 (210 mm × 297 mm). Dessiner l'outil sur la figure, à la suite des séquences de commandes suivantes :

(a) 1er robtarget :

```
P1:=[[297,210,0],OrientZYX(180,0,0),[0,-1,2,0],[9E+09,9E+09,9E+09,9E+09,9E+09,9E+09]];
MoveL P1, v100, fine, tpince\wobj:=wtable;
```

(b) 2e robtarget :

```
P2:=[[297,210,0],OrientZYX(180,0,0),[0,-1,2,0],[9E+09,9E+09,9E+09,9E+09,9E+09,9E+09]];
MoveL P2, v100, fine, tpince\wobj:=wfeuille;
```

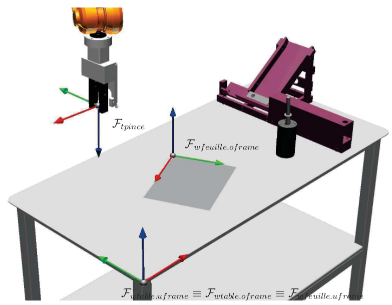



FIGURE 6.9 – Exercice 6.7.

(c) 3e robtarget :

```
P3:=[[297,210,0],OrientZYX(180,0,0),[0,-1,2,0],[9E+09,9E+09,9E+09,9E+09,9E+09,9E+09]];
MoveL RelTool(P3,0,0,-200 \Rz:=90), v100, fine, tpince\wobj:=wfeuille;
```

6.8. Soit la pose suivante de l'effecteur d'un robot ABB :

$$X = 500 \text{ mm} \quad Y = -300 \text{ mm} \quad Z = 850 \text{ mm}$$
$$\text{AngleX} = 180° \quad \text{AngleY} = 0° \quad \text{AngleZ} = 90°$$

On utilise le boîtier de commande et, selon le référentiel de l'outil, on effectue d'abord une rotation de 90° de l'outil autour de son axe x_{outil}, puis une translation $(150, 400, -100)$ selon le référentiel de l'outil. Trouver les valeurs X, Y, Z, AngleX, AngleY et AngleZ qui seront affichées à l'écran du FlexPendant après ces opérations.

6.9. La figure 6.10 montre le référentiel d'une buse de soudage et celui associé à la bride de montage, soit tool0. Calculer la matrice homogène $\mathbf{H}_{tbuse}^{tool0}$ sachant que le référentiel désiré a d'abord subi une rotation de $-30°$ autour de l'axe x_{tool0}, puis une rotation de 90° autour du nouvel axe z_1, et finalement une translation de 210 mm le long de l'axe z_{tool0} et de 120 mm le long de l'axe y_{tool0}.

6.10. Soit les quatre référentiels présentés à la figure 6.11. Donner les poses des référentiels $\mathcal{F}_a$, $\mathcal{F}_b$ et $\mathcal{F}_c$ par rapport à $\mathcal{F}_0$.

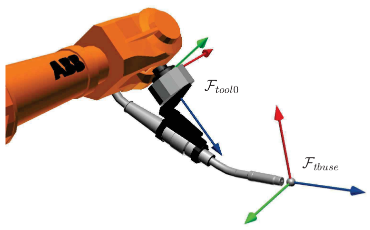


FIGURE 6.10 – Exercice 6.9.

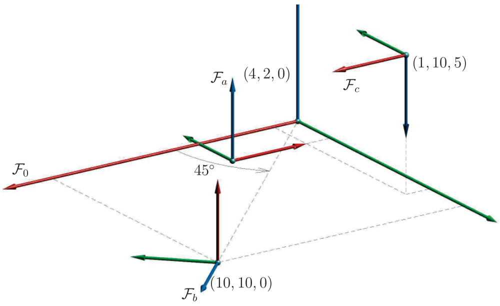


FIGURE 6.11 – Exercice 6.10.

