

BIOMEDICAL ENGINEERING

Rapport de Simulation de l'écoulement dans un arbre bronchique

Présenté par :

- BELAYD Hajar
- BELMOUDDEN Manar
- EL HAIL Nouhaila
- CHAFIK Mohamed Amine
- EZZOUBDAOUI Soulaymane
- FOFANA Ladj Idrissa

Encadré par:
Mr. Marcel Filoche

Table des matières

Remerciements.....	3
Introduction.....	3
Cadre générale du projet.....	3
Objectif et problématique global	5
Formulation de Newton Raphson	5
Modélisation de la variation de pression pour un tube.....	6
Problématique	6
Objectifs	6
Hypothèses et équations	6
Evolution de la pression dans un arbre de poumon	10
Hypothèses et étude théorique	10
Résultats et interprétations	11
Cas souple.....	11
Cas rigide	12
Conclusion	12
Annexes	12

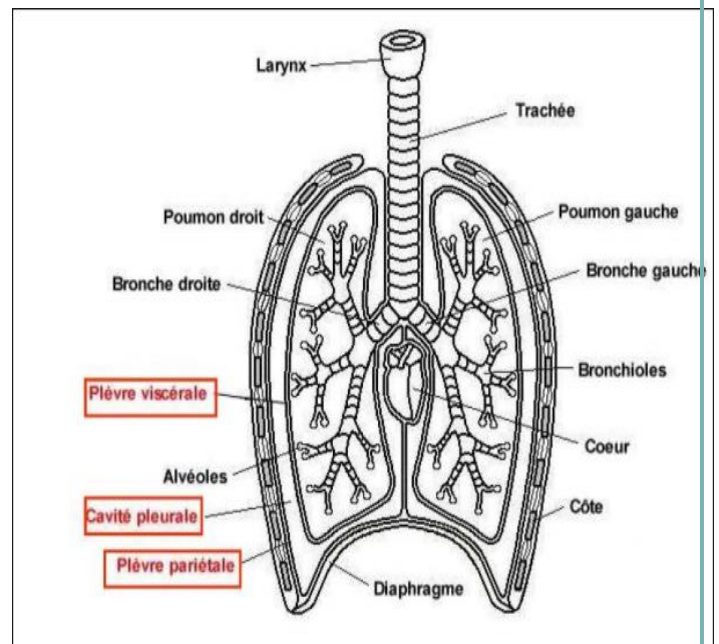
REMERCIEMENTS

Nous saisissons cette occasion pour témoigner toute notre reconnaissance et pour adresser nos profonds remerciements à notre professeur encadrant Mr. Marcel FILOCHE pour sa disponibilité, son implication et surtout ses judicieux conseils tout au long de la période de formation qui nous a permis de consolider nos connaissances et d'alimenter notre réflexion en matière de Biomedical Engineering.

Nous désirons aussi remercier le directeur de l'EMINES School of Industrial Management de l'Université Mohammed VI Polytechnique Mr. Nicola CHEIMANOFF, ainsi que le directeur d'enseignement Mr. Frédéric FONTANE qui nous fournissent toujours les outils nécessaires à la réussite de nos études et qui nous ont accordé l'opportunité d'avoir une telle formation.

INTRODUCTION

La **respiration** est le phénomène qui concourt à assurer les échanges gazeux entre le milieu ambiant et la cellule vivante. En d'autres termes c'est le phénomène qui permet l'approvisionnement de l'organisme en oxygène pour répondre aux besoins des organes qui en consomment pour leur activité. Le système respiratoire humain est composé des voies respiratoires, qui permettent les échanges d'air entre l'atmosphère et les poumons (fosses nasales, larynx, pharynx) des voies intra pulmonaires (bronches et bronchioles) qui amènent l'air des voies respiratoires jusqu'aux alvéoles pulmonaires, des poumons, qui renferment chacun environ 350 millions d'alvéoles pulmonaires, et de la plèvre, représentant un double feuillet séreux qui sécrète et contient le liquide pleural, et qui relie les poumons à la cage thoracique tout en les maintenant ouverts.



CADRE GENERALE DU PROJET :

La **cage thoracique** joue un rôle primordial dans le processus de la respiration, un phénomène qui associe deux fonctions qui s'altèrent formant le cycle respiratoire. Ces deux fonctions sont l'**inspiration** et l'**expiration**.

