# AL MOUFID

En

# Mathématiques

3ème année du cycle secondaire collégial

3e AC

Manuel de l'élève

- Un point d'histoire
- Situations proposées aux olympiades
- Apprendre à rédiger
- Préparation à l'examen
- Challenges
- Intégration TICE

ⵜⴰⴳⵍⴷⵉⵜ ⵏ ⵍⵎⵖⵔⵉⴱ
ⵜⴰⵎⴰⵡⴰⵙⵜ ⵏ ⵓⵙⴳⵎⵉ ⴰⵏⴰⴼⵓⵔⴰⵏ
ⴷ ⵓⵙⵎⵓⵜⵜⴳ ⴰⵣⵣⴰⵍⴰⵏ
ⴷ ⵓⵙⵍⵎⴷ ⴰⵏⴰⴼⵍⵍⴰ ⴷ ⵓⵔⵣⵣⵓ ⴰⵎⵓⵙⵙⴰⵏ

المملكة المغربية
وزارة التربية الوطنية
والتكوين المهني
والتعليم العالي والبحث العلمي

Conforme au Programme Scolaire Marocain

Numéro de série : PICM 0112320 - Date d'homologation : 13 août 2020

# AL MOUFID EN Mathématiques

3ème année du cycle secondaire collégial

Manuel de l'élève

SPECIMEN
DAR ATTAKAFA

# 3e


Les auteurs

**Abdeslem HAKKANI**
Inspecteur principal de l'enseignement
secondaire qualifiant
Coordinateur

**Mohamed GHOUZAILI**
Professeur principal de l'enseignement
secondaire qualifiant

**Mostafa FAHMI**
Inspecteur principal de l'enseignement
secondaire qualifiant

**Lahcen AYAD**
Inspecteur principal de l'enseignement
secondaire qualifiant

**Noureddine BOUZIT**
Professeur principal de l'enseignement
secondaire collégial

# Avant-propos

Ce manuel s'adresse aux élèves de la troisème année secondaire collégiale. Il couvre ainsi une étape cruciale de leur cursus scolaire.

Parmi les objectifs poursuivis par cet ouvrage, on peut citer :

- la conformité et la cohérence avec le programme officiel de mathématiques ;
- l'assimilation des connaissances et l'acquisition de la démarche scientifique à travers l'activité mathématique ;
- l'exercice de la précision dans le raisonnement et la clarté d'expression dans la formulation et la rédaction ;
- le développement des techniques d'approche et des méthodes de résolution afin de contribuer à l'épanouissement des compétences vers l'intégration et la maîtrise.

L'organisation du manuel a tenu compte des considérations pédagogiques suivantes :

- La **leçon** débute par un aperçu **historique** (un point d'histoire) qui offre le possibilité de découvrir les mathématiques à travers les âges.
- Chaque **chapitre** commence par un test **diagnostic** permettant à l'élève de mettre ses acquis à l'épreuve avant de s'engager dans la leçon.
- Les **activités préparatoires** proposées sont des situations qui invitent l'élève à la construction du savoir.
- La présentation des concepts est claire et précise. Les définitions, les règles, les propriétés et les théorèmes sont consolidés par des exemples d'illustration.
- Les **exercices** sont **variés**, couvrant toutes les facettes de l'activité mathématique et s'organisent comme suit :

  * **Pratique : J'applique .**
  * **Investissement : Je m'entraîne .**

A la fin de cette étape, des situations de remédiation sont proposées; elles ont pour objectifs de pallier les lacunes et les difficultés enregistrées .

  * **Approfondissement : Je cherche.**

Cette étape comporte, outre les exercices issus de la vie réelle, des exercices de recherche et des problèmes ouverts.

  * **Je me prépare à l'examen local et régional :**

Cette rubrique propose des exercices typiques de l'examen (local ou régional) dont certains sont résolus.

Par ailleurs, une fenêtre est ouverte sur les **olympiades** afin de développer chez les élèves le goût des mathématiques, de la recherche et de l'esprit d'initiative.

En matière d'aquisition des **ressources numériques**, une liste de sites dont les contenus sont adaptés au curriculum, est présentée à la fin du manuel

En conclusion, nous espérons sincèrement que cet ouvrage soit un moyen d'éclairement pour les enseignants, et un outil profitable aux élèves.

*Les auteurs*

# Sommaire

## chapitres



## En fin d'ouvrage

# PROGRAMME DE MATHÉMATIQUES EN 3ÈME ANNÉE DE L'ENSEIGNEMENT SECONDAIRE COLLÉGIAL

## Première semestre

### 1. ACTIVITÉS NUMÉRIQUES

| Contenu | Capacités attendues |
|---|---|
| **1.1 Racines carrées**<br>• **Racines carrée d'un nombre positif.**<br>• **Produit et quotient de deux racines carrées.** | • Savoir que si a est un nombre réel positif, alors $\sqrt{a}$ est le nombre réel positif dont le carré est a.<br>• Utilisation de la calculatrice pour déterminer des valeurs approchées d'une racine carrée.<br>• Employer $\sqrt{a^2}$ et $(\sqrt{a})^2$ où a est positif.<br>• Chercher, à travers des exemples, le nombre $x$ tel que : $x^2 = a$.<br>• Utiliser les relations $\sqrt{ab} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$ , $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ et $\frac{1}{\sqrt{a}} = \frac{\sqrt{a}}{a}$ dans des exemples numériques pour simplifier quelques expressions.<br>• Rendre rationnel le dénominateur d'une fraction dans les cas simples. |
| **1.2 Calcul numérique**<br>• **Identités remarquables**<br>• **Puissances.** | • Utiliser les identités remarquables :<br>$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ ; $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ ; $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$<br>dans les deux sens.<br>• Reconnaître les propriétés des puissances et les utiliser.<br>• Utiliser les puissances de 10 particulièrement lors de l'étude de l'ordre, de la valeur approchée ou de l'écriture scientifique. |
| **1.3 Ordre et opérations** | • Maîtriser les propriétés de l'ordre et des opérations et les utiliser dans la résolution de problèmes.<br>• Maîtriser les différentes techniques de comparaison de deux nombres et utiliser les plus appropriées d'entre elles selon la situation étudiée. |

### 2. ACTIVITÉS GÉOMÉTRIQUES

| Contenu | Capacités attendues |
|---|---|
| **2.1 Théorème de Thalès** | • Connaître et utiliser, dans différentes situations, les deux théorèmes suivants :<br>*a.* Soit $(D_1)$ et $(D_2)$ deux droites sécantes en un point A.<br>Soit B et M deux points, distincts de A, appartenant à $(D_1)$.<br>Soit C et N deux points, distincts de A, appartenant à $(D_2)$ .<br>→ Si (BC) et (MN) sont parallèles, alors : $\frac{AB}{AM} = \frac{AC}{AN} = \frac{BC}{MN}$<br>*b.* Soit $(D_1)$ et $(D_2)$ deux droites sécantes en un point A. |

| | |
|---|---|
| | Soit B et M deux points, distincts de A, appartenant à $(D_1)$.<br>Soit C et N deux points, distincts de A, appartenant à $(D_2)$.<br>➔ Si $\frac{AB}{AM} = \frac{AC}{AN}$ et si les points A, B et M sont alignés dans le même ordre que A, C et N, alors les droites (BC) et (MN) sont parallèles. |
| **2.2 Triangle rectangle**<br>• **Trigonométrie : sinus, cosinus , tangente**<br>• **Théorème de Pythagore**<br>• **Angle au centre et angles inscrits dans un cercle.** | • Connaître et utiliser les relations entre le sinus, le cosinus et la tangente d'un angle et les longueurs de deux côtés d'un traingle rectangle.<br>• Utiliser la calculatrice pour déterminer les valeurs approchée des rapports trigonométriques d'un angle aigu et inversement.<br>• Utiliser le théorème direct de Pythagore et le théorème réciproque de Pythagore en géométrie plane et dans quelques polygones réguliers.<br>• Comparer un angle inscrit et un angle au centre qui interceptent le même arc. |
| **2.3 -Triangles isométriques<br>-Triangles semblables.** | • Reconnaître deux triangles isométriques.<br>• Utiliser les cas de similitude. |

## Second semestre

### 1. ACTIVITÉS NUMÉRIQUES

| Contenu | Capacités attendues |
|---|---|
| **1.1 Équation et inéquations** | • Résoudre une équation du premier degré à une inconnue.<br>• Résoudre des équations simples qui se ramènent à des équations du premier degré à une inconnue.<br>• Résoudre des problèmes qui se ramènent à une équation du premier degré à une inconnue.<br>• Résoudre une inéquation du premier degré à une inconnue.<br>• Employer l'équation et l'inéquation pour résoudre des problèmes. |
| **1.2 Systèmes de deux équations du premier degré à deux inconnues** | • Résoudre un système de deux équations du premier degré à deux inconnues, algébriquement<br>• Résoudre un système de deux équations du premier degré à deux inconnues, graphiquement.<br>• Mathématiser des situations qui se ramènent à la résolution d'un équation du premier degré à deux inconnues. |

### 2. ACTIVITÉS GRAPHIQUES ET STATISTIQUES

| Contenu | Capacités attendues |
|---|---|
| **2.1 Fonctions linéaires** | • Déterminer l'image d'un nombre par une fonction linéaire.<br>• Identifier une équation de proportionnalité et la traduire par la formule $f(x) = ax$.<br>• Construire la représentation graphique d'une fonction linéaire. |

| | |
|---|---|
| **2.1 Fonctions linéaires** | ● Déterminer l'image d'un nombre par une fonction linéaire ou moyen de sa représentation graphique.<br>● Déterminer l'expression d'une fonction linéaire à partir d'un nombre non nul et son image.<br>● Déterminer un nombre dont l'image est donnée au moyen de la représentation graphiques d'une fonction linéaitre.<br>● Déterminer l'expression d'une fonction linéaire à partir d'un point, distinct de l'origine du repère, de sa représentation graphique .<br>● Lire la représentation graphique d'une fonction linéaire. |
| **2.2 Fonctions affines** | ● Déterminer l'image d'un nombre par une fonction affine.<br>● Traduire une situation par la formule $f(x) = ax + b$.<br>● Construire la représentation graphique d'une fonction affine.<br>● Déterminer l'image d'un nombre par un fonction affine au moyen de sa représentation graphique.<br>● Déterminer un nombre dont l'image est donnée au moyen de la représentation graphique d'une fonction affine.<br>● Déterminer l'expression d'une fonction affine à partir de deux points distincts de sa représentation graphique.<br>● Employer la fonction affine dans la résolution de problèmes. |
| **2.3 Statistique** | ● Déterminer la médiane et le mode d'une série statistique.<br>● Calculer la moyenne arithmétique d'une série statistique en utilisant la calculatrice non scientifique.<br>● Employer les représentations graphiques usuelles dans la résolution de problèmes. |

## 3 . ACTIVITÉS GÉOMÉTRIQUES

| Contenu | Capacités attendues |
|---|---|
| **3.1** ● **Translation**<br>● **Produit d'un vecteur par un nombre réel** | ● Reconnaître l'image d'un point par une translation donnée.<br>● Reconnaître la translation T qui transforme le point A en le point B.<br>● Construire l'image d'un point par une translation donnée.<br>● Reconnaître l'image d'un segment, d'une droite, d'une demi-droite , d'un angle, d'un cercle par une translation.<br>● Utiliser la translation dans la résolution de problèmes géométriques. |
| **3.2** ● **Géométrique analytique**<br>● **Plan rapporté à un repère**<br>● **Coordonnées d'un point; coordonnées d'un vecteur** | ● Reconnaître un repère orthogonal, l'abscisse et l'ordonnée d'un point ou d'un vecteur pour l'utilisation et la représentation.<br>● Reconnaître et utiliser les coordonnées du milieu d'un segment et de la somme de deux vecteurs. |

| | |
|---|---|
| • **Distance entre deux points**<br>• **Équation d'une droite ; L'équation réduite.**<br>• **Condition de parallélisme et d'orthogonalité de deux droites.** | • Calculer la distance entre deux points et l'utiliser dans différentes situations géométriques.<br>• Résoudre des problèmes géométriques en utilisant le repère et les coordonnées.<br>• Reconnaître une droite en tant qu'ensemble des points $M(x\,;\,y)$ tels que : $y = ax + b$.<br>• Ecrire l'équation réduire d'une droite (AB).<br>• Représenter une droite à partir de son équation réduite.<br>• Déterminer l'équation d'une droite tracée dans un repère.<br>• Employer le coefficient directeur pour identifier le perpendicularité de deux droites. |
| **3.3 Calcul des volumes (géométrie dans l'espace)** | • Reconnaître l'orthogonalité d'une droite et d'un plan et l'orthogonalité de deux droites dans quelques solides usuels.<br>• Appliquer les théorèmes de Thalès et de Pythagore pour calculer des longueurs, des aires et des volumes de solides, et pour établir l'orthogonalité dans l'espace.<br>• Connaître l'incidence de l'agrandissement et de la réduction des solides sur les longueurs, les aires et les volumes. |

**Répartition proposée du programme de mathématiques / 3ème année secondaire collégiale**

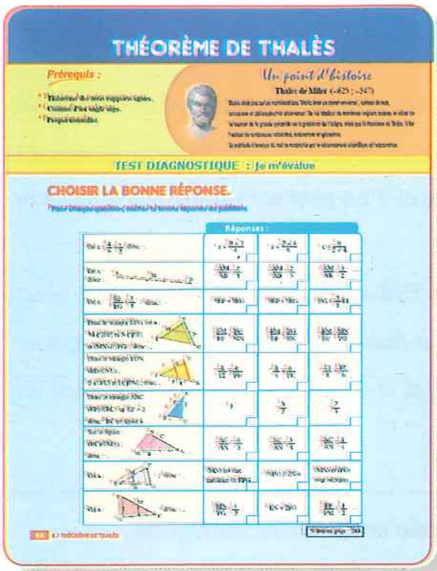
| Premier semestre | Deuxieme semestre |
|---|---|
| ***1) Activités numériques :***<br>• Racines carrées *(10h)*<br>• Identités remarquables, puissances *(12h)*<br>• Ordre et opérations *(12h)*<br>***2) Activités géométriques :***<br>• Théorèmes de Thalès *(12h)*<br>• Triangle rectangle et trigonométrie *(12h)*<br>• Triangles isométriques ; triangles semblabes *(12h)* | ***1) Activités numériques :***<br>• Equations et inéquations *(10h)*<br>• Système de deux équations *(10h)*<br>***2) Activités géométriques :***<br>• Translation ; produit d'un vecteur par un réel *(10h)*<br>• Géométrie analytique *(14h)*<br>• Calcul de volumes *(8h)*<br>***3) Activités graphiques et statistiques***<br>• Fonctions linéaires ; fonction affines *(5h)*<br>• Statistique *(6h)* |

## Obsérvations :

1. L'ordre d'accomplissement des paragraphes de chaque semestre est effectué selon un ordre établi au niveau régional.
2. Chaque semestre est ponctué de trois devoirs surveillés d'une heure chacun ; la durée de présentation d'un compte rendu, pour chacun d'eux, est d'une heure.
3. Chaque semestre est ponctué de trois devoirs à la maison et la durée de présentation du compte rendu pour chacun d'eux, est d'une heure.
4. Des séances de soutien et de consolidation seront menées chaque semestre.

# Mode d'emploi

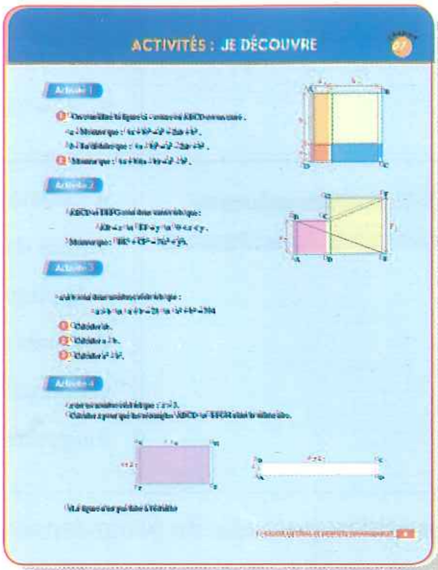
## 1 Test diagnostique




**Un point d'histoire :**
Esquisse historique sur des savants ou sur des sujets se rapportant à la leçon.

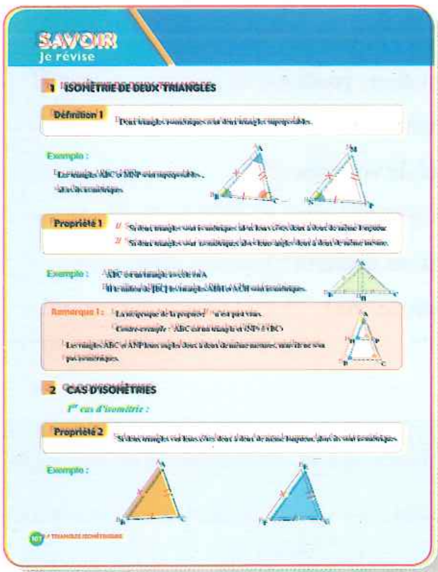
- Les questions (Q.C.M.) t'invitent à évoquer ton prérequis pour adhérer à la leçon

## 2 Activités



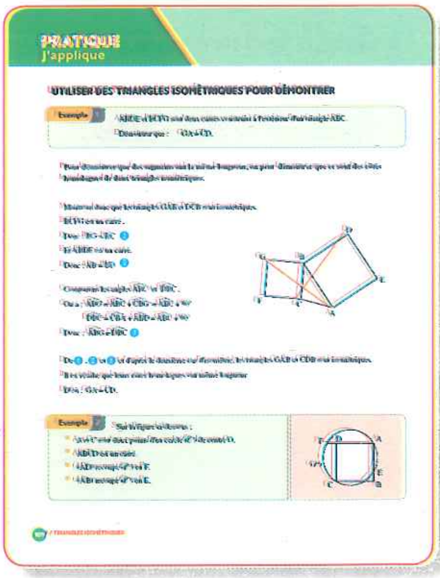

- Ces activités t'incitent à participer à la construction du savoir

## 3 Savoir




- Les connaissances fondamentales y sont exposées et accompagnées d'exemples appropriés

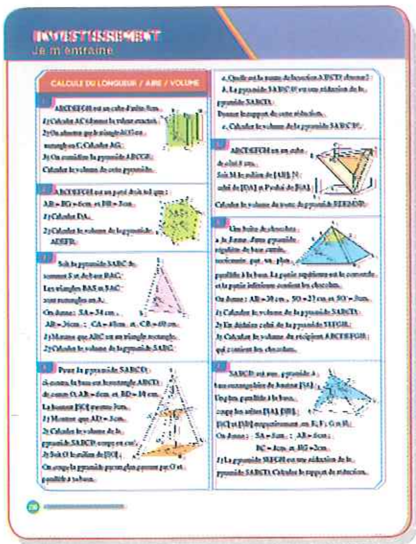
## 4 Pratique




- Situations traitées en relatant toutes les étapes du raisonnement

# Mode d'emploi

## 5 Investissement

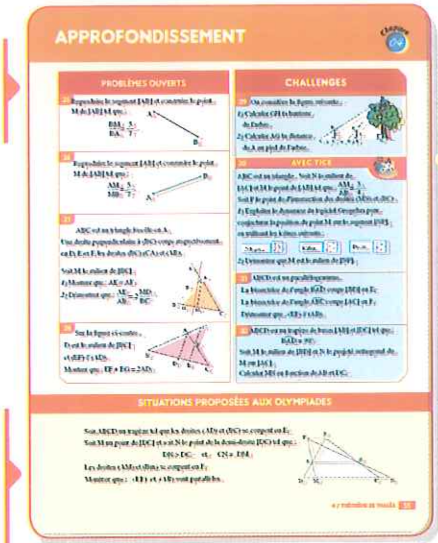



- Exercices d'entraînement pour affermir et assimiler les savoirs

## 6 Approfondissement

***Problèmes ouverts***
Situations qui poussent à l'investigation : essayer, conjecturer, tester, prouver

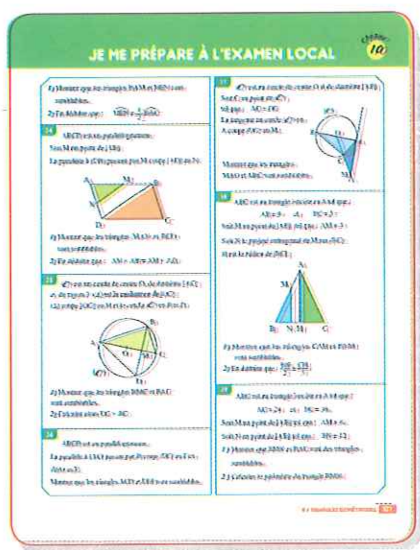
***Olympiades***
Ces exercices permettent d'aborder les problèmes mathématiques de manière ouverte en autorisant des approches originales.



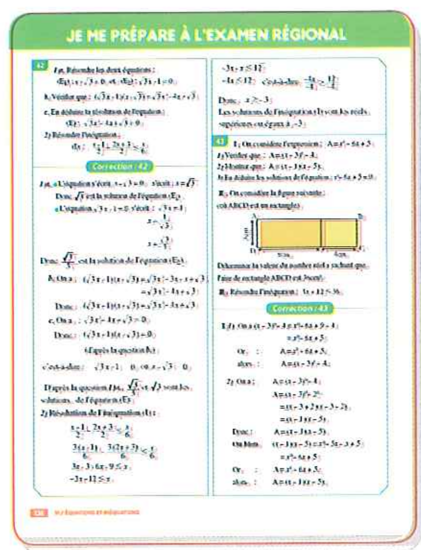

***Avec TICE***
Les logiciels Geogebra et Excel sont investis pour exploiter au maximum leurs utilisations (voir aussi la fin du manuel)

- Les exercices de cette étape te permettent d'approfondir tes apprentissages en adoptant les outils pertinents et adéquats

## 7 Je me prépare à l'examen local




## 8 Je me prépare à l'examen régional




- Cette rubrique propose des exercices typiques de l'examen (local ou régional) dont certains sont résolus

# CALCUL LITTÉRAL ET IDENTITÉS REMARQUABLES

## Prérequis :

* Calcul littéral : Développement; factorisation sur les rationnels.
* Identités remarquables.

## Un point d'histoire

**Blaise Pasca** (1623 ; 1662)

Blaise Pascal est un mathématicien, physicien, inventeur et moraliste français. À 19 ans, il invente la première machine à calculer . Il publie un traité de géométrie à 16 ans. Il développe, par ailleurs, une méthode de résolution du "problème des partis" qui, donnant naissance au calcul des probabilités, influencera fortement les théories économiques modernes et les sciences sociales.

## TEST DIAGNOSTIQUE : Je m'évalue

### CHOISIR LA BONNE RÉPONSE.

Pour chaque question, cocher la bonne réponse en justifiant.

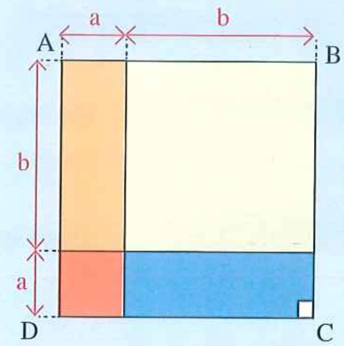
| | Réponses : | | |
|---|---|---|---|
| Pour $x = -2$ , la valeur de $8 - 2x$ est égale à : | 4 | $-12$ | 12 |
| $6x + 2x$ est égal à : | $8x^2$ | $8x$ | $2x\,(3x+1)$ |
| $5x - 8x$ est égal à : | $-40x^2$ | $-3x^2$ | $-3x$ |
| Le développement de $(3x-4)\,(x+2)$ est égal à : | $3x^2 - 8$ | $3x^2 + 2x - 8$ | $3x^2 - 2x + 8$ |
| La forme factorisée de $4x^2 - 12x$ est égale à : | $-8x^2$ | $4x\,(x-12)$ | $4x\,(x-3)$ |
| $(5x-2)^2$ est égal à : | $25x^2 - 4$ | $10x - 4$ | $25x^2 - 20x + 4$ |
| $16 - x^2$ est égal à : | $(4-x)\,(4+x)$ | $(x-4)\,(x+4)$ | $(4-x)^2$ |

Solutions page : 244

# ACTIVITÉS : JE DÉCOUVRE



## Activité 1 Identité remarquables



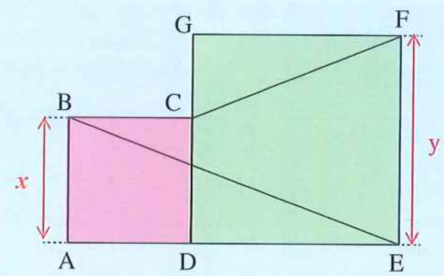

**1** On considère la figure ci - contre où ABCD est un carré .

*a* - Montrer que : $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ .

*b* - En déduire que : $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ .

**2** Montrer que : $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$ .

## Activité 2 Emploi des identités remarquables




ABCD et DEFG sont deux carrés tels que :

$$AB = x \quad \text{et} \quad EF = y \quad \text{et} \quad 0 < x < y \text{ .}$$

Montrer que : $BE^2 + CF^2 = 3(x^2 + y^2)$.

## Activité 3 Calcul de $a^2 - b^2$ connaissant a + b et a + b

a et b sont deux nombres réels tels que :

$$a > b \quad \text{et} \quad a + b = 28 \quad \text{et} \quad a^2 + b^2 = 394$$

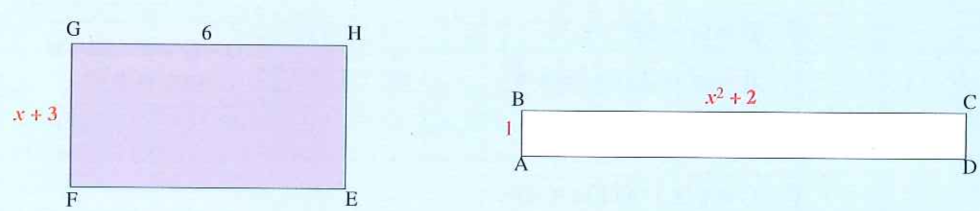
**1** Calculer ab.

**2** Calculer a - b.

**3** Calculer $a^2 - b^2$.

## Activité 4 Résolution d'un problème d'aire

$x$ est un nombre réel tel que : $x > 3$.
Calculer $x$ pour que les rectangles ABCD et EFGH aient la même aire.




(La figure n'est pas faite à l'échelle)

## 1 DÉVELOPPEMENT

**Définition 1**

Développer un produit, c'est le transformer en somme.

**Propriété 1**

Quels que soient les nombres réels a,b,c,d et k :

- $k(a + b) = ka + kb$
- $k(a - b) = ka - kb$
- $(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd$.

**Exemple :**

$A = -3(x - 3) + (x - 2)(x - 1)$

$A = -3x + 9 + x^2 - x - 2x + 2$

$A = x^2 - 3x - x - 2x + 9 + 2$

$A = x^2 - 6x + 11$.

## 2 IDENTITÉS REMARQUABLES

**Définition 2**

Une identité remarquable est une égalité qui est vraie quelles que soient les valeurs données aux lettres qui figurent dans l'égalité.

**Propriété 2**

Quels que soient les nombres réels a et b :

- $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
- $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
- $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$

**Exemples :**

*1)* $A = \left(2x + \frac{3}{4}\right)^2$

$A = (2x)^2 + 2\left(2x \times \frac{3}{4}\right) + \left(\frac{3}{4}\right)^2$ ← $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, $a = 2x$ et $b = \frac{3}{4}$

$A = 4x^2 + 3x + \frac{9}{16}$.

*2)* $B = (x - 6)^2$

$B = x^2 - 2(x \times 6) + 6^2$ ← $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$, $a = x$ et $b = 6$

$B = x^2 - 12x + 36$.

*3)* $C = (7x - 4)(7x + 4)$

$C = (7x)^2 - 4^2$ ← $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$, $a = 7x$ et $b = 4$

$C = 49x^2 - 16$.

## 2 FACTORISATION

**Définition 3** Factoriser une somme, c'est la transformer en produit .

### *1. Factoriser à l'aide d'un facteur commun.*

**Propriété 3** Quels que soient les nombres réels a , b et k :

- $ka + kb = k(a + b)$
- $ka - kb = k(a - b)$.

**Exemple :**

$A = \underline{(x - 4)}\,(3x - 2) - \underline{(x - 4)}\,(x - 6)$

$A = (x - 4)\,[(3x - 2) - (x - 6)]$

$A = (x - 4)\,(3x - 2 - x + 6)$

$A = (x - 4)\,(2x + 4)$

$A = 2(x - 4)\,(x + 2)$

### *2. Factoriser à l'aide d'une identité remarquable*

**Propriété 4** Quels que soient les nombres réels a et b :

- $a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$
- $a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$
- $a^2 - b^2 = (a + b)\,(a - b)$.

**Exemples :**

*1)* $A = x^2 + 18x + 81$

$A = x^2 + 2(x \times 9) + 9^2$ ← $a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$ ; $a = x$ et $b = 9$

$A = (x + 9)^2$.

*2)* $B = 4x^2 - 20x + 25$

$B = (2x)^2 - 2(2x \times 5) + 5^2$ ← $a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$ ; $a = 2x$ et $b = 5$

$B = (2x - 5)^2$.

*3)* $C = \frac{9}{4}x^2 - 121$

$C = \left(\frac{3}{2}x\right)^2 - 11^2$ ← $a^2 - b^2 = (a + b)\,(a - b)$ ; $a = \frac{3}{2}x$ et $b = 11$

$C = \left(\frac{3}{2}x + 11\right)\left(\frac{3}{2}x - 11\right)$.

## 1 DÉVELOPPER EN UTILISANT LES IDENTITÉS REMARQUABLES

**Exemple 1**

Développer et réduire les expressions A et B :

$$A = 7 - (3x + 2)(3x - 2)$$

$$B = (2x - 5)^2 - 3(x - 1)(4x - 3)$$

- On a : $A = 7 - (3x + 2)(3x - 2)$

On constate que le 2ème terme est une identité remarquable de la forme $(a + b)(a - b)$.

Donc : $A = 7 - \left[(3x)^2 - 2^2\right]$

$A = 7 - (9x^2 - 4) = 7 - 9x^2 + 4$

$A = -9x^2 + 11.$

- On a : $B = (2x - 5)^2 - 3(x - 1)(4x - 3).$

On constate que le 1er terme est une identité remarquable de la forme $(a - b)^2$

Donc : $B = (2x)^2 - 2(2x \times 5) + 5^2 - 3(4x^2 - 3x - 4x + 3)$

$B = 4x^2 - 20x + 25 - 3(4x^2 - 7x + 3)$

$B = 4x^2 - 20x + 25 - 12x^2 + 21x - 9$

$B = 4x^2 - 12x^2 + 21x - 20x + 25 - 9$

$B = -8x^2 + x + 16.$

**Exemple 2**

**Développer et réduire l'expression C :** $C = (x^2 - x + 2)^2$ .

On a : $C = (x^2 - x + 2)^2.$

$x^2 - x + 2$ peut s'écrire : $(x^2 - x) + 2.$

Donc : $C = \left[(x^2 - x) + 2\right]^2.$

On obtient ainsi une identité remarquable de la forme $(a + b)^2$.

$C = (x^2 - x)^2 + 2(x^2 - x) \times 2 + 2^2$

On constate que $(x^2 - x)^2$ est une identité remarquable de la forme $(a - b)^2$.

$C = (x^2)^2 - 2(x^2 \times x) + x^2 + 4x^2 - 4x + 4$

$C = x^4 - 2x^3 + x^2 + 4x^2 - 4x + 4$

$C = x^4 - 2x^3 + 5x^2 - 4x + 4$

## 2 FACTORISER EN UTILISER LES IDENTITÉS REMARQUABLES

**Exemple 3** Factoriser l'expression D : $D = (x^2 - 6x + 9) - 4$.

On constate que $x^2 - 6x + 9 = x^2 - 2(x \times 3) + 3^2$,

c'est donc l'identité remarquable $(a - b)^2$.

Ainsi : $D = (x - 3)^2 - 4$

$D = (x - 3)^2 - 2^2$,

c'est encore une identité remarquable de la forme $(a + b)(a - b)$.

Ainsi : $D = [(x - 3) + 2]\,[(x - 3) - 2]$

$D = (x - 3 + 2)(x - 3 - 2)$

$D = (x - 1)(x - 5)$

**Exemple 4**

1. Factoriser l'expression $(2x - 3)^2 - 4$.
2. En déduire une factorisation de l'expression $4x^2 - 12x + 5$.

**1** On a : $(2x - 3)^2 - 4 = (2x - 3)^2 - (2)^2$

$= [(2x - 3) + 2]\,[(2x - 3) - 2]$

$= (2x - 3 + 2)(2x - 3 - 2)$

$= (2x - 1)(2x - 5)$

D'où : $(2x - 3)^2 - 4 = (2x - 1)(2x - 5)$.

**2** On a : $4x^2 - 12x + 5 = [(2x)^2 - 2(2x \times 3) + 3^2] - 3^2 + 5$

$= (2x - 3)^2 - 4$

Par ailleurs : $(2x - 3)^2 - 4 = (2x - 1)(2x - 5)$

Donc : $4x^2 - 12x + 5 = (2x - 1)(2x - 5)$.

### DÉVELOPPER ET RÉDUIRE

**1** Développer :

$A = (3x-1)^2$ $\quad$ $C = (3+4x)^2$

$B = \left(\frac{2}{5}x+1\right)^2$ $\quad$ $D = \left(\frac{5}{3}x-\frac{1}{2}\right)^2$

$E = (10-11x)(10+11x)$ $\quad$ $F = \left(\frac{7}{8}+\frac{3}{5}x\right)\left(\frac{7}{8}-\frac{3}{5}x\right)$

**2** Développer et réduire les expressiones suivantes :

$A = (2x-1)(x-4)+(3-x)(2x+1)$

$B = (x-2)(3x-2)-(x+2)(2x-3)$

$C = 2(4-3x)(2-3x)-(x-2)(x-4)$

$D = 5-[5-3x(x-3)]+(2x+3)(3x+2)$

$E = 3x(x-2)x+1)-x(5x-2)$

$F = (x-2)^2-(3x-1)(x-3)$

$G = (x^2+x-1)^2$ $\quad$ $H = (3x^2-x+2)(3x^2+x-2)$

$I = (-2x+1)^3-(x-1)(x+2)(x-3)$

**3** Développer et réduire les expressions suivantes :

$A = \left(\frac{2}{5}x-5\right)^2-\left(\frac{x}{5}-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{x}{5}+\frac{1}{2}\right)$

$B = \frac{4}{3}x\left(9x+12\right)-\left(x+\frac{1}{3}\right)^2$

$C = \left(\frac{4}{3}x-1\right)\left(4x+1\right)+\left(2x-\frac{1}{4}\right)^2$

$D = \left(\frac{3x-2}{6}\right)^2-\left(\frac{2x+1}{2}\right)^2$

$E = \left(\frac{2}{5}x+1\right)^2-\frac{4}{25}\left(10+\frac{x}{2}\right)^2+\frac{x}{10}\left(7+4x\right)$

**4** *1)* Calculer : $69^2-68^2-67^2+66^2$

*2)a.* $x$ est un entier naturel.

Développer et réduire l'expression A :

$A = (x+3)^2-(x+2)^2-(x+1)^2+x^2$

*b.* En déduire le calcul de :

$B = [(987654321258)^2+(987654321255)^2]$
$-[(987654321257)^2+(987654321256)^2]$.

**5** $x$ est un entier naturel.

*1)* Montrer que : $(x-1)x(x+1)+x=x^3$

*2)* En déduire que $102\times103\times104+103$ est un cube.

### FACTORISATION

**6** Factoriser chacune des expressions suivantes :

$A = (x+4)(6x-1)+(x+4)(7x-2)$

$B = (2x+1)(x-5)-(2x+1)(4x+7)$

$C = (3x-5)(2x-1)-(5-3x)(x+6)$

$D = (x-2)(-x+3)+(2x-4)(3x-7)$

$E = (6x+5)(x+8)-(6x+5)^2$

$F = (5x-2)(x+3)-(2-5x)^2$

$G = (x+9)(2x-1)-6x^2+3x$

**7** Factoriser les expressions suivantes :

$A = x^2-14x+49$ $\quad$ $B = 4x^2-24x+36$

$C = 45x^2-120x+80$ $\quad$ $D = 25x^2+40x+16$

$E = 4+9x^2-12x$ $\quad$ $F = 16x^2-81$

**8** Factoriser les expressions suivantes :

$A = (x-3)(6x-7)-(x^2-6x+9)$

$B = (2x-5)^2-9$ $\quad$ $C = (3x+1)^2-x^2-x-\frac{1}{4}$

$D = 4x^2+4x+1-(x+5)^2$

$E = -(3-2x)^2+(2x-3)(x-5)+4x-6$

$F = (x+2)^2-2(x+2)(5x-1)+(5x-1)^2$

$G = 4x^2-4+(5x+1)(x-1)+2x^2-4x+2$

**9** Recopier et relier chaque expression factorisée à sa forme développée.

| | |
|---|---|
| $(x-2)(x-3)$ • | • $x^2+5x+6$ |
| $(2x-1)(x-3)$ • | • $2x^2+x-3$ |
| $(x-1)(2x+3)$ • | • $2x^2-7x+3$ |
| $(2x-3)(x+1)$ • | • $2x^2-x-3$ |
| $(x+3)(x+2)$ • | • $x^2-5x+6$ |

| | |
|---|---|
| $(x-5)^2$ • | • $4x^2+2x+\frac{1}{4}$ |
| $\left(x-\frac{3}{4}\right)\left(x+\frac{3}{4}\right)$ • | • $x^2-\frac{9}{16}$ |
| $\left(2x+\frac{1}{2}\right)^2$ • | • $x^2-10x+25$ |
| $(x+5)^2$ • | • $x^2+10x+25$ |
| $(3x+7)(3x-7)$ • | • $9x^2-49$ |

**10** Développer puis réduire les expressions suivantes :

$A = 3x^2 - (5 - 3x + 4x^2) + (7 - 2x^2)$

$B = 4x^2 + (1 - 6x^2) + 3x^2 + (2x^2 - 5x^3)$

$C = 8x + (4x^3 - 6x + 2x^2) + (2x^3 - x^2)$

$D = 7 - (3x^2 - 4x - 1) + (x^2 - 9x - 11)$

**11** Développer et réduire :

$A = 3x(x - 2) - 2x(3x - 2)$

$B = 4 - 2(5 - x) + 6x^2 - 3x(3x - 2)$

$C = 7x + x(-3x + 2) - 4x^2 + 8x(2 + 3x)$

$D = x^2(x^2 - x - 1) - x(3x - 5) + 2(x^3 - x - 2) - 9$

**12** Ecrire chacune des expressions suivantes sous la forme a$x$ + b :

$A = \frac{3}{8}x - \frac{7}{4} - \left(\frac{5}{2}x + 1\right) - \frac{1}{2}\left(3x - \frac{5}{8}\right)$

$B = \frac{2x}{9} - 1 - \frac{x+3}{3} + \frac{x}{6}$

$C = \frac{x+2}{6} + \frac{2x+3}{4} + \frac{3-2x}{2}$

$D = \frac{2x-1}{5} - \frac{x-2}{15} - \frac{x+1}{3}$

## CALCULATRICE

**13** *1)* A l'aide de la calculatrice, calculer les nombres suivants :

$A = 123\,456^2 - 123\,455 \times 123\,457$

$B = 456\,789\,^2 - 465\,785 \times 456\,793$

$C = 123\,456\,789^2 - 123\,456\,787 \times 123\,456\,791$

(on donnera les résultats proposés par la machine en précisant la marque et le modèle).

*2)* Calculer algébriquement les résultat exacts.

Pour cela : appeler $x$ le nombre élevé au carré; exprimer les deux autres en fonction de $x$ puis développer les deux termes de la différence.

*3)* Confronter les résultats théoriques avec ceux de la machine, essayer d'expliquer l'origine des différences.

*4)* Reprendre la question 1) avec d'autres modèles de calculatrice.

## MON BILAN

***1) Indiquer la bonne réponse par A , B ou C :***

| | A | B | C |
|---|---|---|---|
| 1 $-4\left(3x - \frac{5}{8}\right)$ est égale à : ... | $12x - \frac{5}{2}$ | $12x + \frac{5}{2}$ | $-12x + \frac{5}{2}$ |
| 2 $(x-3)(2x-5)$ est égale à : ... | $2x^2 - 11x - 15$ | $2x^2 - 11x + 15$ | $2x^2 - x + 15$ |
| 3 $(2x^2 - 5)^2$ est égale à : | $4x^2 - 25$ | $4x - 10$ | $4x^2 - 20x + 25$ |
| 4 $(4x + 7)^2$ est égale à : | $16x^2 + 49$ | $4x^2 + 56 + 49$ | $16x^2 + 56 + 45$ |
| 5 $(3x - 1)(x - 2) - 4(3x - 1)$ ... | $\frac{2,1}{3,5} < \frac{4,1}{6,9}$ | $\frac{2,1}{3,5} = \frac{4,1}{6,9}$ | $\frac{2,1}{3,5} \neq \frac{4,1}{6,9}$ |
| 6 $(4x + 7)^2$ est égale à : ... | peut s'écrire $(2x + 5)^2$ | peut s'écrire $(3x - 1)(x + 2)$ | ne peut pas se factoriser |
| 7 $(9 + 2x)(9 - 2x)$ est égale à : ... | $18x - 4x^2$ | $81 - 4x^2$ | $81 - 36x + 4x^2$ |
| 8 $9 - x^2$ est égale à : ... | $\frac{20}{41}$ | $-\frac{41}{20}$ | $\frac{41}{20}$ |

Corrections page : 247

***2) En cas d'erreur, voici quelques conseils :***

| | Savoir | Pratique |
|---|---|---|
| Ex: 1 | Propriété 1 | |
| Ex: 2 | Propriété 1 | |
| Ex: 3 | Propriété 2 | |
| Ex: 4 | Propriété 2 | |
| Ex: 5 | | Exemple 1 |
| Ex: 6 | Propriété 4 | |
| Ex: 7 | Propriété 1 | |
| Ex: 8 | Propriété 4 | |

***3) Exercices pour la remédiation voir R1 page : 248***

# APPROFONDISSEMENT
## Je recherche

### CALCUL RAISONNÉ

**14** a, b et c des nombres réels non nuls tels que :

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}=4 \quad \text{et} \quad \frac{a}{c}+\frac{c}{b}+\frac{b}{a}=5$$

Calculer $\frac{a^3}{b^3}+\frac{b^3}{c^3}+\frac{c^3}{a^3}$.

**15** $x$, y et z des nombres réels non nuls tels que :

$$x+\frac{1}{y}=1 \quad \text{et} \quad y+\frac{1}{z}=1$$

Calculer :

$A = z+\frac{1}{x}$ ; $B = xyz$ ; $C = x+y+z+\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)$

**16** a, b et c des nombres réels positifs tels que :

$a(a + b + c) = 4$ , $b(a + b + c) = 16$ ; $c(a + b + c)=29$

Calculer : $a + b + c$.

**17** a, b et c des nombres réels non nuls tels que :

$$a + b + c = 0$$

*1)* Calculer $\frac{a+b}{c}+\frac{b+c}{a}+\frac{c+a}{b}$

*2)* Montrer que : $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$

*3)* Montrer que : $\frac{a^2}{bc}+\frac{b^2}{ca}+\frac{c^2}{ab}=3$

**18** a et b deux nombres réels tels que : $a^3=\frac{1}{2}$ ; $b^3=2$

Calculer : $\frac{1}{1+a}+\frac{1}{1+b}$ .

**19** $x$, y et z des nombres réels non nuls tels que :

$$xy + yz + zx = 1 \quad \text{et} \quad xyz = \frac{1}{2020}$$

Montrer que : $\frac{x+y}{1-xy}+\frac{y+z}{1-yz}+\frac{x+z}{1-zx}=2020$

### IDENTITÉS REMARQUABLES

**20** Montrer les égalités suivantes:

$(x + y)^2 - (x - y)^2 = 4xy$

$(x + y)^2 + (x - y)^2 = 2(x^2 + y^2)$

$x^2 - y^2 - 2y - 1 = (x + y + 1)(x - y - 1)$

$(x^2 + 1)(y^2 + 1) = (xy + 1)^2 + (y - x)^2$

$(x^2 - 1)(y^2 - 1) = (xy + 1)^2 - (y + x)^2$

**21** Montrer pour tout nombre réel $x$ :

***a.*** $x^2 - 3x - 4 = \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{25}{4}$

***b.*** $-3x^2 - x + 10 = -3\left[\left(x + \frac{1}{6}\right)^2 - \frac{121}{36}\right]$

**22** On donne : $A = x^2 - 7x + 10$

*1)* Montrer que : $x^2 - 7x + 10 = \left(x - \frac{7}{2}\right)^2 - \frac{9}{4}$

*2)* Factoriser A .

**23** On donne : E = 1000002000001

Montrer que E est un carré parfait.

**24** Soit $x$ un nombre réel.

On donne : $E = (2x + 1)^2 - (2x - 1)^2$

*1)* Développer et réduire E.

*2)* En déduire la valeur de $2019^2 - 2017^2$.

**25** *1)* Développer et réduire A :

$$A = (x - 4)^2 - (x - 2)(x - 8)$$

*2)* En déduire le résultat de $9996^2 - 9998 \times 9992$.

**26** *1)* On a : $13^2 = 169$ ; donc $14^2 = 169 + 13 + 14 = 196$.

Calculer de la même manière $15^2$ , $16^2$, $17^2$ .

*2)* Enoncer le résultat général et le démontrer.