6.5 Réponses aux exercices

6.1. (a)

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_1^0 &= \mathbf{H}_{trans}(2,2,0)\mathbf{H}_{rot,z}(\theta - 90°) \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(\theta-90°) & -\sin(\theta-90°) & 0 & 0 \\ \sin(\theta-90°) & \cos(\theta-90°) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin\theta & \cos\theta & 0 & 2 \\ -\cos\theta & \sin\theta & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_1^0 &= \mathbf{H}_{trans}(2,2,0)\mathbf{H}_{rot,z}(\theta - 90°)\mathbf{H}_{rot,y}(\phi) \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(\theta-90°) & -\sin(\theta-90°) & 0 & 0 \\ \sin(\theta-90°) & \cos(\theta-90°) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\phi & 0 & \sin\phi & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin\phi & 0 & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \sin\theta\cos\phi & \cos\theta & \sin\theta\sin\phi & 2 \\ -\cos\theta\cos\phi & \sin\theta & -\cos\theta\sin\phi & 2 \\ -\sin\phi & 0 & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

(c) i.

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_1^0 &= \mathbf{H}_{trans}(b,a,0)\mathbf{H}_{rot,z}(\theta - 90°) \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & b \\ 0 & 1 & 0 & a \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(\theta-90°) & -\sin(\theta-90°) & 0 & 0 \\ \sin(\theta-90°) & \cos(\theta-90°) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin\theta & \cos\theta & 0 & b \\ -\cos\theta & \sin\theta & 0 & a \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

ii.

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_2^1 &= \mathbf{H}_{trans}(0,3,0)\mathbf{H}_{rot,y}(-90°) \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(-90°) & 0 & \sin(-90°) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin(-90°) & 0 & \cos(-90°) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

iii.

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_2^0 &= \mathbf{H}_1^0\mathbf{H}_2^1 \\ &= \begin{bmatrix} \cos(\theta-90°) & -\sin(\theta-90°) & 0 & b \\ \sin(\theta-90°) & \cos(\theta-90°) & 0 & a \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & \cos\theta & -\sin\theta & b + 3\cos\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta & a + 3\sin\theta \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

(d) i.

$$\mathbf{H}_1^0 = \mathbf{H}_{trans}(2,2,0)\mathbf{H}_{rot,z}(\theta-90°)$$

$$= \begin{bmatrix}1&0&0&2\\0&1&0&2\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\cos(\theta-90°)&-\sin(\theta-90°)&0&0\\\sin(\theta-90°)&\cos(\theta-90°)&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\sin\theta&\cos\theta&0&2\\-\cos\theta&\sin\theta&0&2\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}$$

ii.

$$\mathbf{H}_2^0 = \mathbf{H}_{trans}(2,-3,0)\mathbf{H}_{rot,z}(180°)\mathbf{H}_{rot,y}(-90°)$$

$$= \begin{bmatrix}1&0&0&2\\0&1&0&-3\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\cos 180°&-\sin 180°&0&0\\\sin 180°&\cos 180°&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\cos(-90°)&0&\sin(-90°)&0\\0&1&0&0\\-\sin(-90°)&0&\cos(-90°)&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix}0&0&1&2\\0&-1&0&-3\\1&0&0&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}$$

iii.

$$\mathbf{H}_2^1 = \mathbf{H}_0^1\mathbf{H}_2^0 = (\mathbf{H}_1^0)^{-1}\mathbf{H}_2^0$$

$$= \begin{bmatrix}\sin\theta&-\cos\theta&0&-2\sin\theta+2\cos\theta\\\cos\theta&\sin\theta&0&-2\sin\theta-2\cos\theta\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0&1&2\\0&-1&0&-3\\1&0&0&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix}0&\cos\theta&\sin\theta&+5\cos\theta\\0&-\sin\theta&\cos\theta&-5\sin\theta\\1&0&0&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}$$

6.2. (a) Déjà solutionné

(b)

$$\mathbf{H}_2^0 = \mathbf{H}_{rot,x}(-25°)\mathbf{H}_1^0$$

$$= \begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&\cos(-25°)&-\sin(-25°)&0\\0&\sin(-25°)&\cos(-25°)&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0&3\\0&1&0&5\\0&0&1&7\\0&0&0&1\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix}1&0&0&3\\0&0.906&0.422&7.489\\0&-0.422&0.906&4.231\\0&0&0&1\end{bmatrix}$$

