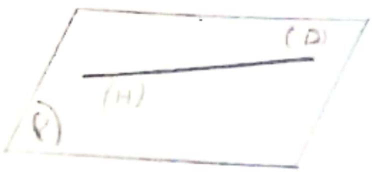
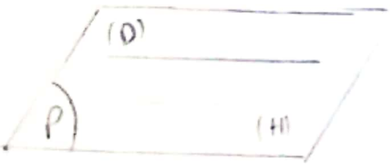
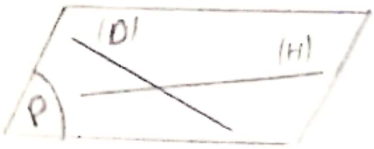
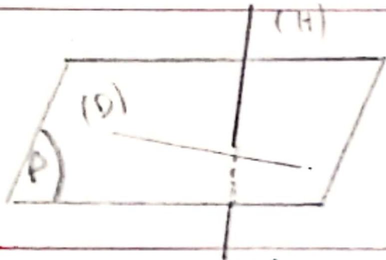
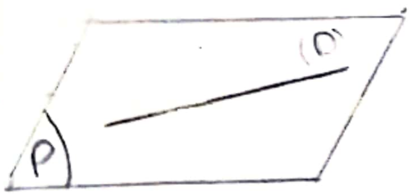
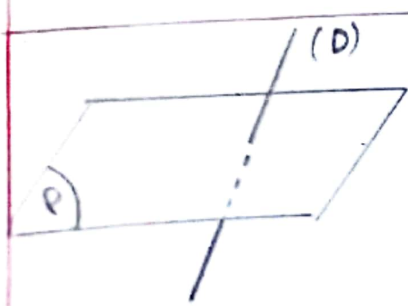
Géométrie dans l'espace

I. Les droites et les plans dans l'espace.

1) Les positions relatives de deux droites dans l'espace

	**Confondues :** la droite (D) est confondue avec (H)
	**parallèles :** (D) et (H) sont parallèles.
	**Sécantes :** la droite (D) et la droite (H) se coupent en un seul point.
	il n'existe pas un plan qui contient le deux droites. (D) et (H.

2) Les positions relatives d'une droite et un plan.

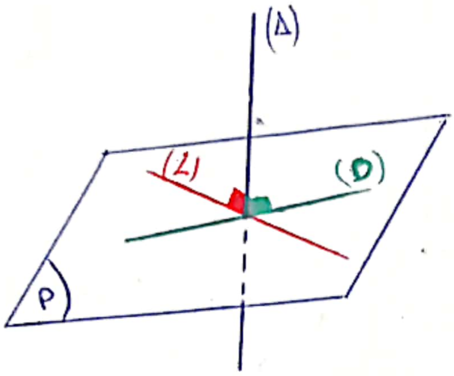
	la droite est inclus dans le plan
	la droite (D) est parallèle au plan (P)
	la droite (D) coupe le plan (P) en un seul point.

II. Orthogonalité d'une droite à un plan.

1) Définition :

On dit que une droite (D) est orthogonale à un plan (P) en un point s'il est orthogonale à deux droites incluent dans (P) est se coupent en A.

Exemple :

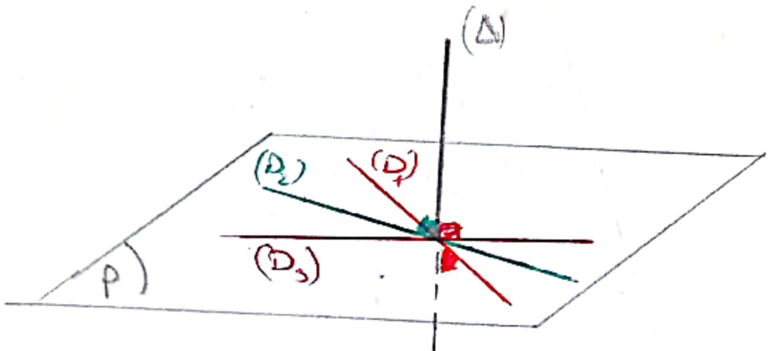


On a (Δ) est orthogonale à (L) et à (D) . et les deux droites (D) et (L) incluent dans (P) alors (Δ) est orthogonale à (P)