### DEVELOPPER ET RÉDUIRE

**27** Développer et réduire les expressions suivantes:

$A = 3a - (5a - 6) + 8 + (-7 - 6a)$

$B = 15 + 3a + (4a - 9) - (6 - 10a)$

$C = 7a + (-9a + 8) - (-5a - 3) + 12$

$D = 3 - [8 - (4a + 5)] + [-9 - (-10 + 8a)]$

$E = -(3b - 4) + 3a - [3a - (5b - 5)] - (2a - 3)$

$F = 6b - \left[\frac{7}{2} + (2a + \frac{3}{2}b)\right] + \left[-\frac{9}{2} - (\frac{5}{2}a + \frac{9a}{2} - 2)\right]$

## PROBLÈMES OUVERTS

**28** *1)* Montrer les égalités :

$4^2 + 4 = 5^2 - 5$ ; $16^2 + 16 = 17^2 - 17$

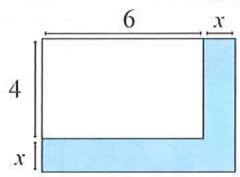
$119^2 + 119 = 120^2 - 120$.

*2)* Enoncer le résultat général et le démontrer.

**29** **AVEC TICE**


Les dimensions d'un rectangle sont 6 m et 4 m .

On augmente la longueur et la largeur de $x$ mètres.




*1)* Calculer, en fonction de $x$, le périmètre p et l'aire S de la partie bleue.

*2)* En utilisant un ***tableur*** d'Excel, calculer p et S pour trois valeurs de $x$.

## EFFECTUER DES CALCULS NUMERIQUES

**30** Effectuer sans utiliser la calculatrice :

$a = 10 - 8{,}5 + 2 - 3{,}5 + 3{,}7$

$b = 125 - 949 - 53 - 17 + 74 - 9$

$c = 3\times(-5{,}5)\times10\times(-5)\times(-0{,}25)$

$d = 0{,}7\times(-8)\times(-6)\times125$

**31** Effectuer les calculs et écrire le résultat sous forme de fraction irréductible :

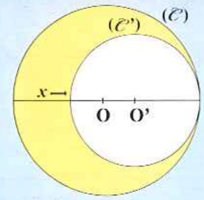
$a = \left(\frac{1}{10} - \frac{1}{4}\right) : \frac{6}{5} - 1$ $\qquad b = \frac{3}{8} - 2 \times \frac{14+4}{14-2}$

$c = \frac{(2+4)^2 - (4-8)^2 \times 8)}{17^2 - 16^2}$ $\qquad d = \frac{(3-8)^2 - (2+6)^2 \times 8)}{(7+4)^2}$

## CHALLENGES

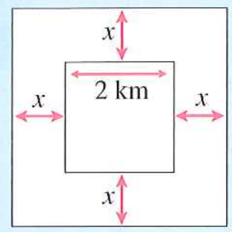
**32** ($\mathscr{C}$) est un cercle de centre O et de rayon R.

($\mathscr{C}$') est un cercle de centre O' et tangent à ($\mathscr{C}$) (voir la figure).




Calculer l'aire S de la partie jaune en fonction de R et $x$.

**33** Un agriculteur veut entourer son champ de forme carrée dont la longueur de son côté est 2 km par une bande de largeur $x$.

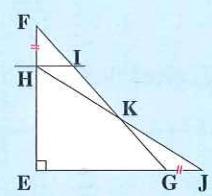



Sachant que l'aire de la bande est égale à l'aire du champ,déterminer alors la largeur $x$ de la bande.

**34** EFG est un triangle rectangle isocèle en E tel que : EF = 6cm.

On donne : FH = a.

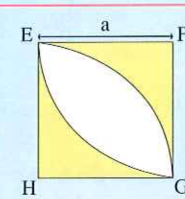
J est un point de la droite (EG) tel que G appartient aux segment [EJ] et JG = a.




Montrer que KIH et KGI ont même aire .

**35** EFGH est un carré de côté a.

Calculer l'aire S de la partie jaune en fonction de a.




## SITUATIONS PROPOSÉES AUX OLYMPIADES

**Situation 1** : a , b et c sont des nombres réels non nuls tels que : ab + bc + ca = abc.

**Calculer :** $\frac{a+b}{ab} + \frac{b+c}{bc} + \frac{c+a}{ca}$.

**Situation 2** : $x$ et y sont deux nombres réels distincts tels que : $x^2 + y^2 = 3xy$.

**Déterminer la valeur de l'expression :** $A = \frac{x+y}{x-y}$.

# JE ME PRÉPARE À L'EXAMEN LOCAL

**36** *Exercice résolu*

Calculer et donner le résultat de chacune des expressions sous la forme la plus simple.

$$A = \frac{4}{3} - \frac{5}{6} \times \frac{7}{2} - \frac{1}{4}$$

$$B = 1 - \frac{2}{3} \times \left(\frac{2}{3} - \frac{4}{5}\right)$$

$$C = \frac{\frac{5}{9} - 2}{-\frac{2}{3} - \left(\frac{-5}{6} + \frac{1}{2}\right)}$$

**Correction : 36**

- **Calcul de A :**

$$A = \frac{4}{3} - \frac{5}{6} \times \frac{7}{2} - \frac{1}{4}$$

$$A = \frac{4}{3} - \frac{35}{12} - \frac{1}{4}$$

$$A = \frac{16}{12} - \frac{35}{12} - \frac{3}{12}$$

$$A = \frac{16}{12} - \frac{38}{12}$$

$A = \frac{-22}{12}$ . Donc : $A = -\frac{11}{6}$ .

- **Calcul de B:**

On a : $B = 1 - \frac{2}{3} \times \left(\frac{2}{3} - \frac{4}{5}\right)$

$$B = 1 - \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} + \frac{2}{3} \times \frac{4}{5}$$

$$B = 1 - \frac{4}{9} + \frac{8}{15}$$

$$B = \frac{45}{45} - \frac{20}{45} + \frac{24}{45}$$

$B = \frac{69}{45} - \frac{20}{45}$ . Donc : $B = \frac{49}{45}$ .

- **Calcul de C :**

On a : $C = \dfrac{\frac{5}{9} - 2}{-\frac{2}{3} - \left(\frac{-5}{6} + \frac{1}{2}\right)}$

$$C = \left(\frac{5}{9} - 2\right) : \left[-\frac{2}{3} - \left(\frac{-5}{6} + \frac{1}{2}\right)\right]$$

$$C = \left(\frac{5}{9} - \frac{18}{9}\right) : \left(-\frac{2}{3} + \frac{5}{6} - \frac{1}{2}\right)$$

$$C = \frac{-13}{9} : \frac{-2}{6}$$

$C = \frac{-13}{9} \times (-3)$ . Donc : $C = \frac{13}{3}$ .

**37** *Exercice résolu*

On considère les expressions suivantes :

$A = 3(x + 2)(x - 2) - 2(x - 2)^2$

$B = 5x^2 - 20$

*1)a.* Développer et réduire A .

*b.* Calculer A lorsque $x = -2$ .

*2)a.* Factoriser A et B .

*b.* En déduire la factorisation de A – B.

**Correction : 37**

***1)a.* Forme réduite de A :**

On a : $A = 3(x + 2)(x - 2) - 2(x - 2)^2$

$$A = 3[(x)^2 - 2^2] - 2(x^2 - 2(x \times 2) + 2^2)$$

$$A = 3(x^2 - 4) - 2(x^2 - 4x + 4)$$

$$A = 3x^2 - 12 - 2x^2 + 8x - 8$$

$$A = x^2 + 8x - 20$$

***b.* Calcul de A lorsque $x = -2$**

On a : $A = x^2 + 8x - 20$ et $x = -2$

Donc : $A = (-2)^2 + 8(-2) - 20$

$$A = 4 - 16 - 20$$

$$A = 4 - 36$$

D'où : $A = -32$ lorsque $x = -2$.

***2)a.*** ● **Factorisation de A :**

On a : $A = 3(x + 2)(x - 2) - 2(x - 2)^2$

$$A = 3(x + 2)(x - 2) - 2(x - 2)(x - 2)$$

$$A = (x - 2)[3(x + 2) - 2(x - 2)]$$

$$A = (x - 2)(3x + 6 - 2x + 4)$$

Donc : $A = (x - 2)(x + 10)$.

- **Factorisation de B :**

On a : $B = 5x^2 - 20$

$$B = 5(x^2 - 4)$$

$$B = 5[(x)^2 - 2^2]$$

Donc: $B = 5(x + 2)(x - 2)$.

***b.* Factorisation de A – B**

On a : $A = (x - 2)(x + 10)$ et $B = 5(x + 2)(x - 2)$.

# JE ME PRÉPARE À L'EXAMEN LOCAL

Donc : $A - B = (x-2)(x+10) - 5(x+2)(x-2)$

$A - B = (x-2)[(x+10) - 5(x+2)]$

$A - B = (x-2)(x+10-5x-10)$

$A - B = (x-2)(-4x)$

D'où : $A - B = -4x(x-2)$.

**38** Calculer et donner le résultat sous forme d'une fraction irréductible :

$$A = \frac{1}{2}\times\frac{1}{2} - \frac{5}{4}\times\frac{1}{3}$$

$$B = \frac{\frac{1}{3}-\frac{3}{4}}{\frac{1}{4}-\frac{4}{3}}$$

$$C = \left(\frac{3}{4}-\frac{5}{8}\right)-\left[\frac{7}{6}-\left(\frac{3}{2}-2\right)\right]$$

**39** Calculer et donner le résultat sous forme d'une fraction irréductible la plus simple possible :

$$A = \left(1-\frac{4}{5}\right):\frac{3}{10}$$

$$B = \left(\frac{1}{8}-\frac{3}{6}\right)\times\left(\frac{5}{12}-\frac{1}{4}\right)$$

$$C = \frac{9}{3}-\frac{1}{3}\times\left(\frac{5}{6}-1\right).$$

**40** Calculer et donner le résultat sous la forme d'une fraction irréductible :

$$A = \left(\frac{36}{-14}\right)\times\frac{70}{24}\times\left(\frac{-4}{5}\right)$$

$$B = \frac{\frac{4}{7}-\frac{3}{14}}{-\frac{4}{3}-\frac{5}{3}\times\frac{1}{2}}$$

**41** $x$ est un nombre réel. On donne :

$A = (x-3)^2 - 1$ et $B = 3x^2 + 3x - 18$.

*1)* Factoriser A .

*2)* Calculer $A - \frac{1}{3}B$.

*3)* En déduire la forme factorisée de B.

**42** On considère l'expression A :

$$A = 6x^2 - 5x + 1 - (4x-2)(x+1)$$

*1)a.* Développer et réduire A.

*b.* Calculer A lorsque $x = -\frac{2}{3}$

*2)a.* Développer $(2x-1)(3x-1)$ .

*b.* Factoriser A.

*c.* Calculer A lorsque $x = -\frac{1}{3}$ .

**43** Soit $x$ un nombre réel.

On donne : $E = (x+1)^2 - (x-1)^2$

*1)* Développer E .

*2)* En déduire la valeur de F: $F = 10001^2 - 9999^2$

**44** On considère les expression suivantes :

$$A = (3x-2)(x+2) - (3x-2)(4x-1)$$

$$B = (x+2)^2 - 9$$

*1)a.* Développer et réduire A et B.

*b.* Calculer A pour $x = \frac{-4}{3}$

*2)a.* Factoriser A et B.

*b.* En déduire que : $A - B = (x-1)(1-10x)$.

**45** *1)* Compléter :

$4 \times 5 \times 6 + 5 = (...)^3$

$7 \times 8 \times 9 + 8 = (...)^3$

$21 \times 22 \times 23 + 22 = (...)^3$

*2)* La somme du produit de trois nombres entiers consécutifs plus le terme médian est égale au cube de ce nombre. Est - ce toujours vrai?

**46** *1)* Développer et réduire l'expression :

$$P = (x+12)(x+2)$$

*2)* Factoriser l'expression : $Q = (x+7)^2 - 25$

*3)* ABC est un triangle rectangle en A; $x$ désigne un nombre positif : $BC = x + 7$ et $AB = 5$

Montrer que : $AC^2 = x^2 + 14 + 25$

# PUISSANCES

## Prérequis :

* Puissances à exposant positif.
* Puissances à exposant négatif.
* Écriture scientifique d'un décimal.
* Règles de calcul sur les puissances de 10.

## *Un point d'histoire*

**Omar Khayyam** (1048 ; 1131)

Omar Khayyam est considéré comme l'un des grands mathématiciens du Moyen Âge. Mais ces travaux algébriques ne furent connus en Europe qu'au XIXème siècle. Il a écrit plusieurs textes sur l'extraction des racines carrées et sur certaines définitions d'Euclide.

## TEST DIAGNOSTIQUE : Je m'évalue

## CHOISIR LA BONNE RÉPONSE.

**Pour chaque question, cocher la bonne réponse en justifiant.**

| | Réponses : | | |
|---|---|---|---|
| $5^3$ est égal à ... | $3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3$ | $5 \times 3$ | $5 \times 5 \times 5$ |
| $(\sqrt{3})^2$ est égal à ... | 9 | 3 | 6 |
| $4^{3+2}$ est égal à ... | $12^2$ | $4^3 \times 4^2$ | $4(3+2)$ |
| Signe de $(-4)^{2021}$ est | positif | indéterminé | négatif |
| $(10^4)^5$ est égal à ... | $40^5$ | $10^9$ | $10^{4\times5}$ |
| $\frac{10^5}{10^7}$ est égal à ... | $10^{-2}$ | $10^{7-5}$ | $\frac{5}{7}$ |
| $9^3 \times 9^4$ est égal à ... | $9^{12}$ | $81^{12}$ | $9^7$ |
| L'écriture scientifique de $578{,}24 \times 10^5$ est égal à ... | $5{,}7824 \times 10^3$ | $5{,}7824 \times 10^5$ | $5{,}7824 \times 10^7$ |
| $0{,}01 \times 10000$ est égal à ... | $10^3$ | $10^2$ | $10^4$ |
| $\left(\frac{4}{7}x\right)^2$ est égal à ... | $\frac{4}{7}x^2$ | $\frac{16}{49}x$ | $\frac{16}{49}x^2$ |

Solutions page : 246

# ACTIVITÉS : JE DÉCOUVRE

## Activité 1 Nombre d'or

Soit $\varphi$ le nombre réel positif qui vérifie : $\varphi^2 = \varphi + 1$ ($\varphi$ est le nombre d'or)

1. Montrer que : ***a.*** $2\varphi + 1 = \varphi^3$

   ***b.*** $5\varphi + 3 = \varphi^5$

2. ***a.*** Déduire des calculs précédents $\varphi^5$ ; $\varphi^{10}$ et $\varphi^7$.

   ***b.*** Citer les propriétés utilisées.

## Activité 2 Emploi des règles sur les puissances

On considère l'expression E :

$$E = \frac{a^3 b^{-2} (a^{-3} b^0)^{-5} \times a^{-4} b^3}{a^{-2} b (a b^{-3})^{-4} \times a^{-3} b^{-3}}$$ (où a et b sont deux nombres réels non nuls).

1. Simplifier E.
2. Calculer E pour $a = 10^{-3}$ et $b = 10^2$.

## Activité 3 Utilisation conjuguée des puissances et des identités

Soit a et b deux nombres réels non nuls distincts.

Soit n et p deux nombres entiers relatifs.

Simplifier les expressions suivantes :

$$E = \frac{a^n \times b^{n+p} - a^{n+p} \times b^p}{a \times b^{n+1} - a^{p+1} \times b} \quad \text{et} \quad F = \frac{3a^n + 6}{a^{2n} + 4 + 4a^n}$$

( les dénominateurs de E et F sont non nuls).

## Activité 4 Écriture scientifique

soit $x$ et y deux nombres réels tels que :

$$x = -41{,}2 \times 10^{-30} \quad \text{et} \quad y = 0{,}52 \times 10^{-25}$$

Donner l'écriture scientifique de chacun des nombres suivants :

$$x \ , \ xy \ , \ \frac{x}{y} \ , \ x + y \ \text{et} \ x - y.$$

# SAVOIR
## Je révise

## 1 PUISSANCE D'UN RÉEL

**Définition 1** Soit $a$ un nombre réel non nul et $n$ un entier naturel non nul :

- $a^n = \underbrace{a \times a \times \ldots \times a}_{n \text{ facteurs de } a}$ et $a^{-n} = \dfrac{1}{\underbrace{a \times a \times \ldots \times a}_{n \text{ facteurs de } a}} = \dfrac{1}{a^n}$
- En particulier : $a^1 = a$ et $a^{-1} = \dfrac{1}{a}$
- Par convention : $a^0 = 1$

base $\longrightarrow \boxed{a^n} \longleftarrow$ exposant

puissance n$^{\text{ème}}$ de a

L'écriture $a^n$ se lit : $a$ à la puissance $n$

$a$ s'appelle la base, et $n$ s'appelle l'exposant

**Exemples :**

*1)* $4^3 = 4 \times 4 \times 4 = 64$

*2)* $2021^0 = 1$

*3)* $2020^1 = 2020$

*4)* $(-5)^{-4} = \dfrac{1}{5^4} = \dfrac{1}{625}$

*5)* $\left(-\dfrac{3}{7}\right)^{-2} = \left(-\dfrac{7}{3}\right)^2 = \dfrac{49}{9}$

*6)* $(\sqrt{2})^3 = \sqrt{2} \times \sqrt{2} \times \sqrt{2} = 2\sqrt{2}$

## 2 PUISSANCE DE 10

**Propriété 1**

Pour tout entier naturel $n$, on a :

$10^n = 1\underbrace{00\ldots\ldots 0}_{n \text{ zéros}}$ et $10^{-n} = \underbrace{0{,}0\ldots\ldots 0}_{n \text{ zéros}}1$

**Exemples :**

*1)* $10^9 = 1000\,000\,000$ (9 zéros)

*2)* $10^{-6} = 0{,}000\,001$ (6 zéros)

## 3 OPÉRATIONS SUR LES PUISSANCES

**Propriété 2** Soit a et b deux nombres réels non nuls et soit $n$ et $p$ deux entiers relatifs :

- $a^n \times a^p = a^{n+p}$
- $\dfrac{1}{a^p} = a^{-p}$
- $\dfrac{a^n}{a^p} = a^{n-p}$
- $(a^n)^p = a^{np}$
- $a^n \times b^n = (a \times b)^n$
- $\dfrac{a^n}{b^n} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^n$

**Exemples :**

*1)* $5^{-2} \times 5^4 = 5^{-2+4} = 5^2$

*2)* $(a^2)^{-4} = a^{2\times(-4)} = a^{-8} \quad (a \neq 0)$

*3)* $\dfrac{(3,4)^6}{(3,4)^9} = (3,4)^{6-9} = (3,4)^{-3}$

*4)* $8^3 \times 125^3 = (8 \times 125)^3 = 1000^3 = 1000000000$

*5)* $\dfrac{15^3}{5^3} = \left(\dfrac{15}{5}\right)^3 = 3^3$

## 4 ÉCRITURE SCIENTIFIQUE

**Définition 2** Un nombre décimal positif est écrit en notation scientifique lorsqu'il est écrit sous la forme suivante : $a \times 10^n$

où a est un nombre décimal tel que : $1 \leq a < 10$ et $n$ est un nombre entier relatif.

**Exemples :**

*1)* Distance de la Terre au Soleil : $1,5 \times 10^8$ km

*2)* L'étoile la plus proche de la Terre : $3,9925 \times 10^{13}$km

*3)* Poids d'un atome d'hydrogène : $1,67 \times 10^{-25}$g

*4)* Taille d'un virus : $2,5 \times 10^{-11}$

## SIMPLIFIER AVEC DES PUISSANCES

**1** Calculer :

$(-7)^3$ ; $(0,5)^4$ ; $2017^1$ ;
$2,016^0$ ; $(-1)^{2019}$ ; $\left(\frac{4}{3}\right)^{-2}$ .

**2** a est un nombre réel non nul.

Écrire sous forme d'une seule puissance :

- $a^6 \times a^{13}$ ; • $a^{-5} \times a^{-2}$
- $a^{-4} \times a^{12}$ ; • $a^7 \times a^2 \times a^{-8}$
- $a^{-3} \times a^6 \times a^3 \times a^{-6}$

**3** Recopier et compléter chaque égalité :

$(3^{-6})^{\cdots} = 3^{18}$ ; $a^{\cdots} \times a^{-3} = a^{-3}$

$4^{\cdots} \times 4^{-2} = 1$ ; $\frac{a^{-8}}{a^{\cdots}} = a^2$

$\frac{2^{-4} \times 2^{\cdots}}{2^5} = 2^{-7}$ ; $(7^{\cdots})^{-3} \times 7^{-2} = 7^{-14}$

$(\ldots a)^3 = -27a^{\cdots}$ ; $(\ldots\ldots)^2 = 169a^4$

**4** a , b et c sont des nombres réels non nuls.

Simplifier : $m = a^{-4} \times a^3 \times a^{15}$

$n = (a^2)^{-2} \times (a^{-4})^3 \times (a^{-3})^{-5}$

$o = (a^2 \times b^5 \times c^{-3})^{-2} \times \left[(a^4)^{-2} \times b^{-2}\right]^{-3}$

$p = \frac{5}{a^{-3}} \times \left(\frac{a^5}{b^{-2}}\right)^{-4} \times \left(\frac{10b^2}{a^3}\right)^{-1}$

**5** Déterminer le signe de chacun des nombres suivants :

$(-4,0304)^4$ ; $-\left(-\frac{5}{9}\right)^4$ ; $314^{314}$

$(-2016,2017)^8$ ; $27^{-9}$

**6** a est un nombre réel négatif non nul.

Déterminer le signe de chacun des réels suivants :

$a^5$ , $a^8$ , $a^{-4}$ , $a^{-7}$ , $-a^3$ et $(-a)^9$.

**7** a est un nombre réel non nul.

Écrire sous forme d'une seule puissance :

$A = \frac{a^6 \times a^{-8}}{a^{-7}}$ ; $B = \frac{a^{-13}}{a^{-4} \times a^{-7}}$

$C = \frac{a^4 \times (a^{-4})^4}{a^{-13} \times a^{16}}$ ; $D = \frac{a^{-8} \times a^{-12}}{(a^{-2})^3 \times (a \times a^{-3})^{-1}}$ .

**8** Simplifier :

$j = 6^2 \times (-6)^5 \times \frac{(-6)^4}{(-6)^2} \times (6^{-2})^{-2}$

$k = \left(\frac{5}{3}\right)^{-2} \times \left(\frac{-5}{3}\right)^{-3} \times \left(\frac{25}{9}\right)^{-1}$

$l = 2^5 \times 8^{35} \times 1,25 \times 10^{-15} \times 10^{170}$

**9** a et b sont deux nombres réels non nuls. Simplifier :

$q = (3a)^2 \times \left(\frac{1}{3}\right)^3 \times \left(\frac{a}{3}\right)^{-2}$

$r = \left(\frac{3}{a}\right)^3 \times (ab)^{-3} \times \left(\frac{1}{a^{-1}}\right)^{-2}$

$s = (3a)^3 \times \left(\frac{1}{a}\right)^2 \times \left(\frac{a}{3}\right)^4$

$t = (3a)^{-2} \times \left[\left(\frac{a}{3}\right)^{-2}\right]^3 \times \left[(2a)^2\right]^{-1}$

**10** a et b sont deux nombres réels non nuls.

Simplifier :

$u = \left[a^3 \times (a^{-2})^{-1}\right]^{-2} \times (a^{-3} \times a^4)^2$ ; $v = \frac{(a^{-1} \times b)^{-2} \times a^2 \times b^{-4}}{(a^3 \times b^2)^{-2} \times (b^{-3})^{-4}}$

$w = \frac{(ab)^4}{a^{-2}b^{-1}} : \frac{(a^4b^{-3})^{-1}}{a^2b^{-3}}$ ; $x = \frac{(2a^{-2}b^{-3})^{-2}}{(3a^3b)^2}$ .

**11** Simplifier :

$E = \frac{3^6 \times (24)^{-2}}{18^3 \times (2^{-3})^{-4}}$ ; $F = \left[\frac{((5^7)^2 \times 3^{-4})^{-2}}{3^{-5} \times (5^2 \times 3^{-1})^{-1}}\right]^{-2}$

$G = \left[\frac{4^{-3} \times 15^{-4} \times (3^{-2})^{-1}}{(3^{-2})^3 \times 12^4 \times 5^{-4}}\right]^4$

**12** Recopier et compléter :

$0,007 = 7 \times 10^{\cdots}$ ; $20,16 = 2016 \times 10^{\cdots}$

$0,0002017 = \ldots \times 10^{-4}$ ; $195,7 = \ldots \times 10^{-2}$

**13** Ecrire chaque produit sous la forme $a^n$ où $n$ est un entier relatif et a un nombre réel :

$M = 16 \times 2^{-3}$

$N = 81 \times 3^{6}$

$O = (10^{-3})^{-4} \times 10000 \times 10^{5} \times 0{,}001$

$P = 135 \times 15 \times 45$

**14** a et b sont deux nombres réels non nuls.

On donne : $E = \dfrac{(a^2b^{-1})^{-2} \times (a^{-3}b^2)^{-3} \times a^4}{(a \times (b^2)^{-2})^{-1} \times (a^2b)^3}$

*1)* Simplifier E .

*2)* Calculer E lorsque : $a = 10^3$ et $b = 0{,}0001$

**15** Soit a et b deux nombres réels non nuls.

On considère le nombre :

$$A = \frac{a^{-2}\,b\,(a^2b^{-1})^4\,a^{-3}b^2}{ab^{-2}\,(a^{-3}b^2)^3\,a^2b^3}$$

*1)* Simplifier le nombre A.

*2)* Calculer A pour : $a = 10^{-3}$ et $b = -10^{-4}$.

**16** Soit a , b et c des nombres réels non nuls.

On considère le nombre : $A = \dfrac{(a^2\,b^{-2}\,c)^{-4}\,(a^3c^{-2})^2}{(a^{-2}\,b^2c^{-2})^3}$

*1)* Simplifier le nombre A.

*2)* Calculer A pour :

$a = -\dfrac{2}{3}10^2$ ; $b = \dfrac{3}{2}10^{-3}$ et $c = -3$

## CALCULATRICE

**17** *1)* Effectuer sur la calculatrice les opérations suivantes :

| | |
|---|---|
| $3{,}435 \times 1000$ | $3{,}435^3$ (touche $y^x$ ) |
| $3{,}435 \times 100000$ | $3{,}435^5$ |
| $3{,}435 \times 10^5$ | $3{,}435 \times 10^8$ |
| $3{,}435 \times 10^{10}$ | $3{,}435^{10}$ |

*2)* Quelle séquence de touches faut-il taper sur le clavier de la calculatrice pour obtenir l'affichage : 3,43597 10 ?

## MON BILAN

***1) Indiquer la bonne réponse par A , B ou C :***

| | A | B | C |
|---|---|---|---|
| 1 $\left(\frac{3}{2}\right)^4$ est égale à : ... | $\frac{12}{8}$ | $\frac{81}{16}$ | $\frac{3}{4}$ |
| 2 $2 \times 2^5$ est égale à : ... | $2^6$ | $4^5$ | $2^{10}$ |
| 3 $(7^{\,2})^5$ est égale à : ... | $7^7$ | $7^{10}$ | $35^2$ |
| 4 $\left(\frac{3}{2}x\right)^4$ est égale à : ... | $\frac{4}{3}x$ | $\frac{2}{3}x^2$ | $\frac{4}{9}x^2$ |
| 5 $10^{-5}$ est égale à : ... | 10000 | 0,00001 | 0,0001 |
| 6 $\frac{(1,5)^8}{(1,5)^{11}}\,10^{-5}$ est égale à : ... | $(1,5)^{-3}$ | $(1,5)^{19}$ | $(1,5)$ |
| 7 $\frac{3^7 \times 4^8 \times 5^4}{2^5 \times 5^{-7} \times 3^3}$ est égale à : ... | $3 \times 2^{-2} \times 5^{11}$ | $3 \times 10^{-11}$ | $3 \times 10^{11}$ |
| 8 L'écriture scientifique de 138,09 | $1{,}3809 \times 10^{-2}$ | $1{,}3809 \times 10^{2}$ | 1,3809 |

Corrections page : 247

***2) En cas d'erreur, voici quelques conseils :***

| | Savoir | Pratique |
|---|---|---|
| Ex: 1 | Définition 1 | |
| Ex: 2 | Propriété 2 | |
| Ex: 3 | Propriété 2 | |
| Ex: 4 | Propriété 2 | |
| Ex: 5 | Propriété 1 | |
| Ex: 6 | Propriété 2 | |
| Ex: 7 | | Exemple 1 |
| Ex: 8 | Définition 2 | |

***3) Exercices pour la remédiation voir R2 page : 248***

## OPERATION AVEC PUISSANCE

**18** Effectuer les calculs suivants :

$A = \frac{6^2 \times 4^2}{10^2}$ ; $B = 3^3 - 6 \times 4 + 8$

$C = 2^2 + 3 \times 6 + 6^2 - (4^2 - 6^2)$

$D = (4^2 + 6)^{-1} \times 3 \times (3^2 + 1)$.

**19** Effectuer les calculs suivants :

$a = (-6)^2 + 2 \times 5 + 9 : (-3)$

$b = -6^2 + 2 \times (5 + 9) : (-3)$

$c = -6^2 + (2 \times 5 + 9) : (-3)$

$d = -(6^2 + 2) \times 5 + [\,9 : (-3)]$

$e = -(6^2 + 2) \times (5 + 9) : (-3)]$

**20** Calculer :

$A = \left(-\frac{1}{3}\right)^4 + \left(\frac{1}{3}\right)^{-2}$

$B = \left[1 - \left(\frac{1}{3} + 2^{-1}\right)\right]^{-2}$

$C = \left(\frac{1}{3}\right)^{-3} + \left[\left(\frac{1}{2}\right)^{-2} + \left(\frac{1}{3}\right)^{-2}\right]^{-1}$

$D = 3^2 - \left(\frac{-2}{3}\right)^{-2} + (-1)^{2019} \times \left(\frac{5}{3}\right)^{-3}$.

**21** Sachant que : $a^3 = 13824$ et $a^5 = 7962624$.

*1)* Déterminer $a^2$ et $a^6$ sans calculer a.

*2)* En déduire a .

**22** Montrer que : $64^{20} = 32^{24}$.

**23** a et b sont deux nombres réels positifs tels que :

$b^2 = a$ et $a^2 = 3$

Montrer que : $\frac{1}{b^2}\left(\frac{b}{a}\right)^6 = \frac{1}{9}$ .

**24** a et b sont deux nombres réels non nuls tels que :

$a \neq b$ ; $a \neq 1$ ; $a \neq -1$.

Soit $n$ un nombre entier naturel.

Simplifier : $A = [a - (1 - a)^{-1}]^{-1} \times \left[\frac{a(a-2)+1}{a^2 - a + 1}\right]^{-1}$

$B = \frac{a^n b - a^{n+1}}{b^n a - b^{n+1}} \times \left(\frac{a}{b}\right)^{-n}$ .

**25** a et b sont deux nombres réels positifs non nuls et $n$ un entier naturel non nul.

Simplifier E et F :

$E = \left(\frac{b}{a}\right)^{-n} \times b^{n+1} \times a^{-n}$ ; $F = \frac{b^{n+1} + ba}{b^n + a}$ .

**26** a et b sont deux nombres réels non nuls.

$m$ et $n$ sont deux entiers relatifs.

Simplifier R et S : $R = \frac{a^n \times b^{m+n} + a^{m+n} \times b^n}{a \times b^{m+1} + a^{m+1} b}$

$S = \frac{4a^n + 4}{2a^{2n} + 2 + 4a^n}$

**27** Montrer que :

$2^{16} - 1 = (2^8 + 1)(2^4 + 1)(2^2 + 1)(2 + 1)$

**28** Déterminer un entier naturel a tel que :

$2a^2 \times a^3 = 6250$

**29** *1)* Démontrer que pour tout entier $n$ : $2^n = 2^{n+1} - 2^n$.

*2)* En déduire une valeur de S :

$S = 2^0 + 2^1 + 2^2 + .... + 2^{49} + 2^{50}$

## ÉCRITURE SCIENTIFIQUE

**30** Donner l'écriture scientifique de chacun des nombres suivants :

$H = 12 \times 10^{-8} \times 11 \times 10^{19}$

$I = \frac{345000}{0{,}00006}$

$J = 32 \times 10^{32} + 3456 \times 10^{29}$

$K = -235 \times 10^{27} + 0{,}005 \times 10^{31}$

$L = \frac{2500 \times 10^{-42} + 430 \times 10^{-41}}{68 \times 10^{14}}$

**31** Donner l'écriture scientifique de chacun des nombres suivants : $X = 5 \times 10^{-2} + 3 \times 10^{-3}$

$Y = \frac{132214 \times 10^{-3} - 2140000 \times 10^{-7}}{3 \times 10^{10}}$

## DETERMINER L'EXPOSANT D'UNE PUISSANCE

**32** Déterminer l'entier relatif $n$ dans chacun des cas suivants :

1) $9^{2n} = 3^4$ 2) $2^{n+1} = \dfrac{1}{8}$ 3) $\left(\dfrac{1}{125}\right)^n = 5^{-2n} \times 125$

**33** $n$ est un nombre entier relatif tel que :

$$15^{3n+5} = 3^{2n+6} \times 5^{4n+4}$$

Déterminer $n$ .

**34** Déterminer l'entier naturel $n$ tel que :

$$7(3^n + 3^{n+1} + 3^{n+2}) = 21^n \times 13.$$

**35** Déterminer l'entier $n$ sachant que :

$$\frac{16^{n-4} \times 2^{6n+1}}{128^{n-3}} = 4096$$

**36** Déterminer les entiers relatifs $m$ et $n$ tels que :

$$\frac{3200 \times 125}{2^{-4} \times 5^{-3}} = 2^m \times 5^n$$

## PROBLÈMES OUVERTS

**37** Montrer que :
- $5555555^2 = 4444444^2 + 3333333^2$
- $499999^2 + 999999 = 25 \times 10^{10}$

**38** Quel est le chiffre des unités de $3^{100}$?

**39** a et b sont deux nombres réels tels que :

$$a^{4036} + b^{4036} = (a^2 + b^2)\,(ab)^{2017}$$

*1)* Montrer que : $\left(\dfrac{a}{b}\right)^{2018} + \left(\dfrac{b}{a}\right)^{2018} = \dfrac{a}{b} + \dfrac{b}{a}$ .

*2)* En déduire que : $\left[\left(\dfrac{a}{b}\right)^{2018} - \dfrac{a}{b}\right]\left[1 - \left(\dfrac{b}{a}\right)^{2019}\right] = 0.$

## CHALLENGES

**40** Un litre d'air contient environ $55 \times 10^{20}$ atomes d'oxygène est la masse d'un atome d'oxygène est $\dfrac{53}{10^{27}}$ kilogramme.

*1)* Calculer en grammes la masse d'un atome d'oxygène dans un litre d'air.

Ecrire le résultat en utilisant une puissance de 10 puis donner l'écriture décimale correspondante.

*2)* Calculer en grammes la masse d'oxygène dans 10 litres d'air.

**41** Si : $x^3 = a^4$ et $y^4 = a^3$ et $z^6 = a^7$

comparer $x$ , y et z.

**42** Determiner l'entier relatif $x$ tel que :

$$\frac{16}{(a)^{x-2}} + a^{x-2} = 15$$

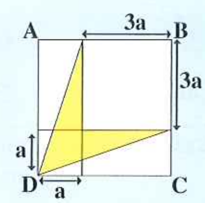
**43** Soit a et b deux nombres entiers tels que :

$$(1 + \sqrt{2})^{2020} = a + b\sqrt{2}.$$

Calculer : $a^2 - 2b^2$.

**44** ABCD est un carré.

Calculer S l'aire coloriée en fonction de a.




## SITUATIONS PROPOSÉES AUX OLYMPIADES

**Situation 1 : Montrer qu'il n'existe pas d'entier naturel $x$ tel que :** $6 \times 4^x - 7 \times 6^x + 6 \times 9^x = 0$

**Situation 2 : Ranger les nombres dans l'ordre croissant :** $2^{100}$ ; $3^{75}$ ; $5^{50}$

**Situation 3 :** Sachant que : $x^2 + y^2 = 10$ et $x^3y + x^2y^2 + xy^3 = 39.$

**Calculer** $x + y$.

# JE ME PRÉPARE À L'EXAMEN LOCAL

**45** *Exercice résolu*

*1)* Calculer : $A = -2^3 + 10^4 \times 10^{-2} + (-4)^2$

$$B = \left[\left(\frac{2}{25}\right)^2 - \left(\frac{5}{2}\right)^{-4}\right]^{-1}$$

*2)* Calculer C et donner le résultat en écriture scientifique : $C = 26{,}7 \times (10^{-4})^2 \times 5 \times 10^3$

**Correction : 45**

*1)* • **Calcul de A :**

On a : $A = -2^3 + 10^4 \times 10^{-2} + (-4)^2$

$A = -8 + 10^2 + 16$

$A = 8 + 100.$

Donc : $A = 108.$

• **Calcul de B :**

On a : $B = \left[\left(\frac{2}{25}\right)^2 - \left(\frac{5}{2}\right)^{-4}\right]^{-1}$

$B = \left[\left(\frac{2}{25}\right)^2 - \left(\frac{2}{5}\right)^4\right]^{-1}$

$B = \left(\frac{4}{625} - \frac{16}{625}\right)^{-1}$

$B = \left(-\frac{12}{625}\right)^{-1}$

Donc : $B = -\frac{625}{12}$

*2)* **Écriture scientifique de C :**

On a : $C = 26{,}7 \times (10^{-4})^2 \times 5 \times 10^3$

$C = 26{,}7 \times 5 \times 10^{-8} \times 10^3$

$C = 133{,}5 \times 10^{-5}$

$C = 1{,}335 \times 10^2 \times 10^{-5}$

Donc : $C = 1{,}335 \times 10^{-3}$ .

**46** *Exercice résolu*

*1)* Calculer : $A = \frac{2^{-2}}{2^{-1}} - \frac{3^2}{4} - (1 - 8^{-1})^{-1}$

*2)* Écrire B sous forme d'une puissance de 10:

$$B = 2^{17} \times 4^{-13} \times 5^{17} \times (2{,}5)^{-13}$$

*3)* Simplifier C : $C = \frac{(a^{-2}b^4)^2 \times c}{a^{-2}(b^4c)^{-1}}$

*4)* Soit $D = \frac{4{,}5 \times (10^{-4})^3 \times 26 \times 10^{-5}}{1{,}8 \times (10^{-2})^2}$

Donner l'écriture scientifique de D.

**Correction : 46**

*1)* **Calcul de A :**

On a : $A = \frac{2^{-2}}{2^{-1}} - \frac{3^2}{4} - (1 - 8^{-1})^{-1}$

$A = \frac{1}{2} - \frac{9}{4} - \left(\frac{8}{8} - \frac{1}{8}\right)^{-1}$

$A = \frac{2}{4} - \frac{9}{4} - \left(\frac{7}{8}\right)^{-1}$

$A = -\frac{7}{4} - \frac{8}{7}$

$A = -\frac{49}{28} - \frac{32}{28}.$

Donc : $A = -\frac{81}{28}.$

*2)* **Écrivons B en puissance de 10.**

On a : $B = 2^{17} \times 4^{-13} \times 5^{17} \times (2{,}5)^{-13}$

$B = (2^{17} \times 5^{17}) \times (4^{-13} \times 2{,}5^{-13})$

$B = (2 \times 5)^{17} \times (4 \times 2{,}5)^{-13}$

$B = 10^{17} \times 10^{-13}.$

Donc : $B = 10^4.$

*3)* **Simplification de C :**

On a : $C = \frac{(a^{-2}b^4)^2 \times c}{a^{-2}(b^4c)^{-1}}$

$C = \frac{a^{-4}b^8c}{a^{-2}b^{-4}c^{-1}}$

$C = \frac{a^{-4}}{a^{-2}} \times \frac{b^8}{b^{-4}} \times \frac{c}{c^{-1}}.$

Donc : $C = a^{-2}b^{12}c^2.$

*4)* **Écriture scientifique de D :**

$D = \frac{4{,}5 \times (10^{-4})^3 \times 26 \times 10^{-5}}{1{,}8 \times (10^{-2})^2}$

$D = \frac{4{,}5 \times 10^{-12} \times 26 \times 10^{-5}}{1{,}8 \times 10^{-4}}$

$D = \frac{4{,}5 \times 26}{1{,}8} \times \frac{10^{-12} \times 10^{-5}}{10^{-4}}$

$D = \frac{9 \times 5 \times 2 \times 13}{9 \times 2} \times \frac{10^{-12} \times 10^{-1} \times 10^{-4}}{10^{-4}}$

$D = 65 \times 10^{-13}.$

Donc : $D = 6{,}5 \times 10^{-12}.$

**47** *1)* Simplifier :

$$A = \left(\frac{2}{5}\right)^{-2} \times \left(-\frac{4}{25}\right)^{-3} \times \left(-\frac{5}{2}\right)^{-3}$$

$$B = (a^{-4}b^{-1}c^2)^{-3} \times \left[(a^{-2})^3 \times b^{-1}\right]^{-1}$$

# JE ME PRÉPARE À L'EXAMEN LOCAL

*2)* Donner l'écriture scientifique de C :

$$C = \frac{12 \times 10^{-46} - 0,003 \times 10^{-43}}{0,3 \times 10^{-12}}$$

**48**

Effectuer les calculs suivants:

$$a = \frac{4}{3} - \frac{1}{12} \times 4^3 - 6 \times \left(\frac{5}{3}\right)^2$$

$$b = \frac{15 \times 10^6 (2 \times 10^{-3})^2}{24 \times 10^3}$$

$$c = \frac{a^3 \times b^{-1} \times a^2}{(a^2)^2 \times (b^{-1})^{-2}}$$

**49**

*1)* Calculer $x = \left(\frac{3}{5}\right)^{-3} \times \left(\frac{2}{5}\right)^2 \times \frac{2^{-7}}{5^{-2}}$

*2)* On pose : $\alpha = \frac{4 \times 300^2 \times (10^{-4})^{-2}}{(0,01)^{-3}}$

***a.*** Montrer que $\alpha = 36 \times 10^6$

***b.*** Déterminer l'écriture scientifique de $\alpha$ .

*3)* Montrer $28 \times 6^n - 6^{n+1}$ est un multiple de 11.
(ou $n$ est un entier naturel)

**50**

On donne : $E = \frac{(a^3b^{-3})^4}{[(a^{-2})^{-5}b^3]^{-2}}$

***a.*** Montrer que : $E = \frac{a^{32}}{b^6}$ .

***b.*** Calculer E lorsque : $a = 3 \times 10^{-2}$ et $b = 27 \times 10^3$

***c.*** Donner l'écriture scientifique de E.

**51**

Calculer : $a = \left(\frac{9}{4}\right)^{2018} \times \left(\frac{16}{36}\right)^{2018}$

$b = (\sqrt{17})^8 \times (\sqrt{17})^5$

$c = \frac{2^{-5} \times 8^{-3}}{a^{-16} \times 2^2}$

**52**

a et b sont deux nombres réels non nuls.

Simplifier E :

$$E = \frac{(a^3b)^{-3} \times (ab^3)^3 \times (a^{-2}b^2)^3}{(ab^{-1})^{-2} \times (a^{-1}b^2)^3 \times b^{-4}}$$

*1)* Calculer : $a = \left[\left(\frac{5}{3}\right)^2 + \left(\frac{3}{7}\right)^{-2}\right]^{-1}$

*2)* Montrer que : $\left[\frac{(3\sqrt{5})^2}{135}\right]^{-2} = 9$

**53**

*1)* Calculer :

$$a = \left(2^{-2} + \frac{3}{4}\right)^{100}$$

$$b = 2^{-2} \times (2,5)^5 \times 5^{-3} \times 4^5$$

$$c = \frac{7^{-n+1} \times 7^n}{7^{3n}} \times (343)^n.$$

**54**

*1)* Calculer : $a = \frac{1 - \left(\frac{3}{4}\right)^{-2}}{\left(\frac{\sqrt{7}}{3}\right)^2}$

*2)* On considère les nombres b et c tels que :

$b = 38,2 \times 10^4$ et $c = 0,003 \times 10^8$

Donner l'écriture scientifique de b + c .

**55**

*1)* Calculer : $E = \frac{3^2 \times 2^{-5} \times 6^{-1}}{2^{-6} \times 6^2 \times 3}$ .

*2)* Soit a et b deux nombres réels non nuls.

On pose : $F = \frac{(b^2)^{-1} \times a^7}{a^4b^{-6} \ a^{-1}b^5}$

Simplifier F .

**56**

Calculer les expressions suivantes et donner l'écriture scientifique du résultat :

$$A = \frac{0,24 \times 10^{-4} \times 0,1 \times 10^1}{0,75 \times (10^3)^3}$$

$$B = \frac{5,4 \times 10^{-7} \times 2400 \times 10^{-4}}{36 \times (10^{-7})^3}$$

$$C = \frac{1,8 \times 10^{-4} \times 28 \times 10^{-5}}{168 \times (10^{-3})^2}$$

$$D = \frac{7,2 \times 10^7 \times 18 \times 10^{-6}}{192 \times (10^2)^{-10}}$$

# RACINES CARRÉES

## Prérequis :

* Théorème de Pythagore.
* Équations.
* Puissances.

## Un point d'histoire

**Démocrite** (–470 ; –370)

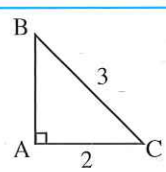
La date à laquelle la notion d'irrationalité a été découverte se situe entre le début du V[e] siècle avant J. - C. et le premier quart du IV[e] siècle avant J. - C. Elle est antérieure au livre de Démocrite «des nombres irrationnels et des solides» .