Exemple 6.7 – Code RAPID pour l'exercice 6.2(b)

```
MODULE Ex6_2b_solution

VAR pose V;
VAR pose Rot;
VAR pose reponse;

PROC main()
  H10:=[[3,5,7],[1,0,0,0]];
  Rot:=[[0,0,0],OrientZYX(0,0,-25)];

  ! calcul
  reponse := PoseMult(Rot,H10);

  ! affiche le resultat
  TPErase;
  TPWrite "reponse ="\Pos:=reponse.trans;

ENDPROC
ENDMODULE
```

(c)

$$\mathbf{H}_2^0 = \mathbf{H}_1^0\mathbf{H}_{rot,y}(40°)$$

$$= \begin{bmatrix}1&0&0&3\\0&1&0&5\\0&0&1&7\\0&0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\cos 40°&0&\sin 40°&0\\0&1&0&0\\-\sin 40°&0&\cos 40°&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix}\cos 40°&0&\sin 40°&3\\0&1&0&5\\-\sin 40°&0&\cos 40°&7\\0&0&0&1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0.766&0&0.642&3\\0&1&0&5\\-0.642&0&0.766&7\\0&0&0&1\end{bmatrix}$$

Exemple 6.8 – Code RAPID pour l'exercice 6.2(c)

```
MODULE Ex6_2c_solution

VAR pose V;
VAR pose Rot;
VAR pose reponse;

PROC main()
  H10:=[[3,5,7],[1,0,0,0]];
  Rot:=[[0,0,0],OrientZYX(0,40,0)];

  ! calcul
  reponse := PoseMult(H10,Rot);

  ! affiche le resultat
  TPErase;
  TPWrite "reponse ="\Pos:=reponse.trans;

ENDPROC
ENDMODULE
```

(d)

$$\mathbf{H}_2^0 = \mathbf{H}_{trans}(0,8,0)\mathbf{H}_1^0 = \begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&8\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0&3\\0&1&0&5\\0&0&1&7\\0&0&0&1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1&0&0&3\\0&1&0&13\\0&0&1&7\\0&0&0&1\end{bmatrix}$$

Exemple 6.9 – Code RAPID pour l'exercice 6.2(d)

```
MODULE Ex6_2d_solution

VAR pose V;
VAR pose T;
VAR pose reponse;

PROC main()
  H10:=[[3,5,7],[1,0,0,0]];
  T:=[[0,8,0],[1,0,0,0]];

  ! calcul
  reponse := PoseMult(T,H10);

  ! affiche le resultat
  TPErase;
  TPWrite "reponse ="\Pos:=reponse.trans;

ENDPROC
ENDMODULE
```

(e)

$$\mathbf{H}_3^0 = \mathbf{H}_{trans}(0,3,0)\mathbf{H}_{rot,x}(30°)\mathbf{H}_1^0$$

$$= \begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&3\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&\cos 30°&-\sin 30°&0\\0&\sin 30°&\cos 30°&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0&3\\0&1&0&5\\0&0&1&7\\0&0&0&1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1&0&0&3\\0&0.866&-0.5&3.83\\0&0.5&0.866&8.562\\0&0&0&1\end{bmatrix}$$

Exemple 6.10 – Code RAPID pour l'exercice 6.2(e)

```
MODULE Ex6_2e_solution

VAR pose V;
VAR pose T;
VAR pose Rot;
VAR pose reponse;

PROC main()
  H10:=[[3,5,7],[1,0,0,0]];
  T:=[[0,3,0],[1,0,0,0]];
  Rot:=[[0,0,0],OrientZYX(0,0,30)];

  ! calcul
  reponse := PoseMult(T,PoseMult(Rot,H10));

  ! affiche le resultat
  TPErase;
  TPWrite "reponse ="\Pos:=reponse.trans;

ENDPROC
ENDMODULE
```