L'**inspiration** est l'acte par lequel notre **cage thoracique** se dilate, entraînant une expansion des poumons et des **alvéoles pulmonaires**. Pour permettre une expansion pulmonaire, il faut donc que la cage thoracique augmente son volume. Cela se fait grâce à la **contraction** de certains muscles, appelés les muscles inspireurs. Concernant l'**expiration** Dès que les **muscles inspireurs** ont achevé leur contraction, ils reviennent à leur position primitive en raison de leur élasticité ; les côtes s'abaissent en avant et le diaphragme reprend sa voussure normale. Les poumons se trouvent ainsi légèrement pressés, surtout en avant et par-dessous, et reviennent à leur volume ordinaire de repos.

On vient d'expliquer que les deux phases du cycle respiratoire sont fondamentalement différentes. Pendant que l'**inspiration** est due à la **contraction** des **muscles inspireurs**, l'**expiration**, lorsqu'elle n'est pas forcée, n'est due qu'à l'arrêt de la contraction de ces muscles alors que lorsqu'elle est forcée elle est dû à la contraction des muscles abdominaux. Ce changement de volume mène au phénomène moteur de la respiration qui est la **ventilation pulmonaire**.

Pour mieux expliquer, le **système arbre bronchique et thorax** peut être considéré comme un système clos grâce à la plèvre et aux structures squelettiques et musculaires émergées dans une température constante c'est-à-dire, et d'après la **loi de Biot et Mariotte** ($PV = \text{cte}$), toute augmentation de volume va générer un gradient de pression entre celle **alvéolaire** et celle **atmosphérique** et puisque les fluides se déplacent des zones de grande pression vers les zones de basse pression alors les phases du cycle respiratoire correspondent aux cas de figure suivant :

Inspiration : **Palvéoles** < **Patmosphérique**

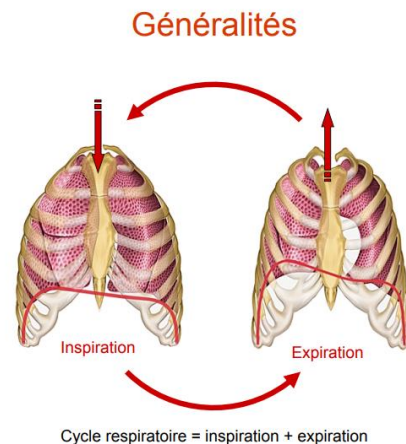
→ débit d'air vers l'intérieur du poumon

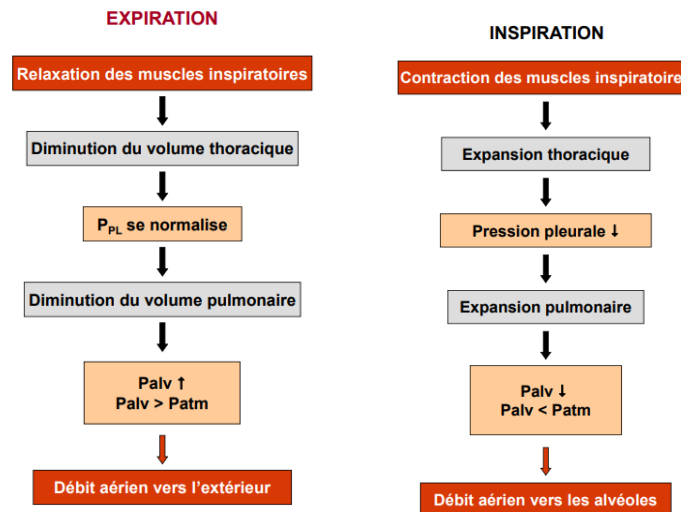
Expiration : **Palvéoles** > **Patmosphérique**

→ débit d'air vers l'extérieur du poumon

Repos : **Palvéoles** = **Patmosphérique**

→ débit d'air vers l'extérieur du poumon





OBJECTIF ET PROBLEMATIQUE GLOBALE:

La médecine aujourd'hui tourne vers la physique et plus précisément la mécanique des fluides, fait appel à des simulations numériques et à des calculs mathématiques pour étudier le fonctionnement de l'air dans l'arbre bronchique pulmonaire.