La découverte est parfois attribuée à Hippase de Métaponte (VI[e] avant J. - C.) pour ses travaux sur le rapport, appelé maintenant nombre d'or, de la longueur de la diagonale d'un pentagone régulier sur celle de ses côtés.

## TEST DIAGNOSTIQUE : Je m'évalue

### CHOISIR LA BONNE RÉPONSE.

**Pour chaque question, cocher la bonne réponse en justifiant.**

| | Réponses : | | |
|---|---|---|---|
| 36 est le carré de ... | 18 | 6 | 72 |
| Le carré de 7 est égal à ... | $2 \times 7$ | $7^2$ | $2^7$ |
| L'équation $x^2 = 4$ a pour solution ... | uniquement 2 | uniquement –2 | 2 et –2 |
| $\left(\frac{12}{7}\right)^2$ est égal à ... | $\frac{24}{7}$ | $\frac{144}{7^2}$ | $\frac{24}{14}$ |
| Le carré de –6 est égal à ... | –12 | –36 | 36 |
| ABC est un triangle rectangle en A, alors AB est égale à ....   | 5 | $\sqrt{5}$ | 2,23 |
| $4x^2$ est égale à ... | $(4x)^2$ | $8x$ | $(2x)^2$ |

Solutions page : 246

# ACTIVITÉS : JE DÉCOUVRE

## Activité 1 Racine carrée et calculatrice

a , b , $x$ et y sont des nombres réels positifs.

1 Compléter le tableau suivant :

Opération directe → / ← Opération indirecte

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| a | 0 | 1 | ... | ... | ... | ... | y | $x$ |
| $a^2$ | ... | ... | 4 | 9 | 16 | 25 | 5 | b |

2 *a.* Donner la relation entre $x$ et b .

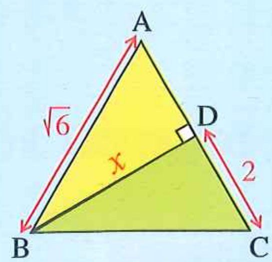
*b.* Que représente $x$ pour le réel positif b.

3 Utiliser la touche $\sqrt{}$ de la calculatrice et donner une valeur approchée au dixième par défaut de y.

## Activité 2 Théorème de Pythagore et racine carrée

Sur la figure ci-contre:

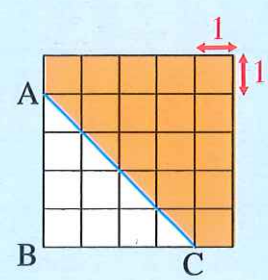
- ABC est un triangle isocèle en A .
- BCD est un triangle rectangle en D.
- CD = 2 et $AB = \sqrt{6}$




1 Montrer que : $x^2 = (\sqrt{6})^2 - (\sqrt{6} - 2)^2$.

2 Calculer $x$.

## Activité 3 Démonstration d'une formule




On considère la figure ci-contre :

1 Calculer de deux manières différentes la longueur AC .

2 Montrer que : $\sqrt{32} = 4\sqrt{2}$

## Activité 4 Règles de calcul sur les racines carrées

$x$ et y sont deux nombres réels positifs.

1 *a.* Montrer que : $\sqrt{x \times y} = \sqrt{x} \times \sqrt{y}$ .

*b.* En déduire que : $\sqrt{a^2 b} = a\sqrt{b}$ où a et b sont deux nombres réels postifs.

2 Montrer que : $\frac{1}{\sqrt{y}} = \frac{\sqrt{y}}{y}$ avec $y \neq 0$.

3 Calculer (**sans utiliser la calculatrice**) : $\sqrt{6} \times \sqrt{216}$ ; $\frac{\sqrt{27}}{\sqrt{3}}$

4 *a.* En utilisant l'identité remarquable : $x^2 - y^2 = (x + y)(x - y)$, montrer que : $\sqrt{a} + \sqrt{b} = \frac{a - b}{\sqrt{a} - \sqrt{b}}$

*b.* Écrire les nombres suivants sans radical au dénominateur : $\frac{7}{\sqrt{12} - \sqrt{5}}$ ; $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3} + \sqrt{5}}$ ; $\frac{\sqrt{2} - 2}{\sqrt{2} + 2}$

# SAVOIR
## Je révise

## 1 RACINE CARRÉE D'UN NOMBRE RÉEL POSITIF .

**Définition**

La racine carrée d'un nombre **positif** $a$ est le nombre **positif** dont le carré égal à $a$.

On le note $\sqrt{a}$ .

Donc, pour tout nombre **positif** $a$ : $(\sqrt{a})^2 = a$ et $\sqrt{a^2} = a$ .

Le symbole $\sqrt{\ }$ se nomme **radical**.

**Exemples :**

1) $\sqrt{81} = 9$ car $9^2 = 81$

2) $\sqrt{0{,}04} = 0{,}2$ car $(0{,}2)^2 = 0{,}04$

3) $\sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{2}{3}$ car $\left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}$

## 2 L' ÉQUATION $x^2 = a$ D'INCONNUE $x$

**Propriété 1**

Soit a un nombre réel donné.

1/ Si $a > 0$, alors l'équation : $x^2 = a$ admet deux solutions : $\sqrt{a}$ et $-\sqrt{a}$ .

2/ Si $a = 0$, alors l'équation : $x^2 = 0$ admet une solution : $0$ .

3/ Si $a < 0$, alors l'équation : $x^2 = a$ n'a pas de solution .

**Exemples :**

1) Résolvons l'équation : $x^2 = 3$.

L'équation : $x^2 = 3$ a deux solutions $\sqrt{3}$ et $-\sqrt{3}$ .

2) Résolvons l'équation : $x^2 = -9$.

L'équation : $x^2 = -9$ n'a pas de solution car il n'existe pas de nombre réel dont le carré est $-9$.

## 3 OPÉRATIONS SUR LES RACINES CARRÉES

### 1. Racine carrée d'un produit.

**Propriété 2**

Soit a et b deux nombres réels positifs .

- $\sqrt{a \times b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$
- $\sqrt{a^2 b} = a\sqrt{b}$

**Autrement dit :** La racine carrée d'un produit est égale au produit des racines carrées.

**Exemples :** *1)* $\sqrt{5^2 \times 2} = \sqrt{5^2}\sqrt{2} = 5\sqrt{2}$ *2)* $\sqrt{2} \times \sqrt{18} = \sqrt{2 \times 18} = \sqrt{36} = 6$

### *2. Racine carrée d'un quotient.*

**Propriété 3** Soit a et b deux nombres réels positifs $(b \neq 0)$ :

- $\sqrt{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$
- $\sqrt{\dfrac{1}{b}} = \dfrac{1}{\sqrt{b}}$

**Autrement dit :** La racine carrée d'un quotient est égale au quotient des deux racines carrées.

**Exemples :** *1)* $\sqrt{\dfrac{100}{49}} = \dfrac{\sqrt{100}}{\sqrt{49}} = \dfrac{10}{7}$ *2)* $\dfrac{\sqrt{20}}{\sqrt{45}} = \sqrt{\dfrac{4\times5}{9\times5}} = \sqrt{\dfrac{4}{9}} = \dfrac{2}{3}$.

**ATTENTION ! :** Pour $a > 0$ et $b > 0$, $\sqrt{a+b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b}$ et $\sqrt{a-b} \neq \sqrt{a} - \sqrt{b}$ $(a - b > 0)$

**Exemples :** *1)* $\sqrt{16} + \sqrt{9} = 4 + 3 = 7$ et $\sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5$

donc : $\sqrt{16+9} \neq \sqrt{16} + \sqrt{9}$.

*2)* $\sqrt{169-144} = \sqrt{25} = 5$ et $\sqrt{169} - \sqrt{144} = 13 - 12 = 1$

donc : $\sqrt{169-144} \neq \sqrt{169} - \sqrt{144}$.

### *3. Expression conjuguée.*

**Propriété 3** Soit a et b deux nombres réels positifs : $\sqrt{a} - \sqrt{b} = \dfrac{a - b}{\sqrt{a} + \sqrt{b}}$

**$\sqrt{a} + \sqrt{b}$ est l'expression conjuguée de $\sqrt{a} - \sqrt{b}$**

**Exemples :** *1)* $\sqrt{2} - \sqrt{6} = \dfrac{2-6}{\sqrt{2}+\sqrt{6}} = \dfrac{-4}{\sqrt{2}+\sqrt{6}}$ *2)* $\dfrac{3}{\sqrt{7}-2} = \dfrac{3(\sqrt{7}+2)}{7-4} = \sqrt{7} + 2$

# PRATIQUE
## J'applique

## 1 ÉCRIRE UN NOMBRE SOUS LA FORME $a\sqrt{b}$

**Exemple 1**

Écrire les nombres E et F sous la forme $a\sqrt{b}$ où a et b sont deux entiers naturels, b étant le plus petit possible. $E = \sqrt{48}$ ; $F = \sqrt{32} + 3\sqrt{50} - 2\sqrt{18}$

- On a : $E = \sqrt{48}$

  On écrit 48 sous la forme d'un produit dont l'un des facteurs est le plus grand carré entier possible.

  On a : $48 = 4 \times 12 = 4 \times 4 \times 3 = 4^2 \times 3$ .

  Donc : $E = \sqrt{48} = \sqrt{4^2 \times 3}$

  D'où : $E = 4\sqrt{3}$ .

- On a : $F = \sqrt{32} - 3\sqrt{50} - 2\sqrt{18}$

  On prend le petit radicande : 18

  On a : $18 = 9 \times 2$

  S'il existe un facteur commun, ça ne peut être que $\sqrt{2}$ .

  On divise les autres radicandes par 2 .

  $32 : 2 = 16$ et $50 : 2 = 25$

  Donc : $F = \sqrt{16 \times 2} + 3\sqrt{25 \times 2} - 2\sqrt{9 \times 2}$

  $F = 4\sqrt{2} + 3 \times 5\sqrt{2} - 2 \times 3\sqrt{2}$

  $F = (4 + 15 - 6)\sqrt{2}$

  D'où : $F = 13\sqrt{2}$ .

## 2 RENDRE RATIONNEL

**Exemple 2**

Écrire le nombre A sans radical au dénominateur : $A = \dfrac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}} - \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}$ .

On a : $A = \dfrac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}} - \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}$

On multiplie chaque terme de A par l'expression conjuguée du dénominateur.

$$A = \frac{(2+\sqrt{3})\ (2+\sqrt{3})}{(2-\sqrt{3})\,(2+\sqrt{3})} - \frac{\sqrt{2}\,(\sqrt{2}-\sqrt{3})}{(\sqrt{2}+\sqrt{3})(\sqrt{2}-\sqrt{3})}$$

$$A = \frac{(2+\sqrt{3})^2}{2^2-(\sqrt{3})^2} - \frac{\sqrt{2}\times\sqrt{2}-\sqrt{2}\times\sqrt{3}}{(\sqrt{2})^2-(\sqrt{3})^2}$$

$$A = \frac{2^2+(\sqrt{3})^2+2(2\times\sqrt{3})}{4-3} - \frac{2-\sqrt{6}}{2-3}$$

$$A = \frac{4+3+4\sqrt{3}}{1} - \frac{2-\sqrt{6}}{-1}$$

$$A = 7+4\sqrt{3}+2-\sqrt{6}$$

Donc : $A = 9+4\sqrt{3}-\sqrt{6}$.

## 3 RÉSOUDRE UNE ÉQUATION

**Exemple 3**

Résoudre l'équation suivante : $\sqrt{3}\,(x^2-3)-(x^2-3)(x-2\sqrt{3})=0$

On a : $\sqrt{3}\,(x^2-3)-(x^2-3)(x-2\sqrt{3})=0$

On factorise par $x^2-3$, on obtient :

$$(x^2-3)\,[\sqrt{3}-(x-2\sqrt{3})]=0$$

$$(x^2-3)\,(\sqrt{3}-x+2\sqrt{3})=0$$

$$(x^2-3)\,(-x+3\sqrt{3})=0$$

Un produit est nul si l'un de ses facteurs est nul.

Donc :

$$x^2-3=0 \text{ ou } -x+3\sqrt{3}=0$$

$$x^2=3 \text{ ou } x=3\sqrt{3}$$

$$x=\sqrt{3} \text{ ou } x=-\sqrt{3} \text{ ou } x=3\sqrt{3}$$

D'où : $-\sqrt{3}$ , $\sqrt{3}$ et $3\sqrt{3}$ sont les solutions de l'équation proposée.

# INVESTISSEMENT
## Je m'entraîne

### POUR RÉVISER SON COURS

**1** Recopier et relier chaque nombre de la 1[ère] colonne à son carré de la 2[ème] colonne.

| | |
|---|---|
| $7$ | $\frac{81}{121}$ |
| $-3$ | $49$ |
| $-0{,}4$ | $0{,}16$ |
| $5^2$ | $9$ |
| $\frac{9}{11}$ | $10^{-6}$ |
| $10^{-3}$ | $1600$ |
| $2^2+6^2$ | $5^4$ |

**2** Recopier et compléter les égalités suivantes :

$\sqrt{\cdots} = 25$ ; $\sqrt{1{,}96} = \cdots$

$\sqrt{(\ldots)^2} = 111$ ; $\sqrt{\frac{36}{\cdots}} = \frac{\cdots}{13}$

$(-\sqrt{\ldots})^2 = 0{,}07$ ; $-\sqrt{81} = \ldots$

**3** Recopier et relier les nombres égaux.

| | |
|---|---|
| $\sqrt{28}$ | $2\sqrt{7}$ |
| $\sqrt{72}$ | $6\sqrt{3}$ |
| $\sqrt{20}$ | $3\sqrt{3}$ |
| $\sqrt{27}$ | $3\sqrt{6}$ |
| $\sqrt{54}$ | $2\sqrt{5}$ |
| $\sqrt{108}$ | $6\sqrt{2}$ |

**4** Calculer :

$\sqrt{98^2}$ ; $(4\sqrt{3})^2$ ; $-5(\sqrt{11})^2$ ; $\sqrt{(-8)^2}$ ; $\sqrt{0{,}04a^4}$

$\sqrt{100} - \sqrt{16}$ ; $\sqrt{(169-25)^2}$ ; $\sqrt{64+6^2}$ ; $\left(\frac{\sqrt{2017}}{\sqrt{2016}}\right)^2$

$\sqrt{3^2 \times 7^4}$ ; $\sqrt{6^2+3^2+2^2}$ ; $\sqrt{\frac{0{,}49 \times 0{,}09}{0{,}81 \times 0{,}36}}$

**5** a est un nombre réel positif. Simplifier :

*1)* $\sqrt{36a^2}$ *2)* $\sqrt{144a^2+25a^2}$

*3)* $\sqrt{\frac{a^2}{16}} + \sqrt{\frac{a^2}{9}}$ *1)* $\sqrt{225a^2} - \sqrt{121a^2}$

**6** Sachant que : $567^2 = 321489$, calculer mentalement :

$\sqrt{321489}$ ; $\sqrt{32{,}1489}$ ; $\sqrt{32148900}$.

**7** Écrire chacun des nombres donnés sans radical.

$\sqrt{0{,}0081}$ ; $\sqrt{144}$ ; $\sqrt{13^2}$ ; $\sqrt{(-10)^8}$ ;

$\sqrt{\frac{1}{49}}$ ; $\sqrt{\frac{0{,}04}{625}}$ ; $\sqrt{\frac{1{,}21}{0{,}64}}$

**8** Écrire chacun des nombres suivants sous la forme a où a est un rationnel positif.

$5\sqrt{3}$ ; $2\sqrt{7}$ ; $6\sqrt{6}$ ; $\frac{3}{4}\sqrt{32}$ ; $13\sqrt{7}$ ; $7\frac{\sqrt{338}}{14}$.

**9** Calculer les produits suivants :

$\sqrt{3} \times \sqrt{12}$ ; $\sqrt{7} \times \sqrt{28}$ ; $\sqrt{19} \times \sqrt{76}$

$\sqrt{50} \times \sqrt{\frac{1}{2}}$ ; $\sqrt{\frac{9}{10}} \times \sqrt{\frac{40}{81}}$ ; $\sqrt{55} \times \sqrt{33} \times \sqrt{15}$.

**10** On donne :

$a = (\sqrt{5}-1)^2$ ; $b = (\sqrt{2}+1)^2$ ; $c = (\sqrt{5}-1)(\sqrt{2}+1)$

Calculer A : $A = \sqrt{a+2c+b}$

### RENDRE RATIONNEL

**11** Rendre rationnel les dénominateurs des nombres suivants :

*1)* $\frac{2}{\sqrt{3}}$ ; $\frac{-\sqrt{5}}{\sqrt{2}}$ ; $\frac{1+\sqrt{7}}{\sqrt{7}}$ ; $\frac{-1+\sqrt{6}}{2\sqrt{6}}$

*2)* $\frac{2\sqrt{2}-3}{2\sqrt{2}+3}$ ; $\frac{\sqrt{3}-\sqrt{5}}{2+\sqrt{5}}$ ; $\frac{\sqrt{48}-2\sqrt{75}}{\sqrt{27}+\sqrt{12}}$

*3)* $\frac{2}{1-\sqrt{2}+\sqrt{3}}$ ; $\frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}-\sqrt{5}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}}$

**12** Rendre rationnel les dénominateurs des nombres suivants puis calculer :

$a = \frac{3\sqrt{3}-2}{\sqrt{3}-1} + \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$ ; $b = \frac{\sqrt{5}-\sqrt{6}}{\sqrt{5}+\sqrt{6}} - \frac{\sqrt{5}-2}{\sqrt{6}-\sqrt{5}}$

## RÉSOUDRE UNE ÉQUATION

**13** Résoudre les équations suivantes :

*1)* $4x^2 - 3 = 13$ *2)* $7x^2 - 2 = 3x^2 + 2$

*3)* $x^2 + 9 = 0$ *4)* $x^2 = \sqrt{3} + 1$

**14** *1)* Calculer : $(7 - 2\sqrt{2})^2$ .

*2)* En déduire : $\sqrt{57 - 28\sqrt{2}}$ .

*3)* Résoudre l'équation : $x^2 = 57 - 28\sqrt{2}$

**15** Déterminer $x$ et y dans les cas suivants :

*a.* $\sqrt{x^2 - 6x + 9} + \sqrt{y^2 - 1} = 0$

*b.* $\sqrt{x - 2} + \sqrt{2 - x} + 5 = y$

**16** Résoudre l'équation :

$$x\left(\sqrt{\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}}\right) = \frac{1}{2}$$

## CALCULATRICE

**17** *1)* Exercice à faire d'abord avec la calculatrice puis sans la calculatrice :

Montrer que $\sqrt{2}$ et (10/7) sont voisins, mais pas égaux.

*2)* Avec la calculatrice, comparer à présent

*a.* $\sqrt{2}$ et $\dfrac{19\,601}{13\,860}$

*b.* $\sqrt{2}$ et $\dfrac{768\,398\,401}{543\,339\,720}$

*3)* Pour démontrer que $\dfrac{19\,601}{13\,860} \neq \sqrt{2}$.

*a.* Calculer d'abord le carré de 19 601 à l'aide des produits remarquables :

$$(19\,601)^2 = (19\,600 + 1)^2 = ...$$

*b.* Calculer $13\,860^2 = (1386 \times 10)^2$

*c.* En déduire que $\dfrac{19\,601}{13\,860} \neq \sqrt{2}$.

*4)* En faisant de simples considérations sur la parité du dénominateur, démontrer que $\sqrt{2} \neq \dfrac{768\,398\,401}{543\,339\,720}$.

## MON BILAN

***1) Indiquer la bonne réponse par A , B ou C :***

| | A | B | C |
|---|---|---|---|
| 1 La racine carrée de 16 est ... | 8 | 4 | $-4$ |
| 2 $\sqrt{(-3)^2}$ est égale à : ... | est égale à 3 | est égale à $-3$ | n'existe pas |
| 3 $\sqrt{45}$ est égale à : ... | $5\sqrt{3}$ | $-5\sqrt{3}$ | $\sqrt{5}$ |
| 4 $\dfrac{\sqrt{27}}{\sqrt{48}}$ est égale à : ... | $\frac{3}{4}$ | $\frac{4}{3}$ | $\frac{2}{3}$ |
| 5 $\sqrt{3} \times \sqrt{14}$ est égale à : ... | $3\sqrt{14}$ | $\sqrt{42}$ | $7\sqrt{12}$ |
| 6 $\dfrac{1}{\sqrt{7}}$ est égale à : ... | $-\sqrt{7}$ | $\sqrt{7}$ | $\sqrt{\frac{1}{7}}$ |
| 7 $\dfrac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}$ est égale à : ... | $7 + 4\sqrt{3}$ | $7 - 4\sqrt{3}$ | 1 |
| 8 L'équation $x^2 = 6$ ... | admet deux solutions distincts | admet une seule solution | n'a pas de solution |

Corrections page : 247

***2) En cas d'erreur, voici quelques conseils :***

| | Savoir | Pratique |
|---|---|---|
| Ex: 1 | Définition | |
| Ex: 2 | Définition | |
| Ex: 3 | Propriété 2 | |
| Ex: 4 | Propriété 3 | |
| Ex: 5 | Propriété 1 | |
| Ex: 6 | Propriété 3 | |
| Ex: 7 | | Exemple 2 |
| Ex: 8 | Propriété 1 | |

***3) Exercices pour la remédiation voir R3 page : 248***

# APPROFONDISSEMENT
## Je recherche

### SIMPLIFICATION

**18** a et b sont deux nombres réels positifs non nuls.

Simplifier :

$$A = \sqrt{\frac{25a^2}{9}} \quad ; \quad B = \frac{1}{\sqrt{b}} \times \sqrt{\frac{b}{a}} \times \sqrt{ba}$$

$$C = \sqrt{\frac{b}{a}} \times \sqrt{b^2 a} \times \frac{1}{\sqrt{b}} \quad ; \quad D = \sqrt{b^3} \times \sqrt{ab} \times \sqrt{b}$$

$$E = \frac{\sqrt{ba^3} \times \sqrt{ab^2} \times \sqrt{(ba)^5}}{\sqrt{ab^4} \times \sqrt{ba^6}}.$$

**19** Simplifier :

$D = 3\sqrt{8} - \sqrt{32} + \sqrt{72} + 3\sqrt{128}$

$E = 2\sqrt{80} - \sqrt{45} + \sqrt{20}$

$G = \sqrt{125} - 3\sqrt{45} - \sqrt{20} - 2\sqrt{80}$

$H = \sqrt{36a} - \sqrt{64a} + 2\sqrt{16a}$ (où $a > 0$)

$I = 2\sqrt{25ab^2} + \sqrt{16ab^2} - 4\sqrt{9ab^2}$ (où $a > 0$ et $b > 0$)

$J = \sqrt{\sqrt{961} - \sqrt{729}}$

$K = \sqrt{2\sqrt{45} - 3\sqrt{20}}$

**20** Simplifier :

$N = \sqrt{\sqrt{49} + 2} - 3\sqrt{25}$

$M = (\sqrt{5} + 3)(\sqrt{5} - 3) + (\sqrt{5} + 2)^2$

$O = \sqrt{7 + 2\sqrt{6}} \times \sqrt{7 - 2\sqrt{6}}$

$P = \sqrt{20 - 8\sqrt{6}} \times \sqrt{45 + 18\sqrt{6}}$

$Q = \sqrt{2}\sqrt{\sqrt{10} - \sqrt{2}} \times \sqrt{\sqrt{10} + \sqrt{2}}.$

**21** Écrire les nombres donnés sans radical.

$X = \sqrt{17 + \sqrt{60 + \sqrt{14 + \sqrt{4}}}}$

$Y = \sqrt{75 + \sqrt{41 - \sqrt{3^2 + \sqrt{16^2}}}}$

$Z = \sqrt{6 + \sqrt{6 + \sqrt{6 + \sqrt{9}}}}$

$W = \sqrt{\left(\frac{5}{6}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 - \left(\frac{1}{3}\right)^2 - \left(\frac{1}{6}\right)^2}$

**22** On considère l'expression : $a = \sqrt{7 + 4\sqrt{3}} + \sqrt{7 - 4\sqrt{3}}$

*1)* Calculer $a^2$ :

*2)* En déduire une écriture simplifiée de a.

**23** Soit : $\sqrt{a} = \sqrt{5} + \sqrt{3}$ et $b = \sqrt{5} - \sqrt{3}$.

*1)* Calculer $a^2$, $b^2$, $a \times b$.

*2)* Montrer que $\frac{a}{b} + \frac{b}{a}$ est un entier relatif.

*3)* Simplifier $\sqrt{14 + 6\sqrt{5}}$.

### DÉVELOPPEMENT

**24** a et b sont deux nombres réels positifs tels que $a \geq b$.

Montrer que : $\sqrt{\sqrt{a} + \sqrt{b}} + \sqrt{\sqrt{a} - \sqrt{b}} = \sqrt{2}\sqrt{\sqrt{a} + \sqrt{a - b}}.$

$\sqrt{\sqrt{a} + \sqrt{b}} - \sqrt{\sqrt{a} - \sqrt{b}} = \sqrt{2}\sqrt{\sqrt{a} - \sqrt{a - b}}.$

**25** a et b sont deux nombres réels positifs.

Montrer que : $(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 + (\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 = 2\,(a + b).$

$(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 - (\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 = 4\sqrt{ab}.$

**26** a et b sont deux nombres réels tels que : $a > 1$ et $b \geq 0$

Montrer que :

$$\sqrt{b} \times \frac{\sqrt{1 + \frac{2a}{1 + a^2}} + \sqrt{1 - \frac{2a}{1 + a^2}}}{\sqrt{b + \frac{2ab}{1 + a^2}} - \sqrt{b - \frac{2ab}{1 + a^2}}} = a$$

**27** a et b sont deux nombres réels tels que $a^2 > b$.

*1)* Montrer que :

$$\sqrt{a + \sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 - b}}{2}} + \sqrt{\frac{a - \sqrt{a^2 - b}}{2}}$$

$$\sqrt{a - \sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 - b}}{2}} - \sqrt{\frac{a - \sqrt{a^2 - b}}{2}}$$

*2)* En déduire l'écriture simplifiée de chacun des nombres suivants :

$\sqrt{5 + \sqrt{24}}$ ; $\sqrt{7 - 4\sqrt{3}}$ ; $\sqrt{19 + 6\sqrt{2}}$

$\sqrt{79 - 24\sqrt{7}}$ ; $\sqrt{43 + 30\sqrt{2}}$

**28** a , b , c , $x$ , y , et z sont des nombres réels strictement positifs tels que : $\frac{a}{x} = \frac{b}{y} = \frac{c}{z}$

Démontrer que : $\sqrt{ax} + \sqrt{by} + \sqrt{cz} = \sqrt{(a + b + c)(x + y + z)}$.

**29** $x$ et $y$ sont deux nombres réels positifs tels que : $\sqrt{x+1}-\sqrt{y+1}=\sqrt{x}-\sqrt{y}$ . Montrer que : $x = y$

**30** Montrer que : $\dfrac{1}{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\dfrac{1}{1-\sqrt{2}-\sqrt{3}}+\sqrt{\dfrac{3}{2}}=1.$

## PROBLÈMES OUVERTS

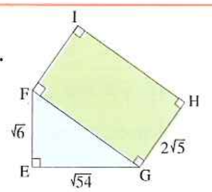
**31** Soit $x$ un nombre réel positif tel que : $x-2\sqrt{\dfrac{3}{x}}=5$

Calculer : $x-\sqrt{3x}$

**32** Simplifier : $E=\sqrt{10+4\sqrt{6}}-\sqrt{15+6\sqrt{6}}$

**33** *1)* Calculer l'aire du triangle EFG.

*2)* Calculer l'aire du rectangle FGHI.




**34** Soit b tel que : $b^2=\sqrt{6}+\sqrt{5}$

Calculer en fonction de b l'expression : $\sqrt{\sqrt{6}+1}+\sqrt{\sqrt{6}-1}$

**35** Soit $x$ un nombre réel positif tel que : $x+\sqrt{x}=1$

Calculer : $\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^{2022}$

**36** $x$ est nombre réel positif tel que :

$$x+\frac{1}{x}=5 \qquad \text{et} \qquad x^2+\frac{1}{x^3}=8$$

Calculer $x^3+\dfrac{1}{x^3}$ .

**37** $x$ est un nombre réel positif tel que : $x^2+\dfrac{1}{x^2}=3$

Calculer $\sqrt{x}+\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ .

## CHALLENGES

**38** a et b sont deux nombres réels positifs tels que :

$$a-\sqrt{b}=4 \quad \text{et} \quad a^2-b=20$$

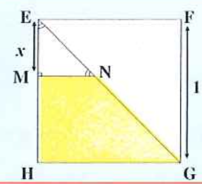
Calculer ab.

**39** a et b sont deux nombres réels tels que :

$$a^3=\sqrt{3}+\sqrt{2} \quad \text{et} \quad b^3=\sqrt{3}-\sqrt{2}$$

Calculer : $\dfrac{1}{a+1}+\dfrac{1}{b+1}$

**40** Déterminer $x$ pour que l'aire coloriée soit égale au quart de l'aire du carré EFGH .

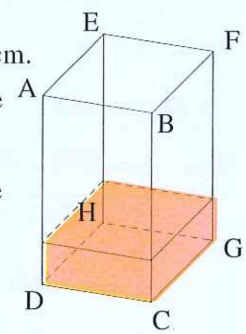



**41** Une boîte a la forme d'un parallélépipède rectangle ABCDEFGH tel que :

ABEF est un carré et AD = 25 cm.

Cette boîte est remplie de liquide au quart.

Sachant que le volume de liquide versée est 260 cm3 , calculer alors DC.




**42** Montrer que : $\sqrt{3+2\sqrt{2}}+\sqrt{3-2\sqrt{2}}=\sqrt{8}$

$\sqrt{12-6\sqrt{3}}-\sqrt{21+12\sqrt{3}}=-3\sqrt{3}.$

## SITUATIONS PROPOSÉES AUX OLYMPIADES

**Situation 1** : $x$ est un nombre réel. tel que : $x^2-3x=8$

**Calculer :** $\sqrt{\dfrac{x-3}{x}}-\sqrt{\dfrac{x}{x-3}}$

**Situation 2** : a , b et c sont des réels strictement positifs tels que : a + c = 2b.

**Montrer que :** $\dfrac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}+\dfrac{1}{\sqrt{b}+\sqrt{c}}=\dfrac{2}{\sqrt{a}+\sqrt{c}}.$

**Situation 3** : $x$ est un nombre strictement positif. Sachant que : $\dfrac{x^3+1}{x^2-1}=x+\sqrt{\dfrac{6}{x}}.$

**Calculer :** $x+\dfrac{1}{x}.$

**43** ***Exercice résolu***

*1)* Calculer :

$a = \sqrt{35} \times \sqrt{\dfrac{5}{7}}$ ; $b = 2\sqrt{48} - \sqrt{75} - \dfrac{1}{6}\sqrt{108}$

$c = \left(\sqrt{6}\right)^5 \times \left(\dfrac{\sqrt{6}}{2}\right)^{-5}$ ; $d = (\sqrt{2}+2)^2 - \sqrt{2}(2\sqrt{2}-1)$

*2)* Montrer que e est un nombre entier relatif où :

$$e = \frac{1}{\sqrt{5}+2} - \frac{1}{\sqrt{5}-2}$$

*3)* On considère l'expression F : $F = x(x+\sqrt{7}) + x^2 - 7$

***a .*** Factoriser F .

***b .*** Déterminer les valeurs de $x$ telles que : $F = 0$ .

**Correction : 43**

***1)*** ● **Calcul de a :**

On a : $a = \sqrt{35} \times \sqrt{\dfrac{5}{7}}$

$a = \sqrt{35 \times \dfrac{5}{7}} = \sqrt{5 \times 5} = 5$

Donc : $a = 5$ .

● **Calcul de b :**

On a : $b = 2\sqrt{48} - \sqrt{75} - \dfrac{1}{6}\sqrt{108}$

$b = 2\sqrt{4^2 \times 3} - \sqrt{5^2 \times 3} - \dfrac{1}{6}\sqrt{6^2 \times 3}$

$b = 2 \times 4\sqrt{3} - 5\sqrt{3} - \dfrac{1}{6} \times 6\sqrt{3}$

$b = (8 - 5 - 1)\sqrt{3}$ .

Donc : $b = 2\sqrt{3}$.

● **Calcul de c :**

On a : $c = \left(\sqrt{6}\right)^5 \times \left(\dfrac{\sqrt{6}}{2}\right)^{-5}$

$c = \left(\sqrt{6}\right)^5 \times \left(\dfrac{2}{\sqrt{6}}\right)^5$

$c = \left(\sqrt{6} \times \dfrac{2}{\sqrt{6}}\right)^5$

$c = 2^5$

Donc : $c = 32$ .

● **Calcul de d :**

On a : $d = (\sqrt{2}+2)^2 - \sqrt{2}(2\sqrt{2}-1)$

$d = (\sqrt{2})^2 + 2^2 + 2(2 \times \sqrt{2}) - \sqrt{2} \times 2\sqrt{2} + \sqrt{2} \times 1$

$d = 2 + \cancel{4} + 4\sqrt{2} - \cancel{4} + \sqrt{2}$ .

Donc : $d = 2 + 5\sqrt{2}$

***2)*** **Montrons que e est un entier relatif.**

On a : $e = \dfrac{1}{\sqrt{5}+2} - \dfrac{1}{\sqrt{5}-2}$

$e = \dfrac{1\,(\sqrt{5}-2)}{(\sqrt{5}+2)(\sqrt{5}-2)} - \dfrac{1\,(\sqrt{5}+2)}{(\sqrt{5}-2)(\sqrt{5}+2)}$

$e = \dfrac{\sqrt{5}-2}{5-4} - \dfrac{\sqrt{5}+2}{5-4}$

$e = \cancel{\sqrt{5}} - 2 - \cancel{\sqrt{5}} - 2$

$e = -4$.

or : $-4$ est un entier relatif,

donc : **e** est un nombre entier relatif.

***3)a.*** **Factorisation de F :**

On a : $F = x(x+\sqrt{7}) + x^2 - 7$

$F = x(x+\sqrt{7}) + x^2 - (\sqrt{7})^2$

$F = x(x+\sqrt{7}) + (x-\sqrt{7})(x+\sqrt{7})$

$F = (x+\sqrt{7})\,[x + (x-\sqrt{7}]$

$F = (x+\sqrt{7})\,(x + x - \sqrt{7})$.

Donc : $F = (x+\sqrt{7})\,(2x-\sqrt{7})$.

**b. Valeurs de $x$ pour que : F = 0.**

On a : $F = 0$

et $F = (x+\sqrt{7})\,(2x-\sqrt{7})$

Donc : $(x+\sqrt{7})\,(2x-\sqrt{7}) = 0$

$x + \sqrt{7} = 0$ ou $2x - \sqrt{7} = 0$

$x = -\sqrt{7}$ et $x = \dfrac{\sqrt{7}}{2}$

Les valeurs de $x$ sont : $-\sqrt{7}$ et $\dfrac{\sqrt{7}}{2}$ .

**44** Simplifier :

$a = \sqrt{3} \times \sqrt{7} \times \sqrt{21}$ ; $b = \sqrt{\dfrac{16}{5}} \times \sqrt{\dfrac{5}{25}}$

$c = 3\sqrt{32} - \sqrt{98} - 4\sqrt{18}$ ; $d = (2-\sqrt{3})^2 + 4\sqrt{3}$

$e = \dfrac{5}{\sqrt{3}} - 2\sqrt{3}$ ; $f = \dfrac{\sqrt{7}}{\sqrt{7}-\sqrt{3}} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

# JE ME PRÉPARE À L'EXAMEN LOCAL

**45** Simplifier et calculer :

$$a = 3\sqrt{12} - \sqrt{75} + 2\sqrt{27}$$
$$b = \sqrt{\sqrt{5} - 1} \times \sqrt{\sqrt{5} + 1}$$
$$c = \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{7} + 1} - \frac{\sqrt{7} + 2}{\sqrt{7} - 2}.$$

**46** Simplifier et calculer :

$$A = \sqrt{36} - \sqrt{81}$$
$$B = \sqrt{48} \times \sqrt{3}$$
$$C = 4\sqrt{2} + \sqrt{162} - 2\sqrt{50}$$
$$D = (3 - 5\sqrt{2})(3 + 5\sqrt{2}) - (3 + \sqrt{2})^2$$

**47** *1)* Simplifier et calculer :

$$A = \sqrt{24} - \sqrt{3} \times \sqrt{50} - \sqrt{216}$$
$$B = \sqrt{2}(3 - \sqrt{2})^2 - \sqrt{2}(5 - \sqrt{2})$$

*2)* Montrer que : $(1 + \sqrt{3})^{-1} + (1 - \sqrt{3})^{-1} = -1$

**48** *1)* Simplifier et calculer :

$$A = 3\sqrt{80} - \sqrt{125} + 2\sqrt{320}$$
$$B = \sqrt{18 + 8\sqrt{2}} \times \sqrt{18 - 8\sqrt{2}}$$
$$C = \frac{\sqrt{3} + \sqrt{2}}{\sqrt{3} - \sqrt{2}} - \frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{\sqrt{3} + \sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{6}}$$

*2)* Montrer que : $\sqrt{2 + \sqrt{3}} \times \sqrt{2}(1 - \sqrt{3}) = -2$

**49** *1)* Montrer que :

$$4\sqrt{20} - \sqrt{24} - \sqrt{125} + 2\sqrt{54} = 3\sqrt{5} + 4\sqrt{6}$$

*2)* Montrer que : $\dfrac{\sqrt{5 - \sqrt{7}}}{(2 - \sqrt{3})\sqrt{7 + 4\sqrt{3}}} = \dfrac{3\sqrt{2}}{\sqrt{5} + \sqrt{7}}$

**50** *1)* Calculer et simplifier :

$$E = \sqrt{\frac{80}{3}} - \frac{2}{3}\sqrt{\frac{90}{6}} + \frac{4}{5}\sqrt{\frac{125}{48}}$$
$$B = \sqrt{3 + 2\sqrt{2}} \times \sqrt{3 - 2\sqrt{2}} \times \sqrt{45}$$
$$C = \frac{3 - \sqrt{2}}{\sqrt{2} + 3} - \frac{5}{\sqrt{8}}$$

*2)* On considère l'expression A :

$$A = (x\sqrt{3} - \sqrt{2})(x\sqrt{3} + \sqrt{2}) - (x\sqrt{3} - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})$$

*a.* Développer et réduire A .

*b.* Factoriser A.

*c.* Calculer A pour : $x = \dfrac{\sqrt{6}}{3}$.

**51** *1)* On considère les nombres $x$ et $y$ tels que :

$x = \sqrt{3 + \sqrt{5}}$ et $y = \sqrt{3 - \sqrt{5}}$

*a.* Calculer : $x^2$ , $y^2$ , $xy$ et $(x - y)^2$.

*b.* En déduire l'écriture simplifiée de $x - y$ .

*c.* Montrer que $\dfrac{1}{y} - \dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

*2)* Déterminer les réels a tels que :

$$\frac{\sqrt{7} - \sqrt{2}}{a} = \frac{a}{\sqrt{7} + \sqrt{2}}$$

*3)* Montrer que : $\sqrt{\dfrac{\sqrt{5} - 2}{\sqrt{5} + 2}} - \dfrac{1}{\sqrt{5} + 2} = 0$ .

**52** On considère les nombres a , b et c tels que :

$a = \sqrt{9 + 4\sqrt{5}}$ ; $b = \sqrt{9 - 4\sqrt{5}}$ et $c = \sqrt{6 + 2\sqrt{5}}$

*1)a.* Calculer $(a + b)^2$.

*b.* En déduire a + b .

*2)a.* Calculer $(1 + \sqrt{5})^2$.

*b.* En déduire la simplification de c .

*c.* Montrer que $a - 2c + b = -2$ .

**53** On considère les réels positifs $x$ et $y$ tels que

$x = \sqrt{5 + 2\sqrt{6}}$ et $y = \sqrt{5 - 2\sqrt{6}}$

*1)* Montrer que $xy = 1$.

*2)* On pose : $a = x + y$ et $b = x - y$.

*a-* Calculer $a^2$ et $b^2$.

*b-* En déduire a et b .

*3)a.* Vérifier que $x = \dfrac{a + b}{2}$ et $y = \dfrac{a - b}{2}$ .

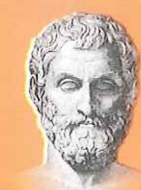
*b.* En déduire la simplification de a et b .

# THÉORÈME DE THALÈS

## Prérequis :

* Théorème des trois rapports égaux.
* Cosinus d'un angle aigu.
* Proportionnalité.

## Un point d'histoire



**Thalès de Milet** (–625 ; –547)

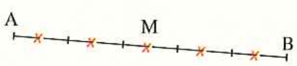
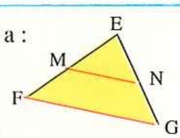
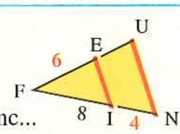
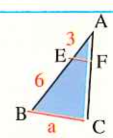
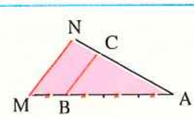
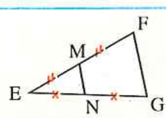
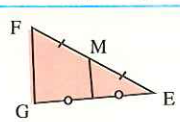
Thalès était plus qu'un mathématicien. Thalès était un savant universel , curieux de tout, astronome et philosophe,très observateur. On lui attribue de nombreux exploits comme le calcul de la hauteur de la grande pyramide ou la prédiction de l'éclipse, ainsi que le théorème de Thalès. Il fut l'auteur de nombreuses recherches, notamment en géométrie.

Sa méthode d'analyse du réel se caractérise par le raisonnement scientifique et l'observation.

## TEST DIAGNOSTIQUE : Je m'évalue

## CHOISIR LA BONNE RÉPONSE.

**Pour chaque question, cocher la bonne réponse en justifiant.**

| | Réponses : | | |
|---|---|---|---|
| On a : $\frac{4}{9} = \frac{x}{2}$ ; donc : ... | $x = \frac{9 \times 2}{4}$ | $x = \frac{2 \times 4}{9}$ | $x = \frac{9}{2 \times 4}$ |
| On a :  donc : | $\frac{AM}{AB} = \frac{2}{3}$ | $\frac{AM}{AB} = \frac{2}{5}$ | $\frac{AM}{AB} = \frac{3}{2}$ |
| On a : $\frac{EF}{EG} = \frac{5}{3}$ ; donc : ... | 5EF = 3EG | 3EF = 5EG | $EG = \frac{5}{3}EF$ |
| Dans le triangle EFG, on a : M ∈ [EF] et N ∈ [EF] et (MN) // (FG) ; donc ...  | $\frac{EM}{EF} = \frac{FG}{MN}$ | $\frac{EM}{EF} = \frac{EG}{EN}$ | $\frac{EM}{EF} = \frac{MN}{FG}$ |
| Dans le triangle FUN, (EI)//(NU) , E ∈ [FU] et I ∈ [FN] ; donc...  | $\frac{8}{12} = \frac{6}{FU}$ | $\frac{8}{4} = \frac{6}{FU}$ | $\frac{12}{8} = \frac{FU}{6}$ |
| Dans le triangle ABC, (EF)//(BC) et EF = 2. donc : BC est égale à  | 3 | $\frac{3}{2}$ | $\frac{2}{3}$ |
| Sur la figure : (BC)//(MN) ; donc : ...  | $\frac{AC}{AN} = \frac{4}{3}$ | $\frac{AC}{AN} = \frac{3}{4}$ | $\frac{AC}{AN} = \frac{1}{4}$ |
| On a :  ; donc : ... | (MN) est une médiane de EFG | (MN) // (FG) | (MN) et (FG) sont sécantes |
| On a :  donc : ... | $\frac{MN}{FG} = \frac{1}{2}$ | EN = 2EG | $\frac{EF}{EM} = \frac{1}{2}$ |

Solutionr page : 246

# ACTIVITÉS : JE DÉCOUVRE

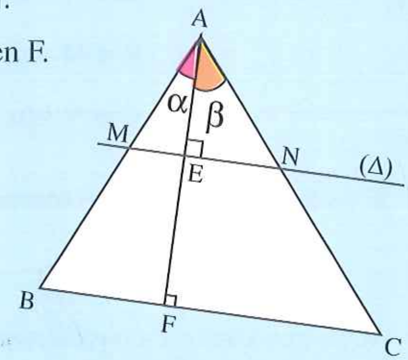
## Activité 1 Preuve du théorème de Thalès par le cosinus

Sur la figure ci - contre : ABC est un triangle .

Une parallèle $(\Delta)$ passant par un point M de [AB] , coupe [AC] en N.

La perpendiculaire à (MN) passant par A coupe [MN] en E et [BC] en F.

On pose $\alpha = \widehat{MAE}$ et $\beta = \widehat{NAE}$ .




1. *a* - Calculer cos $\alpha$ et cos $\beta$ de deux manières différentes.

   *b* - En déduire que : $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$ .

   La parallèle à (AC) passant par M coupe (BC) en D.

2. *a* - Montrer que : $MN = DC$

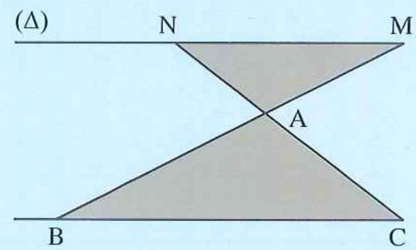
   *b* - En déduire que : $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$.

## Activité 2 Théorème de Thalès dans la configuration noeud papillon

Sur la figure ci-contre : $(\Delta) \mathbin{/\mkern-6mu/} (BC)$ .