(f)

$$\mathbf{H}_1^0 = \mathbf{H}_{rot,y}(30°)\mathbf{H}_1^0\mathbf{H}_{trans}(0,0,5)$$

$$= \begin{bmatrix}\cos 30°&0&\sin 30°&0\\0&1&0&0\\-\sin 30°&0&\cos 30°&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0&3\\0&1&0&5\\0&0&1&7\\0&0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&5\\0&0&0&1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0.866&0&0.5&8.598\\0&1&0&5\\-0.5&0&0.866&8.892\\0&0&0&1\end{bmatrix}$$

Exemple 6.11 – Code RAPID pour l'exercice 6.2(f)

```
MODULE Ex6_2f_solution

VAR pose V;
VAR pose T;
VAR pose Rot;
VAR pose reponse;

PROC main()
  H10:=[[3,5,7],[1,0,0,0]];
  T:=[[0,0,5],[1,0,0,0]];
  Rot:=[[0,0,0],OrientZYX(0,30,0)];

  ! calcul
  reponse := PoseMult(PoseMult(Rot,H10),T);

  ! affiche le resultat
  TPErase;
  TPWrite "reponse ="\Pos:=reponse.trans;

ENDPROC
ENDMODULE
```

(g)

$$\mathbf{H}_1^0 = \mathbf{H}_{trans}(-2,0,0)\mathbf{H}_1^0\mathbf{H}_{rot,y}(15°)$$

$$= \begin{bmatrix}1&0&0&-2\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0&3\\0&1&0&5\\0&0&1&7\\0&0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\cos 15°&0&\sin 15°&0\\0&1&0&0\\-\sin 15°&0&\cos 15°&0\\0&0&0&1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0.965&0&0.258&1\\0&1&0&5\\-0.258&0&0.965&7\\0&0&0&1\end{bmatrix}$$

Exemple 6.12 – Code RAPID pour l'exercice 6.2(f)

```
MODULE Ex6_2f_solution

VAR pose V;
VAR pose T;
VAR pose Rot;
VAR pose reponse;

PROC main()
  H10:=[[3,5,7],[1,0,0,0]];
  T:=[[-2,0,0],[1,0,0,0]];
  Rot:=[[0,0,0],OrientZYX(0,15,0)];

  ! calcul
  reponse := PoseMult(PoseMult(T,H10),Rot);

  ! affiche le resultat
  TPErase;
  TPWrite "reponse ="\Pos:=reponse.trans;

ENDPROC
ENDMODULE
```

6.3. (a) Déjà solutionné

(b) $\mathbf{H}_{pièce}^{table} = \mathbf{H}_{cam}^{table}\mathbf{H}_{pièce}^{cam}$

(c) $\mathbf{H}_{table}^{R} = \mathbf{H}_0^R\mathbf{H}_{table}^0$

(d) $\mathbf{H}_{cam}^0 = (\mathbf{H}_0^R)^{-1}\mathbf{H}_{table}^R\mathbf{H}_{cam}^{table}$

6.4. Les réponses sont données aux figures 6.12 et 6.13.

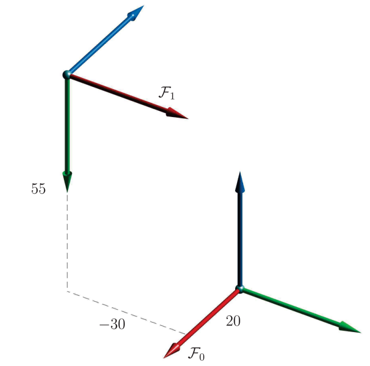


FIGURE 6.12 – Réponse à l'exercice 6.4(a).

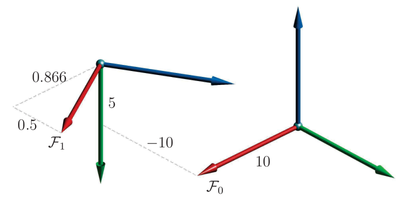


FIGURE 6.13 – Réponse à l'exercice 6.4(b).