Dans la même perception notre projet consiste à étudier l'écoulement de l'air dans l'arbre bronchique pulmonaire et au niveau de plusieurs générations pendant une expiration forcée. Pour ce faire on a procédé de la manière suivante, on a divisé le travail en deux sous-projets principaux :

Le premier s'intéresse à la résolution de l'équation Navier-stokes, et Simuler numériquement l'écoulement du fluide au niveau d'un tube souple dans un premier temps et rigide dans un autre

Le deuxième s'occupe de trouver le flux sortant des poumons en développant l'équation de Navier-stokes pour finalement présenter une carte flux-pressure et une courbe débit volume.

FORMULATION DE LA METHODE DE NEWTON RAPHSON

Considérons un système d'équations s'écrivant $\mathbf{F}(\mathbf{X}) = \mathbf{0}$ ou encore, de façon développée.

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2, \dots, x_N) = 0 \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_N) = 0 \\ \vdots \\ f_N(x_1, x_2, \dots, x_N) = 0 \end{cases}$$

La généralisation naturelle de la formule de Newton unidimensionnelle

$$x_{n+1} = x_n - (f'(x_n))^{-1} f(x_n)$$

fait intervenir la matrice Jacobienne de F :

$$F'(X_n) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_N}{\partial x_1} & \frac{\partial f_N}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_N}{\partial x_N} \end{pmatrix}$$

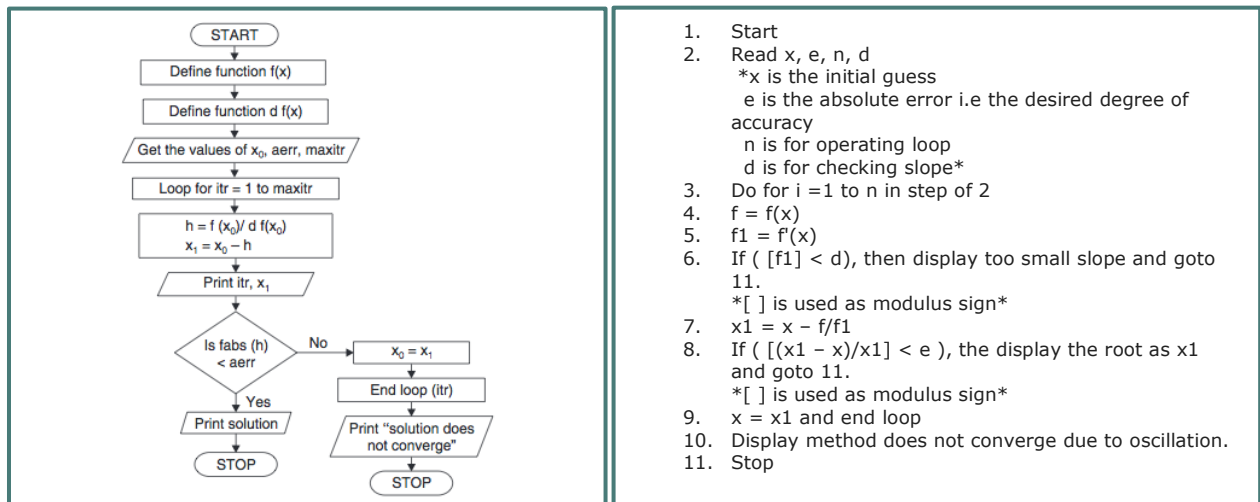
Toutes les dérivées partielles étant évaluées au point X_n . La méthode de Newton Raphson s'écrit donc formellement

$$X_{n+1} = X_n - (F'(X_n))^{-1} F(X_n)$$

Le second membre de cette équation est parfaitement défini car on effectue le produit d'une matrice $N \times N$ par un vecteur de \mathbb{R}^N . Dans la pratique, la méthode de Newton Raphson nous livre un procédé itératif qui nous rapproche à chaque répétition de la solution.

Algorithme de la méthode Newton Raphson :

Pour mieux comprendre cette méthode, on trouve l'algorithme ci-dessous :



MODELISATION DE LA VARIATION DE LA PRESSION POUR UN TUBE :

1. Problématique :

Notre projet consiste à simuler numériquement l'écoulement du fluide au niveau d'un tube souple dans un premier temps et rigide dans un autre. Pour ce faire, nous devons résoudre l'équation différentielle de l'écoulement sur la longueur de ce tube.