En utilisant la symétrie centrale de centre A, démontrer que :

$$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$$




## Activité 3 Réciproque du théorème de Thalès

ABC est un triangle .

Soit M un point de la demi- droite [AB) et N un point de la demi - droite [AC) tels que : $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$ .

La parallèle à (BC) passant par M coupe (AC) en N'.

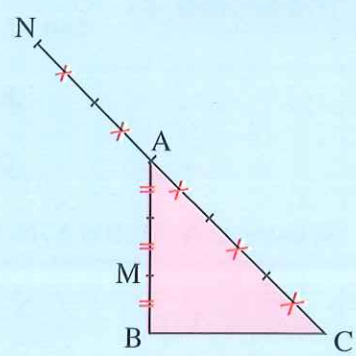
1. Montrer que : AN = AN'.
2. En déduire que : (MN) // (BC).

## Activité 4 Importance de l'ordre des points dans la réciproque.

ABC est un triangle.

Soit M un point de (AB) et soit N un point de (AC) comme indiqués sur la figure ci-contre.

1. Comparer : $\frac{AM}{AB}$ et $\frac{AN}{AC}$
2. La droite (MN) est-elle parallèle à (BC)?



# SAVOIR
## Je révise

## 1 THÉORÈME DE THALÈS

**Théorème 1**

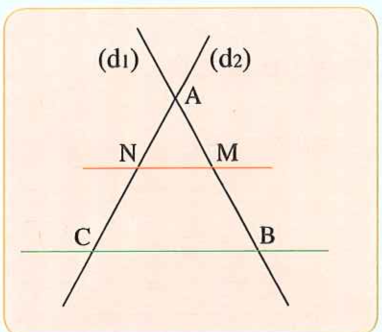
Soit $(d_1)$ et $(d_2)$ deux droites sécantes au point A ;

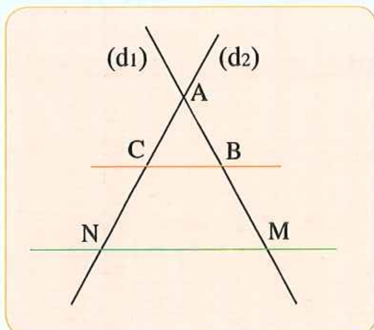
B et M deux points de $(d_1)$ distincts de A ;

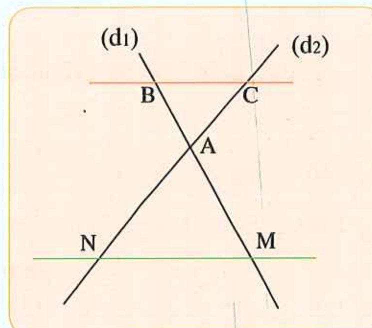
C et N deux points de $(d_2)$ distincts de A.

Si les droites (BC) et (MN) sont parallèles, alors : $\dfrac{AM}{AB} = \dfrac{AN}{AC} = \dfrac{MN}{BC}$ ← Longueurs des côtés de AMN ← Longueurs des côtés de ABC

Il y a trois configurations correspondantes à ce théorème .




**Remarque 2:**

- Les point A , B , M et A , C , N sont alignés dans le même ordre.
- Le théorème de Thalès permet de calculer les longueurs.

## 2 RÉCIPROQUE DU THÉORÈME DE THALÈS

**Théorème 2**

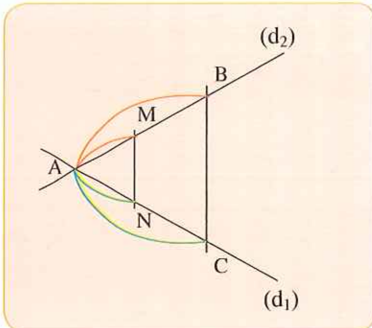
Soit $(d_1)$ et $(d_2)$ deux droites sécantes au point A ;

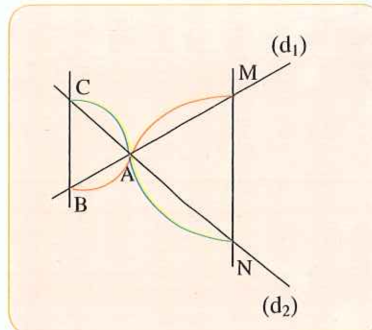
B et M deux points de $(d_1)$ distincts de A ;

C et N deux points de $(d_2)$ distincts de A.

Si les points A , M , B et A , N , C sont dans le même ordre et $\dfrac{AM}{AB} = \dfrac{AN}{AC}$, alors les droites (MN) et (BC) sont parallèles.

Il y a deux configurations correspondantes à ce théorème .

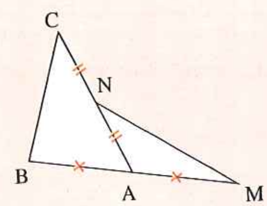



**Remarque 1 :** • Observer la figure suivante :

On a : $\dfrac{AM}{AB} = \dfrac{AN}{AC} = \dfrac{1}{2}$ , mais les droites (MN) et (BC) ne sont pas parallèles .

Attention à l'ordre des points sur chaque droite.




• La réciproque du théorème de Thalès permet de démonter le parallélisme de deux droites .

**Exemple :** On donne la figure ci-contre :

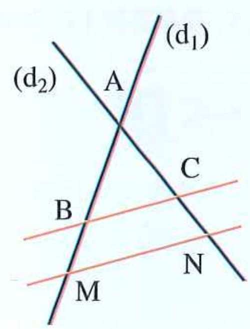
AB = 35 m ; AM = 40 m ; AC = 21 m ; AN = 24 m

On sait que les points A , B , M et A , C , N sont

alignés dans le même ordre et que :

$\dfrac{AM}{AB} = \dfrac{AN}{AC}$ $\left(\text{car } \dfrac{AM}{AB} = \dfrac{40}{35} = \dfrac{8}{7} \quad \text{et} \quad \dfrac{AN}{AC} = \dfrac{24}{21} = \dfrac{8}{7}\right)$

On peut conclure que les droites (BC) et (MN) sont parallèles.




## 3 LA DROITE DES MILIEUX

**Propriété**

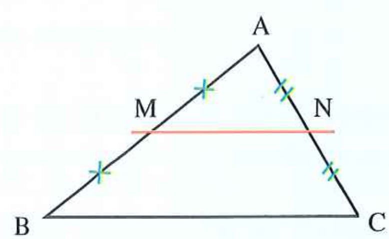
Dans un triangle, la droite qui joint les milieux de deux côtés est parallèles au troisième côté.

**Exemple :** ABC est un triangle,

M est le milieu du segment [AB],

N est le milieu d u segment [AC],

alors les droites (MN) et (BC) sont parallèles.



# PRATIQUE
## J'applique

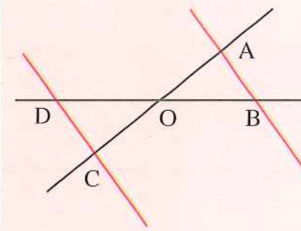
## 1 THÉORÈME DE THALÈS

**Exemple 1** Sur la figure ci-contre, les droites (AB) et ( CD) sont parallèles.

On donne : OA = 2,4 cm ; OB = 2,8 cm

OD = 4,2 cm ; DC = 4,8 cm

Calculer OC et AB.




- Le point C appartient à la droite (OA) et le point D appartient à la droite (OB).
- Les droites (AB) et (CD) sont parallèles.

D'après le théorème de Thalès, on a : $\frac{OA}{OC} = \frac{OB}{OD} = \frac{AB}{CD}$

C'est-à-dire : $\frac{2,4}{OC} = \frac{2,8}{4,2} = \frac{AB}{4,8}$

donc : $\frac{2,4}{OC} = \frac{2,8}{4,2}$ et $\frac{AB}{4,8} = \frac{2,8}{4,2}$

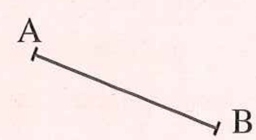
alors : $OC = \frac{4,2}{2,8} \times 2,4$ et $AB = \frac{2,8}{4,2} \times 4,8$

D'où : $OC = 3,6\,\text{cm}$ et $AB = 3,2\,\text{cm}$

## 2 UTILISER LE THÉORÈME DE THALÈS POUR PLACER DES POINTS

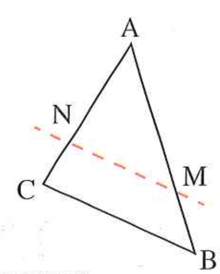
**Exemple 2** [AB] est un segment donné.

En utilisant un compas et une règle non graduée, construire le point M de [AB] tel que : $\frac{AM}{AB} = \frac{2}{3}$.




On a une égalité de deux rapports , donc on peut penser à utiliser le théorème de Thalès.

On construit :
- une demi-droite d'origine A.
- on prend, au compas, sur cette demi-droite le point N tel que : AN = 2.
- on prend, au compas, sur [AN] le point C tel que : AC = 3.
- on trace la droite (Δ) parallèle à (BC) passant par N.
- la droite (Δ) va couper (AB) en M (le point cherché).




**Preuve :** Dans le triangle ABC, on a : M est un point de (AB) ; N est un point de (AC) et (MN)//(BC).

D'après le théorème de Thalès, on obtient : $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$

Or : AN = 2 et AC = 3, alors : $\frac{AM}{AB} = \frac{2}{3}$.

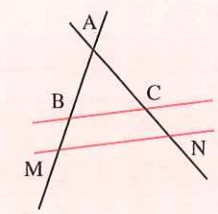
## 3 UTILISER LA RÉCIPROQUE DU THÉORÈME DE THALÈS POUR DÉMONTRER QUE DES DROITES SONT PARALLÈLES

**Exemple 3** On donne la figure ci-contre tel que :

AB = 35 cm ; AM = 40 cm

AC = 21 cm ; AN = 24 cm

Montrer que les droites (BC) et (MN) sont parallèles.




Montrons que les droites (BC) et (MN) sont parallèles.

Les points A, B, M et A, C, N sont alignés dans le même ordre et :

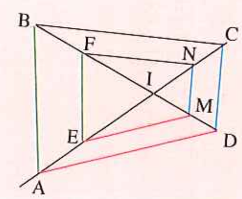
$$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} \quad \left(\text{car } \frac{AM}{AB} = \frac{40}{35} = \frac{8}{7} \text{ et } \frac{AN}{AC} = \frac{24}{21} = \frac{8}{7}\right)$$

donc d'après la réciproque du théorème de Thalès les droites (BC) et (MN) sont parallèles.

**Exemple 4** Sur la figure ci-contre :

(AB) // (EF) ; (MN) // (DC) ; (FN) // (BC).

Démontrer que : (EM) // (AD).




Dans le triangle ABI ,

E est un point de (AI) , F(BI) et (AB) // (EF).

D'après le théorème de Thalès , on a : $\frac{IF}{IB} = \frac{IE}{IA} = \frac{FE}{BA}$ ①

Dans le triangle BIC , on a : F est un point de (BI) , N est un point de (CI) et (FN) // (BC). D'après le théorème de Thalès , on a : $\frac{IF}{IB} = \frac{IN}{IC} = \frac{FN}{BC}$ ②

De ① et ② ,on déduit que : $\frac{IE}{IA} = \frac{IN}{IC}$ ③

Dans le triangle CID ,

on a : N est un point de (CI) , M est un point de (ID) et (MN) // (CD).

D'après le théorème de Thalès , on a : $\frac{IN}{IC} = \frac{IM}{ID} = \frac{NM}{CD}$ ④

De ③ et ④ ,on déduit que : $\frac{IE}{IA} = \frac{IM}{ID}$

Dans le triangle AID ,

on a : E est un point de [AI] , M est un point de [ID] et $\frac{IE}{IA} = \frac{IM}{ID}$ .

D'après la réciproque du théorème de Thalès, on a : (EM) // (AD).

# INVESTISSEMENT
## Je m'entraîne

### POUR RÉVISER SON COURS

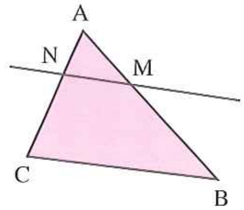
**1** Sur la figure ci-contre :

AM = 4 ; AB = 12 ; AN = 3

BC = 10 et (MN) // (BC)

Pour calculer AC et MN,

compléter la réponse suivante :




Dans le triangle ....

on a : N est un point ( ... ) , ... est un point de (AB) et

( ... ) // ( ... ). D'après le ... $\frac{AM}{...} = \frac{...}{...} = \frac{...}{...}$ ;

or : AM = ... , AB = ... , AN = ... et BC = 10 ;

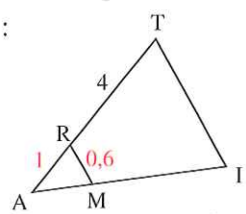
alors : $\frac{4}{12} = \frac{...}{AC} = \frac{...}{...}$.

Donc : AC = .... et MN = ....

**2** Calculer TI , sachant que :

RA = 1 , RT = 4 ,

MR = 0,6 et (RM) // (TI).



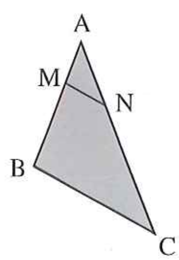

**3** Sur la figure ci-contre :

AM = 2 ; AB = 8

AN = 3 ; AC = 12

Pour montrer que : (FG) // (AB),

compléter les phrases suivantes :




Dans le triangle...

Comparons $\frac{AM}{AB}$ et $\frac{...}{...}$

On a : $\frac{AM}{AB} = \frac{...}{...}$ et $\frac{...}{...} = \frac{...}{...}$

D'où : $\frac{AM}{AB} = \frac{...}{...}$

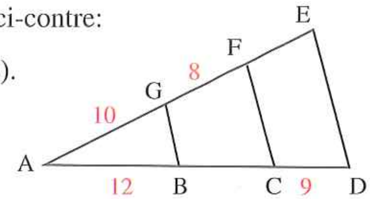
Or : M ∈ [....] et ... ∈ [....] ,

alors : (...) // (...) (d'après la ..........)

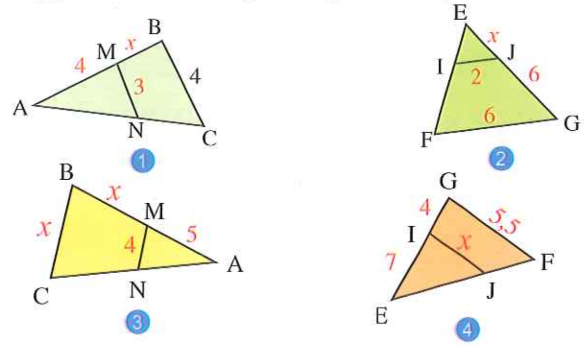
**4** Sur la figure ci-contre:

(BG) // (CF) // (DE).

Calculer BC et EF.

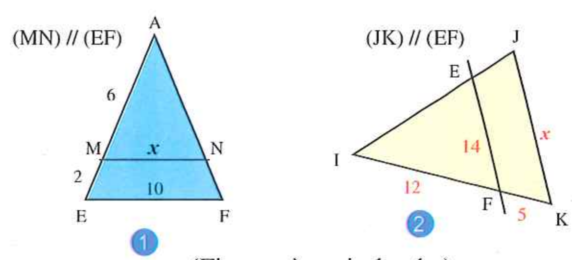



**5** Calculer les valeurs de $x$ dans les figures suivantes :
(où apparaissent des segments parallèles.)



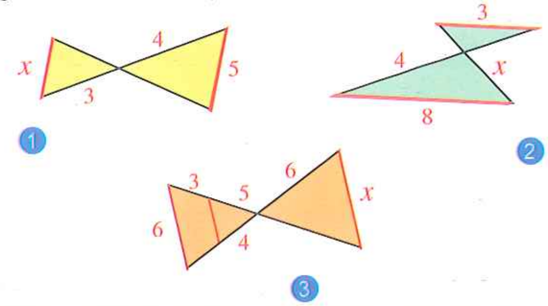

### THÉORÈME DE THALÈS DIRECT

**6** Calculer $x$ dans chacun des cas suivants :




(Figures à main levée.)

**7** Calculer les valeurs de $x$ dans les figures suivantes où apparaissent des segments rouges parallèles .
(figures à main levée).



**8** Sur la figure ci-contre:

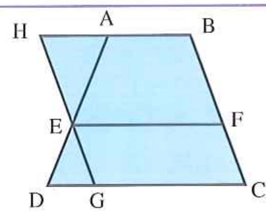
ABCD est un trapèze ;

(EF) // (DC) ; (HG) // (BC).

AB = 5 ; EF = 7

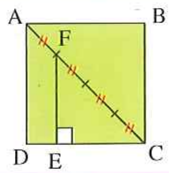
DC = 10 ; CF = 2 et DE = 3

Calculer BF et AE .

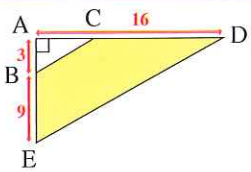



**9** ABCD est un carré de côte 6 cm

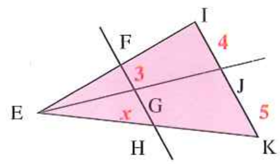
Calculer CE et EF.



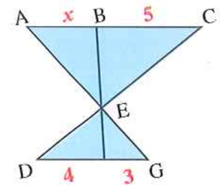

**10** Calculer l'aire et le périmètre du trapèze BCDE .




**11** Calculer $x$ dans chacun des cas suivants :
(Figures à main levée).




(FH) // (KI)

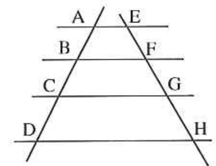



(AC) // (DG)

**12** Sur la figure ci-contre

(AE) // (BF) // (CG) // (DH).

Montrer que : $\dfrac{AC}{BD} = \dfrac{EG}{FH}$

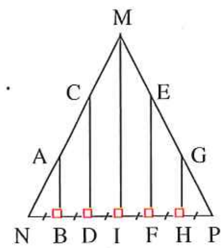



**13** Sur la figure ci-contre ,

MNP est un triangle isocèle en M .

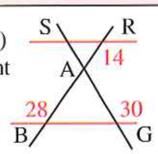
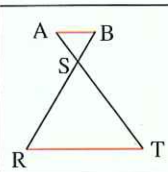
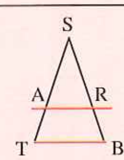
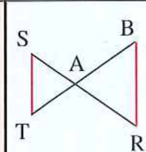
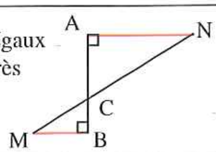
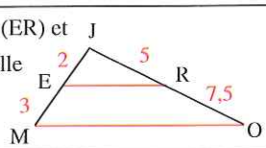
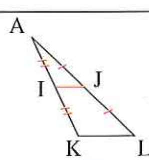
MI = 60 et NP = 90.

Calculer AB et CD.




## MON BILAN

***1) Indiquer la bonne réponse par A , B ou C :***

| | A | B | C |
|---|---|---|---|
| **1** Les droite (SR) et (BC) sont parallèles. À combient est égale AS ?   | 14 | 15 | 60 |
| **2** Les droites de même couleur sont parallèles. On peut écrire les égalités : $\frac{SA}{ST} = \frac{SB}{SR} = \frac{AB}{RT}$ dans une seule figure. Laquelle ? |   |   |   |
| **3** Quels rapports égaux peut-on écrire d'après cette figure?   | $\frac{AC}{AB} = \frac{NC}{NM} = \frac{AM}{BM}$ | $\frac{CA}{AB} = \frac{CM}{CN} = \frac{NA}{MB}$ | $\frac{CA}{AB} = \frac{CM}{CN} = \frac{NA}{MB}$ |
| **4** Les droites (ER) et (MO) sont-elle parallèle ?   | oui | non | on ne peut pas savoir |
| **5** I milieu de [AK] et J milieu de [AL]. Alorsa longueur I J est égale à ...   | 7,2cm | 6cm | 4,2cm |

Corrections page : 247

***2) En cas d'erreur, voici quelques conseils :***

| | Savoir | Pratique |
|---|---|---|
| Ex: 1 | Théorème 1 | |
| Ex: 2 | Théorème 1 | |
| Ex: 3 | Théorème 1 | |
| Ex: 4 | Théorème 2 | |
| Ex:5 | Propriété | |

***3) Exercices pour la remédiation voir R4 page : 248***

## THÉORÈME DE THALÈS DIRECT

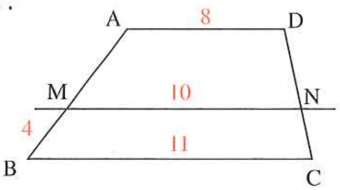
**14** ABCD est un trapèze tel que (AD) // (BC).

Sur la figure, on donne :

BM = 4 , AD = 8 ,

MN = 10 et BC = 11.

Calculer AM .



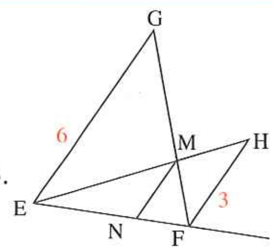

**15** Sur la figure ci-contre ,

(EG) // (FH) // (NM)

N ∈ [EF] ; M ∈ [FG]

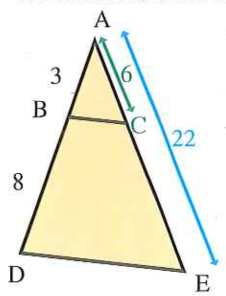
M ∈ [EH] ; EG = 6 ; FH = 3.

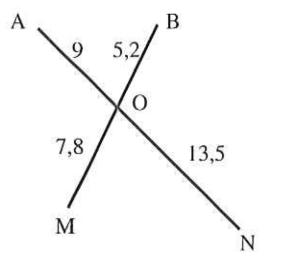
Calculer MN.




## RECIPROQUE DU THÉORÈME DE THALÈS

**16** On considère les deux figures suivantes :




*1)* Les droites (BC) et (DE) sont - elles parallèles?

*2)* Les droites (AB) et (MN) sont - elles parallèles?

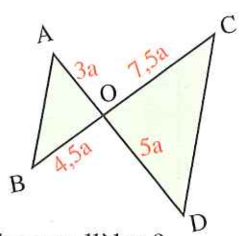
**17** Sur la figure ci-contre :

OA = 3a ; OB = 4,5 a

OC = 7,5a ; OD = 5a

Où a est un nombre positif.

Les droites (AB) et (DC) sont-elles parallèles ?




**18** ADE est un triangle tel que : AE = 3,3 et AD = 2,1

Soit B un point de [AD] tel que : AB = 1,4 et

C un point de [AE] tel que : CE = 1,1.

Montrer que : (BC) // (DE).

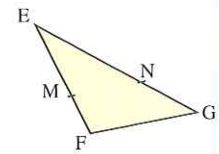
**19** Sur la figure ci-contre :

EM = 8 ; EF = 12 ; EN = 10

NG = 5 et FG = 12 .

*1)* Montrer que (MN) // (FG) .

*2)* Calculer MN.




**20** ABCD est un rectangle de centre O tel que :

AB = 6,3 cm et BC = 4,2 cm.

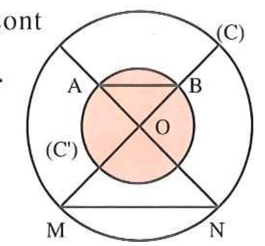
Soit M un point de [BC] tel que BM = 2,8cm et N un point de [BD] tel que : BN = $\frac{1}{3}$ BD.

Démontrer que : (MN) // (AC).

**21** Les cercles (C) et (C')sont concentriques (même centre O).

En utilisant la réciproque du théorème de Thalès ,

démontrer que (AB) // (MN).




**22** ABCD est un quadrilatère .

Soit M un point de [AB].

La parallèle à (BC) passant par M coupe [AC] en N.

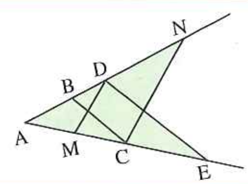
La parallèle à (DC) passant par N coupe [AD] en P.

Montrer que les droites (MP) et (DB) sont parallèles.

**23** Sur la figure ci-contre,

(MD) // (NC) et (BC) // (DE) .

Démontrer que : (BM) // (NE).




**24** ABCD est un quadrilatère dont les diagonales se coupent en I.

La parallèle à (BC) passant par A coupe (BD) en M.

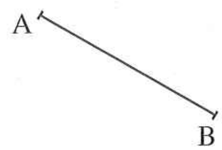
La parallèle à (AD) passant par B coupe (AC) en N.

Démontrer que : (MN) // (DC).

## PROBLÈMES OUVERTS

**25** Reproduire le segment [AB] et construire le point M de [AB] tel que :

$$\frac{BM}{BA}=\frac{5}{7}.$$




**26** Reproduire le segment [AB] et construire le point M de [AB] tel que :

$$\frac{AM}{MB}=\frac{5}{7}.$$

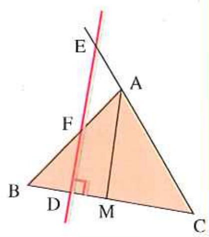

**27** ABC est un triangle isocèle en A.

Une droite perpendiculaire à (BC) coupe respectivement en D, E et F, les droites (BC),(CA) et (AB).

Soit M le milieu de [BC].

*1)* Montrer que : AE = AF .

*2)* Démontrer que : $\frac{AE}{AB}=2\frac{MD}{BC}$ .

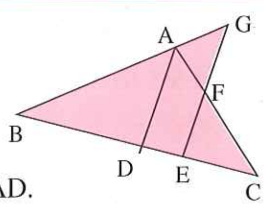



**28** Sur la figure ci-contre ,

D est le milieu de [BC]

et (EF) // (AD).

Montrer que : EF + EG = 2AD.

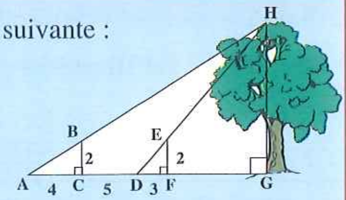



## CHALLENGES

**29** On considère la figure suivante :

*1)* Calculer GH la hauteur de l'arbre .

*2)* Calculer AG la distance de A au pied de l'arbre.




**30** **AVEC TICE**


ABC est un triangle . Soit N le milieu de [AC] et M le point de [AB] tel que : $\frac{AM}{AB}=\frac{3}{4}$ .

Soit P le point de d'intersection des droites (MN) et (BC) .

*1)* Exploiter le dynamise du logiciel Geogebra pour conjecturer la position du point M sur le segment [NP], en utilisant les icônes suivants :

Polygone Milieu Droite

*2)* Démontrer que M est le milieu de [NP].

**31** ABCD est un parallélogramme.

La bissectrice de l'angle $\widehat{BAD}$ coupe [BD] en E.

La bissectrice de l'angle $\widehat{ABC}$ coupe [AC] en F.

Démontrer que : (EF) // (AB).

**32** ABCD est un trapèze de bases [AB] et [DC] tel que :

$$\widehat{BAC}=90°.$$

Soit M le milieu de [BD] et N le projeté orthogonal de M sur [AC].

Calculer MN en fonction de AB et DC.

## SITUATIONS PROPOSÉES AUX OLYMPIADES

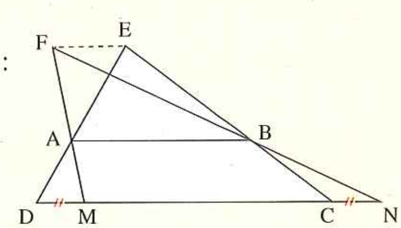
Soit ABCD un trapèze tel que les droites (AD) et (BC) se coupent en E.

Soit M un point de [DC] et soit N le point de la demi-droite [DC) tel que :

$$DN > DC \quad \text{et} \quad CN = DM$$

Les droites (AM) et (Bm) se coupent en F.

**Montrer que : (EF) et (AB) sont parallèles**



**33** *Exercice résolu*

EFGH est un parallélogramme.

Soit A le point de [FG] tel que : $GA = \frac{1}{4}GF$.

La parallèle à (FH) passant par A coupe (GH) en B et (EH) en C.

*1)a.* Montrer que : $\frac{GA}{GF} = \frac{AB}{HF}$.

*b.* Montrer que : $GA \times BC = FA \times BA$.

*2)* Soit D un point de [EH] tel que : $ED = \frac{1}{4}EH$.

Montrer que : (EG) // (DB).

## Correction : 33

***1)a.* Montrons que : $\frac{GA}{GF} = \frac{AB}{HF}$ .**

Dans le triangle FGH ,

on a A est un point de (FG) , B est un point de (GH) et (AB) // (FH).

D'après le théorème de Thalès : $\frac{GA}{GF} = \frac{AB}{HF}$

***b.* Montrons que : $GA \times BC = FA \times BA$.**

Dans le triangle ABG ,

on a H est un point de (BG) et C est un point de (BA) et (CH) // (AG) ;

d'après le théorème de Thalès : $\frac{BA}{BC} = \frac{BG}{BH} = \frac{AG}{CH}$ .

Considérons la proportion : $\frac{BA}{BC} = \frac{AG}{CH}$ .

Comme CH = FA car AFHC est un parallélogramme,

alors : $\frac{BA}{BC} = \frac{AG}{FA}$.

Donc : $GA \times BC = FA \times BA$ .

***2)* Montrons que (DB) // (EG).**

On considère le triangle EGH .

Comparons $\frac{HD}{HE}$ et $\frac{HB}{HG}$

On a : $\frac{HD}{HE} = \frac{HE - ED}{HE} = \frac{HE}{HE} - \frac{ED}{HE} = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$

(car D est un point de [HE])

Et : $\frac{HB}{HG} = \frac{HG - BG}{HG} = \frac{HG}{HG} - \frac{BG}{HG} = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$

(car B est un point de [HG])

D'où : $\frac{HD}{HE} = \frac{HB}{HG}$ .

Et comme D est un point de [EH] et B est un point de [HG], alors (DB) // (HG) (d'après la réciproque du théorème de Thalès).

**34** EFG est un triangle tel que : EF = 4cm et FG = 5cm.

Soit A un point de [FG] tel que : FA = 3cm.

La parallèle à (EF) passant par A coupe (EG) en B.

*1)* calculer AB.

*2)* La parallèle à (AE) passant par F coupe (EG) en C.

La parallèle à (EF) passant par C coupe (FG) en D.

Comparer : $\frac{GA}{GF}$ et $\frac{AB}{EF}$ puis $\frac{GF}{GD}$ et $\frac{GE}{GC}$ .

**35** MARS est un rectangle tels que : MA = 6 et RA = 3.

Soit E un point de (SR) tel que : ER = 3 et E n'appartient pas à [SR].

La droite (ME) coupe (AS) en F et (RA) en H.

*1)* Calculer HR.

*2)* Comparer : $\frac{FM}{FE}$ et $\frac{FA}{FS}$ puis $\frac{FH}{FM}$ et $\frac{FA}{FS}$

*3)* Montrer que : $FM^2 = FH \times FE$.

*4)* Soit T un point de [MS] tel que : ST = 2 .

Montrer que : (TR) // (ME).

**36** ABC est un triangle tel que :

BC = 7 ; AC = 5,6 et AB = 4,2.

Soit E un point de [AC] tel que : AE = 4.

La parallèle à (BC) passant par E coupe (AB) en F.

*1)* Calculer : AF et EF .

*2)* Soit M un point de [AC] tel que : AM = 7,2.

et N un point de [BC] tel que : BN = 9.

Montrer que (MN) // (AB).

# JE ME PRÉPARE À L'EXAMEN LOCAL

**37** ABC est un triangle tel que :

$AB = 15$ ; $AC = 12$.

Soit E un point de [AB] tel que : $AE = 5$.

et F un point de [AC] tel que : $AF = 4$.

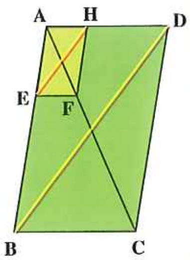
*1)* Montrer que : (EF) // (BC).

*2)* La parallèle à (AC) passant par E coupe (BC) en G ; calculer EG.

**38** ABCD et AEFH sont des parallélogrammes tels que : $AB = 9$ , $AD = 6$ , $E \in [AB]$ ,

F est un point de [AC] ,

H est un point de [AD] et $\dfrac{AF}{AC} = \dfrac{1}{3}$




*1)* Calculer AE et AH.

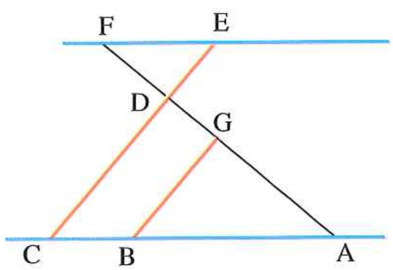
*2)* Comparer : $\dfrac{AE}{AB}$ et $\dfrac{AH}{AD}$.

*3)* En déduire que : (EH) // (BD).

**39** Sur la figure ci-dessous :

(EF) // (AC) et (CE) // (BG).

$AC = 18$ ; $AB = 12$ ; $AD = 10$ ; $DF = 5$.




*1)* Calculer EF et AG .

*2)* Montrer que : (CF) // (BD).

**40** EFG est un triangle .

Soit M et N deux points à l'extérieur de EFG tels que :

M est un point de [FE) et N est un point de [GE).

EFG est un triangle .

**41** Soit M et N deux points à l'extérieur de EFG tels que :

M appartient à [FE) et N appartient à [GE).

La parallèle à la droite (MG) passant par N coupe (EF) en A.

La parallèle à (FN) passant par M coupe (EG) en B.

Démontrer que (AB) // (FG).

**42** *1)a.* Construire un triangle RST tel que :

$RS = 5cm$ , $RT = 7{,}5cm$ et $ST = 8cm$.

*b.* Placer le point I du segment [SR] tel que : $SI = 2cm$

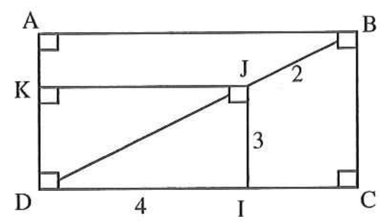
*c.* Tracer la parallèle à la droite (RT) passant par I; elle coupe [ST] en J.

*2)a.* Démontrer que : $IJ = 3cm$.

*b.* En déduire la nature du triangle RIJ ainsi qu'une égalité d'angles.

*c.* Démontrer que la demi-droite [RJ) est la bissectrice de l'angle $\widehat{IRT}$.

**43** On considère la figure suivante :




*1)* Calculer DJ.

*2)* Calculer l'aire du rectangle ABCD.

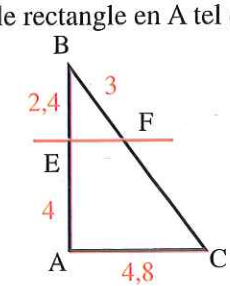
**44** Soit ABC un triangle rectangle en A tel que :

$BE = 2{,}4$ cm ;

$EA = 4$ cm ;

$BF = 3$ cm ;

$AC = 4{,}8$ cm




*1)* Calculer BC.

*2)* Montrer que les droites (EF) et (AC) sont parallèles.

*3)* En déduire EF.

# THÉORÈME DE PYTHAGORE

## Prérequis :

* Aire d'un triangle.
* Racine carrée d'un nombre.
* Perpendicularité.

## Un point d'histoire

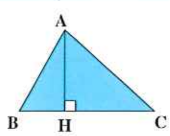
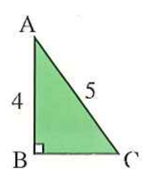
**Pyhagore** (–580 ; –495)

Pythagore est un mathématicien, philosophe et scientifique grec. Il fonda une école où on étudiait les mathématiques, la musique et la philosophie. La propriété de Pythagore «Dans un triangle rectangle, le carré de l'hypoténuse est égale à la somme des carrés des deux autres côtés» a été prouvée par l'école de Pythagore. Depuis, les mathématiciens ont alors imaginé certaines de démonstrations de ce résultat.

## TEST DIAGNOSTIQUE : Je m'évalue

### CHOISIR LA BONNE RÉPONSE.

**Pour chaque question, cocher la bonne réponse en justifiant.**

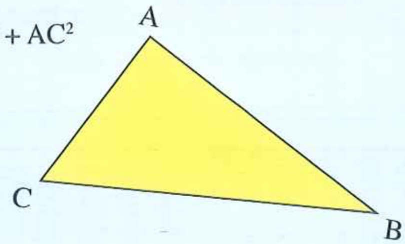
| | Réponses : | | |
|---|---|---|---|
| L'hypoténuse d'un triangle ABC rectangle en A, est ... | AB | AC | côté opposé à l'angle droit |
| Si $4 + x^2 = 9$, alors ... | $x = 3 - 2$ | $x = \sqrt{9-4}$ | $x^2 = 5$ |
| Les nombres $x$ vérifiant $x^2 = 3$ sont ... | $\sqrt{3}$ | $-\sqrt{3}$ | $\sqrt{3}$ et $-\sqrt{3}$ |
| L'aire du triangle ABC est ...  | AH × BC | $\frac{AH \times BC}{2}$ | $\frac{BH \times CH}{2}$ |
| $AB^2 + AC^2$ est égale à ... | $(AB + AC)^2$ | $\sqrt{AB^2 + AC^2}$ | $AC^2 + AB^2$ |
| Si I et le milieu de l'hypoténuse du triangle ABC rectangle en A, alors ... | $BI = \frac{AC}{2}$ | $AI = \frac{BC}{2}$ | $CI = \frac{AB}{2}$ |
| ABC est un triangle rectangle B ; alors ...  | $\cos \widehat{ACB} = \frac{4}{5}$ | $BC = 5\cos \widehat{ACB}$ | $\cos \widehat{BAC} = \frac{5}{4}$ |

Solutions page : 246

# ACTIVITÉS : JE DÉCOUVRE

## Activité 1 Preuve de la réciproque du théorème de Pythagore

1. Recopier la figure ci-contre où ABC et un triangle tel que : $BC^2 = AB^2 + AC^2$
2. *a.* Construire la perpendiculaire à la droite (AB) en A.
   *b.* Placer le point D de cette perpendiculaire tel que :
   $AD = AC$ et $D \neq C$ .
3. Montrer que ABC est un triangle rectangle.

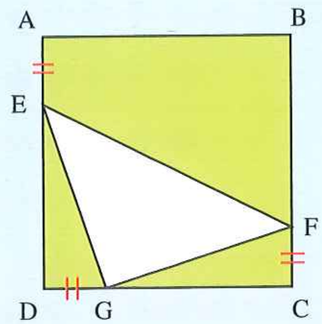



## Activité 2 Emploi de la réciproque du théorème de Pythagore

Sur la figure ci-contre, ABCD est un carré de côté 4cm

et $AE = DG = CF = 1\text{cm}$.

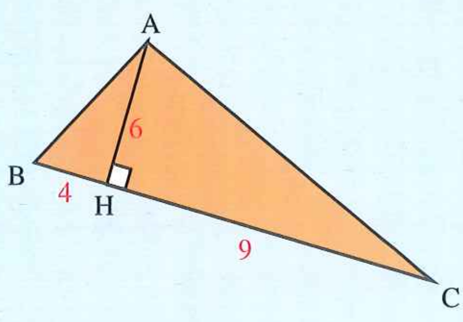
Quelle est la nature du triangle EFG ?




## Activité 3 Investisement du théorème de Pythagore dans les deux sens

Soit ABC un triangle et H le projeté orthogonal de A sur (BC) tels que :

$AH = 6$ ; $BH = 4$ et $CH = 9$ et H est un point de [BC]




Montrer que ABC est un triangle rectangle.

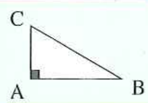
# SAVOIR
## Je révise

## 1 THÉORÈME DE PYTHAGORE

**Théorème 1** Si un triangle est rectangle, alors le carré de l'hypoténuse est égal à la somme des carrés des côtés de l'angle droit.

### Autrement dit :

**Donnée** : ABC est un **triangle rectangle** en A




**Théorème** : Théorème de Pythagore

**Conclusion** : $BC^2 = AB^2 + AC^2$

### Utilisation du théorème de Pythagore

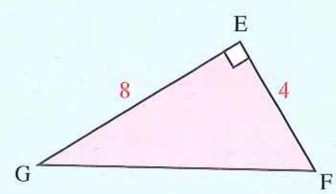
Cette propriété ne s'applique qu'aux triangles rectangles.

Elle permet de calculer la longueur du troisième côté d'un triangle rectangle dont on connaît déjà les longueurs de deux côtés.

**Remarque :** ABC est un triangle rectangle en A ; alors : $AB^2 = BC^2 - AC^2$ et $AC^2 = BC^2 - AB^2$.

**Exemples :** *1)* EFG est un triangle rectangle en E tel que : $EF = 4$ et $EG = 8$.

Calculons FG.




EFG est un triangle rectangle en E ;

donc d'après le théorème de Pythagore : $FG^2 = EF^2 + EG^2$

$FG^2 = 4^2 + 8^2 = 16 + 64 = 80$.

Donc : $FG = \sqrt{80}$ car $FG > 0$.

Ainsi : $FG = 4\sqrt{5}$.

*2)* ABC est un triangle tel que : $AB = 42$ cm ; $CB = 46$ cm et $CA = 62$ cm.

Montrons que ABC n'est pas un triangle rectangle.

Si ce triangle est rectangle, seul le côté [CA] peut être son hypoténuse (car c'est le côté le plus long).

Dans le triangle ABC, le plus long côté est [CA]; donc on calcule séparément $CA^2$ et $CB^2 + AB^2$.

On a : $CA^2 = 62^2$ et $AB^2 + BC^2 = 42^2 + 46^2$

$CA^2 = 3844$ et $AB^2 + BC^2 = 1764 + 2116 = 3880.$

Or si le triangle était rectangle, d'après le théorème de Pythagore, on a : $CA^2 = AB^2 + BC^2$.

Comme $CA^2 \neq AB^2 + BC^2$ ; alors le triangle ABC n'est pas rectangle.

## 2 RÉCIPROQUE DU THÉORÈME DE PYTHOGORE

**Théorème 2** Si la somme des carrés de deux côtés d'un triangle est égale au carré du troisième côté, alors ce triangle est rectangle (au sommet opposé à ce troisième côté).

### Autrement dit :

**Donnée**

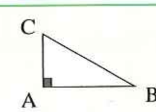
ABC est un triangle tel que : $BC^2 = AB^2 + AC^2$

**Théorème**

Réciproque du théorème de Pythagore

**Conclusion**

Le triangle ABC est **rectangle en A**

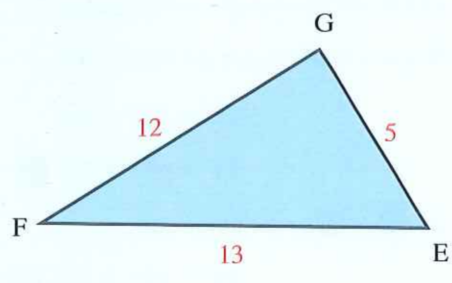



### Utilisation de la réciproque du théorème de Pythagore.

Cette propriété permet de démontrer qu'un triangle dont on connaît les longueurs des trois côtés, est rectangle.

**Exemple :** EFG est un triangle tel que : $EF = 13$ , $EG = 5$ et $FG = 12$.

Montrons que EFG est un triangle rectangle.




On a : $EF > EG$ et $EF > FG$ .

Comparons $EF^2$ et $EG^2 + FG^2$ .

On a : $EG^2 + FG^2 = 5^2 + 12^2 = 25 + 144 = 169$

et $EF^2 = 13^2 = 169.$

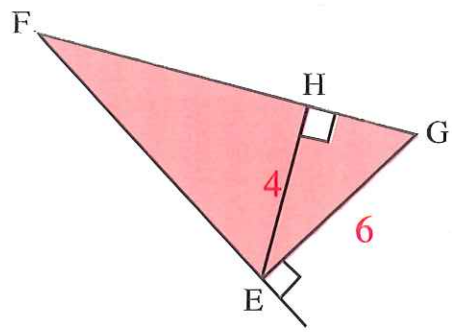
Donc : $EF^2 = EG^2 + FG^2.$

D'où EFG est un triangle rectangle en G (d'après la réciproque du théorème de Pythagore)

## 1 UTILISER LE THÉORÈME DE PYTHAGORE POUR CALCULER LES LONGUEURS

**Exemple 1** EFG est un triangle rectangle en E et [EH] sa hauteur tels que : $EH = 4$ et $EG = 6$.

Calculer EF.




- **Calculons HG**

EGH est un triangle rectangle en H.

D'après le théorème de Pythagore,

$$HG^2 = EG^2 - EH^2$$

$$HG^2 = 6^2 - 4^2 = 36 - 16 = 20.$$

Donc $HG = 2\sqrt{5}$ car $HG > 0$.

- **Calculons EF de deux façons différentes :**

• EFG est un triangle rectangle en E.

D'après le théorème de Pythagore ,

$$EF^2 = FG^2 - EG^2$$

$$EF^2 = (FH + HG)^2 - EG^2$$

$$EF^2 = (FH + 2\sqrt{5})^2 - 6^2$$

$$EF^2 = FH^2 + 4\sqrt{5}FH + 20 - 36$$

$$EF^2 = FH^2 + 4\sqrt{5}FH - 16 \quad (1)$$

• EFH est un triangle rectangle en H.

D'après le théorème de Pythagore ,

$$EF^2 = FH^2 + EH^2$$

$$EF^2 = FH^2 + 16 \quad (2)$$

De (1) et (2), on déduit que :

$$EF^2 = FH^2 + 4\sqrt{5}\,FH - 16 = FH^2 + 16 \quad \text{et} \quad 4\sqrt{5}\,FH = 32.$$

D'où : $FH = \dfrac{8\sqrt{5}}{5}$

Il en résulte que : $EF^2 = (\frac{8\sqrt{5}}{5})^2 + 16 = \frac{64}{5} + \frac{80}{5} = \frac{144}{5}$

Donc : $EF = \frac{12\sqrt{5}}{5}$ car $EF > 0$ .