6.5. (a)

$$\begin{aligned}\mathbf{H}_b^a &= \mathbf{H}_{rot,z}(30°)\mathbf{H}_{rot,x}(45°)\\ &= \begin{bmatrix}\cos 30° & -\sin 30° & 0 & 0\\ \sin 30° & \cos 30° & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & \cos 45° & -\sin 45° & 0\\ 0 & \sin 45° & \cos 45° & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0.866 & -0.3535 & 0.3535 & 0\\ 0.5 & 0.612 & -0.612 & 0\\ 0 & 0.707 & 0.707 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\end{aligned}$$

(b) Le code RAPID est donnée dans l'exemple 6.13.

Exemple 6.13 – Code RAPID pour l'exercice 6.5

```
MODULE Ex6_5_solution

VAR robtarget Fb;
```



```
PROC main()
    Fb.trans:=[0,0,0];
    Fb.rot:=OrientZYX(30,0,45);
    ...
ENDPROC
ENDMODULE
```

6.6.

$$\begin{aligned}\mathbf{H} &= \mathbf{H}_{trans}(7,12,-4)\mathbf{H}_{rot,y}(180°)\mathbf{H}_{rot,x}(30°)\\ &= \begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 7\\ 0 & 1 & 0 & 12\\ 0 & 0 & 1 & -4\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\cos 180° & 0 & \sin 180° & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ -\sin 180° & 0 & \cos 180° & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & \cos 30° & \sin 30° & 0\\ 0 & \sin 30° & \cos 30° & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\\ &= \begin{bmatrix}-1 & 0 & 0 & 7\\ 0 & .866 & -.5 & 12\\ 0 & -.5 & .866 & -4\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\end{aligned}$$

Exemple 6.14 – Code RAPID pour l'exercice 6.6

```
MODULE Ex6_6_solution

VAR robtarget FDepart;
VAR robtarget FResultat;

PROC main()
    FResultat := RelTool(FDepart,7,12,-4 \Ry:=180);
    FResultat := RelTool(FResultat,0,0,0 \Rx:=30);
    ...
ENDPROC
ENDMODULE
```

6.7. Désolé, le dessin-réponse n'est pas disponible pour cet exercice.

6.8.

$$\begin{aligned}\mathbf{H}_{final}^{?} &= \mathbf{H}_{début}^{?}\mathbf{H}_{rot,x}(90°)\mathbf{H}_{trans}(150,400,-100)\\ &= \begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & 500\\ 1 & 0 & 0 & -300\\ 0 & 0 & -1 & 850\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & \cos 90° & -\sin 90° & 0\\ 0 & \sin 90° & \cos 90° & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 150\\ 0 & 1 & 0 & 400\\ 0 & 0 & 1 & -100\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\\ &= \begin{bmatrix}0 & 0 & -1 & 600\\ 1 & 0 & 0 & -150\\ 0 & -1 & 0 & 450\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\end{aligned}$$

$$\begin{array}{lll}\text{X} = 600 \text{ mm} & \text{Y} = -150 \text{ mm} & \text{Z} = 450 \text{ mm}\\ \text{AngleX} = -90° & \text{AngleY} = 0° & \text{AngleZ} = 90°\end{array}$$

6.9.

$$\begin{aligned}\mathbf{H}_{tbase}^{tool0} &= \begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 120\\ 0 & 0 & 1 & 210\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & \cos(-30°) & -\sin(-30°) & 0\\ 0 & \sin(-30°) & \cos(-30°) & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\cos 90° & -\sin 90° & 0 & 0\\ \sin 90° & \cos 90° & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\\ &= \begin{bmatrix}0 & -1 & 0 & 0\\ \cos(-30°) & 0 & -\sin(-30°) & 120\\ \sin(-30°) & 0 & \cos(-30°) & 210\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\end{aligned}$$

6.10.

$$\mathbf{H}_a^0 = \begin{bmatrix}-1 & 0 & 0 & 4\\ 0 & -1 & 0 & 2\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{H}_b^0 = \begin{bmatrix}0 & \sin 45° & \cos 45° & 10\\ 0 & -\cos 45° & \sin 45° & 10\\ 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{H}_c^0 = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 1\\ 0 & -1 & 0 & 10\\ 0 & 0 & -1 & 5\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$