2. Objectifs :

- Obtenir l'équation différentielle à partir de Navier Stokes pour le tube rigide et souple.
- Simuler numériquement l'écoulement au niveau du tube en résolvant l'équation différentielle de l'écoulement sur $[0, L]$.

3. Cas 1 : Tube souple :

On se situe dans un système où on a :

- Ecoulement stationnaire, incompressible, quasi 1D.
- Forces volumiques négligeable.

Pour obtenir l'équation différentielle du tube, on part des équations de Navier Stokes et la conservation de la masse :

$$\checkmark \quad \rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \cdot \nabla u \right) = -\nabla p + \mu \nabla^2 u$$

$$\checkmark \quad \text{div} \vec{u} = 0$$

Après le développement de calcul, on obtient l'équation suivante :

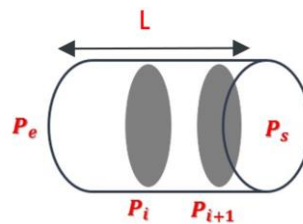
$$\left(1 - \frac{u(z)^2}{c^2} \right) \frac{dP}{dz} = f(z) = -\frac{128\mu}{\pi} \frac{\phi}{D(z)^4}$$

On remplace $u(z)$ par son expression : $u(z) = \frac{\phi}{\left(\frac{\pi}{4} D(z)^2\right)}$

On en déduit :

$$\frac{d \left(P + \frac{1}{2} \rho \frac{16}{\pi} \frac{\phi^4}{D(z)^4} \right)}{dz} = -\frac{128\mu}{\pi} \frac{\phi}{D(z)^4}$$

Pour résoudre cette équation, on utilise la méthode de discrétisation qui constitue en général une étape préliminaire à la résolution numérique d'un problème ou sa programmation sur machine.



$$P_{i+1} - P_i + \frac{8\rho\phi^2}{\pi^2} \left(\frac{1}{D_{i+1}^4} - \frac{1}{D_i^4} \right) = -\frac{128}{\pi} \mu \frac{\phi}{D_i^4}$$

On fait intervenir la loi de tube :

$$D_i = \frac{D_{max}}{1 + \alpha e^{-\frac{P_i}{P^*}}}$$

On aura par la suite : $P_{i+1} - P_i + \frac{8\rho\phi^2}{\pi^2 D_{max}^4} \left(\left(1 + \alpha e^{-\frac{P_{i+1}}{P^*}}\right)^4 - \left(1 + \alpha e^{-\frac{P_i}{P^*}}\right)^4 \right) = \frac{-128}{\pi D_{max}^4} \mu \phi \left(1 + \alpha e^{-\frac{P_i}{P^*}}\right)^4$

On fait passer tous les termes dans le même coté :

$$F_i = P_{i+1} - P_i + \frac{8\rho\phi^2}{\pi^2 D_{max}^4} \left(\left(1 + \alpha e^{-\frac{P_{i+1}}{P^*}}\right)^4 - \left(1 + \alpha e^{-\frac{P_i}{P^*}}\right)^4 \right) + \frac{128}{\pi D_{max}^4} \mu \phi \left(1 + \alpha e^{-\frac{P_i}{P^*}}\right)^4 = 0$$

Finalement, on trouve le système suivant :

$$F_i = (P_i, P_{i+1}, \phi) = 0$$

Après avoir obtenir l'équation différentielle, on passe maintenant à l'étape de résolution. Pour ce faire, on recourt à la méthode de Newton Raphson.

Pour utiliser cette méthode, on a besoin de calculer la jacobienne de $F_i = (P_i, P_{i+1}, \phi)$

Dérivation de F_i :