2) Propriété :

Si la droite (D) est orthogonale au plan (P) alors la droite (D) est orthogonale à toutes les droites incluent dans (P)

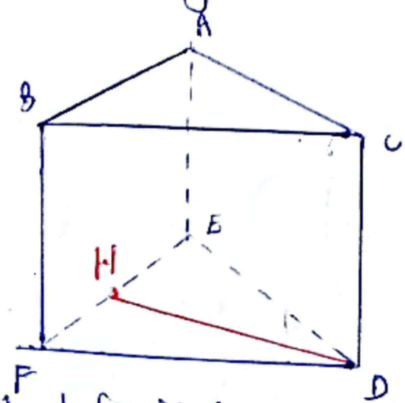
Exemple :



$(\Delta)\perp(P)$ et (D_1) et (D_2) et (D_3) sont inclus dans (P) donc $\begin{cases}(\Delta)\perp(D_1)\\(\Delta)\perp(D_2)\\(\Delta)\perp(D_3)\end{cases}$

Exemple :

ABCDEF un prisme rectangle.



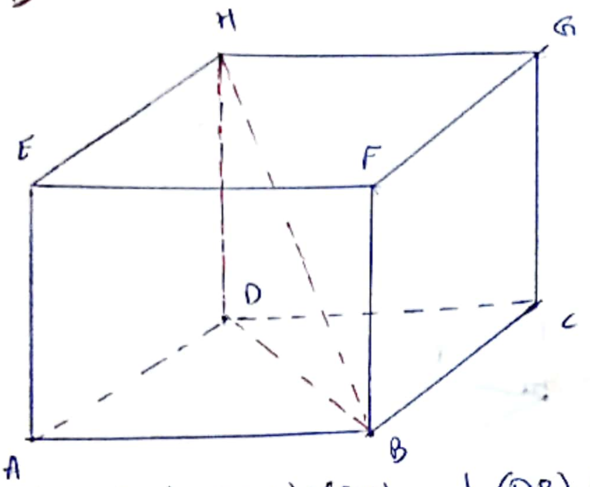
1) mq $(DH)\perp(DC)$

On a $(DC)\perp(DE)$ et $(DC)\perp(DF)$ et $(DH)\subset(DEF)$ donc $(DC)\perp(DH)$

2) mq $(EF)\perp(DC)$. 3) mq $(AE)\perp(BC)$ 4) mq $(BF)\perp(AC)$

3). Théorème de Pythagore dans l'espace. (Direct)

* Exemple : a) Le Théorème direct.



On a $(DH) \perp (DC)$ et $(DH) \perp (DA)$ et $(DB) \subset (ADC)$ donc $(DH) \perp (DB)$

alors HBD est un triangle Rectangle en D.

donc d'après le Théorème de Pythagore on a : $BH^2 = DH^2 + DB^2$.

Exercice :

$ABCDEFGH$ un cube tel que : $AE = 4\,cm$ et $EG = 5\,cm$.

1) mq. $(CG) \perp (DCB)$ ~~puis~~ (?) $(CG) \perp (CA)$

3) Déterminer la longueur de AG.

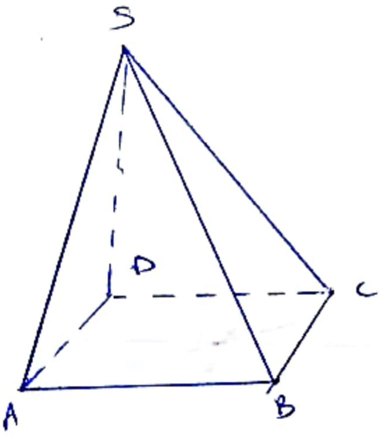
Exercice :

$SABCD$ est un ~~pyram~~ pyramide.

Sa base est le rectangle $ABCD$

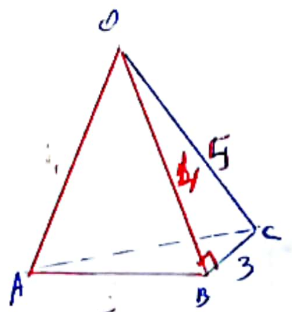
On a : $AB = 3\,cm$ et $DB = 5\,cm$

1) montrer que : $AD = 4\,cm$.



b) Le Théorème réciproque.