## 2 UTILISER LA RÉCIPROQUE DU THÉORÈME DE PYTHAGORE POUR MONTRER L'ORTHOGONALITÉ

**Exemple 3** ABC est un triangle et [AH] sa hauteur relative au côté [BC] tels que :

$$2AH^2 + BH^2 + CH^2 = BC^2.$$

Montrer que ABC est un triangle rectangle.

On sait que : ABH et ACH sont deux triangles rectangles en H.

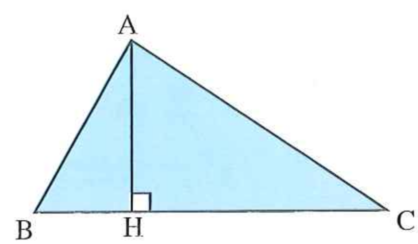
Donc, d'après le théorème de Pythagore , on a :

$$AB^2 = AH^2 + BH^2 \text{ et } AC^2 = AH^2 + CH^2$$

alors : $AB^2 + AC^2 = AH^2 + BH^2 + AH^2 + CH^2$

$$2AH^2 + BH^2 + CH^2 = BC^2$$

Donc : $BC^2 = AB^2 + AC^2$




D'après la réciproque du théorème de Pythagore, ABC est un triangle rectangle en A.

## 3 RECONNAÎTRE UN TRIANGLE NON RECTANGLE

**Exemple 4** STU est un triangle tel que : TS = 14 cm , SU = 19cm et TU = 13cm

Montrer que le triangle STU n'est pas rectangle.

- [SU] est le côté le plus long : $SU^2 = 19^2 = 361$
- $TS^2 + TU^2 = 14^2 + 13^2 = 196 + 169 = 365$

Donc : $SU^2 \neq TS^2 + TU^2$

D'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle STU n'est pas rectangle.

### POUR RÉVISER SON COURS

**1** Recopier et compléter les phrases suivantes :

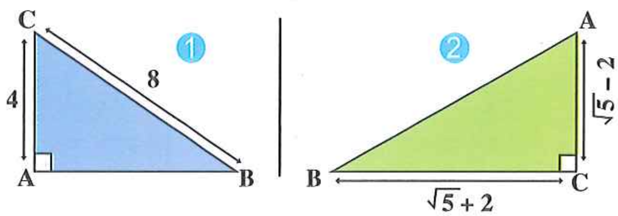
EFG est un triangle rectangle en E.

Donc : $FG^2 = \dots^2 + \dots^2$

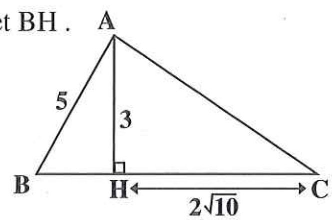
$EF^2 = \dots^2 - \dots^2$

$EG^2 = \dots^2 - \dots^2$

**2** Calculer AB dans chacun des cas suivants :




**3** Calculer AC et BH .



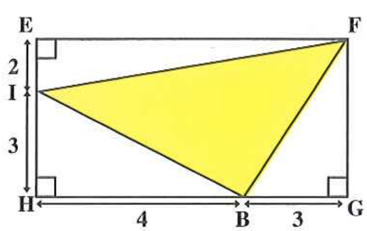

**4** EFG est un triangle tel que :

$$EF = \frac{1}{6} \text{ , } EG = \frac{1}{8} \text{ et } EF = \frac{1}{10}$$

EFG est-il un triangle rectangle? Justifier.

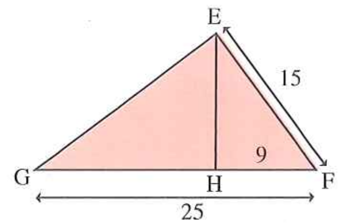
### PYTHAGORE POUR CALCULER LES LONGUEURS

**5** Calculer le périmètre du triangle IBF.

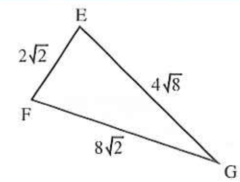



**6** EFG est un triangle et H est le projeté orthogonal de E sur (FG) tels que : $EF = 15$ , $FH = 9$ et $FG = 25$ .

Calculer EG.

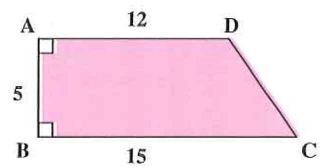



**7** Calculer la hauteur relative au côté [EF] du triangle EFG.




**8** ABCD est un trapèze rectangle en A et B tels que :

$AB = 5$ , $AD = 12$ et $BC = 15$.




Calculer AC et DB .

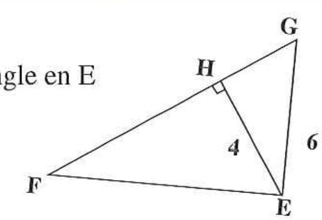
**9** ABC est un triangle et [AH] sa hauteur tels que

$$\frac{AH}{BH} = \frac{3}{4} \quad \text{et} \quad \frac{CH}{AH} = \frac{1}{3}.$$

Calculer AB,AC et BC sachant que l'aire de ABC est $15cm^2$.

**10** EFG est un triangle rectangle en E et [EH] est sa hauteur.

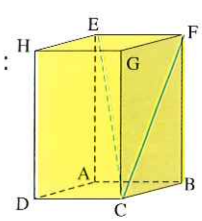
Calculer EF.




**11** ABCDEFGH est un pavé droit tel que :

$AE = 6$ ; $AD = 5$ ; $EF = 4$.

Calculer EC.

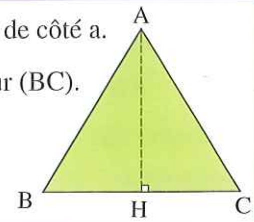


**12** ABC est un triangle équilatéral de côté a.

Soit H le projeté orthogonal de A sur (BC).

On pose : AH = h.

Démontrer que : $h = a\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.




**13** EFG est un triangle rectangle en G tel que :

$FG = \sqrt{7}$cm et $EG = 3\sqrt{2}$ cm. Soit M le milieu de [EF].

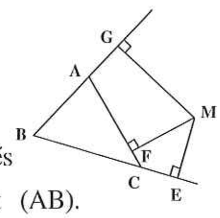
Calculer MG.

**14** ABC est un triangle.

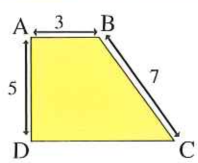
Soit M un point à l'extérieur du triangle ABC.

E,F et G sont respectivement les projetés orthogonaux de M sur (BC) , (AC) et (AB).

Démontrer que : $AG^2 + BE^2 + CF^2 = AF^2 + CE^2 + BG^2$.




**15** ABCD est un trapèze de bases [AB] et [DC] rectangle en D

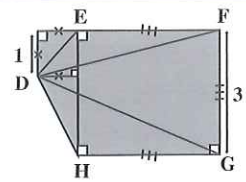



tels que : AB = 3cm , AD = 5cm et BC = 7cm.

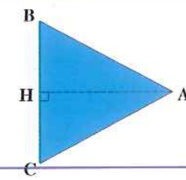
Calculer le périmètre et l'aire du trapèze ABCD.

**16** On considère la figure suivante.

Calculer DE , DF , DH et DG .




**17** ABC est un triangle isocèle en A et [AH] sa hauteur tels que : BC = 4 et $AH = 3\sqrt{5}$. Calculer AB et AC.

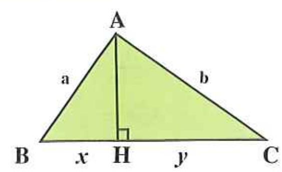



**18** ABC est un triangle et I est le milieu de [AC] tel que AC = 10. La parallèle à (AB) coupe la bissectrice intérieure de $\widehat{BAC}$ en D. Calculer AD sachant que CD = 6

**19** ABC est un triangle .

Soit H le projeté orthogonal de A sur (BC).

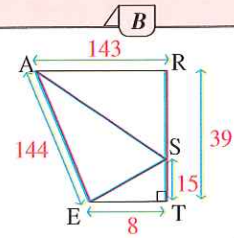
Montrer que : $a^2 - x^2 = b^2 - y^2$

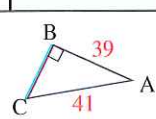
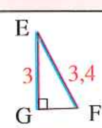
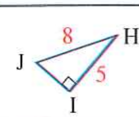



## MON BILAN

*1) Indiquer la bonne réponse par A , B ou C :*

Pour les exercices 1 à 3, on utilise la figure ci-contre :




| | A | B | C |
|---|---|---|---|
| 1 La longueur AS est égale : ... | 143 | 144 | 145 |
| 2 La longueur ES est égale : ... | 17 | 18 | 19 |
| 3 Les droites (AE) et (SE) sont : ... | sont parallèles | sont perpendiculaires | ne sont pas perpendiculaires |
| **Pour les exercices 3 à 6**, on utilise la figure ci-contre : (l'unité de longueur etant le centimètre) |   |   |   |
| 4 La longueur BC est égale : ... | 40 | $\sqrt{160}$ | 12 |
| 5 La longueur GF est égale : ... | 1,6 | 1,7 | 2 |
| 6 Valeur approchée de IJ est : ... | 6 | 6,24 | 7 |

Corrections page : 247

*2) En cas d'erreur, voici quelques conseils :*

| | Savoir | Pratique |
|---|---|---|
| Ex: 1 | Théorème | |
| Ex: 2 | Théorème | |
| Ex: 3 | Théorème | |
| Ex: 4 | Théorème | |
| Ex: 5 | Théorème | |
| Ex: 6 | Théorème | |

*3) Exercices pour la remédiation voir R5 page : 248*

## RÉCIPROQUE DE PYTHAGORE ET L'ORTHOGONALITÉ

**20** EFG est un triangle tel que :

$GF = 3x + 5$ ; $EF = 3x + 2$ ; $EG = 5$.

Déterminer la valeur de $x$ pour que EFG soit un triangle rectangle en E.

**21** ABC est un triangle tel que :

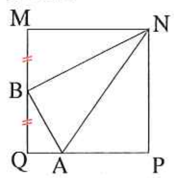
$AB = 5$ cm ; $AC = \sqrt{7}$cm et $BC = 3\sqrt{2}$ cm.

Montrer que ABC est un triangle rectangle.

**22** MNPQ est un carré tel que : $MQ = 12$ cm.

Soit B le milieu de [MQ] et A un point de [PQ] tel que : $PA = 9$ cm .

BAN est-il un triangle rectangle? Justifier.

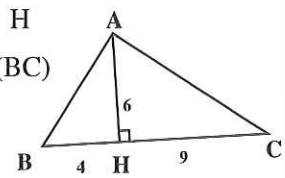



**23** ABC est un triangle tel que :

$AB = \dfrac{5}{13}AC$ et $BC = \dfrac{12}{13}AC$.

Montrer que ABC est un triangle rectangle.

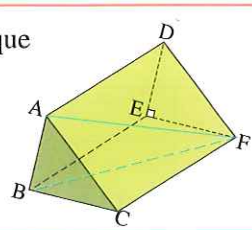
**24** ABC est un triangle et H le projeté orthogonal de A sur (BC) tels que : $BH = 4$, $CH = 9$ et $AH = 6$.




Montrer que ABC est un triangle rectangle en A.

**25** ABCDEF est un prisme tel que $AD = 10$ , $AB = 4$ et $BC = 6$

ABF est-il un triangle rectangle? Justifier.




**26** ABC est un triangle tel que :

$AB = m^2 + n^2$ ; $AC = m^2 - n^2$ ; $BC = 2mn$

où : $m > n > 0$.

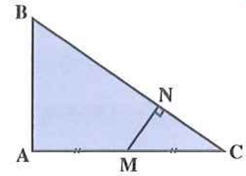
Montrer que ABC est un triangle rectangle.

**27** ABC est un triangle.

Soit M le milieu de [AC] et N le projeté orthogonal de M sur (BC) tels que :

$AB^2 = BN^2 - CN^2$.

Montrer que ABC est un triangle rectangle.




**28** ABC est triangle tel que :

$AB \neq AC$ et $AB^4 - AC^4 = BC^2(AB^2 - AC^2)$

Montrer que ABC est un triangle rectangle.

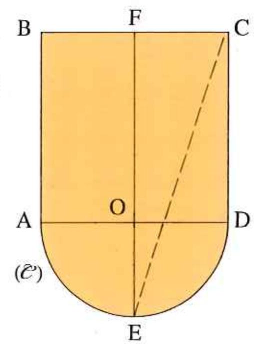
## PROBLÈMES OUVERTS

**29** ABCD est un carré de côté a.

Soit ($\mathscr{C}$) le demi-cercle de centre O et de diamètre [AD].

La parallèle à (AB) passant par O coupe ($\mathscr{C}$) en E et [BC] en F (voir figure).

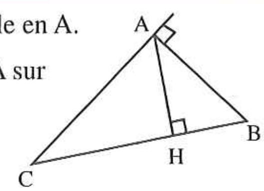
Démontrer que : $CE = \dfrac{a\sqrt{10}}{2}$ .




**30** ABC est un triangle rectangle en A.

Soit H le projeté orthogonal de A sur (BC). Montrer que :

*1)* $BH^2 + CH^2 + 2AH^2 = BC^2$



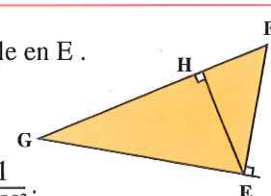

*2)* $AH^2 = BH \times CH$ *3)* $AB^2 = BH \times CB$

et $AC^2 = CH \times BC$ *4)* $AB \times AC = AH \times BC$

**31** EFG est un triangle rectangle en E .

Soit H le projeté orthogonal de E sur (FG).

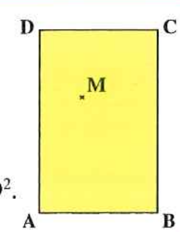
Démontrer que : $\dfrac{1}{EF^2} + \dfrac{1}{EG^2} = \dfrac{1}{EH^2}$.




**32** ABCD est un rectangle.

Soit M un point à l'intérieur du rectangle ABCD.

Montrer que : $MA^2 + MC^2 = MB^2 + MD^2$.



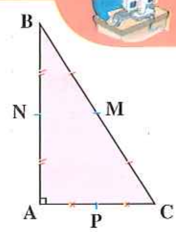
**33** ABCD est un trapèze isocèle de bases [AD] et [BC] tel que $AD < BC$.
Montrer que : $AC^2 - AB^2 = AD \times BC$.

**34** ABC est un triangle isocèle en B.
Soit D le symétrique de C par rapport à A.
Montrer que : $BD^2 = 2AB^2 + AC^2$.

**35** EFG est un triangle rectangle en E tel que : $\widehat{EGF} = 60°$.
Soit H le symétrique de E par rapport à G.
Montrer que : $FH^2 = 7EG^2$.

**36** AVEC TICE

ABC est un triangle rectangle en A.
Soient M , N et P les milieux respectifs de [BC] , [AB] et [AC].

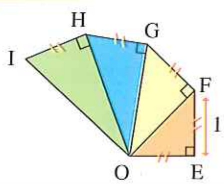



*1)* Démontrer que : $5AM^2 = BP^2 + CN^2$.

*2)* Utiliser un tableur pour tester l'égalité demandé.

## THALÈS POUR PLACER DES POINTS

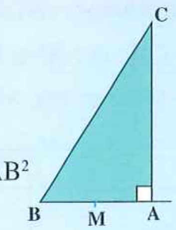
**37** Calculer OF , OG , OH et OI.
En déduire une construction d'un segment de longueur 28.



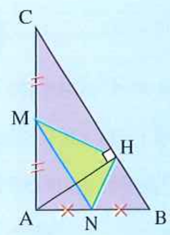

**38** Construire un segment de longueur $\sqrt{34}$.

## CHALLENGES

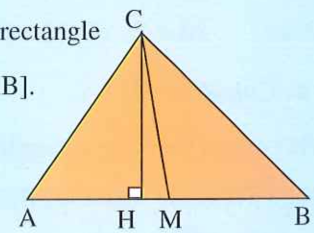
**39** ABC est un triangle rectangle en A.
Soit M le milieu de [AB] .
Démontrer que : $4CM^2 = 4BC^2 - 3AB^2$




**40** ABC est un triangle rectangle en A et H est le projeté orthogonal de A sur [BC].
Soit M et N les milieux respectifs de [AB] et [AC].
Démontrer que MNH est un triangle rectangle en H.




**41** Dans le triangle ABC rectangle en C, M est le milieu de [AB].
Soit H le pied de la hauteur issue de C.




*1)* Démontrer que : $CA^2 + CB^2 = 2CH^2 + AH^2 + BH^2$

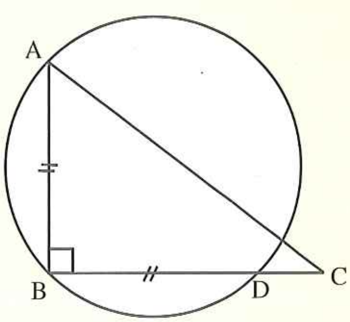
*2)* Démontrer que : $CA^2 + CB^2 = 2CM^2 + \dfrac{AB^2}{2}$

## SITUATIONS PROPOSÉES AUX OLYMPIADES

On considère la figure suivante où :

$AB = BD$ et $AC = 20$ et $DC = 4$.

**Déterminer le rayon du cercle.**



# JE ME PRÉPARE À L'EXAMEN LOCAL

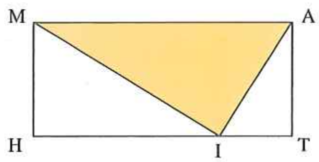
**42** ***Exercice résolu***

MATH est rectangle.

On donne : $AT = \sqrt{3}$ , $TI = 1$ et $HI = 3$.

*1)* Calculer AI et MI.

*2)* Montrer que AMI est un triangle rectangle.




***Correction : 42***

*1)* ● **Calcul de AI:**

AIT est un triangle rectangle en T.

D'après le théorème de Pythagore, on obtient :

$$AI^2 = AT^2 + IT^2$$

$$AI^2 = (\sqrt{3})^2 + 1^2 = 3 + 1 = 4$$

D'où : $AI^2 = 4$

Donc : $AI = 2$ car $AI > 0$

● **Calcul de MI :**

HIM est un triangle rectangle en H.

Donc d'après le théorème de Pythagore, on obtient :

$$MI^2 = MH^2 + HI^2$$

$$MI^2 = (\sqrt{3})^2 + 3^2 = 3 + 9 = 12$$

$$MI^2 = 12$$

$$MI = \sqrt{12}$$

Donc : $MI = 2\sqrt{3}$ .

**2) Montrons que AMI est un triangle rectangle.**

MATH est un rectangle.

$$MA = HT$$

$$MA = HI + IT \quad (\text{car } I \in [HT]).$$

$$MA = 3 + 1$$

$$MA = 4$$

Ainsi : $MA > MI$ et $MA > AI$

Comparons $MA^2$ et $MI^2 + AI^2$

On a : $MA^2 = 4^2 = 16$.

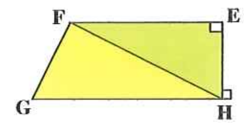
et $MI^2 + AI^2 = (2\sqrt{3})^2 + 2^2 = 12 + 4 = 16$

D'où : $MA^2 = MI^2 + AI^2$.

D'après la réciproque du théorème de Pythagore, AMI est un triangle rectangle en I.

**43**

Sur la figure ci-contre, EFGH est un trapèze rectangle en E et H tels que :




$$EF = 8 \quad , \quad EH = 4 \quad \text{et} \quad HG = 10$$

*1)* Montrer que :

$$FH = 4\sqrt{5} \text{ et } FG = 2\sqrt{5}.$$

*2)* En déduire que FGH est un triangle rectangle en F.

**44**

ABC est un triangle tel que :

$$AB = 3 \quad , \quad a\ AC = 6 \quad \text{et} \quad BC = 3\sqrt{5}$$

*1)* Montrer que ABC est un triangle rectangle en A.

*2)* Soit H le projeté orthogonal de A sur (BC).

Calculer AH et CH.

**45**

ABCD est un trapèze rectangle en B et C tel que :

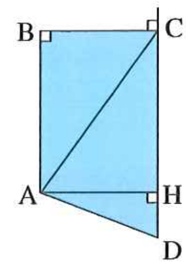
$$AB = 4 \quad \text{et} \quad BC = 2 \quad \text{et} \quad CD = 5 .$$

*1)* Montrer que : $AC = 2\sqrt{5}$.

*2)* Soit H le projeté orthogonal de A sur (DC).

*a.* Calculer AD.

*b.* Montrer que ADC est un triangle rectangle en A.




**46**

[BC] est un segment de longueur 8cm.

Soit H un point de [BC] tel que : BH = 2cm.

Soit A un point de la perpendiculaire à (BC) passant par H tel que AB = 4cm

*1) a.* Calculer AH.

*b.* Montrer que : $AC = 4\sqrt{3}$cm.

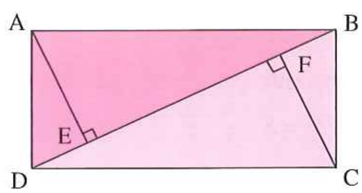
# JE ME PRÉPARE À L'EXAMEN LOCAL

*c.* Montrer que ABC est un triangle rectangle.

*2)* Soit E le projeté orthogonal de H sur (AB)

Calculer HE et BE.

**47** On considère la figure suivante :




ABCD est un rectangle tel que :

$AB = 10$ et $AD = 4$

Calculer EF.

**48** ABC est un triangle rectangle en A.

La hauteur issue de A coupe [BC] en H.

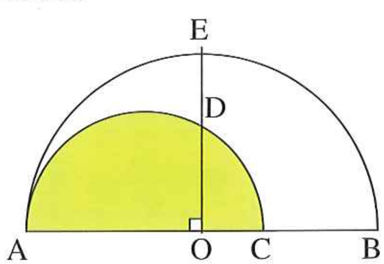
Démontrer : $AH^2 = BC^2 - AC^2 - BH^2$.

**49** Une défense d'éléphant est représentée ci dessous par deux demi-cercles tangents en A.

[AB] est le diamètre du grand demi–cercle de centre O.

On donne : $OA = 9$ dm et $DO = 3$ dm

Déterminer AC.




**50** A , B , C et H sont des points tels que :

$BC = 14$ cm ; $BH = 5$ cm ; $CH = 9$ cm ; $AH = 12$ cm et $AC = 15$ cm .

*1) a.* Démontrer que le point H appartient au segment [BC].

*b.* Construire les points A , B , C et H .

*c.* Démontrer que les droites (AH) et (BC) sont perpendiculaires.

*d.* Calculer la longueur AB.

*2) a.* Calculer l'aire du triangle ABC.

*b.* le segment [BK] est la hauteur relative au côté [AC].

Calculer la longueur BK.

*c.* Calculer les longueurs AK et CK.

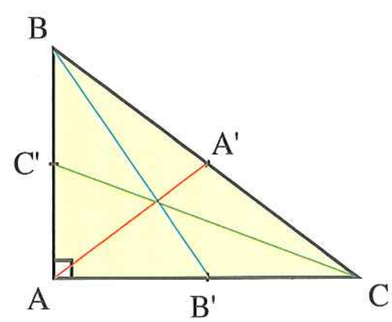
**51** ABC est un triangle rectangle en A tel que :

$AB = 5{,}4$ cm et $AC = 7{,}2$ cm

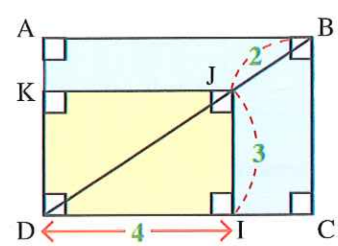
A' , B' et C' sont les milieux respectifs des côtés [BC], [CA] et [AB]

*1)* Calculer les longueurs des médianes CC' et BB'.

*2)* Démontrer que le triangle AB'A' est rectangle.




**52** On considère la figure suivante :




*1)* Calculer DJ

*2)* Calculer L'aire du rectangle ABCD.

# TRIGONOMÉTRIE

## Prérequis :

* Théorème de Thalès.
* Cosinus d'un angle aigu.
* Proportionnalité.
* Équations.

## *Un point d'histoire*

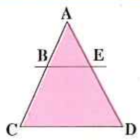
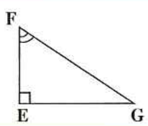
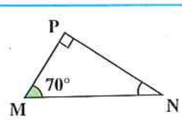
**Al-Battani (858 ; 959)**

Al-Battani était un astronome, astrologue et mathématicien turc. La bibliothèque de l'Escorial possède un manuscrit de chronologie astronomique d'Al-Battani. Un cratère lunaire porte le nom Albategnius en son honneur. Il a introduit l'usage du sinus dans les calculs, et en partie celui de la tangente, formant ainsi des bases du calcul trigonométrique moderne.

## TEST DIAGNOSTIQUE : Je m'évalue

## CHOISIR LA BONNE RÉPONSE.

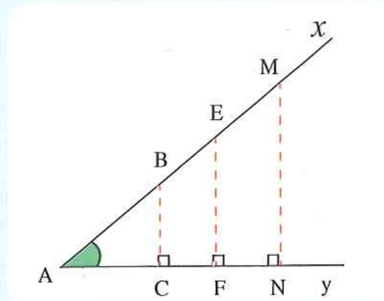
**Pour chaque question, cocher la bonne réponse en justifiant.**

| | Réponses : | | |
|---|---|---|---|
| On considère la figure ci-contre : où (BE) // (CD) . Alors ....   | $\frac{AB}{AE}=\frac{AC}{AD}=\frac{DC}{BE}$ ☐ | $\frac{AB}{AC}=\frac{AE}{AD}=\frac{BE}{CD}$ ☐ | $\frac{BA}{BC}=\frac{EA}{ED}=\frac{BE}{DC}$ ☐ |
| On a : $\frac{AB}{AC}=\frac{AD}{AE}$ ; donc .... | $\frac{AB}{AD}=\frac{AC}{AE}$ ☐ | $\frac{AD}{AC}=\frac{AB}{AE}$ ☐ | $\frac{AB}{AD}=\frac{AE}{AC}$ ☐ |
| [EF] est ....   | l'hypoténuse ☐ | le côté adjacent à $\widehat{EFG}$ ☐ | le côté adjacent à $\widehat{EGF}$ ☐ |
| ABC est un triangle rectangle en A. donc : cos $\widehat{ABC}$ est égal à ... | $\frac{AB}{BC}$ ☐ | $\frac{AB}{AC}$ ☐ | $\frac{AC}{AB}$ ☐ |
| ABC est un triangle rectangle en B. Donc : .... | $\cos\widehat{BAC} < 0$ ☐ | $\cos\widehat{BAC} > 1$ ☐ | $0 < \cos\widehat{BAC} < 1$ ☐ |
| On a : $\cos 30° = \frac{AB}{3}$. Donc ... | $AB = \frac{\cos 30°}{3}$ ☐ | $AB = \frac{3\sqrt{3}}{2}$ ☐ | $AB = \frac{3}{\cos 30°}$ ☐ |
| ABC est un triangle rectangle en C . Donc : .... | $AB^2 = AC^2 + BC^2$ ☐ | $AC^2 = BC^2 + AB^2$ ☐ | $BC^2 = AB^2 + AC^2$ ☐ |
| $\widehat{PNM}$ est égal à ....   | 20° ☐ | 110° ☐ | 118° ☐ |

Solutions page : 244

## Activité 1 Sinus et tangente d'une angle aigu

Soit $\widehat{xAy}$ un angle aigu.
B et E sont deux points de [A$x$).
Soit C et F les projetés orthogonaux respectifs de B et E sur [Ay).
Soit M un point de [A$x$) et N son projeté orthogonal sur [Ay).



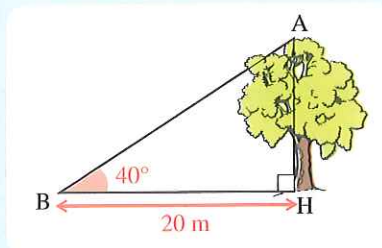

1. Montrer que : $\frac{BC}{AB} = \frac{EF}{AE} = \frac{MN}{AM}$ .

$\frac{BC}{AB}$ est appelé le sinus de l'angle $\widehat{xAy}$ et noté **sin** $\widehat{xAy}$

2. Montrer que : $\frac{BC}{AC} = \frac{EF}{AF} = \frac{MN}{AN}$

$\frac{BC}{AC}$ est appelé la tangente de l'angle $\widehat{xAy}$ et noté **tan** $\widehat{xAy}$ .

## Activité 2 Hauteur d'un arbre




On considère la figure ci-contre :

Calculer la hauteur AH de l'arbre.

## Activité 3 Relation trigonométrique fondamentale

ABC est un triangle rectangle en A tel que : $\widehat{ABC} = \alpha$

1. Montrer que : $0 < \sin \alpha < 1$ .
2. Calculer : $(\cos \alpha)^2 + (\sin \alpha)^2$ .
3. Montrer que : $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$ .

## Activité 4 Détermination du cosinus connaissant le sinus d'un angle

$\alpha$ est la mesure d'un angle aigu telle que : $\sin\alpha = \frac{2}{3}$, Déterminer $\cos\alpha$.

## Activité 5 Rapports trigonométriques de deux angles complémentaires

ABC est un triangle rectangle en A.

1. Montrer que :
   *a.* $\cos \widehat{ABC} = \sin \widehat{ACB}$
   *b.* $\sin \widehat{ABC} = \cos \widehat{ACB}$
   *c.* $\tan \widehat{ABC} = \frac{1}{\tan \widehat{ACB}}$
2. Conclure .

## 1 RAPPORTS TRIGONOMÉTRIQUES DANS UN TRIANGLE RECTANGLE

**Définition** Soit ABC un triangle rectangle en A.

- $\dfrac{AB}{BC}$ est appelé le **cosinus** de l'angle $\widehat{ABC}$.

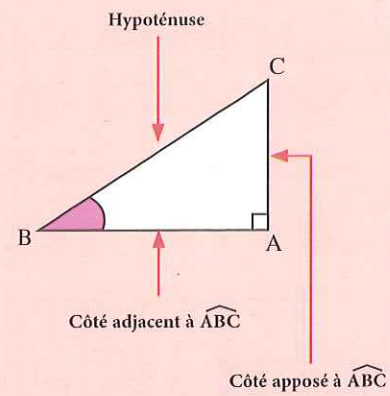
  On le note $\cos\widehat{ABC}$; donc : $\cos\widehat{ABC} = \dfrac{\text{côté adjacent à } \widehat{ABC}}{\text{l'hypoténuse}} = \dfrac{AB}{BC}$

- $\dfrac{AC}{BC}$ est appelé le **sinus** de l'angle $\widehat{ABC}$.

  On le note $\sin\widehat{ABC}$; donc : $\sin\widehat{ABC} = \dfrac{\text{côté opposé à } \widehat{ABC}}{\text{l'hypoténuse}} = \dfrac{AC}{BC}$

- $\dfrac{AC}{AB}$ est appelé la **tangente** de l'angle $\widehat{ABC}$.

  On le note $\tan\widehat{ABC}$; donc : $\tan\widehat{ABC} = \dfrac{\text{côté opposé à } \widehat{ABC}}{\text{côté adjacent à } \widehat{ABC}} = \dfrac{AC}{AB}$




**Exemple :** ABC est un triangle rectangle en A tel que : $AB = 4$ , $AC = 3$ et $BC = 5$ ,

donc : $\cos\widehat{ABC} = \dfrac{4}{5}$ , $\sin\widehat{ABC} = \dfrac{3}{5}$ et $\tan\widehat{ABC} = \dfrac{3}{4}$

**Propriété 1** Si $x$ la mesure en degrés d'un angle aigu, alors : $\mathbf{0 < \cos x < 1}$ **et** $\mathbf{0 < \sin x < 1}$

## 2 SINUS, COSINUS ET TANGENTE SUR LA CALCULATRICE

Pour trouver le sinus, le cosinus ou la tangente d'un angle aigu, on s'assure que la calculatrice est en mode "degré " et on utilise les touches : [sin] , [cos] ou [tan]

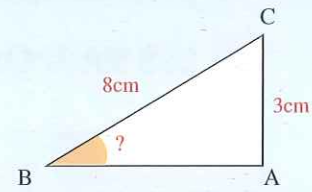
**Exemple :** Pour calculer le cosinus d'un angle mesurant 35° il faut, en général, taper la séquence suivante :

[cos] [3] [5] [=] ou [cos] [3] [5] [EXE]

qui donne : $\cos 35° \approx 0{,}819$

Pour retrouver la mesure d'un angle à partir de son sinus, cosinus ou tangente, on s'assure que la calculatrice est en mode "degré " et on utilise les touches [$sin^{-1}$] , [$cos^{-1}$] ou [$tan^{-1}$] .

**Exemple :** On considère le triangle rectangle en A suivant, on a : $\sin \widehat{B} = \frac{3}{8}$ .




Pour trouver la mesure $\widehat{B}$ , il faut, en général, taper :

[sin⁻¹] [(] [3] [÷] [8] [)] [=] ou [ ] [(] [3] [÷] [8] [)] [EXE]

qui donne : $\widehat{B} \simeq 22°$ .

**Remarque :** Généralement, les touches [$\sin^{-1}$] , [$\cos^{-1}$] et [$\tan^{-1}$] ne sont pas accessibles directement, il faut utiliser les touches [$2^{nd}$] ( ou [seconde] puis [sin] , [cos] et [tan] )

## 3 RELATION ENTRE COSINUS , SINUS ET TANGENTE D'UN ANGLE AIGU

**Propriété 2**

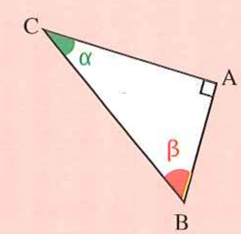
Soit $x$ la mesure d'un angle aigu, alors :

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1 \qquad \text{et} \qquad \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

## 4 RAPPORTS TRIGONOMÉTRIQUES DE DEUX ANGLES COMPLÉMENTAIRES

**Propriété 3**

Si deux angles aigus sont complémentaires, alors:
le cosinus de l'un est égal au sinus de l'autre et la tangente de l'un est égale à l'inverse de la tangente de l'autre.




**Autrement dit:** Si $\alpha + \beta = 90°$ , alors : $\cos\alpha = \sin\beta$ et $\sin\alpha = \cos\beta$ et $\tan\alpha = \frac{1}{\tan\beta}$

**Exemples :** *1)* Calculons la valeur exacte de $\sin x$ et $\tan x$ sachant que : $\cos x = \frac{3}{5}$

On sait que : $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$

donc : $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x = 1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2 = 1 - \frac{9}{25} = \frac{16}{25} = \left(\frac{4}{5}\right)^2$

comme : $\sin x > 0$, alors $\sin x = \frac{4}{5}$

*2)* On a : $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\frac{4}{5}}{\frac{3}{5}} = \frac{4}{5} \times \frac{5}{3}$ , donc: $\tan x = \frac{4}{3}$

## 1 LES RAPPORTS TRIGONOMÉTRIQUES DES ANGLES $60°$ , $30°$ ET $45°$

**Exemple 1**

1. ABC est un triangle équilatéral tel que : $AB = a$ $(a > 0)$

Soit H la projeté orthogonal du point A sur la droite (BC)

*a.* Montrer que : $AH = \frac{\sqrt{3}}{2}a$

*b.* En déduire que $\cos 60° = \frac{1}{2}$ et $\sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\tan 60° = \sqrt{3}$

*c.* Calculer : $\cos 30°$ , $\sin 30°$ et $\tan 30°$.

2. ABC est un triangle réctangle isocèle en A tel que : $AB = a$ $(a > 0)$

*a.* Montrer que : $BC = \sqrt{2}a$ .

*b.* Calculer : $\cos 45°$ , $\sin 45°$ et $\tan 45°$.

1. *a.* Montrons que $AH = \frac{\sqrt{3}}{2}a$

- ABC est un triangle équilatéral et h est le projeté orthogonal de A sur (BC) alors h est le milieu de [BC] donc : $BH = \frac{1}{2}a$.
- ABH est un triangle rectangle en H, alors d'après le théorème de Pythagore , on a :
  $AB^2 = BH^2 + AH^2$ , donc : $AH^2 = AB^2 - BH^2 = a^2 - \left(\frac{1}{2}a\right)^2 = a^2 - \left(\frac{1}{2}a\right)^2 = a^2 - \frac{a^2}{4} = \frac{3a^2}{4}$
  donc : $AH^2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}a\right)^2$. D'où : $AH = \frac{\sqrt{3}}{2}a$ .

*b.* Dans le triangle rectangle ABH, on a : $\cos \widehat{BAH} = \frac{BH}{BA}$ et $\sin \widehat{BAH} = \frac{AH}{BA}$

c'est-à-dire $\cos 60° = \frac{\frac{1}{2}a}{a}$ et $\sin 60° = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}a}{a}$ , donc : $\cos 60° = \frac{1}{2}$ et $\sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$

On a : $\tan 60° = \frac{\sin 60°}{\mathrm{s}\cos 60°} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{2}{1} = \sqrt{3}$ . D'où : $\cos 60° = \frac{1}{2}$ et $\sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\tan 60° = \sqrt{3}$

*c.* Calculons : $\cos 30°$, $\sin 30°$ et $\tan 30°$

On a : $30° + 60° = 90°$ (30° et 60° sont deux angles complementaires) , donc $\begin{cases} \cos 30° = \sin 60° \\ \sin 30° = \cos 60° \\ \tan 30° = \frac{1}{\tan 60°} \end{cases}$

D'où : $\cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin 30° = \frac{1}{2}$ et $\tan 30° = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

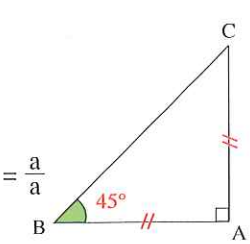
2. *a.* Montrons que : $BC = \sqrt{2}a$

ABC est un triangle rectangle isocèle en A, alors :

$BC^2 = AB^2 + AC^2 = a^2 + a^2 = 2a^2 = (\sqrt{2}a)^2$ . Donc : $BC = \sqrt{2}a$.

*b.* On a : $\cos \widehat{ABC} = \frac{BA}{BC} = \frac{a}{\sqrt{2}a}$ , $\sin \widehat{ABC} = \frac{BA}{BC} = \frac{a}{\sqrt{2}a}$ et $\tan \widehat{ABC} = \frac{AC}{AB} = \frac{a}{a}$

c'est-à-dire : $\cos 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$ , $\sin 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\tan 45° = 1$.



## 2 CALCULER UNE LONGUEUR EN UTILISANT UN RAPPORT TRIGONOMÉTRIQUE

**Exemple 2** ABC est un triangle rectangle en A tel que : $AB = 8$ et $AC = 4$.

M est le milieu de [AC], H est le projeté orthogonal de M sur (BC). Calculer MH.

On constate que [MH] est le côté opposé à l'angle $\widehat{ACB}$ dans le triangle CMH et CM est la " moitié " de [AC].

Ce qui nous amène à déterminer le sinus de $\widehat{ACB}$.

ABC est un triangle rectangle en A. donc d'après le théorème de Pythagore,

on a : $BC^2 = AB^2 + AC^2 = 8^2 + 4^2 = 64 + 16 = 80$.

D'où : $BC = \sqrt{80}$ , c'est-à-dire : $BC = 4\sqrt{5}$

D'autre part : $MC = \dfrac{AC}{2}$ car M est le milieu de [AC] : $MC = \dfrac{4}{2}$ ; donc : $MC = 2$

Dans le triangle ABC rectangle en A , on a : $\sin \widehat{ACB} = \dfrac{AB}{BC}$

D'où : $\sin \widehat{ACB} = \dfrac{8}{4\sqrt{5}}$ soit $\sin \widehat{ACB} = \dfrac{2\sqrt{5}}{5}$

Dans le triangle CMH rectangle en H, on a : $\sin \widehat{MCH} = \dfrac{MH}{MC}$

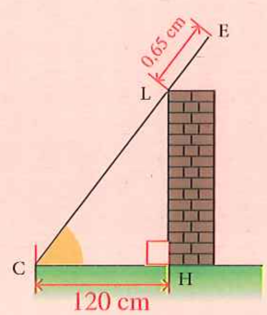
Or $\sin \widehat{MCH} = \sin \widehat{ACB}$ (car $\widehat{MCH} = \widehat{ACB}$) alors : $\dfrac{MH}{MC} = \dfrac{2\sqrt{5}}{5}$

Ainsi : $MH = \dfrac{4\sqrt{5}}{5}$ (car $MC = 2$).

## 3 CALCULER LA HAUTEUR D'UNE ÉCHELLE

**Exemple 3** Une échelle de 5,60m de longueur est représentée par [EC], comme indiquer ci-contre.

1. Donner une valeur approchée au degré près de la mesure α de l'angle qu'elle fait avec le sol.
2. Calculer une valeur approchée au dixième près de la hauteur du mur, en m.




1. Donnons une valeur approchée au degré près de la mesure α .

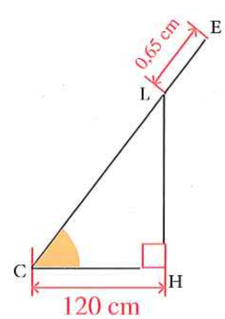
On a : $\cos\alpha = \dfrac{CH}{CL} = \dfrac{1{,}20}{5{,}60 - 0{,}65} = \dfrac{1{,}20}{4{,}95} = \dfrac{8}{33}$

donc : $\alpha = \cos^{-1}\dfrac{8}{33}$ et $\alpha \simeq 76°$

2. Calculons une valeur approchée de la hauteur LH.

On a : $\sin \alpha = \dfrac{LH}{CL}$ donc $LH = CL \times \sin \alpha$

$LH \simeq 4{,}96 \times \sin 76°$, d'où : $LH \simeq 4{,}9 \times 0{,}97$ , donc : $LH \simeq 4{,}9$ m.



# INVESTISSEMENT
## Je m'entraîne

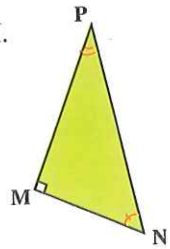
### POUR RÉVISER SON COURS

**1** MNP est un triangle rectangle en M.

Recopier et compléter :

$\sin .... = \dfrac{....}{NP}$ ; $\cos \widehat{MPN} = \dfrac{....}{....}$

$\tan .... = \dfrac{MP}{....}$ ; $....\widehat{NPM} = \dfrac{MN}{NP}$.




**2** ABC est un triangle rectangle en A.

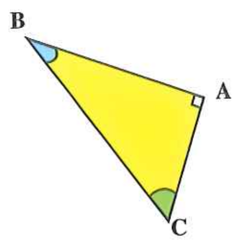
Recopier et compléter :

$AB = BC \times ...$

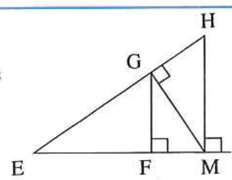
$AC = BC \times ...$

$AB = ... \times \tan \widehat{C}$

$AB = \dfrac{AC}{...}$




**3** Sur la figure ci-contre, écrire quatre rapports égaux à $\sin \widehat{HEM}$.




**4** ABC est un triangle tel que :

AC = 12cm , AB = 5 cm et BC = 13cm

*1)* Montrer que ABC est un triangle rectangle en A.

*2)* Calculer les rapports trigonométriques de $\widehat{ABC}$.

*3)* En déduire $\cos \widehat{ACB}$ , $\sin \widehat{ACB}$ et $\tan \widehat{ACB}$.

**5** Recopier et compléter :

$\cos 30° = \sin ...$ ; $\sin 47° = \cos ....$

$\tan 52° = \dfrac{1}{...38°}$ ; $\cos 80° \times .... = \sin^2 10°$

$\tan 25° \times \tan .... = 1$ .

**6** Simplifier :

$a = \cos 35° \times \sin 55° - \dfrac{1}{\tan 42°} + \cos^2 55° + \tan 48°$

$b = (\sin 40° - \cos 50°)^2 + 2\cos 40° \times \sin 50°$

$c = 2\tan^2 60° + 4\tan 45° - \dfrac{1}{\cos^2 30°} + \dfrac{1}{\cos^2 60°}$

$d = \dfrac{1}{\tan^2 54° + 1} - \dfrac{\tan^2 36°}{\tan^2 36° + 1}$

**7** Simplifier :

$a = \cos 40° - 3\sin 70° - \sin 50° + 3\cos 20°$

$b = \sqrt{3}\cos^2 36° - \sqrt{3}\tan 66° \times \tan 24° + \dfrac{\sqrt{12}}{2}\cos^2 54°$

**8** $x$ est un angle aigu non nul tel que : $\tan^2 x = \dfrac{5}{6}$

Calculer : *1)* $6\sin^2 x + 5\cos^2 x$

*2)* $6\sin x + 5\cos x$

*3)* $\dfrac{6}{\cos x} + \dfrac{5}{\sin x}$

**9** a est la mesure d'un angle aigu.

*1)* Calculer cos a et tan a sachant que : $\sin a = \dfrac{4}{5}$.

*2)* Calculer sin a et tan a sachant que :

$4\cos a - \sqrt{3} = 0$

*3)* Calculer cos a et sin a sachant que :

$3\cos a - \sin a = 0$

**10** Sans calculer $x$, construire un angle aigu de mesure $x$ dans chaque cas :

*1)* $\sin x = \dfrac{3}{5}$ ; *2)* $\cos x = \dfrac{2}{9}$ ; *3)* $\tan x = \dfrac{11}{6}$.