On dérive F_i par rapport aux trois variables : P_i, P_{i+1}, ϕ :

$$dF_i = - \left[1 + \frac{4}{P^*} \left(\frac{128\mu}{\pi D_{max}^4} \phi - \frac{8\rho\phi^2}{\pi^2 D_{max}^4} \right) \left(1 + \alpha e^{-\frac{P_i}{P^*}} \right)^3 \right] dP_i + \left[1 - \frac{32}{\pi^2} \frac{\rho}{P^* D_{max}^4} \phi^2 \left(1 + \alpha e^{-\frac{P_{i+1}}{P^*}} \right)^3 \right] dP_{i+1} + \frac{16\rho}{\pi^2 D_{max}^4} \left[\left(1 + \alpha e^{-\frac{P_{i+1}}{P^*}} \right)^4 + \left(\frac{128\mu}{\pi D_{max}^4} - \frac{16\rho}{\pi^2 D_{max}^4} \right) \left(1 + \alpha e^{-\frac{P_i}{P^*}} \right)^4 \right] d\phi$$

Pour simplifier le résultat obtenu, on peut écrire l'équation sous la forme:

$$dF_i = A_i dP_i + B_i dP_{i+1} + C_i d\phi$$

Avec :

$$A_i = - \left[1 + \frac{4}{P^*} \left(\frac{128\mu}{\pi D_{max}^4} \phi - \frac{8\rho\phi^2}{\pi^2 D_{max}^4} \right) \left(1 + \alpha e^{-\frac{P_i}{P^*}} \right)^3 \right]$$

$$B_i = \left[1 - \frac{32}{\pi^2} \frac{\rho}{P^* D_{max}^4} \phi^2 \left(1 + \alpha e^{-\frac{P_{i+1}}{P^*}} \right)^3 \right]$$

$$C_i = \frac{16\rho}{\pi^2 D_{max}^4} \left[\left(1 + \alpha e^{-\frac{P_{i+1}}{P^*}} \right)^4 + \left(\frac{128\mu}{\pi D_{max}^4} - \frac{16\rho}{\pi^2 D_{max}^4} \right) \left(1 + \alpha e^{-\frac{P_i}{P^*}} \right)^4 \right]$$

Finalement, l'expression de la jacobienne est la suivante

$$\left(\frac{dF_i}{dP_j} \right)_{1 \leq i, j \leq n} = \begin{bmatrix} B_1 & 0 & \dots & 0 & C_1 \\ A_1 & B_2 & & 0 & C_2 \\ \vdots & A_2 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & & & 0 & B_{n-1} & C_{n-1} \\ 0 & \dots & \dots & \dots & A_{n-1} & C_n \end{bmatrix}$$

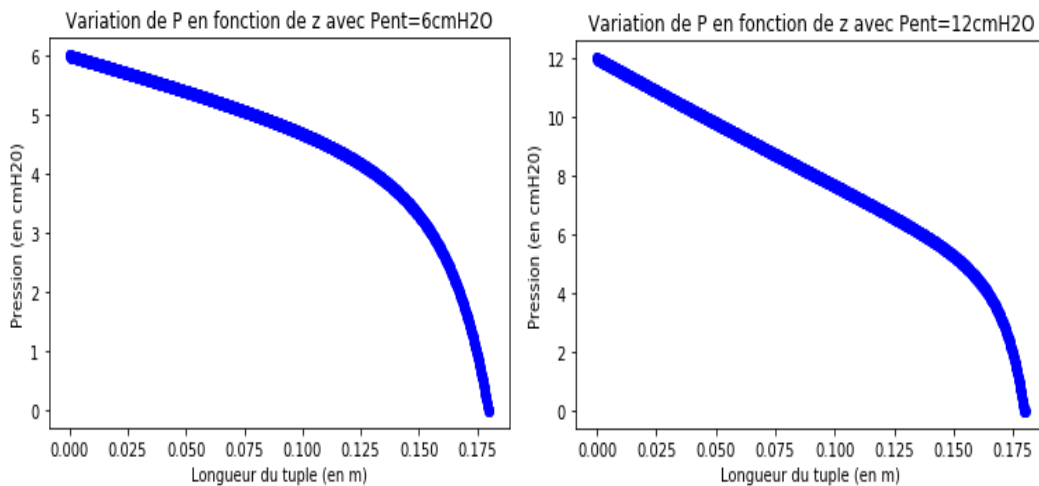
Résultats et interprétations :

On introduit alors la Jacobienne dans notre programme en déclarant les constantes (voir Annexe).

Ce programme permet d'afficher les courbes de pression en fonction de z en se basant sur la méthode de Newton Raphson expliquée précédemment.