* Exemple :



On considère le triangle ABO.

On a $\begin{cases} OB^2 = 3^2 = 9 \\ OB^2 = 4^2 = 16 \\ OC^2 = 5^2 = 25 \end{cases}$ donc $OB^2 + AC^2 = OC^2$ =

donc d'après la réciproque du Théorème de Pythagore on a : OBC est triangle rectangle en B.

Application :

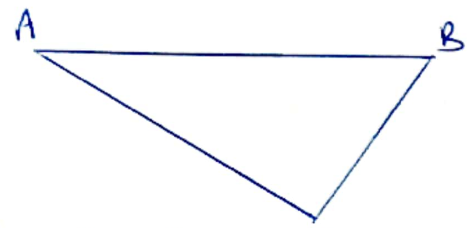
Voir la figure ci-dessous tel que ABCDEFGH est un parallélépipède
$AE = 4$ cm , $EG = 5$ cm et $AG = \sqrt{41}$.
montrer que le triangle AEG est rectangle.
(Théorème de Pythagore indirect).

III. parallélisme d'une droite et un plan.

1) Définition :

Une droite (D) est parallèle à un plan (P) si :
* La droite (D) est inclus dans plan (P)
* il n'existe pas un point commun entre (P) et (D).

Exemple :



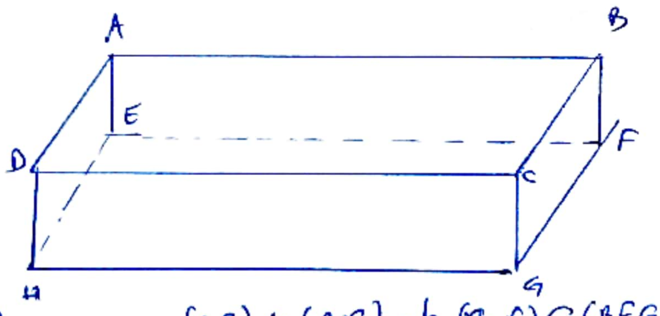
$(AB) \subset (ABC)$ donc (AB) est parallèle à (ABC)

2) propriété.

Une droite (D) est parallèle à un plan (P) s'il existe une droite (D') inclus dans (P) tel que $(D) \parallel (D')$

* Exemple:

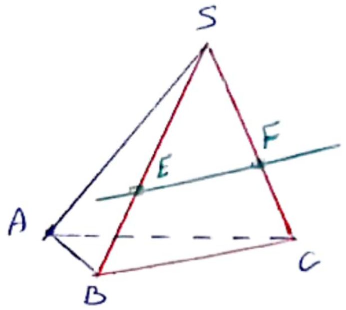
On considère le parallélépipède ABCDEFGH.



1) montrer que $(AE) \parallel (BFG)$: on a $(AE) \parallel (BF)$ et $(BF) \subset (BFG)$ donc $(AE) \parallel (BFG)$
2) mq $(AE) \parallel (DGH)$
3) mq $(AD) \parallel (BFC)$

3) Théorème de Thalès dans l'espace.

a) Direct.



On considère le plan (SBC). $E \in (SB)$ et $F \in (SC)$ tel que $(EF) // (BC)$ donc d'après le Théorème de Thalès.

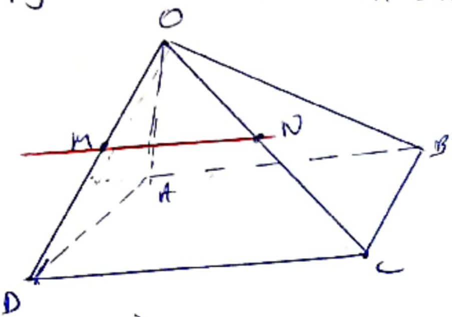
$$\frac{SE}{SB} = \frac{SF}{SC} = \frac{EF}{BC}$$

Sachant que SE = 3 cm et SB = 6 et SF = 4. Déterminer SC

b) La réciproque :

On considère OABCD un pyramide de base un carré ABCD.

ON = 2,5
OC = 5
OM = 3
OD = 6.