**11** $x$ est la mesure d'un angle aigu. Montrer que :

*1)* $\cos^4 x - \sin^4 x = \cos^2 x - \sin^2 x$.

*2)* $\tan^2 x - \sin^2 x = \tan^2 x \times \sin^2 x$.

*3)* $\dfrac{2\cos^3 x - \cos x}{\sin x - 2\sin^3 x} = \dfrac{1}{\tan x}$

**12** Simplifier :

$E = 2\sin^2 x + 3\cos^2 x - 2$

$F = \dfrac{1}{1 + \sin x} + \dfrac{1}{1 - \sin x} - \dfrac{2}{\cos^2 x}$

$G = \cos^4 x - \cos^2 x + \sin^2 x - \sin^4 x$

$H = \cos x \sin x\,(1 + \tan x)\left(1 + \dfrac{1}{\tan x}\right)$

**13** a est la mesure d'un angle aigu.

Simplifier : $D = \dfrac{\sin^4 a - 1 + \cos^2 a}{\cos^4 a - 1 + \sin^2 a}$

**14** a et b sont les mesures de deux angles aigus complémentaires . Montrer que :

*1)* $1 - 2\sin^2 a + \sin a \cos b = \cos a \sin b$.

*2)* $5\sin^2 a - \cos^2 a - \cos^2 b + 5\sin^2 b = 4$.

**15** $x$ est la mesure d'un angle aigu non nul.

*1)* Montrer que : $\cos^2 x = \dfrac{1}{1+\tan^2 x}$ et $\sin^2 x = \dfrac{\tan^2 x}{1+\tan^2 x}$.

*2)* Application :

Calculer $\cos x$ et $\sin x$ sachant que :

$\tan x = \sqrt{2} + 2$.

**16** Calculer A :

$A = \tan 1° \times \tan 2° \times \tan 3° \times .... \times \tan 88° \times \tan 89°$.

**17** $x$ est la mesure d'un angle aigu.

Montrer que : $\cos^6 x + \sin^6 x + 3\sin^2 x \cos^2 x = 1$.

**18** a et b sont les mesures de deux angles aigus.

Montrer que :

$\sin^2 a - \sin^2 b = \cos^2 b - \cos^2 a = \dfrac{\tan^2 a - \tan^2 b}{(1+\tan^2 a)(1+\tan^2 b)}$

**19** $\alpha$ et $\beta$ sont deux angles complémentaires tels que :

$\tan\alpha = \sqrt{2} - 1$.

Calculer $\sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$.

**20** $x$ est la mesure d'un angle aigu tel que

$\cos x \sin x = \dfrac{1}{2}$.

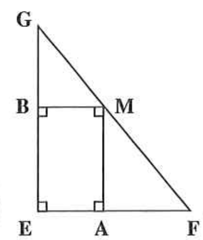
calculer $\cos x$ et $\sin x$ .

**21 AVEC TICE**

EFG est un triangle rectangle en E .

Soit M un point de [FG].

A et B sont les projetés orthogonaux de M respectivement sur (EF) et (EG).

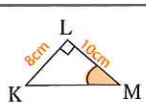



*1)* Conjecturer la valeur de $\dfrac{MA^2}{MF^2} + \dfrac{MB^2}{MG^2}$ en utilisant le logiciel ***Geogebra***.

*2)* Montrer que : $\dfrac{MA^2}{MF^2} + \dfrac{MB^2}{MG^2} = 1$.

## MON BILAN

***1) Indiquer la bonne réponse par A , B ou C :***

| | A | B | C |
|---|---|---|---|
| 1 Dans un triangle ROT rectangle en O,sin $\widehat{R}$ est égal à ... | $\dfrac{OT}{RO}$ | $\dfrac{RO}{OT}$ | $\dfrac{TO}{TR}$ |
| 2 Dans un triangle TAN rectangle en A,sin $\widehat{T}$ est égal à ... | $\dfrac{AN}{AT}$ | $\dfrac{TA}{TN}$ | $\dfrac{AN}{TN}$ |
| 3 avec la calculatrice, l'arrondi au millieu de tan 79° est ... | 5,144 | 5,145 | 0,496 |
| 4 avec les données de cette figure,   l'arrondi au dixième de fegré de la mesure m est ... | 53,1° | 51,3° | 38,7° |
| 5 d'une mesure d'un angle aigu. Si $\sin\alpha = \cos 30°$ alors ... | $\alpha = 45°$ | $\alpha = 60°$ | $\alpha = 30°$ |
| 6 Un seule de ces égalités est vrais, laquelle? | tan 35° x sin35° = cos 35° | cos25° = 1 + (sin25°) | $\cos 72° = \dfrac{\sin 72°}{\tan 72°}$ |
| 7 $x$ une mesure d'un angle aigu si $\cos = \dfrac{1}{2}$ alors... | $\sin x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ | $\sin x = 1$ | $\sin x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ |

Corrections page : 247

***2) En cas d'erreur, voici quelques conseils :***

| | Savoir | Pratique |
|---|---|---|
| Ex: 1 | Définition | |
| Ex: 2 | Définition | |
| Ex: 3 | Exemple 2 | |
| Ex: 4 | Exemple 3 | |
| Ex: 5 | Propriété 3 | |
| Ex: 6 | Propriété 2 | |
| Ex: 7 | | Exemple 2 |

***3) Exercices pour la remédiation voir R6 page : 248***

## CALCULER DES LONGUEURS

**22** EFG est un triangle rectangle en E tel que :

$$EF = 5\text{cm} \quad \text{et} \quad \tan \widehat{EFG} = \frac{4}{3}$$

Calculer EG et FG.

**23** ABC est un triangle rectangle en A.

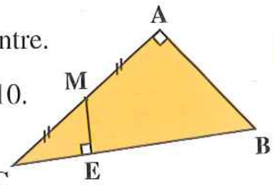
tel que : $AC = 2\sqrt{3}$ et $\widehat{ABC} = 23°$

Calculer AB.

**24** On considère la figure ci-contre.

On donne : $AB = 6$ et $AC = 10$.

Calculer ME.

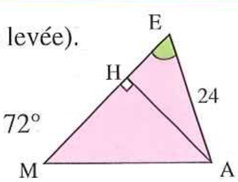



**25** Sur la figure ci-contre (à main levée).

AME est un triangle tel que:

$\widehat{AEM} = 76°$ ; $\widehat{MAE} = 72°$

$AE = 24$ m



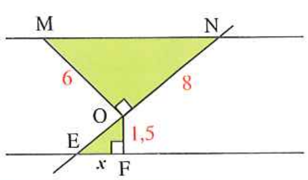

Soit H le projeté orthogonal de A sur (ME).

Calculer AH et AM.

**26** Sur la figure ci-contre :

(EF) // (MN).

Calculer $x$ .



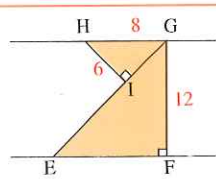

**27** Sur la figure ci-contre ,

on donne (HG) // (EF),

$\widehat{GIH} = 90°$ , $\widehat{EFG} = 90°$,

HI = 6cm , HG = 8cm et FG = 12cm .

Calculer EG.

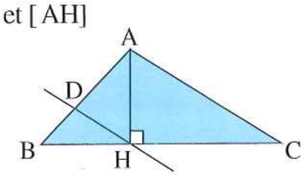



**28** ABC est un triangle et [ AH]

sa hauteur tels que :

$AB = 9$ et $AH = 6$

et $\sin \widehat{ACB} = \dfrac{2}{5}$.




*1)* Calculer BH.

*2)* Calculer AC et CH .

*3)* La parallèle à (AC) passant par H coupe (AB) en D.

Caleuler BD.

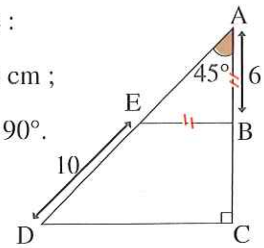
**29** Sur la figure ci - contre :

AB = 6 cm ; DE = 10 cm ;

$\widehat{BAE} = 45°$ ; $\widehat{ACD} = 90°$.

*1)* Calculer AE.

*2)* Calculer BC .

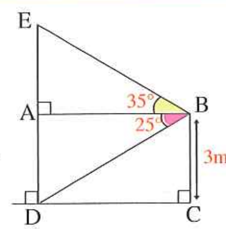



**30** On donne :

$\widehat{ABE} = 35°$ ; $\widehat{ABD} = 25°$ ;

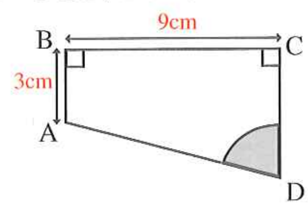
BC = 3 cm ; ABCD est un rectangle.

Calculer ED.




**31** ABCD est un trapèze rectangle en B et C

tel que : AB = 3 cm , BC = 9cm et $\widehat{ADC} = 50°$.

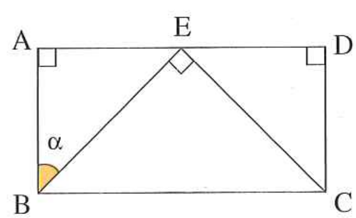



Calculer l'aire du trapèze ABCD.

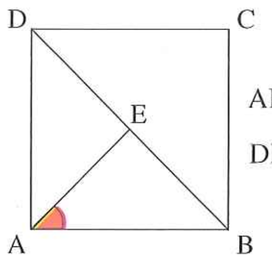
## PROBLÈMES OUVERTS

**32** On suppose que :

AB = 5cm et AD = 10cm




Calculer tan(α)

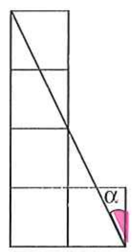



ABCD est un carré tel que :

$DE = \frac{1}{4}EB$ . Calculer $\tan \alpha$

**33** On considère la figure suivante :

Calculer $\tan(\alpha)$ .

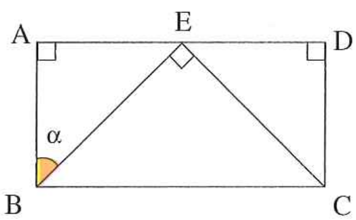



**34** On considère la figure suivante :

On suppose que :

$\tan(\alpha) = \frac{5}{12}$

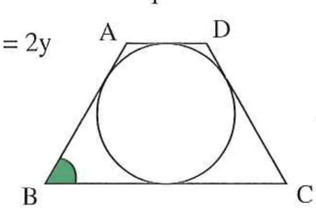
Calculer $\frac{ED}{DF}$ .




**35** On considère la figure suivante telle que :

$AD = 2x$ et $BC = 2y$

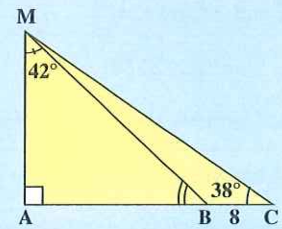
Calculer $\cos x$ en fonction de $x$ et y.



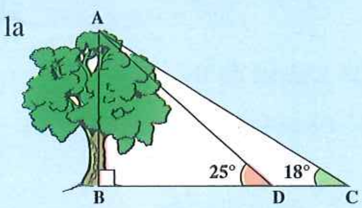

## CHALLENGES

**37** On considère la figure suivante.

Calculer MA sachant que : $BC = 8$ cm.




**38** On considère la figure suivante :




Calculer CD sachant que : AB = 24 m.

**39** $x$ est la mesure d'un angle aigu tel que :

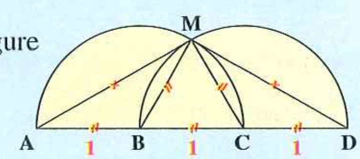
$$2 \cos x + 3 \sin x = 3.$$

*1)* Montrer que : $(13 \sin x - 5)(\sin x - 1) = 0$

*2)* Calculer $\sin x$ , $\cos x$ .

**40** On considère la figure ci-contre :

Calculer MA.




## SITUATIONS PROPOSÉES AUX OLYMPIADES

ABC est un triangle isocèle en A. [BB'] est la hauteur issue de B.

M est un point du segment [BC].

H et K sont les projetés orthogonaux respectifs de M sur (AB) et (AC).

**Montrer que : MH + MK = BB'.**

## 40 Exercice résolu

*1)* ABC est un triangle rectangle en A tel que :

AC = 8 et $\cos x = \frac{4}{5}$ où $\widehat{ABC} = x$

**a.** Calculer BC et AB.

**b.** Calculer $\sin\widehat{ABC}$ et $\tan\widehat{ABC}$

**2)** Calculer E :

$$E = \sin^2 64° + \sin 30° + \sin^2 26° - \tan 83° \times \tan 7°$$

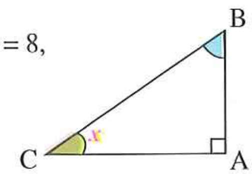
## Correction : 40

**1)a.** ● **Calcul de BC :**

ABC est un triangle rectangle en A.

Donc : $\cos x = \frac{AC}{BC}$

Or : $\cos x = \frac{AC}{BC}$ et AC = 8,




alors : $\frac{4}{5} = \frac{8}{BC}$.

D'où : $BC = \frac{5\times 8}{4}$, soit BC = 10.

● **Calcul de AB :**

D'après le théorème de Pythagore appliqué au triangle ABC rectangle en A, on obtient :

$BC^2 = AB^2 + AC^2$

$AB^2 = BC^2 - AC^2$

$AB^2 = 10^2 - 8^2$

$AB^2 = 36$

Donc : AB = 6 car AB > 0

**b. Calcul de $\sin\widehat{ABC}$ et $\tan\widehat{ABC}$.**

On a : $\sin\widehat{ABC} = \frac{AC}{BC}$ et $\tan\widehat{ABC} = \frac{AC}{AB}$

On a : $\sin\widehat{ABC} = \frac{8}{10}$ et $\tan\widehat{ABC} = \frac{8}{6}$

Donc : $\sin\widehat{ABC} = \frac{4}{5}$ et $\tan\widehat{ABC} = \frac{4}{3}$

**2) Calcul de E :**

On a : $E = \sin^2 64° + \sin 30° + \sin^2 26° - \tan 83° \times \tan 7°$

et $64°+26°=90°$ et $83°+7°= 90°$ et $\sin 30° = \frac{1}{2}$

Donc :

$$E = \cos^2 26° + \frac{1}{2} + \sin^2 26° - \tan 83° \times \frac{1}{\tan 83°}$$

$$E = \cos^2 26° + \sin^2 26° + \frac{1}{2} - \tan 83° \times \frac{1}{\tan 83°} + \frac{1}{2}$$

$$E = \cos^2 26° + \sin^2 26° + \frac{1}{2} - 1$$

$$E = \cancel{1} + \frac{1}{2} - \cancel{1}$$

D'où : $E = \frac{1}{2}$.

## 41

**I.** MNP est un triangle tel que : $\begin{cases} MN = 5 \\ NP = 13 \\ MP = 12 \end{cases}$

*1)* Montrer que $\widehat{MNP}$ et un triangle rectangle en M.

*2)* Calculer $\sin\widehat{MNP}$ et $\tan\widehat{MNP}$ .

*3)* Soit H le projeté orthogonal de M sur (NP).

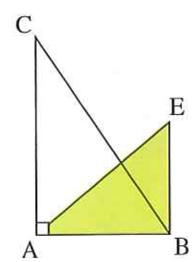
Calculer PH et MH.

**II.** a est la mesure d'un angle aigu tel que : $\cos a = \frac{2}{7}$ .

Calculer tan a.

## 42

Sur la figure : ABC est un triangle rectangle en A tel que :




$BC = \sqrt{56}$ , $AB = \sqrt{20}$ , BE = 4 et AE = 6

*1)* Montrer que AC = 6.

*2)* Calculer $\sin\widehat{CBA}$.

*3)* Montrer que ABE est un triangle rectangle.

*4)a.* Calculer $\tan \widehat{AEB}$.

*b.* Soit H le projeté orthogonal de B sur (AE).

Calculer $\dfrac{BH}{AH}$.

**43**

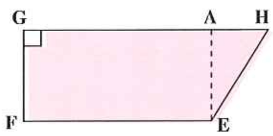
**I.** EFGH est un trapèze de bases [EF] et [GH] tels que : $\widehat{GFE} = 90°$ , $EF = 6$ et $FG = 3$.

*1)* Montrer que : $EG = 3\sqrt{5}$

*2)* Calculer les rapports trigonométriques de $\widehat{FEG}$ .

*3)* Soit A le projeté orthogonal de E sur (HG).

Calculer HE et AH sachant que $\sin \widehat{AHE} = \dfrac{\sqrt{5}}{3}$.




**II.** Montrer que :

$$\tan 62° + \tan 28° = \frac{1}{\cos 62° \times \sin 62°}.$$

**44**

**I.** ABC est un triangle rectangle en A tel que :

$AB = \sqrt{2} + 2$ et $AC = 2\sqrt{2} - 1$

*1)a.* Montrer que : $BC = \sqrt{15}$.

*b.* Calculer $\sin \widehat{ACB}$ et $\tan \widehat{ACB}$ .

*2)* La perpendiculaire à (BC) passant par C coupe (AB) en D. Calculer CD.

**II.** a est la mesure d'un angle aigu.

Montrer que : $\dfrac{(\cos a + \sin a)^2}{1 - \cos^2 a} = \left(1 + \dfrac{1}{\tan a}\right)^2$

**45**

**I.** ABC est un triangle tel que :

$AB = 12$ , $BC = 13$ et $AC = 5$

*1)* Montrer que ABC est un triangle rectangle.

*2)* Calculer $\cos(90° - \widehat{ACB})$ et $\tan(90° - \widehat{ABC})$.

*3)* Soit D un point de [AB] tel que $BD = 5$ et E le projeté orthogonal de D sur (BC). Calculer DE.

**II.** *1)* a est la mesure d'un angle aigu tel que :

$$\frac{\sin a}{2} = \frac{\cos a}{3}.$$

Calculer $\cos a \times \sin a$.

*3)* b est la mesure d'un angle aigu.

Montrer que : $\dfrac{\sin b \times \cos b}{\tan b} + \sin^2 b = 1$.

**46**

$\alpha$ est la mesure d'un angle aigu tel que :

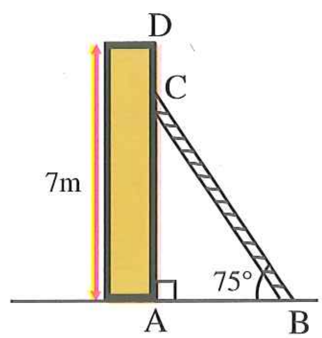
$$0° < \alpha < 20°$$

Déterminer $\alpha$ sachant que :

$$\sin(\alpha + 10°) = \cos(2\alpha + 32°)$$

**47**

Une échelle de 6 mètres est appuyée contre un mur de 7 mètres de haut. Par mesure de sécurité, on estime que l'angle que fait l'échelle avec le sol droit être de 75° (voir le schéma ci-dessous ).




*1)* Calculer la distance AB entre le pied de l'échelle et le mur (on donnera le résultat arrondi au centimètre).

*2)* À quelle distance CD du sommet du mur se trouve le haut de l'échelle (on donnera le résultat arrondi au centimètre)

# ORDRE ET OPÉRATIONS

## Prérequis :

* Ordre et opérations sur les nombres rationnels.

## Un point d'histoire

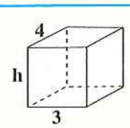
**John Wallis (1616 ; 1703)**

Wallis est un mathématicien anglais. Ses travaux sont précurseurs de ceux de Newton. On lui doit le symbole de l'infini. Il résolut le problème de la voûte quarrable de géométrie. Il s'intéressa aussi à l'arithmétique. Il est également précurseur de la phonétique, de l'éducation des sourds et de l'orthophonie.

## TEST DIAGNOSTIQUE : Je m'évalue

## CHOISIR LA BONNE RÉPONSE.

**Pour chaque question, cocher la bonne réponse en justifiant.**

| | Réponses : | | |
|---|---|---|---|
| $x - 7$ est un nombre positif ; donc : | $x \leq 7$ | $x \geq 7$ | $x$ et 7 sont positifs |
| $x$ est un nombre rationnel inférieur ou égal à 4 ; donc : | $4 - x \geq 0$ | $x - 4 \geq 0$ | $4 - x \leq 0$ |
| a et b sont deux nombres rationnels tels que a < b ; donc : | $a - b > 0$ | a et b sont de signes contraires | $a - b < 0$ |
| $-2 \leq x \leq 3$ signifie que .... | $-2 \leq x$ et $x \leq 3$ | $x \leq 3$ | $x \geq -2$ |
| Si $a < 2$ et $b < -4$, alors .... | $-a + 4 < b - 2$ | $-ab < -8$ | $a + b < -2$ |
| Si $a \leq b$, alors .... | $3a \leq b$ | $3a \leq 3b$ | $3a \geq 3b$ |
| On a : $x \leq 5$. Alors .... | $-2x - 1 \leq -9$ | $2x - 1 \leq 9$ | $2x - 1 \geq 9$ |
| Le volume du pavé droit est compris enre 58,37 et 58,42 ; donc : ....  | $5,2 < h < 5,4$ | $4,34 < h < 4,56$ | $4,864 < h < 4,869$ |

Solutions page : 246

## Activité 1 Compatibilité de l'ordre avec l'addition et la multiplication des nombres positifs

a , b et c sont trois nombres réels tels que : $a < b$.

1. Comparer $a + c$ et $b + c$ .
2. *a.* Déterminer le signe de $cb - ca$ selon le signe de c .

   *b.* En déduire la comparaison de ca et cb.

## Activité 2 Comparaison des carrées et des inverses

1. a et b sont deux nombres réels **positifs**.

   *a.* Montrer que $a^2 - b^2$ et $a - b$ ont même signe.

   *b.* Montrer que : $a \leq b$ signifie que : $a^2 \leq b^2$

   *c.* En déduire que $a \leq b$ signifie que : $\sqrt{a} \leq \sqrt{b}$

   *d.* Comparer : $\sqrt{5}$ et $3$ ; $\sqrt{6}$ et $\sqrt{10}$ ; $3\sqrt{2}$ et $2\sqrt{3}$.

2. $x$ et y sont deux réels **strictement positifs.**

   *a.* Montrer que $x - y$ et $\frac{1}{y} - \frac{1}{x}$ ont même signe.

   *b.* En déduire que : $x \leq y$ signifie : $\frac{1}{y} \leq \frac{1}{x}$

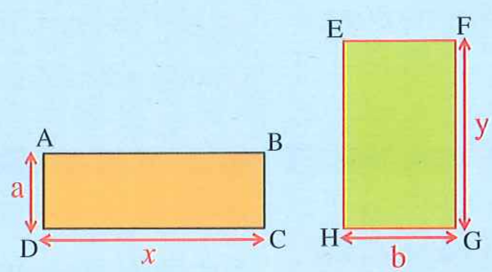
   *c.* Comparer : $\frac{1}{2\sqrt{6}}$ et $\frac{1}{3\sqrt{4}}$ ; $\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{5}}$ et $\frac{1}{\sqrt{5}+2}$ ; $\sqrt{5}-\sqrt{3}$ et $2\sqrt{5}$

## Activité 3 Encadrement d'un produit

Sur la figure ci-contre : $0 < a \leq x$ et $0 < b \leq y$

En développant : $(a - x)b + x(b - y)$,

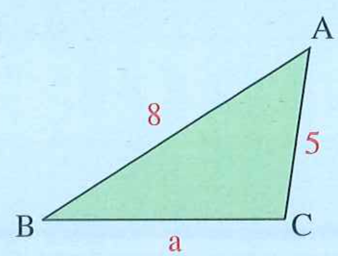
comparer ab et $xy$.




## Activité 4 Encadrement des côtés d'un triangle.

Sur la figure ci-contre, le périmètre du triangle ABC est compris entre 18 et 22 (l'unité de mesure des longueurs est le cm).

1. Donner un encadrement de $x$.
2. Le triangle ABC peut - il être rectangle en A ?



## 1 COMPARAISON DE DEUX NOMBRES RÉELS

**Définition** Soit a et b deux nombres réels, $a \leq b$ signifie que : $a - b \leq 0$

**Exemple :** Comparons les nombres : $3\sqrt{2} - 5$ et $\sqrt{2} - 7$.

On a : $(\sqrt{2} - 7) - (3\sqrt{2} - 5) = \sqrt{2} - 7 - 3\sqrt{2} + 5 = -2 - 2\sqrt{2}$

Or : $-2 - 2\sqrt{2}$ est un nombre négatif,

alors : $(\sqrt{2} - 7) - (3\sqrt{2} - 5) < 0$

Donc : $\sqrt{2} - 7 < 3\sqrt{2} - 5$.

**Remarque 1 :** Pour comparer deux nombres réels , on peut déterminer le signe de leur différence.

## 2 ORDRE ET ADDITION

**Propriété 1** Soit a,b et c des nombres réels, $a \leq b$ signifie que : $a + c \leq b + c$ .

**Exemples :**

*1)* Si $x < 8$ , alors $x + 2 < 8 + 2$ , soit $x + 2 < 10$.

*2)* Si $x + 9 < 2$, alors $x + 9 - 9 < 2 - 9$ , soit $x < -7$.

## 3 ORDRE ET MULTIPLICATION

**Propriété 2** Soit a,b et c des nombres réels.

*1/* Si ( $a \leq b$ et $k > 0$ ), alors $ka \leq kb$.

*2/* Si ( $a \leq b$ et $k < 0$ ), alors $ka \geq kb$.

*3/* a , b , $x$ , y sont des nombres réels **positifs.**

Si $a \leq x$ et $b \leq y$ , alors : $ab \leq xy$.

**Remarque 2 :** $a \leq b$ signifie que : $-b \leq -a$.

**Exemples :** *1)* Si $x \leq -3$ , alors $4 \times x \leq 4 \times (-3)$ , soit $4x \leq -12$.

*2)* Si $\frac{-7}{6}x > \frac{12}{5}$ , alors $\frac{-6}{7} \times \frac{-7}{6}x < \frac{-6}{7} \times \frac{12}{5}$ , soit $x < -\frac{72}{35}$.

## 4 ORDRE ET INVERSE

**Propriété 3**

Soi t a,b et c des nombres réels **strictement positifs** .

$a \leq b$ signifie que : $\frac{1}{b} \leq \frac{1}{a}$ .

**Exemple :** Si $\frac{1}{x^2} < \frac{2}{3}$ , alors $x^2 > \frac{3}{2}$ .

## 5 ORDRE ET CARRÉ

**Propriété 4**

Soit a,b et c des nombres réels **positifs.**

**$a \leq b$ signifie que $a^2 \leq b^2$.**

**$a \leq b$ signifie que $\sqrt{a} \leq \sqrt{b}$.**

**Exemple :** Comparons les nombres positifs $5\sqrt{2}$ et $4\sqrt{3}$

On a : $(5\sqrt{2})^2 = 50$ et $(4\sqrt{3})^2 = 48$ .

Donc: $(4\sqrt{3})^2 < (5\sqrt{2})^2$.

D'où : $4\sqrt{3} < 5\sqrt{2}$ .

## 6 RACINE CARRÉE DU CARRÉ D'UN RÉEL

**Propriété 5**

Soit $x$ un nombre réel.

*1/* Si $x \geq 0$ alors $\sqrt{x^2} = x$ .

*2/* Si $x \leq 0$ , alors $\sqrt{x^2} = -x$ .

**Exemple :** $\sqrt{(\sqrt{3}-2)^2} = -(\sqrt{3}-2) = -\sqrt{3}+2$ car $\sqrt{3} < 2$.

# PRATIQUE
## J'applique

## 1 SIMPLIFIER UNE EXPRESSION EN TENANT COMPTE DU SIGNE

**Exemple 1**

$x$ et $y$ sont deux nombres réels tels que : $2 \leq x \leq 3$ et $6 \leq y \leq 7$.

On considère l'expression E : $E = \sqrt{4x^2 - 4xy + y^2} + 2\sqrt{(x-3)^2 + 12x}$.

Donner une écriture simplifiée de E .

**Écriture simplifiée de E :**

On a : $E = \sqrt{4x^2 - 4xy + y^2} + 2\sqrt{(x-3)^2 + 12x}$

$E = \sqrt{(2x-y)^2} + 2\sqrt{x^2 - 6x + 9 + 12x}$

$E = \sqrt{(2x-y)^2} + 2\sqrt{x^2 + 6x + 9}$

$E = \sqrt{(2x-y)^2} + 2\sqrt{(x+3)^2}$

Déterminons les signes de $(2x - y)$ et $(x + 3)$.

On a : $2 \leq x \leq 3$ et $6 \leq y \leq 7$.

$4 \leq 2x \leq 6$ et $-7 \leq -y \leq -6$

Donc : $-3 \leq 2x - y \leq 0$

Alors : $2x - y$ est un nombre négatif ; donc $\sqrt{(2x-y)^2} = -(2x - y)$

On a : $2 \leq x \leq 3$

$5 \leq x + 3 \leq 6$

alors : $x + 3$ est donc un nombre positif ; donc $\sqrt{(x+3)^2} = x + 3$

Par suite : $E = -(2x - y) + 2(x + 3)$

$E = \cancel{-2x} + y + \cancel{2x} + 6$

Donc : $E = y + 6$.

## 2 COMPARER DEUX EXPRESSIONS

**Exemple 2**

a et b sont deux nombres réels tels que : $a > 1$ et $b > 1$

Démontrer que : $a\sqrt{b-1} + b\sqrt{a-1} \leq ab$ .

On a : $b > 1$ Donc : $b - 1 > 0$ et $\sqrt{b-1} > 0$

On a : $(\sqrt{b-1} - 1)^2 \geq 0$ ( car le carré de tout nombre réel est toujours positif).

donc : $(\sqrt{b-1})^2 - 2\sqrt{b-1} \times 1 + 1^2 \geq 0$

$$b - \cancel{1} - 2\sqrt{b-1} + \cancel{1} \geq 0$$

$$b - 2\sqrt{b-1} \geq 0$$

$$-2\sqrt{b-1} \geq -b$$

$$-\frac{1}{2}(-2\sqrt{b-1}) \leq -\frac{1}{2}(-b) \text{ ( car } -\frac{1}{2} < 0) \text{ c'est - à - dire : } \sqrt{b-1} \leq \frac{b}{2}$$

Et comme a est positif car $a > 1$ , alors : $a\sqrt{b-1} \leq \frac{ab}{2}$ 1

De la même manière, on démontre que : $b\sqrt{a-1} \leq \frac{ab}{2}$ 2

On déduit, en ajoutant membre à membre les membres des deux inégalités 1 et 2 que :

$$a\sqrt{b-1} + b\sqrt{a-1} \leq \frac{ab}{2} + \frac{ab}{2}$$

$$a\sqrt{b-1} + b\sqrt{a-1} \leq 2\frac{ab}{2}$$

Donc : $a\sqrt{b-1} + b\sqrt{a-1} \leq ab$.

**Exemple 3**

Soit a et b deux nombres réels tels que : $1 \leq \sqrt{a-3} \leq 3$ et $-4 \leq b \leq \frac{1}{2}$

1 Montrer que : $4 \leq a < 12$.

2 Encadrer le nombre $\frac{3}{a} + b^2$.

1 Montrons que : $4 \leq a < 12$.

On a : $1 \leq \sqrt{a-3} < 3$

$$1^2 \leq (\sqrt{a-3})^2 < 3^2$$

$$1 \leq (a-3) < 9$$

$$1 + 3 \leq a < 9 + 3$$

donc : $4 \leq a < 12$

2 Encadrement du nombre $\frac{3}{a} + b^2$

On a : $4 \leq a < 12$ et $-4 \leq b \leq \frac{1}{2}$

$\frac{1}{12} \leq \frac{1}{a} < \frac{1}{a}$ et $0 \leq b^2 \leq (-4)^2$

$\frac{3}{12} \leq \frac{3}{a} \leq \frac{3}{4}$ et $0 \leq b^2 \leq 16$

donc : $\frac{1}{4} + 0 \leq \frac{3}{a} + b^2 \leq \frac{67}{4} + 16$

D'où : $\frac{1}{4} \leq \frac{3}{a} + b^2 \leq \frac{67}{4}$.

# INVESTISSEMENT
## Je m'entraîne

### COMPARAISON

**1** a et b sont deux nombres réels tels que :

$$a - \sqrt{3} = b - 2$$

Comparer a et b.

**2** m est un nombre réel tel que : $m \leq 3$

Recopier et compléter par $\leq$ ou $\geq$ :

$4m \ldots 12$ ; $-2m \ldots -6$

$m - 6 \ldots -3$ ; $3m - 2 \ldots 9$

$\frac{m}{-2} \ldots \frac{3}{-2}$ ; $-5m + 17 \ldots 2$

**3** a est un nombre réel négatif et b un nombre réel tel que : $b < -4$

Recopier et compléter par les signes < ou > :

$-b + a \ldots 4 + a$ ; $b - a \ldots -4 - a$

$-b \ldots 4$ ; $b^2 \ldots 16$

$ab \ldots -4a$ ; $\frac{1}{b} \ldots -\frac{1}{4}$

**4** a et b sont deux nombres réels tels que :

$$3 \leq a \leq 4 \quad \text{et} \quad -4 \leq b \leq -2.$$

Comparer les nombres : $a - 3b - 5$ et $4a - 2b - 1$

**5** a et b sont deux nombres réels tels que :

$$0 < a < \frac{1}{3} \quad \text{et} \quad 0 < b < \frac{1}{3}.$$

Montrer que : $\frac{1}{a+b} > \frac{3}{2}$ et $\frac{1}{ab} > 9$.

**6** **AVEC TICE**

*1)* Conjecturer le rangement des nombres a et b la fonction du tri d'un ***tableur*** tel qu' Excel.

*1.* $a = 4\sqrt{2}$ et $b = 3\sqrt{4}$

*2.* $a = -2\sqrt{6}$ et $b = -5\sqrt{2}$

*3.* $a = 7 + \sqrt{45}$ et $b = 7 + 3\sqrt{6}$

*4.* $a = 6 + 5\sqrt{3}$ et $b = 4 + 6\sqrt{2}$

*5.* $a = \dfrac{\sqrt{7} - 3}{2\sqrt{2} + \sqrt{5}}$ et $b = \dfrac{1}{2\sqrt{2} - \sqrt{5}}$ .

*2)* Comparer les nombres a et b dans chaque cas.

**7** a et b sont deux nombres réels tels que :

$$a = 3 + \sqrt{5} \quad \text{et} \quad b = 2 + \sqrt{10}.$$

*1)* Calculer $a^2 - b^2$.

*2)* En déduire que : $2 + \sqrt{10} < 3 + \sqrt{5}$.

**8** Simplifier l'écriture de chacun des nombres suivants :

*1)* $\sqrt{(\sqrt{3} - 2)^2}$ et $\sqrt{(2\sqrt{5} - 3)^2}$.

*2)* $A = \sqrt{5 - 2\sqrt{6}} - \sqrt{17 - 4\sqrt{15}} + \sqrt{(\sqrt{5} - \sqrt{2})^2}$.

(calculer d'abord $(\sqrt{3} - \sqrt{2})^2$ et $(2\sqrt{3} - \sqrt{5})^2$)

**9** a,b et c sont des nombres réels positifs.

*1)* Montrer que : $a + b \geq 2\sqrt{ab}$.

*2)* En déduire que : $(a + b)(b + c)(c + a) \geq 8\,abc$.

**10** a , b et c sont des nombres réels positifs non nuls.

*1)* Montrer que : $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$.

*2)* En déduire que : $\frac{a+b}{c} + \frac{b+c}{a} + \frac{c+a}{b} \geq 6$.

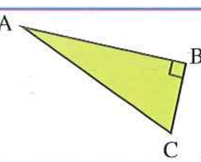
**11** a , b et c sont des nombres réels positifs non nuls.

*1)* Montrer que : $\frac{ab}{a+b} \leq \frac{a+b}{4}$.

*2)* En déduire que :

$$\frac{ab}{a+b} + \frac{ac}{a+c} + \frac{bc}{b+c} \leq \frac{a+b+c}{2}.$$

**12**

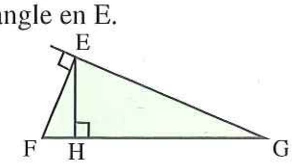



ABC est un triangle rectangle en B.

Montrer que : $AB + BC \leq AC\sqrt{2}$.

**13** EFG est un triangle rectangle en E.

Soit H le projeté orthogonal de E sur (FG).

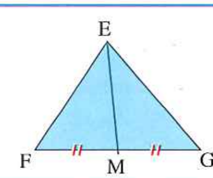



Montrer que : $EF + HG < EH + FG$.

**14** EFG est un triangle.

Soit M le milieu de [FG].

Montrer que : $2\,EM < EF + EG$.



## ENCADREMENT

**15** a , b et c sont des nombres réels tels que :

$3 \leq a \leq 4$ ; $\frac{1}{3} \leq \frac{1}{b+2} \leq \frac{3}{4}$ et $5c - 3 = a - 3b$

Donner l'encadrement de chacun des nombres suivants :

$b$ , $a - 3b$ , $c$ et $\frac{a}{c}$ .

**16** a et b sont deux nombres réels tels que :

$-3 \leq a \leq -2$ et $-4 \leq b \leq 5$ .

Donner l'encadrement de chacun des nombres suivants :

$a + b$ ; $b - a$ ; $2a - 3b$

$-a(b + 6)$ ; $\frac{a}{b-6}$ ; $(a + 1)^2$.

**17** $x$ et y sont deux nombres réels positifs tels que :

$0 \leq x \leq \sqrt{3}$ et $0 \leq y^2 + 4y - x^2 \leq 2$ .

Montrer que : $0 \leq y \leq 1$.

**18** a et b sont deux nombres réels tels que :

$3 \leq a - b \leq 4$ et $-2 \leq a + b \leq -1$ .

*1)* Montrer que : $-3 \leq b \leq -2$ et $\frac{1}{2} \leq a \leq \frac{3}{2}$

*2)* En déduire un encadrement de $\frac{b-a}{ab}$ .

## CALCULATRICE

**19** Réda et Jihad ont à calculer le nombre suivant :

$$A = \sqrt{10^{16} - (10^{16} - 2 \times 10^{-8})^{-2}}$$

Réda n'utilise que sa calculatrice. Il trouve $A = 0$ .

Jihad fait d'abord quelques calcules à la main. Elle trouve $A = 2$. Le résultat de Jihad est meilleur que celui de Réda.

Justifier cette affirmation.

*1)* Refais les calculs de Réda sur ta calculatrice.

*2)* Quels sont les calculs de Jihad?

*3)* Pourquoi le résultat de Jihad est-il meilleur ?

*4)* Le résultat de Jihad est-il exact, trop grand ou trop petit?

## MON BILAN

***1) Indiquer la bonne réponse par A , B ou C :***

| | A | B | C |
|---|---|---|---|
| **1** Comparer les nombres : $\frac{22}{7}$ et $\frac{335}{107}$ | $\frac{335}{107} > \frac{22}{7}$ | $\frac{335}{107} = \frac{22}{7}$ | $\frac{335}{107} < \frac{22}{7}$ |
| **2** Comparer les nombres : $a = 5\sqrt{2}$ et $b = 4\sqrt{3}$ | $a > b$ | $a = b$ | $a < b$ |
| Soit $x$ et y deux nombres réels | | | |
| **3** Si $x - 3 < \sqrt{5}$ alors : ... | $x < 2$ | $x > 8$ | $x < 8$ |
| **4** Si : $x \leq -1$ alors : ... | $2x + 3 \leq 5$ | $2x + 3 > 1$ | $2x + 3 \leq 1$ |
| **5** Si : $x \geq \frac{3}{2}$ alors : ... | $1 - 2x \leq -5$ | $1 - 2x \geq -5$ | $1 - 2x \leq 7$ |
| **6** Si : $-\frac{3}{4}x + 1 \leq 0$ alors : ... | $x < \frac{4}{3}$ | $x > \frac{4}{3}$ | $x < \frac{1}{4}$ |
| **7** Soit $x$ et y deux nombres réels si : $\frac{3}{2} \leq x \leq 1$ et $-1 \leq y \leq 2$ alors : ... | $0 < 2x - y < 4$ | $1 < 2x - y \leq 3$ | $3 < 2x - y \leq -1$ |
| **8** Le nombre $\sqrt{(1 - 2\sqrt{3})^2}$ est égal ... | $1 - 2\sqrt{3}$ | $2\sqrt{3} - 1$ | $1 + 2\sqrt{3}$ |

Corrections page : 247

***2) En cas d'erreur, voici quelques conseils :***

| | Savoir | Pratique |
|---|---|---|
| Ex: 1 | Définition | |
| Ex: 2 | Propriété 4 | |
| Ex: 3 | Propriété 1 | |
| Ex: 4 | Propriété 2 | |
| Ex: 5 | Propriété 2 | |
| Ex: 6 | Propriété 2 | |
| Ex: 7 | Propriété 3 | |
| Ex: 8 | | Exemple 1 |

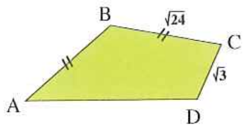
***3) Exercices pour la remédiation voir R7 page : 248***

### ENCADREMENT

**20** On donne : $1{,}7 < \sqrt{3} < 1{,}8$ et $1{,}4 < \sqrt{2} < 1{,}5$.

ABCD est un quadrilatère de périmètre 32cm.

Donner un encadrement de AD.




**21** $x$ est un nombre réel tel que : $3 < \dfrac{2x-1}{x} < 4$.

Donner un encadrement de $x$ .

**22** a est un nombre réel tel que : $a \geq -\dfrac{1}{4}$

Montrer que : $-\dfrac{1}{7} \leq \dfrac{a}{a+2} \leq 1$ .

### PROBLÈMES OUVERTS

**23** $x$ est un nombre réel tel que $0 < x < \dfrac{1}{2}$ .

*1)* Comparer : $\dfrac{x-1}{2x-1}$ et $\dfrac{2x+1}{x+1}$ .

*2)* En déduire une comparaison de a et b :

$$a = \frac{1{,}000002}{1{,}000001} \quad \text{et} \quad b = \frac{0{,}999999}{0{,}999998} .$$

**24** ABC est un triangle rectangle en A.

Montrer que : $AB^4 + AC^4 < BC^4$.

**25** a , b , c et $x$ sont des nombres réels positifs tels que :

$$a + b + c = 1 .$$

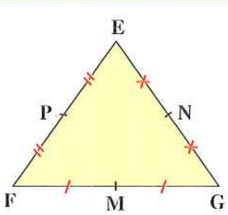
*1)* Montrer que : $\sqrt{x} \leq \dfrac{x+1}{2}$ .

*2)* En déduire que :

$$\sqrt{2a+1} + \sqrt{2b+1} + \sqrt{2c+1} \leq 4.$$

**26** EFG est un triangle .

Soit M, N et P les milieux respectifs de [FG], [EG] et [EF].




Montrer que : $\dfrac{1}{2}\,p < EM + FN + GP < p$.

où p est le périmètre du triangle EFG.

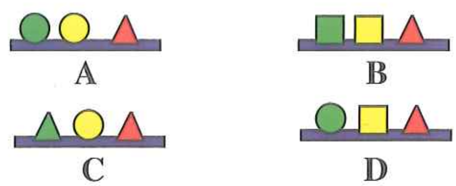
### S'INITIER À LA DÉMONSTRATION

**27** a et b sont deux nombres réels tels que :

$$a > 2 \quad \text{et} \quad b > 2$$

Démontrer que : $a + b < ab$

**28** Les trois plateaux A , B et C sont disposés selon leur poids, par ordre décroissant (A le plus lourd, C le plus léger) ; les boîtes de même forme pésent le même poids. Où faut-il logiquement placer le plateau D?.




**29** On considère l'expression A :

$$A = -\sqrt{(5-x)^2 + 20x} + \sqrt{4x^2 - 12x + 9} .$$

où $-2 \leq x \leq \dfrac{2}{3}$.

Montrer que : $0 \leq A^2 \leq 16$ .

**31** a et b sont deux nombres réels positifs tel que : $a \leq b$.

Montrer que : $\dfrac{a}{b+6} \leq \dfrac{b}{a+6}$ .

**32** a et b sont deux nombres réels positifs non nuls.

Montrer que : $\dfrac{32b-a}{a} \geq \dfrac{14b-a}{2b}$.

**33** $x$ est un nombre réel .

Montrer que : $-1 \leq \dfrac{2x}{x^2+1} \leq 1$.

**34** *1)* Montrer que : $\dfrac{2n-1}{2n} < \sqrt{\dfrac{2n-1}{2n+1}}$ pour tout entier naturel non nul.

2) Montrer que :

$$\frac{1}{2}\times\frac{3}{4}\times\frac{5}{6}\times....\times\frac{2017}{2018}\times\frac{2019}{2020}<\frac{1}{\sqrt{2021}}$$

**35** $x$ est un nombre réel non nul.

On considère A : $A=\dfrac{\sqrt{x^2}}{\sqrt{16x^2}-\sqrt{12x^2}}$

Montrer que : $\dfrac{3}{2}<A<2.$

**36** $x$ et $y$ sont deux nombres strictement positifs.

Montrer que :

*1)* $(x+y)^2\geq 4xy$

*2)a.* $x+\dfrac{1}{x}\geq 2$ *b.* $\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}\geq 2$

*3)* $\sqrt{x+y}\leq\sqrt{x}+\sqrt{y}$.

**37** $x$ et y sont deux nombres tels que : $0<x\leq y$ .

Montrer que :

$$x\leq\frac{2}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}\leq\sqrt{xy}\leq\frac{x+y}{2}\leq\sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}}\leq y.$$

**38** Soient a,b et c des nombres réels tels que : $c^2=a^2+b^2$

Montrer que : $\dfrac{c^4}{2}\leq a^4+b^4\leq c^4$.