Données numériques :

- $P_e = 12 \text{ cmH}_2\text{O}$ (ou de l'ordre de 10 cmH_2)
- $P_s = 0$



- Flux trouvé : $\phi = 1 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3/\text{s}$
- Dans le cas du tube souple, on observe une courbe décroissante de façon générale présentant une concavité pour P_e de l'ordre de P_{ref} .

4. Cas 2 : Tube rigide :

Dans ce cas, le diamètre ne dépend pas de la pression, donc le α est nul.

On trouve donc l'équation suivante :

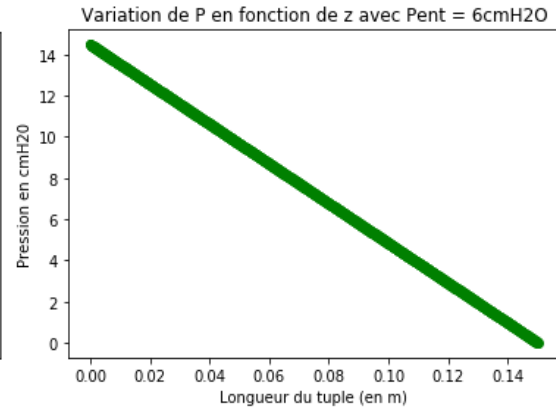
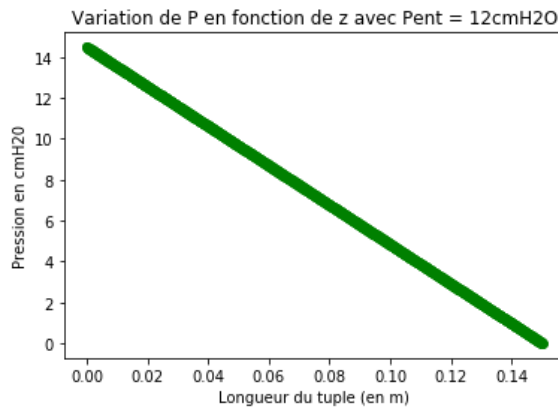
$$F_i = P_{i+1} - P_i + \frac{128}{\pi D_{max}^4} \mu \phi$$

De même dans ce cas, on trace la courbe de pression en fonction de z pour

Résultats et interprétations:

Données numériques :

- $P_e = 6 \text{ cmH}_2\text{O}$ (ou de l'ordre de deH_2)
- $P_s = 0$



- Flux affiché sur le programme : $\dot{Q} = 5.0036 \times 10^{-4} \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-1}$
- Quant au tube rigide, on observe une droite décroissante dont la pente est quasi-constante quelles que soit les valeurs de pressions choisies à l'entrée ou comme référence, montrant ainsi sa stabilité lors d'un écoulement quelconque donné.

EVOLUTION DE LA PRESSION DANS UN ARBRE DE POUMON

1. Hypothèses et étude théorique :

1^{er} cas :

- Arbre rigide symétrique.
- Ecoulement stationnaire, incompressible, quasi 1D.
- Poids négligeable.

Dans le cas rigide on travaille avec un système linéaire car le diamètre ne dépend pas de la pression :

Loi de poiseuille

$$\Delta p = \dot{Q} \times R$$

Résistance hydraulique

$$R = \frac{128\eta L}{\pi D^4}$$

$$\left. \begin{array}{l} D_{i+1} = h D_i \\ L_{i+1} = h L_i \end{array} \right\} \begin{array}{l} h \text{ est le facteur d'homothétie} \\ \text{de Weibel} \end{array}$$

$$R_{i+1} = \frac{1}{h^3} R_i \quad \text{Et} \quad \dot{Q}_{i+1} = \frac{1}{2} \dot{Q}_i$$

$$p_e - p_i = R_i \times \phi_i$$

$$p_i - p_{i-1} = R_{i-1} \times \phi_{i-1}$$

⋮

Par récurrence on trouve :