On considère le plan (ODC).

$$\frac{OM}{OD} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \frac{ON}{OC} = \frac{2,5}{5} = \frac{1}{2}$$

donc $\frac{OM}{OD} = \frac{ON}{OC}$ et O, M et D sont dans le même ordre.

donc d'après la réciproque du Théorème de Thalès ~~direct~~ $(DC) // (MN)$

Rappelle :

Une pyramide est régulière : lorsque sa base est un polygone régulier. lorsque les faces latérales sont des triangles isocèles identiques.

Exercice :

SABCD un pyramide régulière de base le carré ABCD tel que SA = 6 cm et AB = 2 cm.

1) Tracer M et N les milieux respectifs de [SA] et [SB]

2) montrer que (MN) // (AB)

Exercice :

1) Une pyramide régulière a une base carrée de côté 10cm : sa hauteur mesure 9cm
Quel est son volume ?

2) Une autre pyramide régulière de base carrée a une hateur de 11 m et un volume de 132 m³. Quelles est la longueur du côté de sa base.

3) Un cylindre a pour hauteur $h = 6cm$ et le diamètre de sa base $d = 10$ cm
Quel est le volume de ce cylindre.

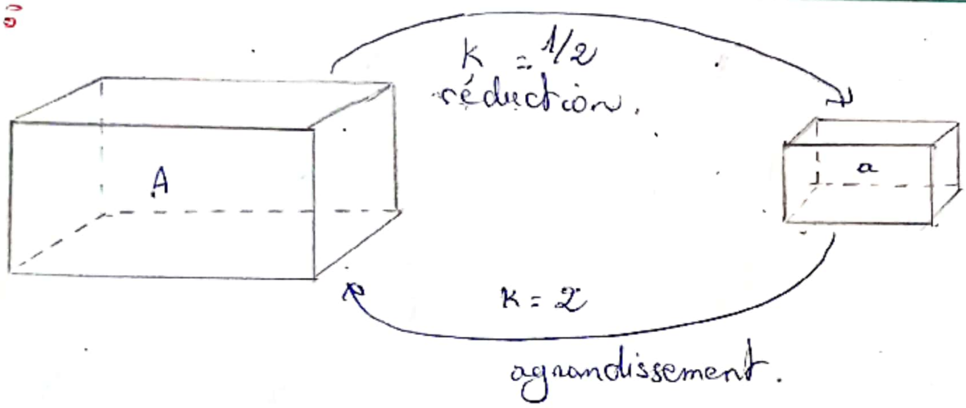
IV. Agrandissement et réduction :

1) Définition :

Multiplier toutes les dimensions d'une figure ou d'un solide (longueurs des côtés, rayons ...) par un nombre K. (les mesures des angles sont inchangés)

* Un agrandissement si $K > 1$.
* Une réduction si $K < 1$.

Exemple :



* Le solide A est un agrandissement du solide a et de coefficient d'agrandissem... $K = 2$
* Le solide a est une réduction du solide A de coefficiant de réduction $K = \frac{1}{2}$.

2) propriété :

Quand on agrandit, ou on réduit une figure, si les dismensions sont multiplier par K alors :

Les aires sont multiplier par K^2

Les volumes sont multiplier par K^3.

Exemple : ①

Un solide a un volume V de 125 cm³. Ses dimensions son multiplier par 2
Quel est le volume du solide agrandit.

$V' = 125 \times 2^3 = 125 \times 8 = 1000$ cm³.

Exemple ② :

Un terrain d'aire $A = 900 m^2$ est représenté sur un plan à l'echelle 1/2000
Quelle est l'aire du terrain sur le plan ?

$A = 900 \times \left(\frac{1}{2000}\right)^2 = 900 \times \frac{1}{4\,000\,000} = 0{,}000225\ m^2 = 2{,}25\ cm^2$

Exemple :

Une pyramide SBCD d'hauteur SB = 3cm. On va déterminer la valeur de S'B' tel que . S'B'C'D' est une réduction du pyramide SBCD de coefficient $\frac{1}{3}$.

$S'B' = \frac{1}{3} \times 3 = 1$.

Exercice :

la formé d'une bactérie est assimilée à un disque d'aire $0,2\ mm^2$. On l'observe au microscope muni d'une lentille de coefficient d'agrandissement $k = 10$
Calculer l'aire de la bactérie observée au microscope.