## CHALLENGES

**39** a et b sont deux réels positifs non nuls.

Montrer que : $\dfrac{a}{a^4+b^2}+\dfrac{b}{a^2+b^4}\leq\dfrac{1}{ab}$.

**40** a , b et c sont des réels positifs non nuls.

Montrer que : $\dfrac{ab}{c}+\dfrac{ac}{b}+\dfrac{bc}{a}\geq a+b+c$.

**41** a,b et c sont des nombres réels positifs non nuls .

Montrer que : $(a+b+c)\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\right)\geq 9$.

**42** a et b sont deux nombres réels tels que :

$a>1$ et $b>1$.

Montrer que : $\dfrac{a^2}{b-1}+\dfrac{b^2}{a-1}\geq 8$.

**43** $x$ et y sont des réels tels que :

$1\leq x^2+y^2-xy\leq 2$.

Montrer que : $\dfrac{2}{9}\leq x^4+y^4\leq 8$.

## SITUATIONS PROPOSÉES AUX OLYMPIADES

Situation 1 : $\alpha$ et $\beta$ sont les mesures de deux angles aigus telles que : $\sin\alpha+\sin\beta\geq\sqrt{3}$.

**Montrer que: $\cos\alpha+\cos\beta\leq 1$.**

Situation 2 : ABC est un triangle et M est le milieu de [BC].

**Montrer que : AB + AC − BC < 2AM.**

# JE ME PRÉPARE À L'EXAMEN LOCAL

**44** *Exercice résolu*

a et b sont deux nombres réels tels que :

$$3 \leq a-2 \leq 4 \quad \text{et} \quad 2 \leq b \leq 3$$

*1)* Donner l'encadrement de chacun des nombres suivants : $a+1$ et $b-3$.

*2)* On pose : $E = ab - 3a + b$.

*a.* Vérifier que : $E = (a+1)(b-3)+3$

*b.* Montrer que : $-4 \leq E \leq 3$.

**Correction : 44**

*1)* • **Encadrement de a + 1:**

On a : $3 \leq a-2 \leq 4$

$$3+3 \leq a-2+3 \leq 4+3$$

Donc : $6 \leq a+1 \leq 7$.

• **Encadrement de b − 3 :**

On a : $2 \leq b \leq 3$

$$2-3 \leq b-3 \leq 3-3$$

Donc : $-1 \leq b-3 \leq 0$.

**a. Vérification :**

On a : $(a+1)(b-3)+3 = ab-3a+b-3+3$

$$= ab-3a+b$$

Or : $E = ab-3a+b$, alors :

$$E = (a+1)(b-3)+3.$$

**b. Montrons que : $-4 \leq E \leq 3$.**

On a : $-1 \leq b-3 \leq 0$

$$0 \leq -(b-3) \leq 1$$

Et $\quad 6 \leq (a+1) \leq 7$

Donc : $0 \leq -(b-3)(a+1) \leq 7$

$$-7 \leq (a+1)(b-3) \leq 0$$

$$-7+3 \leq (a+1)(b-3)+3 \leq 0+3$$

Donc : $-4 \leq E \leq 3$.

**45**

*1)* Ranger dans l'ordre croissant les nombres:

$$2+\sqrt{3}\ ,\ -1\ ,\ \sqrt{5} \text{ et } -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

*2)* a et b sont deux nombres réels tels que

$$-5 \leq a \leq -3 \quad \text{et} \quad 3 \leq b \leq 7.$$

**a.** Donner un encadrement de $a-b$ et $ab$.

**b.** Donner l'encadrement de $\dfrac{1}{a+7} - \dfrac{1}{b}$.

**46**

a,b et c sont des nombres réels tels que :

$$3 \leq a \leq 4 \quad \text{et} \quad -5 \leq b \leq -2 \quad \text{et} \quad -1 \leq \frac{1-2c}{4} \leq 2$$

*1)* Montrer que : $-\dfrac{7}{2} \leq c \leq \dfrac{5}{2}$.

*2)* Donner un encadrement de chacun des nombres suivants :

$$2c-b+3a\ ,\ a^2+b^2 \text{ et } \frac{b+6}{a}.$$

**47**

*1)* a,b et c sont des nombres réels tels que :

$$\frac{2}{3} \leq a \leq 1 \quad ; \quad 3 \leq b \leq 4 \quad \text{et} \quad 3 \leq \sqrt{c+2} \leq 4$$

Donner l'encadrement de chacun des nombres suivants : $a+b$, $2ab-3$ et $c$.

*2)* $x$ est un réel positif.

Comparer : $4+x$ et $4\sqrt{x}$.

**48**

a et b sont deux nombres réels tels que :

$$-2 \leq a \leq -1 \quad \text{et} \quad 3 \leq b \leq 4$$

*1)* Donner l'encadrement de $2a-3b+1$.

*2)* En déduire une comparaison des nombres :

$$a+4b-2 \quad \text{et} \quad 3a+b-1$$

**49**

*1)* Comparer : $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ et $1+\sqrt{6}$

*2)* $x$ et y sont deux réels tels que :

$$2 \leq x \leq 3 \quad \text{et} \quad -4 \leq y \leq -3.$$

# JE ME PRÉPARE À L'EXAMEN LOCAL

Donner l'encadrement de chacun des nombres suivants : $x + y$ ; $x - y$ ; $y^2$ ; et $2x - 3y$.

**50** a et un nombre réel tel que :

$$-5 \leq a \leq -4$$

On pose : $E = a^2 - 6a + 5$

*1)* Vérifier que : $E = (a - 3)^2 - 4$.

*2)* Montrer que : $9 \leq \frac{E}{5} \leq 12$.

**51** a et b sont deux réels tels que:

$$-1 \leq a \leq 4 \quad \text{et} \quad 2 \leq b \leq 3$$

*1)* Donner l'encadrement de $a + 2$ et $a - 3b$.

*2)* En déduire l'écriture simplifiée de A et B :

$$A = \sqrt{a^2 - 6ab + 9b^2} \quad \text{et} \quad B = \sqrt{(a-2)^2 + 8a}.$$

*3)* Montrer que : $\frac{1}{10} \leq \frac{B}{A} \leq 3$.

**52** On donne : $E = \sqrt{32} - \sqrt{50} + \sqrt{8}$ et $1,4 < \sqrt{2} < 1,5$.

Donner un encadrement de E .

**53** Soit $x$ , y et z des nombres réels tels que :

$$1 \leq x \leq 2 \ ; \ -2 \leq y \leq 1 \ \text{et} \ -\frac{3}{2} \leq -2z + \frac{1}{2} \leq \frac{5}{2}$$

*1)* Donner l'encadrement de chacun des nombres :

$$x - y \ , \ y^2 \ \text{et} \ xy.$$

*2)a.* Montrer que : $-1 \leq z \leq 1$.

*b.* En déduire l'encadrement de chacun des nombres :

$$2x + z \quad \text{et} \quad \frac{1}{2x + z}.$$

**54** a et b sont deux nombres réels tels que :

$$-a + 7b - 11 = 0 \quad \text{et} \quad -4 \leq a \leq 3.$$

Démontrer que :

$$\sqrt{(a+4)^2 + (b-1)^2} + \sqrt{(a-3)^2 + (b-2)^2} = 5\sqrt{2}$$

**55** $x$ et y sont des réels tels que :

$$1,15 \leq x \leq 1,16.$$
$$2,32 \leq y \leq 2,33$$

*1)* Donner un encadrement de chacun des nombres :

$$a = 5x - 7y + 4$$
$$b = 7x - 5y - 4$$

*2)* Comparer les nombres a et b.

**56** soit $x$ et y deux sont des réels tels que :

$$1 \leq \sqrt{2x + 3} \leq 2.$$
$$-2 \leq 4 - 3y \leq 1$$

*1)* Montrer que :

$$-1 \leq x \leq \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad 1 \leq y \leq 2.$$

*2)a.* Montrer que :

$$-2 \leq xy \leq 1.$$

*b.* En déduire que :

$$-3 \leq 2xy + 1 \leq 3.$$

**57** soit $x$ un nombre réel tel que :

$$-1 \leq x \leq \frac{1}{2}$$

On pose : $A = 2x^2 - 4x + 5$.

*1)* Donner un encadrement de A.

*2)a.* Vérifier que :

$$A = 2(x - 1)^2 + 3 \text{ pour tout réel } x.$$

*b.* Donner un autre encadrement de A.

# ANGLES AU CENTRE ET ANGLES INSCRITS

## Prérequis :

* Cercle.
* Triangles particuliers.
* Angles d'un triangle.
* Tangentes à un cercle.

## Un point d'histoire

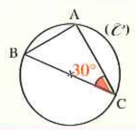
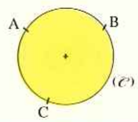
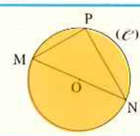
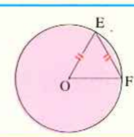
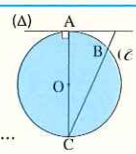
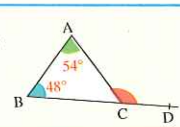
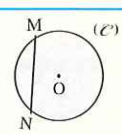
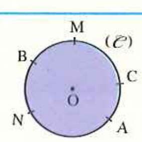
**Hipparque (-190 ; -120)**

Hipparque de Nicée est un astronome et mathématicien grec. Il est reconnu comme le premier mathématicien à avoir disposé de tables trigonométriques. Les unités de degré, de minute et de seconde ont été déja pratiquées par Hipparque.

## TEST DIAGNOSTIQUE : Je m'évalue

## CHOISIR LA BONNE RÉPONSE.

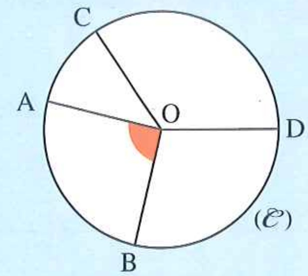
**Pour chaque question, cocher la bonne réponse en justifiant.**

| | | Réponses : | | |
|---|---|---|---|---|
| A est un point de $(\mathscr{C})$ de diamètre [BC] . Donc : .... |  | $\widehat{ABC} = 120°$ | $\widehat{BAC} = 100°$ | $\widehat{ABC} = 60°$ |
| Le triangle ABC est ... |  | rectangle | circonscrit au cercle $(\mathscr{C})$ | inscrit dans le cercle $(\mathscr{C})$ |
| P est un point de $(\mathscr{C})$ de diamètre [MN] . Donc : MPN est ... |  | rectangle en M | rectangle en P | rectangle en N |
| Le triangle OEF est ... |  | équilatéral | rectangle | inscrit dans le cercle $(\mathscr{C})$ |
| B est un point de $(\mathscr{C})$ ; A est un point de $(\mathscr{C})$ ; C est un point de $(\mathscr{C})$ ; $(\Delta)$ coupe le cercle $(\mathscr{C})$ en A ; donc : ... |  | $(\Delta)$ est la tangente à $(\mathscr{C})$ en A. | (BC) est tangente en C au cercle $(\mathscr{C})$. | (OB) est la bissectrice de $\widehat{ABC}$ |
| On considère la figure ci-contre : On a : .... |  | $\widehat{ACB} = 84°$ | $\widehat{ABC} = 70° + 32°$ | $\widehat{ACD} = 102°$ |
| M et N sont deux points de $(\mathscr{C})$ ; donc : .... |  | [MN] est une partie de $(\mathscr{C})$ | [MN] est un diamètre | [MN] est une corde |
| Sur la figure ci contre , ... |  | M est un point de l'arc $\overset{\frown}{BC}$ qui contient N | M est un point de l'arc $\overset{\frown}{BC}$ qui contient A | M est un point de l'arc $\overset{\frown}{BC}$ qui ne contient pas N |

Solutions page : 246

# ACTIVITÉS : JE DÉCOUVRE

## Activité 1 Angles au centre

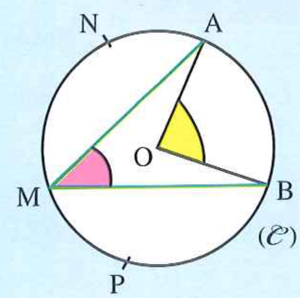



1. Reproduire la figure ci-contre.
2. Considérons l'angle $\widehat{AOB}$ :
   - Son sommet est le centre du cercle $(\mathscr{C})$ ;
   - [OA] et [OB] sont deux rayons.

   On dit que $\widehat{AOB}$ est un **angle au centre.**

   Déterminer d'autres angles au centre sur cette figure.

## Activité 2 Angles inscrits

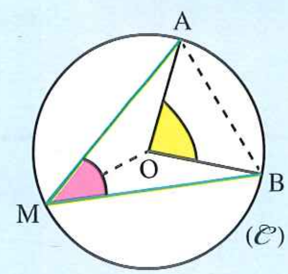



1. Reproduire la figure ci-contre .

   L'angle $\widehat{AMB}$ est appelé un **angle inscrit** de $(\mathscr{C})$ et **intercepte** l'arc $\overset{\frown}{AB}$ .

   On dit aussi que l'angle inscrit $\widehat{AMB}$ est associé à l'angle au centre $\widehat{AOB}$ .
2. Construire un angle inscrit qui intercepte l'arc $\overset{\frown}{NP}$ sur $(\mathscr{C})$.
3. Construire un angle inscrit associé à l'angle au centre $\widehat{BON}$ .

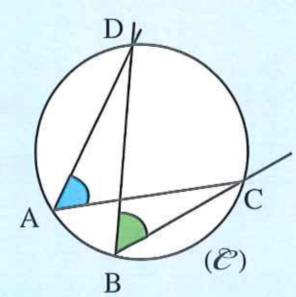
## Activité 3 Relation entre angle inscrit et angle au centre associé




On considère la figure ci-contre.

Montrer que : $\widehat{AOB} = 2\,\widehat{AMB}$ .

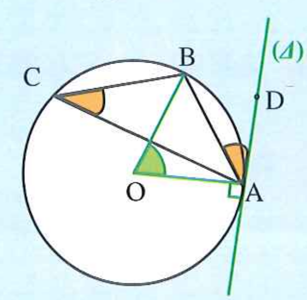
## Activité 4 Angles inscrits interceptant le même arc




On considère la figure ci-contre.

Montrer que : $\widehat{DBC} = \widehat{DAC}$ .

## Activité 5 Angle inscrit déterminé par une tangente et une corde




Sur la figure ci-contre :

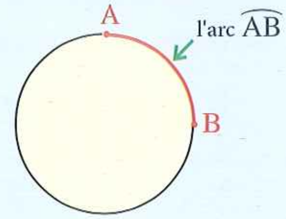
$(\Delta)$ est la tangente au cercle $(\mathscr{C})$ en A.

1. Montrer que : $\widehat{AOB} = 2\,\widehat{DAB}$ .
2. Montrer que : $\widehat{ACB} = \widehat{DAB}$ .

# SAVOIR
## Je révise

## 1 ANGLE AU CENTRE

*1. Arc de cercle :* Sur un cercle (C) , deux points A et B qui ne sont pas sur même diamètre déterminent deux arcs de cercle de longueur différente. On considère que l'arc nommé désigne **le plus petit** des deux .

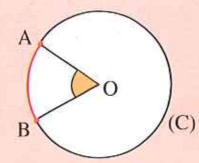



*2. Angle au centre :*

**Définition 1**

Sur le dessin ci-contre où O le centre du cercle (C),

L'angle $\widehat{AOB}$ est appelé **angle au centre** qui intercepte l'arc $\overset{\frown}{AB}$ .

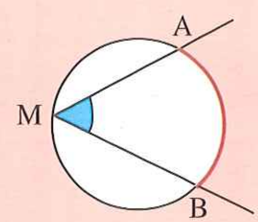



## 2 ANGLE INSCRIT

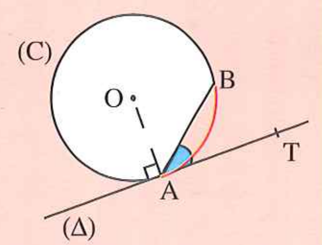
**Définition 2**

Soit (C) un cercle de centre O.

- A , B et M trois points du cercle (C).
  L'angle $\widehat{AMB}$ est appelé **angle inscrit** du cercle qui intercepte l'arc $\overset{\frown}{AB}$




- Soit (Δ) la tangente du cercle (C) au point A.
  L'angle $\widehat{TAB}$ est appelé **angle inscrit** du cercle qui intercepte l'arc $\overset{\frown}{AB}$



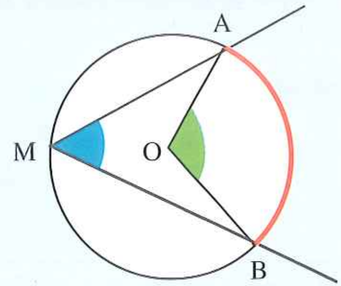

## 3 ANGLE INSCRIT ET ANGLE AU CENTRE ASSOCIÉ

**Propriété 1**

La mesure d'un angle inscrit dans un cercle est égale à la moitié de la mesure de l'angle au centre associé.

**Exemple :** Sur le dessin ci-contre, l'angle au centre $\widehat{AOB}$ associé à l'angle inscrit $\widehat{AMB}$, donc $\widehat{AOB} = 2\widehat{AMB}$

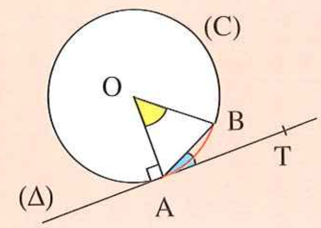
c'est-à-dire : $\widehat{AMB} = \frac{1}{2}\ \widehat{AOB}$.




**Propriété 2**

Soit $(\Delta)$ la tangente du cercle $(C)$ au point A et T un point de $(\Delta)$, on a :

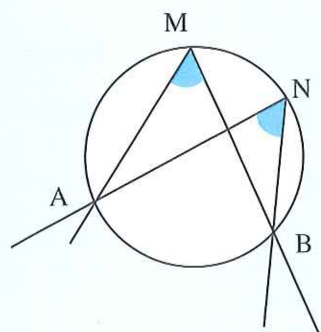
$$\widehat{AOB} = 2\ \widehat{TAB}$$




## 4 ANGLES INSCRITS INTERCEPTANT LE MÊME ARC

**Propriété 3**

Si deux angles inscrits dans un cercle interceptent le même arc, alors ces angles ont la même mesure.

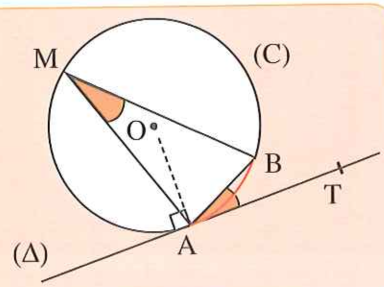



**Exemple :** Sur le dessin ci-contre, $\widehat{AMB}$ et $\widehat{ANB}$ sont deux angles inscrits qui interceptent le même arc donc : $\widehat{AMB} = \widehat{ANB}$.

**Propriété 4**

Soit $(\Delta)$ la tangente du cercle $(C)$ au point A et T un point de $(\Delta)$, on a :

$$\widehat{TAB} = \widehat{AMB}$$



# PRATIQUE
## J'applique

## 1 APPLIQUER LES PROPRIÉTÉS DES ANGLES INSCRITS

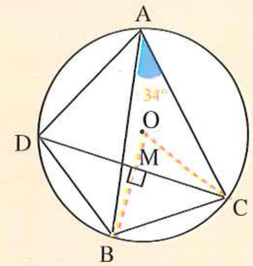
**Exemple 1**

Sur la figure ci-contre .

A , B , C et D sont quatre points d'un cercle de centre O tels que :

$\widehat{BAC} = 34°$ et $(CD) \perp (OB)$.

Calculer : $\widehat{BOC}$ et $\widehat{DAB}$ .




- ***Calcul de*** $\widehat{BOC}$ **:** On sait que l'angle inscrit $\widehat{BAC}$ intercepte le même arc $\overset{\frown}{AB}$ que l'angle au centre $\widehat{BOC}$ .

  Donc : $\widehat{BOC} = 2\,\widehat{BAC}$

  Or : $\widehat{BOC} = 34°$,

  alors : $\widehat{BOC} = 2 \times 34°$ , soit $\widehat{BOC} = 68°$.

- ***Calcul de*** $\widehat{DAB}$ **:** Soit M le point d'intersection des droites (OB) et (DC).

  Il en résulte que OMC est un triangle rectangle en M (car $(OB) \perp (DC)$ ).

  Donc : $\widehat{OCM} = 90° - \widehat{BOC}$

  $\widehat{OCM} = 90° - 68°$

  $\widehat{OCM} = 22°$.

  On sait que : OBC est un triangle isocèle en O.

  Donc : $2\widehat{OCB} = 180° - \widehat{BOC}$

  $2\widehat{OCB} = 180° - 68°$

  $2\widehat{OCB} = 112°$

  $\widehat{OCB} = 56°$.

  Par conséquent : $\widehat{DCB} = \widehat{OCB} - \widehat{OCM}$

  $\widehat{DCB} = 56° - 22°$

  $\widehat{DCB} = 34°$.

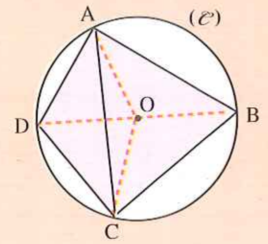
  Et comme : $\widehat{DAB} = \widehat{DCB}$ (angles inscrits interceptant le même arc DB) ,

  alors : $\widehat{DAB} = 34°$

**Exemple 2**

ABCD est un quadrilatère dont les sommets sont sur un cercle $(\mathscr{C})$ de centre O.

1. Montrer que : $\widehat{DAB} + \widehat{DCB} = 180°$
2. Conclure.




1. Montrons que : $\widehat{DAB} + \widehat{DCB} = 180°$

On a : 
$$\begin{aligned}\widehat{DAB} + \widehat{DCB} &= (\widehat{DAC} + \widehat{CAB}) + (\widehat{DCA} + \widehat{ACB})\\ &= \frac{1}{2}\widehat{DOC} + \frac{1}{2}\widehat{COB} + \frac{1}{2}\widehat{DOA} + \frac{1}{2}\widehat{AOB}\\ &= \frac{1}{2}(\widehat{DOC} + \widehat{COB} + \widehat{DOA} + \widehat{AOB})\\ &= \frac{1}{2}\times 360°\\ &= 180°.\end{aligned}$$

Donc : $\widehat{DAB} + \widehat{DCB} = 180°.$

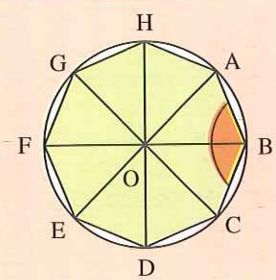
2. **Conclusion : Deux angles opposés dans un quadrilatère inscrit dans un cercle sont supplémentaires.**

## 2 CALCULER LA MESURE D'UN ANGLE D'UN POLYGONE RÉGULIER

**Exemple 3**

ABCDEFGH est un octogone régulier inscrit dans un cercle de centre O.

Calculer la mesure de l'angle $\widehat{ABC}$.




Ce polygone régulier a huit côtés , donc : $\widehat{AOB} = \frac{360°}{8} = 45°$.

Dans le triangle AOB isocèle en O, on a :

$$\widehat{AOB} = \frac{180° - 45°}{2} = 67{,}5°.$$

De même, on montre que : $\widehat{OBC} = 67{,}5°$

comme : $\widehat{ABC} = \widehat{ABO} + \widehat{OBC}$ ,

alors $\widehat{ABC} = 2 \times 67{,}5° = 135°$

On sait que : $\widehat{AOB} = \frac{360°}{n}$ où n est le nombre de côtés.

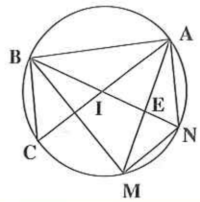
Pour calculer la mesure de $\widehat{ABC}$, on aurait pu calculer la mesure de l'angle au centre qui intercepte le même arc $\overset{\frown}{AC}$ cette mesure est : $6 \times 45° = 270°$

donc : $\widehat{ABC} = \frac{1}{2} \times 270° = 135°$

## CALCUL D'ANGLE

**1**

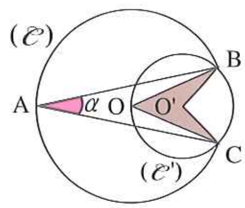
Sur la figure ci-contre, déterminer les angles inscrits qui interceptent l'arc $\overset{\frown}{MN}$.




**2**

On donne $\widehat{BAC} = \alpha$.

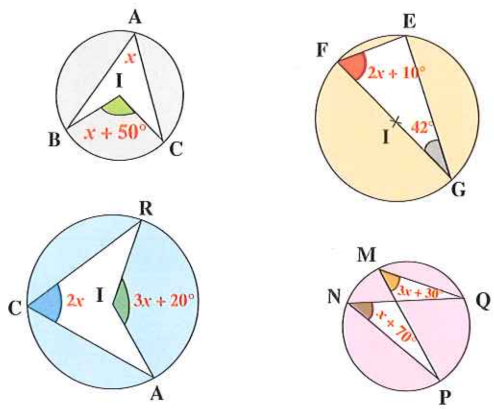
Calculer $\widehat{BO'C}$ en fonction de $\alpha$.




[O est le centre de ($\mathscr{C}$) O' est le centre de ($\mathscr{C}$')].

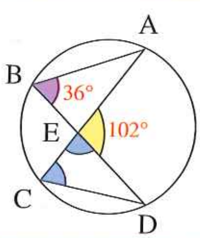
**3**

Calculer $x$ dans chacun des cas suivants :




**4**

Calculer la mesure de l'angle de $\widehat{EDC}$.

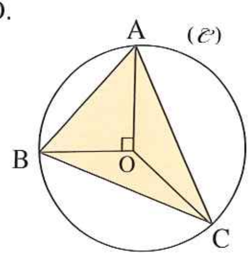



**5**

($\mathscr{C}$) est un cercle de centre O.

A,B, et C sont des points de ($\mathscr{C}$) tel que : $\widehat{AOC} = 130°$.

Calculer chacun des angles du triangle ABC.

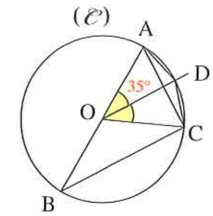



**6**

($\mathscr{C}$) est un cercle de centre O, de diamètre [AB].

C et D sont des points de ($\mathscr{C}$) tels que : $\widehat{DOC} = \widehat{AOD} = 35°$

Calculer $\widehat{BCD}$.

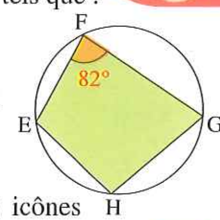



**7** **AVEC TICE**

E,F,G et H sont des points d'un cercle tels que : $\widehat{EFG} = 82°$.

*1)* Exploiter le dynamisme de logiciel Geogebra pour conjecturer la mesure de l'angle demandée, en utilisation les icônes suivants : Polygone Cercle (contre-point) Angle

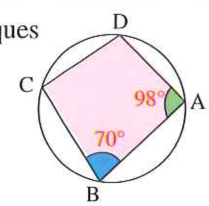
*2)* Calculer la mesure de l'angle $\widehat{EHG}$.




**9**

A,B,C et D sont des points cocycliques (appartiennent à un même cercle) tels que : $\widehat{BAD} = 98°$ et $\widehat{ABC} = 70°$.

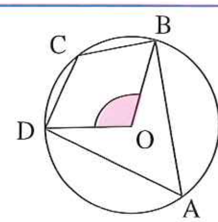
Calculer $\widehat{BCD}$ et $\widehat{ADC}$.




**9**

ABCD est un quadrilatère inscrit dans un cercle de centre O tel que : $\widehat{BOD} = 126°$.

Calculer la mesure de l'angle $\widehat{BCD}$.

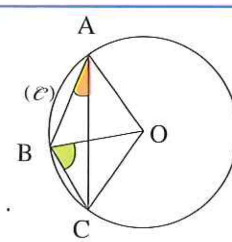



**10**

A,B et C sont des points d'un cercle de centre O tels que :

$\widehat{BAC} = 36°$.

Calculer la mesure de l'angle $\widehat{CBO}$.

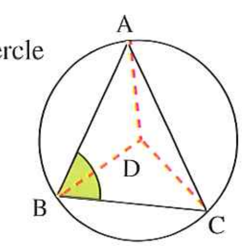



**11**

A,B et C sont des points d'un cercle de centre D tels que :

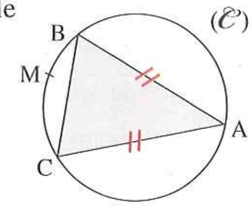
$\widehat{ABC} = 80°$ et $\widehat{ADB} = 136°$.

Calculer : $\widehat{ADC}$ et $\widehat{ACB}$.

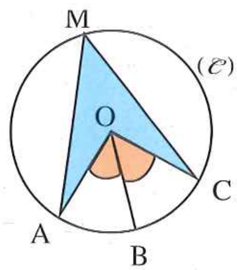


## S'INITIER À LA DÉMONSTRATION

**12** ABC est un triangle isocèle et $(\mathscr{C})$ son cercle circonscrit.
Soit M un point de l'arc $\overset{\frown}{BC}$ qui ne contient pas le point A.
Montrer que [MA] est bissectrice de l'angle $\widehat{CMB}$.

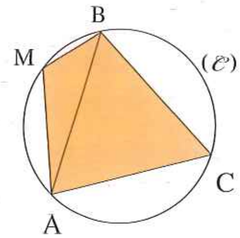



**13** M,A,B et C sont des points d'un cercle $(\mathscr{C})$ de centre O tels que : $\widehat{BOA} = \widehat{COB}$.
Montrer que [MB] est bissectrice de l'angle $\widehat{MAC}$.

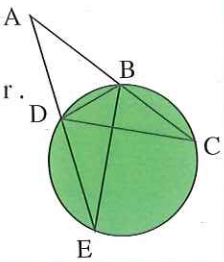



**14** Sur la figure suivante :

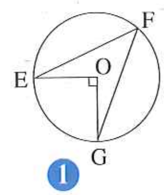
**15** $(\mathscr{C})$ est le cercle circonscrit au triangle équilatéral ABC.
Soit M un point de $(\mathscr{C})$.
Montrer que [MC) est la bissectrice de l'angle $\widehat{AMB}$.

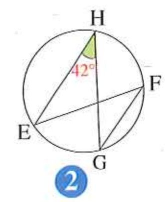



**16** B,C,D et E sont des points d'un cercle $(\mathscr{C})$ de centre O et de rayon r.
Soit A un point tel que : $OA > r$.
Montrer que : $\widehat{ADC} = \widehat{ABE}$.



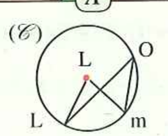
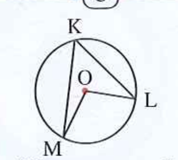
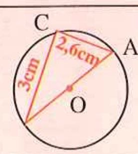
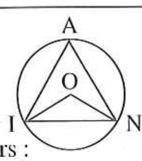
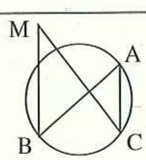
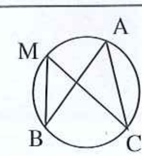

**17** Calculer $\widehat{EFG}$ dans chacun des cas suivants :




## MON BILAN

*1) Indiquer la bonne réponse par A , B ou C :*

| | A | B | C |
|---|---|---|---|
| ① À quelle figure correspond l'égalité suivante : $\widehat{KIM} = \frac{1}{2}\widehat{KOM}$ |  $(\mathscr{C})$ est un cercle de centre L |  $(\mathscr{C})$ est un cercle de centre N |  $(\mathscr{C})$ est un cercle de centre O |
| ② O désigne le centre du cercle $\widehat{ABC} = 20°$ sur la figure ... |  |  |  |
| ③ A, N et I sont trois points d'un cercle de centre O et $\widehat{KOI} = 36°$. Alors :  | $\widehat{IAN} = 54°$ | $\widehat{IAN} = 72°$ | $\widehat{IAN} = 108°$ |
| ④ A quelle figure correspond l'égalité : $\widehat{BMC} = \widehat{BAC}$ |  |  |  |

Corrections page : 247

*2) En cas d'erreur, voici quelques conseils :*

| | Savoir | Pratique |
|---|---|---|
| Ex: 1 | Propriété 1 | |
| Ex: 2 | Propriété 1 | |
| Ex: 3 | Propriété 1 | |
| Ex: 4 | | Propriété 2 |

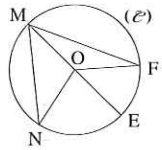
*3) Exercices pour la remédiation voir R8 page : 248*

# APPROFONDISSEMENT
## Je recherche

### S'INITIER À LA DÉMONSTRATION

**18** On considère la figure ci-contre.

Recopier et compléter le tableau suivant :



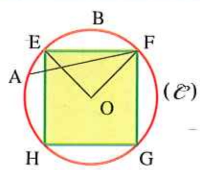

| Angles inscrits | Angles au centre associés |
|---|---|
| $\widehat{NME}$ | ... |
| $\widehat{NMF}$ | ... |
| ... | $\widehat{EOF}$ |
| ... | $\widehat{MOF}$ |

### CALCUL D'ANGLE

**19** EFGH est un carré inscrit dans un cercle de centre O.

Soit A un point de ce cercle (figure).

Calculer les mesures des angles GAF et FAH.

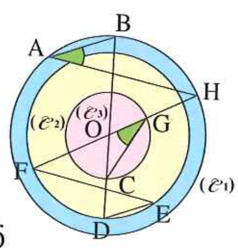



**20** Sur la figure ci-contre :

* ($\mathscr{C}_1$) , ($\mathscr{C}_2$) et ($\mathscr{C}_3$) sont des cercles concentriques de centre O.

* (BD) et (FH) sont sécantes en O.

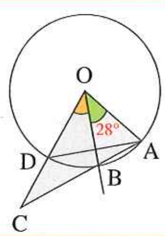
Montrer que : $\widehat{BAH} = \widehat{FGC} = \widehat{FED}$




**21** Sur la figure ci-contre :

[OB) est la bissectrice de l'angle $\widehat{COA}$ tel que : $\widehat{BOA} = 28°$

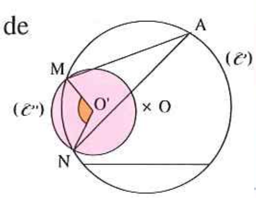
Calculer la mesure de l'angle $\widehat{OCA}$ .




**22** ($\mathscr{C}$) et ($\mathscr{C}$') sont deux cercles de centres O et O'.

($\mathscr{C}$) et ($\mathscr{C}$') se coupent en M et N tels que : $\widehat{MO'N} = 134°$.

Calculer la mesure de l'angle $\widehat{MAN}$ .



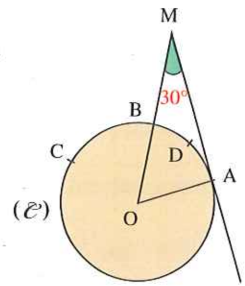

### S'INITIER À LA DÉMONSTRATION

**24** Sur la figure ci-contre:

A,B,D et C sont des points sur un cercle ($\mathscr{C}$) de centre O.

(MA) est la tangente au cercle ($\mathscr{C}$) en A tel que : $\widehat{OMA} = 30°$.

Calculer les mesures des angles $\widehat{ACB}$ et $\widehat{ADB}$ .



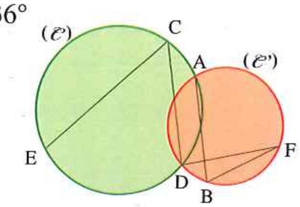

**24** ($\mathscr{C}$) et ($\mathscr{C}$ ') sont deux cercles sécants en A et D.

E et C sont deux points de ($\mathscr{C}$).

B et F sont deux points de ($\mathscr{C}$') tels que :

(AB) // (DC) et $\widehat{DFB} = 36°$

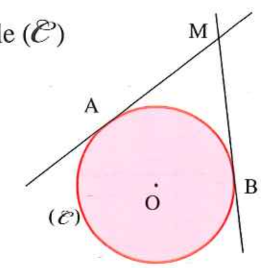
Calculer la mesure de l'angle $\widehat{AEC}$ .




**25** A et B sont deux points d'un cercle ($\mathscr{C}$).

Les tangentes en A et B au cercle ($\mathscr{C}$) se coupent en M.

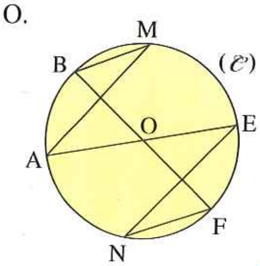
Montrer que le triangle MAB est isocèle.




**26** Sur la figure ci-contre : [AE] et [BF] sont deux diamètres d'un cercle ($\mathscr{C}$) de centre O.

M et N sont deux points de ($\mathscr{C}$)

Montrer que : $\widehat{ENF} = \widehat{AMB}$ .

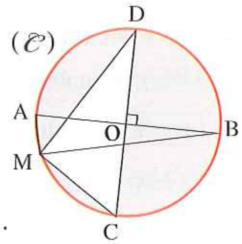


## PROBLÈMES OUVERTS

**26** Sur la figure ci-contre : [AB] et [DC] sont deux diamètres perpendiculaires en O d'un cercle $(\mathscr{C})$.

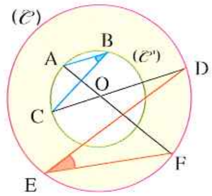
M est un point de $(\mathscr{C})$.

Montrer que : $\widehat{AMC} = \frac{3}{2}\widehat{DOB}$ .



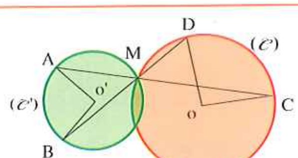

**27** $(\mathscr{C})$ et $(\mathscr{C}')$ sont deux cercles concentriques (même centre O).

Montrer que : $\widehat{ABC} = \widehat{DEF}$ .




**28** On considère la figure ci-contre :

Montrer que : $\widehat{DOC} = \widehat{BO'A}$.




**29** Sur la figure ci-dessous :

$(\mathscr{C})$ est un cercle de diamètre [AB].

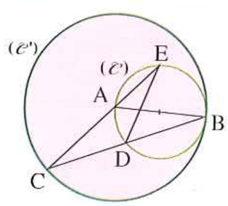
$(\mathscr{C}')$ est le cercle de centre A et de rayon AB.

Soit C un point du cercle $(\mathscr{C}')$.

La droite (AC) recoupe $(\mathscr{C})$ en E.

La droite (BC) recoupe $(\mathscr{C})$ en D.

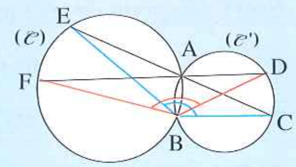
Montrer que le triangle CDE est isocèle.




## CHALLENGES

**30** On considère la figure ci-contre.

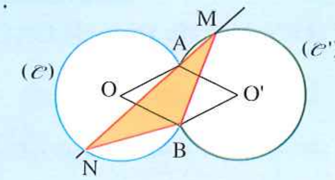
Montrer que : $\widehat{DBF} = \widehat{EBC}$.




**31** Sur la figure ci-contre :

$(\mathscr{C})$ et $(\mathscr{C}')$

de même rayon se coupent en A et B.




O est le centre de $(\mathscr{C})$ et O' celui de $(\mathscr{C}')$.

Une droite passant par A recoupe $(\mathscr{C})$ en N et $(\mathscr{C}')$ en M.

Démontrer que BMN est un triangle isocèle.

**32** Soit A , B , C et D quatre points distincts, alignés dans cet ordre sur une droite $(\Delta)$, $(\mathscr{C})$ et $(\mathscr{C}')$ les cercles de diamètres respectifs [AC] et [BD] et M un de leurs points d'intersection. On suppose que la tangente en M à $(\mathscr{C})$ passe par le centre O' de $(\mathscr{C}')$.

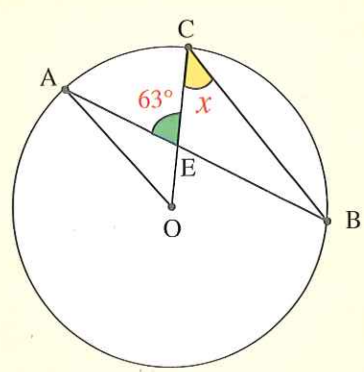
Montrer que (MB) et le bissectrice de l'angle $\widehat{AMC}$.

## SITUATIONS PROPOSÉES AUX OLYMPIADES

Dans la figure ci-contre :

* (AO) // (BC)
* $\widehat{AEC} = 63°$

**Calculer $x$.**



**33** *Exercice résolu*

$(\mathscr{C})$ est un cercle de centre O et de diamètre [AB].

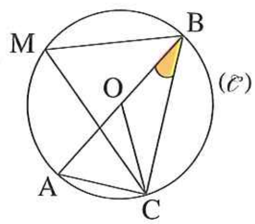
Soit C un point de $(\mathscr{C})$ tel que : $\widehat{ABC} = 30°$ et M un point de l'arc $\overset{\frown}{AB}$ qui ne contient pas C.

*1)* Montrer que OAC est un triangle équilatéral.

*2)* Calculer la mesure de l'angle $\widehat{BMC}$.

**Correction : 33**

***1)* Nature du triangle OAC.**




L'angle au centre $\widehat{AOC}$ est associé à l'angle inscrit $\widehat{ABC}$ car ils interceptent le même arc $\overset{\frown}{AC}$.

Donc : $\widehat{AOC} = 2\ \widehat{ABC}$

Or : $\widehat{ABC} = 30°$, alors :

$\widehat{AOC} = 2 \times 30°$ soit $\widehat{AOC} = 60°$.

Et comme OA = OC (rayons de $(\mathscr{C})$),

alors OAC est un triangle équilatéral.

(triangle isocèle ayant un angle de 60° de mesure).

***2)* Calcul de $\widehat{BMC}$.**

ABC est un triangle inscrit dans un cercle de diamètre [AB]. Donc ABC est un triangle rectangle en C.

Comme $\widehat{ABC} = 30°$, alors $\widehat{BAC} = 60°$.

On sait que les angles inscrits $\widehat{BMC}$ et $\widehat{BAC}$ interceptent le même arc $\overset{\frown}{BC}$.

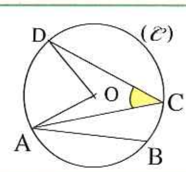
Donc : $\widehat{BMC} = \widehat{BAC}$.

D'où : $\widehat{BMC} = 60°$.

**34**

Sur la figure ci-contre :

$\widehat{ACD} = 40°$ et $\widehat{BAC} = 24°$.

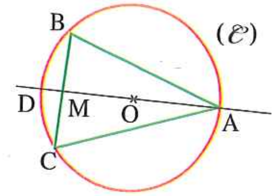



Déterminer la mesure de chacun des angles suivants :

$\widehat{DOA}$ , $\widehat{BDC}$ et $\widehat{DBA}$ .

**35**

ABC est un triangle isocèle en A et $(\mathscr{C})$ son cercle circonscrit de centre O.

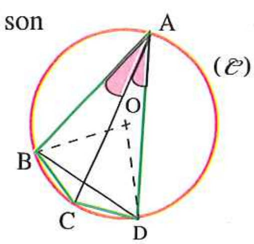



La bissectrice de l'angle $\widehat{BAC}$ coupe [BC] en M et recoupe et $(\mathscr{C})$ en D.

Montrer que : $\widehat{DAC} = \widehat{DCM}$.

**36**

ABD est un triangle et $(\mathscr{C})$ son cercle circonscrit de centre O.

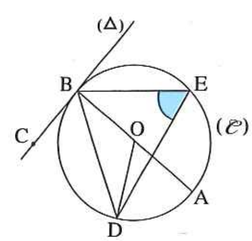



La bissectrice de l'angle BAD recoupe $(\mathscr{C})$ en C.

Montrer que $\widehat{BCD}$ est un triangle isocèle.

**37**

Sur la figure ci-contre :



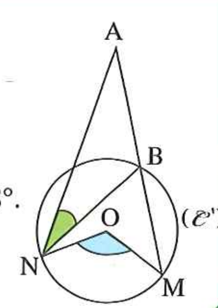

A, B, D et E sont des points d'un cercle $(\mathscr{C})$ de centre O tels que : $\widehat{BED} = 68°$.

C est un point de la tangente (Δ) à $(\mathscr{C})$ en B.

Calculer $\widehat{DBC}$ , $\widehat{DOA}$ et $\widehat{DBA}$.

**38**

Sur la figure suivante :



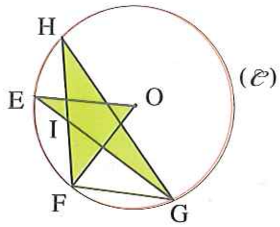

M,B et N sont des points d'un cercle $(\mathscr{C})$ de centre O tels que : $\widehat{ANB} = 32°$ et $\widehat{MAN} = 38°$.

Calculer la mesure de l'angle $\widehat{MON}$.

# JE ME PRÉPARE À L'EXAMEN LOCAL

**39**

Sur la figure suivante :



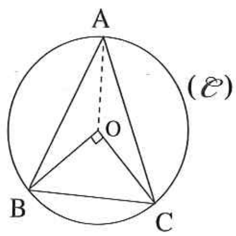

E,F,H et G sont des points d'un cercle $(\mathscr{C})$ de centre O tel que : $\widehat{GFH} = 102°$.

Les droites (HF) et (EG)

Les droites (HF) et (EG) se coupent en I tel que : $\widehat{FIG} = 48°$. Calculer $\widehat{EOF}$ et $\widehat{EHF}$ .

**40**

Sur la figure ci-contre :




A,B et C sont des points d'un cercle $(\mathscr{C})$ de centre O.

$\widehat{BOC} = 90°$ et $\widehat{BOA} = 130°$.