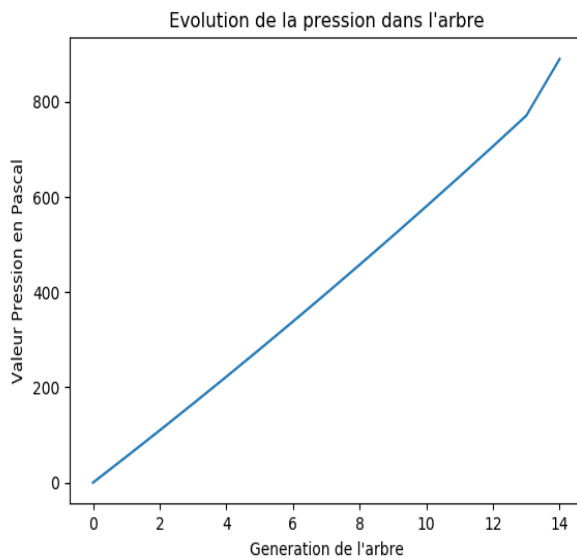
$$p_e - p_s = R_0 \phi_0 \times \sum_{i=0}^n \frac{1}{2^n h^{3n}}$$

Avec :

R_0 : résistance de la trachée

ϕ_0 : flux à la sortie de l'arbre bronchique

2. Résultats et interprétations :



✓ flux : 8.536 L/s

✓ Un flux approximativement proche de la valeur trouvée dans la trachée 9.5 L/s

La courbe présente une allure normale jusqu'au peak inattendu de la 14ème génération.

2^{ème} cas :

- Arbre souple symétrique.
- Ecoulement stationnaire, incompressible, quasi 1D.
- Poids négligeable.

Dans le cas souple on travaille avec un système non linéaire à cause de la résistance hydraulique.

On part de l'équation Navier-stokes pour arriver à l'équation suivante :

$$g(p_{i+1}) - g(p_i) - \frac{32\rho}{\pi^2} \phi^2 \ln\left(\frac{D_{i+1}}{D_i}\right) = \frac{-128\mu}{\pi} \phi L$$

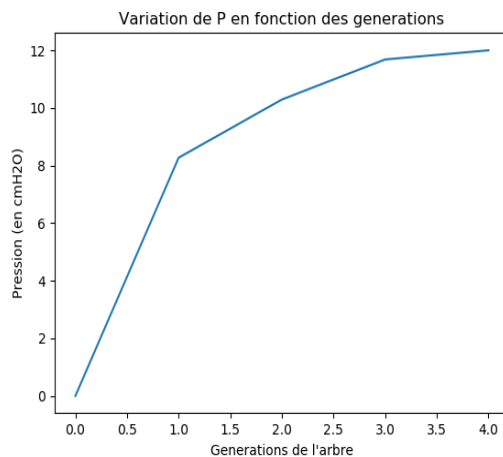
Et en utilisant la loi de tube La loi de tube donne :

$$D = \frac{D_{max}^4}{1 - \alpha e^{-\frac{p-p_{pl}}{p^*}}} \quad \text{Avec} \quad \alpha = \left(\frac{i}{3}\right)^2$$

Et en facilitant le calcul avec le développement limité suivant :

$$\int_{p_i}^{p_{i+1}} D^4(P) dP = \frac{D_0^4 h^4 i p^*}{4} \left[\ln \left(e^{\frac{4p}{p^*}} + \left(\frac{i}{3}\right)^8 \right) \right]_{p_i}^{p_{i+1}}$$

3. Résultats et interprétations :



- ✓ Une chute de pression en montant dans l'arbre, un résultat qui témoigne très bien le cas de l'expiration forcée.
- ✓ Flux : 3.57641 L/s

Ouverture sur le cas d'une inspiration :

Nous avons voulu comparer les résultats d'une inspiration avec celle de l'expiration en inversant la direction du flux (Une pression de sortie de la trachée supérieure à la pression alvéolaire). Dans cette approche, nous voulons montrer que même dans le cas où l'on a négligé la masse de l'air, le sens de parcours compte toujours et ceci peut être justifié par le contact avec les bifurcations et leur disposition. Le code en question est présent dans le drive.

Conclusion

Après avoir modéliser l'évolution de la pression dans l'arbre bronchique et essayer de calculer le flux en fixant quelques paramètres , et en introduisant plusieurs lois étudiés lors du cours .on a pu atteindre des résultats compatibles et convaincants dans les suppositions du cas rigide mais malheureusement , dans le cas souple ,on a trouvé des résultats douteux est ceci on peut l'expliquer par la difficulté et la complexité des algorithmes utilisées pour la résolution des équations et simulation des résultats .