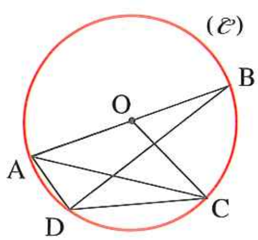
Calculer la mesure de l'angle $\widehat{ABC}$ .

**41**

Sur la figure ci-contre :

A,B,C et D sont des points d'un cercle $(\mathscr{C})$ de centre O et de diamètre [AB].

On donne : $\widehat{AOC} = 124°$




Calculer les mesures des angles $\widehat{BAC}$ et $\widehat{BDC}$ .

**42**

Soient O et O' les centres respectifs de deux cercles $(\mathscr{C})$ et $(\mathscr{C}')$ sécants en deux points A et B.

On considère un point M du cercle $(\mathscr{C})$ tel que :

- (MA) recoupe le cercle $(\mathscr{C}')$ en E;
- (MB) recoupe le cercle $(\mathscr{C}')$ en F .

*1)* La droite (MO) recoupe $(\mathscr{C})$ en H, et coupe la droite (EF) en K.

*a.* Montrer que : $\widehat{AEK} = \widehat{MBA}$ et $\widehat{MBA} = \widehat{MHA}$ .

*b.* En déduire que : $\widehat{AEK} + \widehat{AHK} = 180°$ .

*2)* Sachant que les points A , E , K et H se trouvent sur un même cercle, montrer que (MO) et (EF) sont perpendiculaires.

**43**

A , B et C étant trois points d'un cercle $(\mathscr{C})$, D est le milieu de l'arc $\overset{\frown}{AB}$ et E est le milieu de l'arc $\overset{\frown}{AC}$ .

(DE) coupe (AB) et (AC) respectivement en M et N.

Montrer que AM = AN.

**44**

ABC est un triangle et (L) son cercle circonscrit.

On considère deux points M et N du segment [BC] tels que : $\widehat{BAN} = \widehat{CAM}$.

Soit (T) le cercle circonscrit au triangle AMN.

Le cercle (T) recoupe (AB) et (AC) respectivement en E et F.

Montrer que (EF) et (BC) sont parallèles.

**45**

ABC est un triangle équilatéral .

Soit (Δ) une droite parallèle à (AB) et coupant (BC) et (AC) respectivement en M et H.

La parallèle à (AC) issue de M coupe (AB) en K.

Soit (L) le cercle circonscrit au triangle MHK.

Le cercle (L) recoupe (AC) en N , et recoupe (AB) en P.

Montrer que MNP est un triangle équilatéral.

# TRIANGLES ISOMÉTRIQUES

## Prérequis :

* Symétries axiale et centrale.
* Translation.
* Angles formés par une sécante avec deux droites parallèles.

## Un point d'histoire

**Euclide (-365 ; -300)**

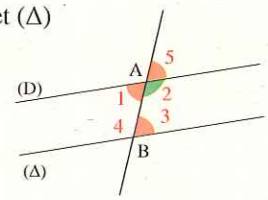
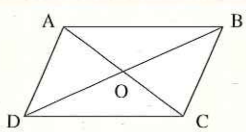
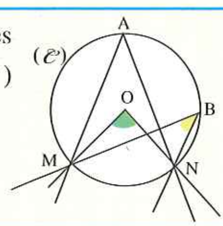
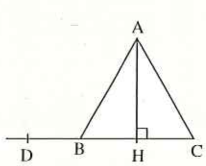
Auteur des éléments qui sont considérés comme l'un des textes fondateurs des mathématiques modernes. Il traite, en particulier, des triangles et des droites parallèles.

## TEST DIAGNOSTIQUE : Je m'évalue

## CHOISIR LA BONNE RÉPONSE.

**Pour chaque question, cocher la bonne réponse en justifiant.**

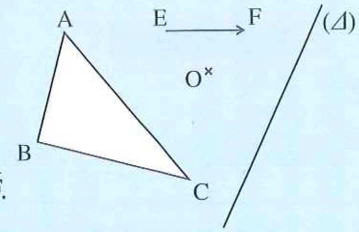
**Réponses :**

| | | | |
|---|---|---|---|
| Les droites (D) et (Δ) sont parallèles.   | $\hat{A}_5 + \hat{B}_3 = 180°$ | $\hat{B}_3 = \hat{A}_5$ | $\hat{B}_4 = \hat{A}_5$ |
| ABCD est un parallélogramme de centre O.   | $AC = BD$ | $AB = AD$ | $AO = OC$ |
| a , b et c sont des mesures d'angles. Si $a + b = 90°$ et $a + c = 90°$, alors : ... | $b = c$ | $b + c = 180°$ | $b + c = 90°$ |
| A , B , M et N sont des points d'un cercle ($\mathscr{C}$) de centre O.   Donc : ... | $\widehat{MBN} = \widehat{MON}$ | $\widehat{MBN} = \widehat{MAN}$ | $\widehat{MBN} = 2\widehat{MON}$ |
| ABC est un triangle isocèle en A.   Donc : ... | $\widehat{HAC} = \widehat{BAH}$ | $\widehat{ABD} = \widehat{BAH} + \widehat{ACB}$ | $\widehat{HAC} = \widehat{ABC}$ |

Solutions page : 246

# ACTIVITÉS : JE DÉCOUVRE

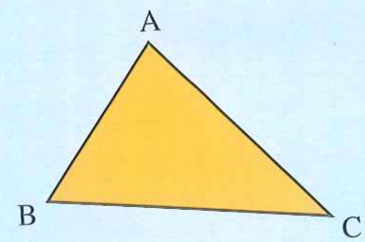
## Activité 1 Transformés d'un triangle par une symétrie ou une translation




Recopier la figure ci-contre .

1. Construire A'B'C' le symétrique du triangle ABC par rapport à O.
2. Construire A"B"C" le symétrique de ABC par rapport à la droite (Δ)
3. Construire A'"B'"C'" le translaté du triangle ABC par la translation de vecteur $\overrightarrow{EF}$.
4. Que peut-on dire des côtés et des angles des triangles ABC , A'B'C' , A"B"C" et A'"B'"C'" ?

## Activité 2 Triangles superposables




1. Constuire un triangle ABC .
2. Calquer le triangle ABC .
3. *a.* Décalquer le triangle obtenu sur le papier calque.

   *b.* Nommer E,F et G les sommets de ce triangle de telle manière que E,F et G correspondent respectivement aux sommets A,B et C.

   On dit que ABC et EFG **sont surperposables.**

   On dit aussi que ABC et EFG sont des **triangles isométriques.**

## Activité 3 Triangles isométriques ayant des côtés deux à deux de même mesure

ABC est un triangle.

1. Construire un triangle EFG tel que : EF = AB et EG = AC et FG = BC
2. Montrer que les triangles ABC et EFG sont isométriques.

## Activité 4 Triangles isométriques ayant un angle de même mesure compris entre deux côté homologues de même longueur

ABC est un triangle.

1. Construire un triangle EFG tel que : EF = AB et EG = AC et $\widehat{FEG} = \widehat{BAC}$
2. Montrer que les triangles ABC et EFG sont isométriques.

## Activité 5 Triangles isométriques ayant un côté de même longueur compris entre deux angles homologues de même mesure

ABC est un triangle.

1. Construire un triangle EFG tel que : EF = AB et $\widehat{FEG} = \widehat{BAC}$ et $\widehat{FEG} = \widehat{ABC}$
2. Montrer que les triangles ABC et EFG sont isométriques.

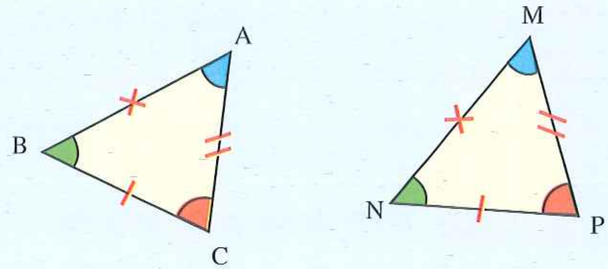
# SAVOIR
## Je révise

## 1 ISOMÉTRIE DE DEUX TRIANGLES

**Définition 1** Deux triangles isométriques sont deux triangles superposables.

**Exemple :**

Les triangles ABC et MNP sont superposables , alors ils sont isométriques.



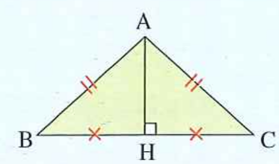

**Propriété 1**

*1/* Si deux triangles sont isométriques, alors leurs côtés sont deux à deux de même longueur.

*2/* Si deux triangles sont isométriques, alors leurs angles sont deux à deux de même mesure.

**Exemple :** ABC est un triangle isocèle en A.

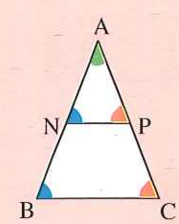
H le milieu de [BC] les triangles ABH et ACH sont isométriques.




**Remarque 1 :** La réciproque de la propriété *2/* n'est pas vraie.

***Contre-exemple*** : ABC est un triangle et (NP) // (BC)

Les triangles ABC et ANP ont leurs angles deux à deux de même mesure, mais ils ne sont pas isométriques.




## 2 CAS D'ISOMÉTRIE

### *1^er^ cas d'isométrie :*

**Propriété 2** Si deux triangles ont leurs côtés deux à deux de même longueur, alors ils sont isométriques.

**Exemple :**

**Données**

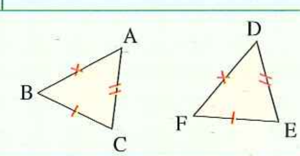
AB = DF
AC = DE
BC = EF

**Propriété 2**

Donc, d'après le 1er cas d'isométrie

**Conclusion**

Les triangles ABC et DEF sont isométriques



### *$2^{eme}$ cas d'isométrie :*

**Propriété 3**

Si deux triangles ont un angle de même mesure compris entre deux côtés respectivement de même longueur, alors ils sont isométriques.

**Exemple :**

**Données**

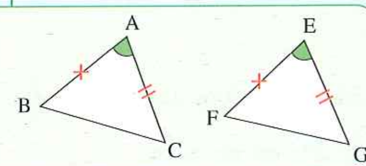
$$\begin{cases} AB = EF \\ AC = EG \\ \widehat{BAC} = \widehat{FEG} \end{cases}$$

**Propriété 3**

Donc, d'après le $2^{ème}$ cas d'isométrie

**Conclusion**

Les triangles ABC et EFG sont isométriques




### *$3^{e}$ cas d'isométrie :*

**Propriété 4**

Si deux triangles ont un côté de même longueur compris entre deux angles respectivement de même mesure, alors ils sont isométriques.

**Exemple :**

**Données**

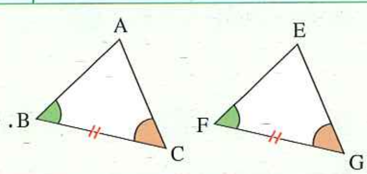
$$\begin{cases} BC = FG \\ \widehat{ABC} = \widehat{EFG} \\ \widehat{ACB} = \widehat{EGF} \end{cases}$$

**Propriété 3**

Donc, d'après le $3^{ème}$ cas d'isométrie

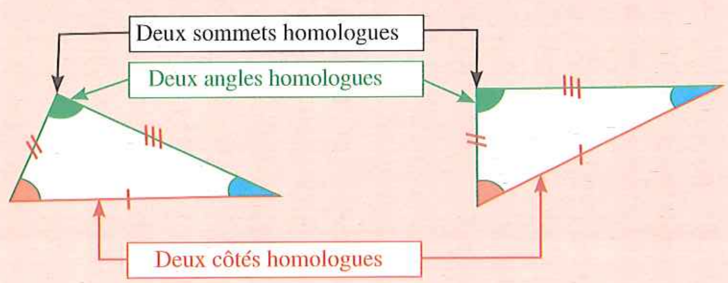
**Conclusion**

Les triangles ABC et EFG sont isométriques.




**Remarque 2 :** Pour démontrer que deux triangles sont isométriques, il est conseillé de commencer par chercher les côtés de même longueur.

**Remarque 3 :** Lorsque deux triangles sont isométriques, deux angles superposables sont dits angles **homologues** ainsi que leurs sommets, deux côtés superposables sont dits côtés homologues.



## UTILISER DES TRIANGLES ISOMÉTRIQUES POUR DÉMONTRER

**Exemple 1**

ABDE et BCFG sont deux carrés construits à l'extérieur d'un triangle ABC.

Démontrer que : GA = CD.

**Pour démontrer que des segments ont la même longueur, on peut démontrer que ce sont des côtés homologues de deux triangles isométriques.**

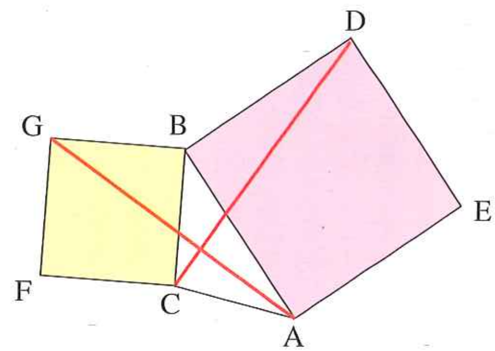
Montrons donc que les triangles GAB et DCB sont isométriques.

BCFG est un carré .

Donc : BG = BC (1)

Et ABDE est un carré.

Donc : AB = BD (2)




Comparons les angles $\widehat{ABC}$ et $\widehat{DBC}$ .

On a : $\widehat{ABG} = \widehat{ABC} + \widehat{CBG} = \widehat{ABC} + 90°$

$\widehat{DBC} = \widehat{CBA} + \widehat{ABD} = \widehat{ABC} + 90°$

Donc : $\widehat{ABG} = \widehat{DBC}$ (3)

De (1) , (2) et (3) et d'après le deuxième cas d'isométrie, les triangles GAB et CDB sont isométriques.

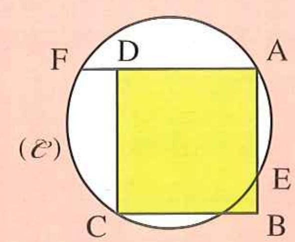
Il en résulte que leurs côtés homologues ont même longueur.

D'où : GA = CD.

**Exemple 2**

Sur la figure ci-contre :

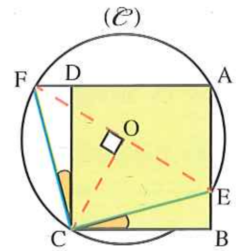
- A et C sont deux points d'un cercle ($\mathscr{C}$) de centre O,
- ABCD est un carré.
- (AD) recoupe ($\mathscr{C}$) en F.
- (AB) recoupe ($\mathscr{C}$) en E.



1 Montrer que : CE = CF.

2 Montrer que : DF = EB.

**1 Montrons que : CE = CF**




C'est-à-dire, on va démontrer que le triangle CEF est isocèle en C.

L'angle au centre $\widehat{FOE}$ est associé à l'angle au centre $\widehat{FAE}$ .

Donc : $\widehat{FOE} = 2\widehat{FAE}$

$\widehat{FOE} = 2 \times 90°$ ( car $\widehat{FAE} = \widehat{DAB} = 90°$)

$\widehat{FOE} = 180°$

Donc : [EF] est un diamètre de ($\mathscr{C}$).

D'autre part $\widehat{COF} = 2\widehat{CAF}$ (angle au centre)

Or : $\widehat{CAF} = \widehat{CAD} = 45°$ (car DAC est rectangle isocèle),

alors : $\widehat{COF} = 90°$. Comme OC = OF, alors $\widehat{CFO} = 45°$.

En outre C appartient au cercle ($\mathscr{C}$) de diamètre [EF].

Donc : CEF est un triangle rectangle isocèle en C. Par suite : CE = CF.

**2 Montrons que : DF = EB.**

On va démontrer que ce sont des côtés homologues de deux triangles isométriques.

Montrons donc que les triangles BEC et CDF sont isométriques

On a : CE = CF (1) (d'après la question précédente)

et : CB = CD (2) (ABCD est un carré).

On sait que : $\widehat{BEC} = \widehat{BCD} - \widehat{DCE} = 90° - \widehat{DCE}$

et : $\widehat{FCD} = \widehat{FCE} - \widehat{DCE} = 90° - \widehat{DCE}$

Donc : $\widehat{BEC} = \widehat{FCD}$ (3)

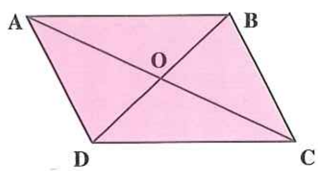
De (1) , (2) et (3) et d'après le deuxième cas d'isométrie, les triangles BEC et CDF sont isométriques.

Donc : EB = DF

**Remarque :** On peut montrer que DF = EB en utilisant le théorème de Pythagore; ce n'est pas notre objectif.

## POUR RÉVISER SON COURS

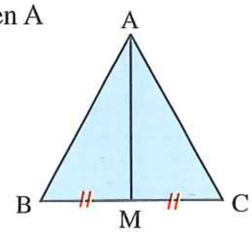
**1** ABCD est un parallélogramme de centre O.




Montrer que les triangles DOC et BOA sont isométriques (de plusieurs façons).

**2** ABC est un triangle isocèle en A et M le milieu de [BC].

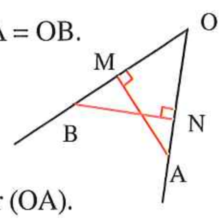
Montrer que les triangles BAM et CAM sont isométriques (de plusieurs façons).




**3** BOA est un angle aigu et OA = OB.

M est le projeté orthogonal de A sur (OB).

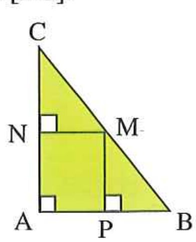
N est le projeté orthogonal de B sur (OA).




Montrer que les triangles BON et MAO sont isométriques.

**4** ABC est un triangle rectangle en A.

Soit M le milieu de [BC].



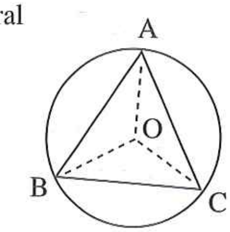

N et P sont les projetés orthogonaux de M respectivement sur (AC) et (AB) .

Montrer que MBP et MNC sont des triangles isométriques.

## TRIANGLES ISOMÉTRIES POUR DÉMONTRER

**5** ABC est un triangle équilatéral et ($\mathscr{C}$) son cercle circonscrit de centre O.

Montrer que les triangles OAB, OAC et OBC sont isométriques.

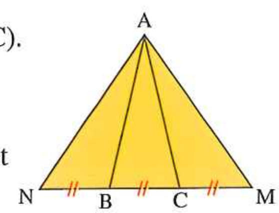



**6** ABC est un triangle isocèle en A.

M et N sont deux points de (BC).

tels que : NB = BC = CM et

B est un point de [NC] et C est un point de [BM].




Montrer que ABN et ACM sont des triangles isométriques.

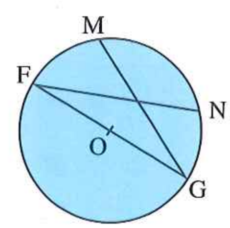
**7** ABC est un triangle isocèle en A.

Soit M le projeté orthogonal de B sur (AC) et N le projeté orthogonal de C sur (AB).

Montrer que les triangles MAB et NAC sont isométriques.

**8** [FG] est un diamètre d'un cercle ($\mathscr{C}$) de centre O.

Soient M et N deux points du cercle ($\mathscr{C}$) tels que : FN = GM.




Montrer que les triangles FGN et FGM sont isométriques.

**9** RAT est un triangle isocèle en R .

Soit M et I les milieux respectifs de [RA] et [RT].

*1)* Montrer que les triangles RIA et MTR sont isométriques.

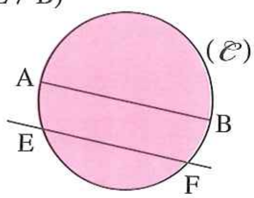
*2)* Montrer que les triangles TAI et TAM sont isométriques.

**10** ($\mathscr{C}$) est un cercle de diamètre [AB].

Soit E un point de ($\mathscr{C}$) ($E \neq A$ et $E \neq B$)

La parallèle à la droite (AB) passant par E recoupe ($\mathscr{C}$) en F.

Démontrer que les triangles AEB et AFB sont isométriques.

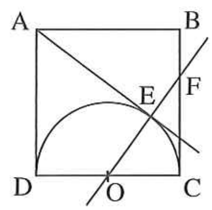



**11** ABCD est un carré .

La droite (AE) est la tangente au cercle ($\mathscr{C}$) de diamètre [DC] en E.

La droite (OE) coupe [BC] en F.

O est le centre du cercle ($\mathscr{C}$).



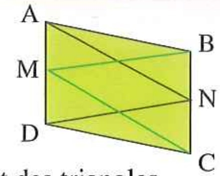

*1)* Montrer que les triangles DOA et OAE sont isométriques.

*2)* Montrer que les triangles AEF et BAF sont isométriques.

## DÉMONSTRATION

**12** ABCD est un parallélogramme

Soit M et N les milieux respectifs de [AB] et [CD].



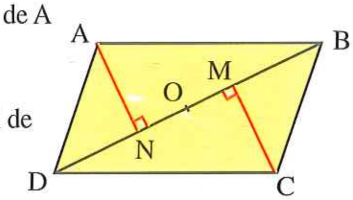

*1)* Montrer que DAN et BCM sont des triangles isométriques.

*2)* En déduire que : AN = CM.

**13** ABCD est un parallélogramme de centre O.

N est le projeté orthogonal de A sur (DB).

M est le projeté orthogonal de C sur (DB).

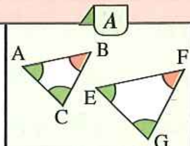
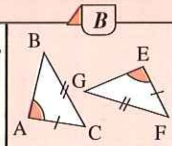
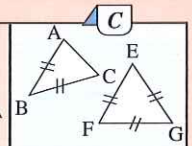
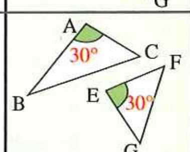
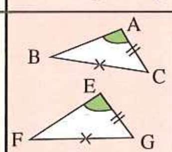
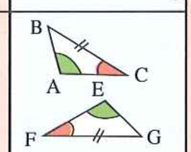



*1)* Montrer que les triangles ONA et OMC sont isométriques.

*2)* En déduire que O est le milieu de [MN] .

## MON BILAN

***1) Indiquer la bonne réponse par A , B ou C :***

| | A | B | C |
|---|---|---|---|
| 1 À quellle figure les triangles ABC et EFG sont isométriques ... |  |  |  |
| 1 À quellle figure les triangles ABC et EFG sont isométriques ... |  |  |  |
| 2 ABCD est un parallélogramme de centre O. Les triangles ADO et BCO sont) ils isométrique ? | non | oui | je ne sait pas |
| 4 Si ABC et EFG sont deux triangles tels que : AB = EG et BC = EF et $\widehat{B} = \widehat{E} = 30°$ et $\widehat{C} = 40°$ alors : | $\widehat{F} = 30°$ | $\widehat{F} = 40°$ | $\widehat{F} = 90°$ |
| 5 ABC et EFG sont deux triangles tels que : AB = EG et BC = EF et $\widehat{B} = \widehat{E}$ et AC = 6cm , alors : BC = 7cm. | EF = 4cm | EF = 7cm | EF = 5cm |

Corrections page : 247

***2) En cas d'erreur, voici quelques conseils :***

| | Savoir | Pratique |
|---|---|---|
| Ex: 1 | Définition | |
| Ex: 2 | Propriété 3 et 2 | |
| Ex: 3 | Définition | |
| Ex: 4 | Propriété 3 et propriété 1 | |
| Ex: 5 | Propriété 3 et propriété 1 | |

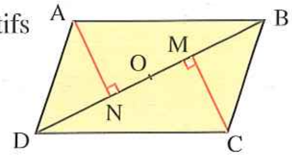
***3) Exercices pour la remédiation voir R9 page : 248***

## TRIANGLES ISOMETRIQUES ET DÉMONSTRATION

**14** **AVEC TICE**

ABCD est un parallélogramme.

M et N sont les projetés respectifs de C et A sur (DB).




*1)* Exploiter le dynamisme de logiciel Geogbra pour conjectuer une comparaison entre les distances DN et BM.

*2)* Montrer que : DN = BM.

**15** ABCD est un parallélogramme de centre O.

Une droite (Δ) passant par O coupe [BC] et [AD] respectivement en E et F.

*1)* Montrer que OCE et FOA sont des triangles isométriques.

*2)* En déduire que : AF = CE .

**16** ABC est un triangle tel que AC < AB.

La bissectrice de l'angle $\widehat{CAB}$ coupe [BC] en M.

Le cercle de centre A et de rayon AC coupe [AB] en N.

*1)* Montrer que les triangles CAM et MAN sont isométriques.

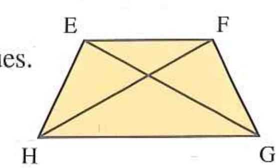
*2)* En déduire la nature du triangle MCN.

**17** EFGH est un trapèze isocèle tel que : (EF) // (HG).

*1)* Montrer que les triangles EGH et FHG sont isométriques.

*2)* En déduire que : EG = FH.

*3)* Conclure.




**18** ABC est un triangle rectangle en A.

La médiatrice du segment [AC] coupe [AC] en M et [BC] en N.

Montrer que les triangles MAN et MCN sont isométriques.

**19** [AB] est un diamètre d'un cercle ($\mathscr{C}$) de centre O et de rayon 3 cm.

Soit F un point de ($\mathscr{C}$) tel que : $\widehat{FAB} = 45°$.

La tangente au cercle ($\mathscr{C}$) en B coupe la droite (AF) en D.

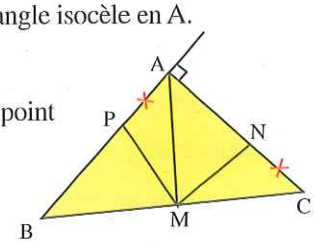
Soit G le symétrique de D par rapport à B.

Montrer que les triangles GAB et DBA sont isométriques.

**20** ABC est un triangle rectangle isocèle en A.

M est le milieu de [BC].

N est un point de [AC] et P un point de [AB] tel que : AP = CN.

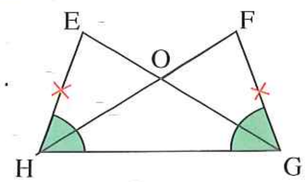



*1)* Montrer que les triangles MAP et MCN sont isométriques.

*2)* En déduire que MNP est un triangle rectangle isocèle.

**21** Sur la figure ci-contre :

EH = FG et $\widehat{EHG} = \widehat{FGH}$ .




*1)* Montrer que les triangles EGH et FGH sont isométriques.

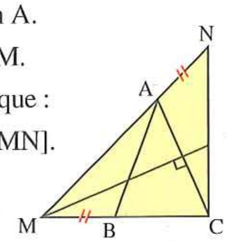
*2)* Montrer que les triangles OEF et OGH sont isocèles en O.

*3)* Montrer que (EF) // (HG).

**22** ABC est un triangle isocèle en A.

La médiatrice de [AC] coupe (BC) en M.

Soit N le point de la droite (AM) tels que : AN = BM et A un point du segment [MN].



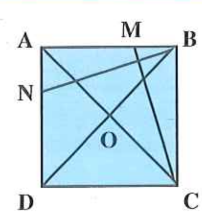

*1)* Montrer que les triangles CAN et BAM sont isométriques.

*2)* En déduire la nature du triangle MCN.

**23** ABCD est un carré de centre O.

Soit M un point de [AB].

La perpendiculaire à la droite (MC) passant par B coupe (AD) en N.



*1)a.* Montrer que les triangles BCM et NAB sont isométriques.

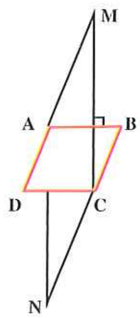
*b.* En déduire que BM = AN.

*2)a.* Montrer que les triangles BOM et ONA sont isométriques.

*b.* En déduire la nature du triangle NOM.

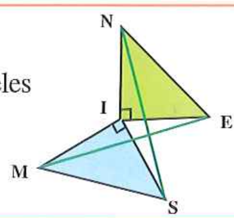
## DÉMONSTRATION

**24** ABCD est un parallélogramme.
La perpendiculaire à (AB) passant par C coupe (AD) en M.
La perpendiculaire à (DC) passant par A coupe (BC) en N.

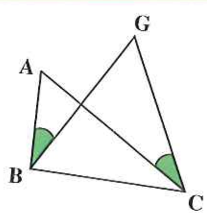



Montrer que les triangles AMB et CND sont isométriques.

**25** Sur la figure ci-contre :
NIE et MIS sont deux triangles isocèles rectangles en I.
Démontrer que : NS = ME.



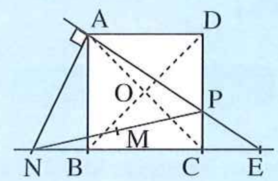

**26** ABC est un triangle. Soit G un point à l'extérieur du triangle ABC tel que : GBA = ACG (voir figure)




Soit E et F les projetés orthogonaux de A respectivement sur les droites (BG) et (CG).
Démontrer que AEF est un triangle isocèle en A.

## CHALLENGES

**27** ABCD est un carré de centre O.
Soit P un point de [DC]
La droite (AP) coupe (BC) en E.
La perpendiculaire à (AE) passant par A coupe (BC) en N.

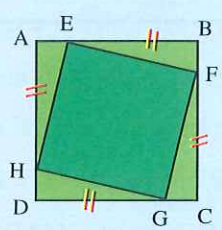



Soit M le milieu de [NP].

*1)* Montrer que les triangles DAP et BAN sont isométriques.

*2)* Montrer que les triangles DAM et DCM sont isométriques.

**28** ABCD est un carré . E,F,G et H sont respectivement des points de [AB] , [BC] , [CD] et [DA] tels que :
BE = AH = DG = CF.




En utilisant des triangles isométriques, montrer que le quadrilatère EFGH est un carré .

## SITUATIONS PROPOSÉES AUX OLYMPIADES

ABC est un triangle rectangle en A.

La bissectrice intérieure de $\widehat{BAC}$ coupe [BC] en E.

La bissectrice intérieure de $\widehat{ABC}$ coupe [CA] en F. La perpendiculaire à (BF) passant par C, coupe (BF) en M.

La perpendiculaire à (AE) passant par C, coupe (AE) en N.

**Montrer que : (MN) // (AB).**

**29**

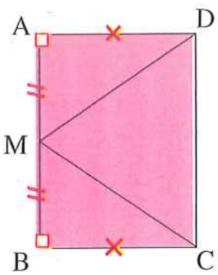
ABCD est un rectangle.

Soit M le milieu de [AB].

*1)* Montrer que les triangles MAD et MBC sont isométriques.

*2)* En déduire que :

$\widehat{MDA} = \widehat{BCM}$.




## Correction : 29

***1)* Montrons que les triangles MAD et MBC sont isométriques**.

On cherche d'abord les côtés de même longueur de ces deux triangles.

ABCD est un rectangle.

Donc : AD = BC ① ( côtés opposés)

Et M est le milieu de [AB]

Donc : MA = MB ②

Et : $\widehat{DAM} = \widehat{MBC}$ ③ ( angles droits)

De ① , ② et ③ et d'après le deuxième cas d'isométrie, les triangles MAD et MBC sont isométriques .

***2)* Déduisons-en que : $\widehat{MAD} = \widehat{BCM}$.**

On sait que les triangles MAD et MBC sont isométriques.

D'où les angles homologues ont même mesure.

Donc : $\widehat{MDA} = \widehat{BCM}$ .

**30**

ABCD est un carré.

Soit M le milieu de [AB] et H le projeté orthogonal de M sur (DC).

Montrer que les triangles MDH et BCM sont isométriques.

ABC est un triangle rectangle isocèle en A et $(\mathscr{C})$ son cercle circonscrit. Soit M le milieu de [AC].

La droite (BM) recoupe $(\mathscr{C})$ en N.

Les droites (CN) et (BA) se coupent en P.

*1)* Montrer que les triangles BAM et PAC sont isométriques.

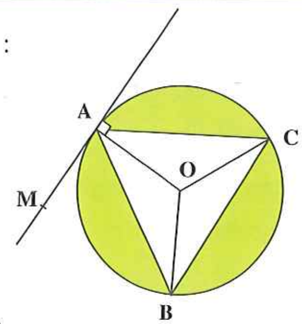
*2)* En déduire la nature du triangle PAM.

**31**

Sur la figure ci-contre :

$\widehat{ACB} = 58°$ et ABC est un triangle isocèle en C.

(AM) est la tangente au cercle $(\mathscr{C})$ en A.




*1)* Calculer $\widehat{BOA}$ et $\widehat{CAO}$.

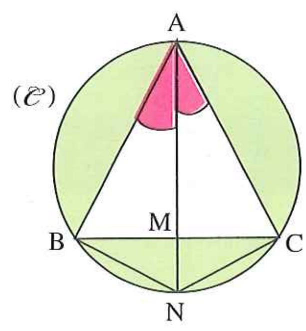
*2)a.* Montrer que les triangles COA et BOC sont isométriques

*b.* En déduire la mesure de l'angle $\widehat{CBO}$ .

**32**

ABC est un triangle isocèle en A et $(\mathscr{C})$ son cercle circonscrit.

La bissectrice de l'angle $\widehat{CAB}$ coupe [CB] en M et recoupe $(\mathscr{C})$ en N.



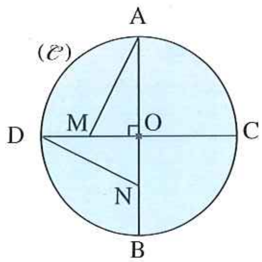

Montrer que les triangles CAN et BAN sont isométriques.

# JE ME PRÉPARE À L'EXAMEN LOCAL

Chapitre 09

**33** Sur la figure suivante : A,B,C et D sont des points d'un cercle $(\mathscr{C})$ de centre O tels que : [AB] et [DC] soient deux diamètres de $(\mathscr{C})$ et $(AB) \perp (DC)$.

M et N sont les milieux respectifs de [OD] et [OB].

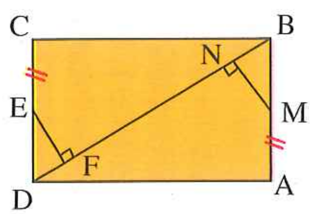



*1)* Montrer que les triangles MAO et DON sont isométriques .

*2)* En déduire que : $\widehat{OMA} = \widehat{DNO}$ et $(AM) \perp (DN)$.

**34** ABCD est un rectangle. M et E sont respectivement des points de [AB] et [DC] tels que MA = CE.

Soit N le projeté orthogonal de M sur (DB) et F le projeté orthogonal de E sur (DB).



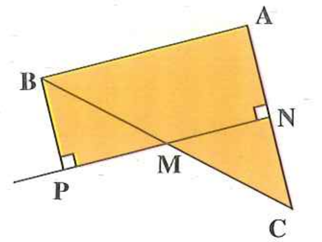

*1)* Montrer que les triangles BMN et DEF sont isométriques.

*2)* En déduire que : $\widehat{BMN} = \widehat{DEF}$.

**35** ABC est un triangle quelconque.

Soit M le milieu de [BC] . N est le projeté orthogonal de M sur (AC).

P est le projeté orthogonal de B sur (MN).




*1)* Montrer que les triangles BMP et CMN sont isométriques

*2)* En déduire que : NP = 2MN.

**36** ABC est un triangle rectangle isocèle en A tel que : AB = 7cm.

Soit M le milieu de [AB] et H le projeté orthogonal de B sur (MC).

La droite (BH) coupe (AC) en N.

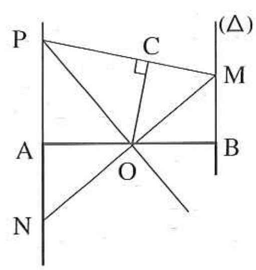
*1)* Montrer que les triangles CAM et BAN sont isométriques.

*2)* Calculer NA et NB.

**37** [AB] est un segment de milieu de O.

Soit M un point de la perpendiculaire à (AB) en B.

N est le symétrique de M par rapport à O.




*1)a.* Montrer que les triangles BOM et ONA sont isométriques.

*b.* En déduire que : $\widehat{OAN} = 90°$

*2)* La médiatrice de [MN] coupe (AN) en P.

Soit C le projeté orthogonal de O sur (MP).

Montrer que : OC = ON.

# TRIANGLES SEMBLABLES

## Prérequis :

- * Triangles isométriques.
- * Théorème de Thalès.

## Un point d'histoire

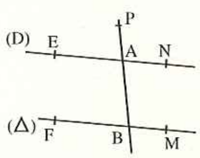
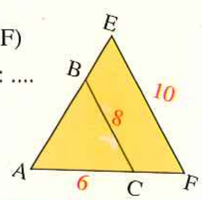
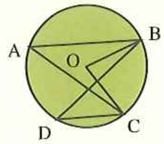
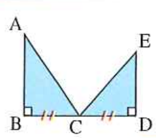
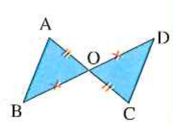
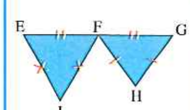
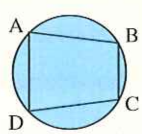
**Al-Kashi (1380 ; 1429)**

Al-Kashi est un mathématicien et astronome perse. Il joua un rôle important dans la conception de l'observatoire de Samarcande. A partir de la méthode des polygones d'Archimède, Al-Kashi calcula 10 chiffres sexagésimaux de $\pi$ , soit 16 chiffres décimaux exacts. Al-Kashi est l'inventeur d'une sorte de calculateur analogique permettant de faire des interprétations linéaires.On lui doit la formule d'Al-Kashi ou loi des cosinus, qui relie dans un triangle la longueur d'un côté à celles des deux autres côtés et au cosinus de l'angle formé par ces deux côtés.

## TEST DIAGNOSTIQUE : Je m'évalue

## CHOISIR LA BONNE RÉPONSE.

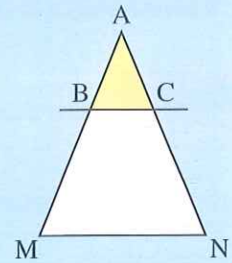
**Pour chaque question, cocher la bonne réponse en justifiant.**

| | Réponses : | | |
|---|---|---|---|
| Les droites (D) et (Δ) sont parallèles :   Donc : | $\widehat{MBA}=\widehat{BAN}$ | $\widehat{EAB}=\widehat{ABM}$ | $\widehat{PAN}=\widehat{BAN}$ |
| Les droites (BC) et (EF) sont parallèles ; alors : ....   | $\frac{EB}{EA}=\frac{FC}{FA}=\frac{EF}{BC}$ | AF= 7,5 | AF= $\frac{2}{15}$ |
| A,B,C et D sont des points d'un cercle de centre O ; alors ....   | $\widehat{BOC}=\frac{1}{2}\widehat{BAC}$ | $\widehat{BOC}=\widehat{BAC}$ | $\widehat{DAB}+\widehat{BCD}=180°$ |
| Dans quel cas, on a deux triangles isométriques ? |   |   |   |
| A,B,C et D sont des points d'un cercle ($\mathscr{C}$).   Donc : | $\widehat{BAC}=\widehat{BDC}$ | $\widehat{BAD}+\widehat{DCB}=90°$ | $\widehat{BAD}+\widehat{ADC}=180°$ |

Solutions page : 246

# ACTIVITÉS : JE DÉCOUVRE

## Activité 1 Triangles semblables

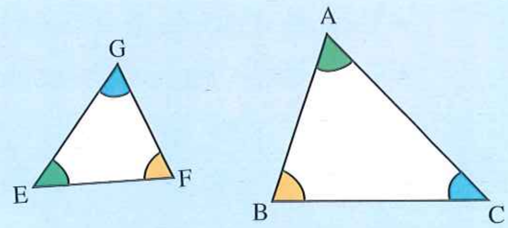



Sur la figure ci-contre: (BC) // (MN).

Montrer que les angles du triangle ABC ont même mesure que les angles du triangle AMN.

On dit que les triangles ABC et AMN sont semblables.

## Activité 2 Proportionnaliоté des côtés dans le cas de la similitude des triangles

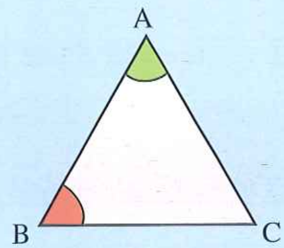



ABC et EFG sont deux triangles semblables (voir figure)

tels que : $EF < AB$.

Démontrer que : $\frac{EF}{AB} = \frac{EG}{AC} = \frac{FG}{BC}$.

## Activité 3 Triangles semblables si deux angles de l'un sont isométriques à deux angles de l'autre




ABC est un triangle .

1. Constuire un autre triangle EFG tel que :
$$\widehat{FEG} = \widehat{BAC} \quad \text{et} \quad \widehat{EFG} = \widehat{ABC}.$$
2. Montrer que les triangles ABC et EFG sont semblables.
3. Conclure .

## Activité 4 Un cas de similitude

ABC est un triangle.

1. Construire un triangle EFG tel que : $\widehat{FEG} = \widehat{BAC}$ et $\frac{FE}{AB} = \frac{EG}{AC}$
2. Soit M un point de la demi-droite [AB) tel que : $AM = EF$.
   La parallèle à (BC) passant par M coupe [AC] en N.
   *a.* Montrer que les triangles AMN et EFG sont isométriques.
   *b.* En déduire que les triangles ABC et EFG sont semblables.
3. Conclure .

## Activité 5 Un autre cas de similitude

ABC est un triangle .

1. Construire un triangle EFG tel que : $\frac{EF}{AB} = \frac{EG}{AC} = \frac{FG}{BC}$ .
2. Montrer que les triangles ABC et EFG sont semblables.

# SAVOIR
## Je révise

## 1 LES TRIANGLES SEMBLABLES

**Définition** Deux triangles **semblables** sont des triangles qui ont leurs angles deux à deux de même mesure.

Dans la suite, on respectera l'ordre des lettres : ABC et EFG sont semblables.

### Vocabulaire :

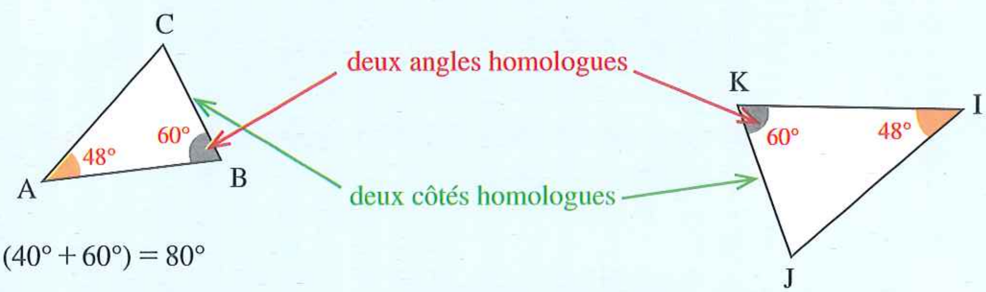
Lorsque deux triangles sont semblables :

- Un angle d'un triangle et l'angle de même mesure de l'autre triangle sont dits **homologues** ;
- Les sommets (ou les côtés opposés) de deux angles homologues sont aussi dits homologues.

**Exemples :**

*1)* $\widehat{ABC} = \widehat{JKI} = 60°$

$\widehat{BAC} = \widehat{JIK} = 40°$




$\widehat{ACB} = \widehat{JIK} = 180° - (40° + 60°) = 80°$

Les triangles ABC et IJK ont leurs angles deux à deux de même mesure, donc ilssont semblables.

*2)* Deux triangles isométriques sont semblables.

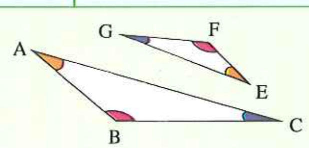
*3)* Deux triangles équilatéraux sont semblables.

**Propriété 1** Si deux triangles sont **semblables**, alors les longueurs des **côtés homologues** sont **proportionnelles**.

**Exemple :**

**Données**

Les triangles ABC et EFG sont semblables.




**Propriété 1**

**Conclusion**

$$\frac{EF}{AB} = \frac{EG}{AC} = \frac{FG}{BC} = k$$

**Remarque :**

- Le nombre k est appelé le **rapport de similitude** des triangles ABC et EFG .
- Dans la figure ci-dessus, EFG est une réduction du triangle ABC dans le rapport $\frac{FG}{BC}$ $(k < 1)$.

ABC est un agrandissement du triangle EFG dans le rapport $\frac{BC}{FG}$ $(k > 1)$.

## 2 CAS DE SIMILITUDE

### *$1^{er}$ cas de similitude*

**Propriété 2**

Si deux angles d'un triangle ont mêmes mesures que deux angles d'un autre triangle, alors les triangles sont semblables.

**Exemple :**

**Données**

$\widehat{BAC} = \widehat{FEG}$

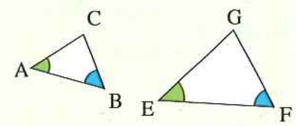
$\widehat{CBA} = \widehat{GFE}$

**Propriété 2**

Donc, d'après la $1^{er}$ cas de similitude

**Conclusion**

Les triangles ABC et EFG sont semblables.




### *$2^{ème}$ cas de similitude*

**Propriété 3**

Si deux triangles ont un angle de même mesure compris entre deux côtés respectivement proportionnels, alors ils sont semblables.

**Exemple :**

**Données**

$\widehat{BAC} = \widehat{FEG}$

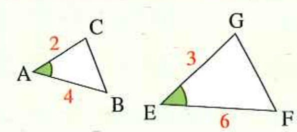
$\dfrac{BA}{FE} = \dfrac{AC}{EG} = \dfrac{2}{3}$

**Propriété 3**

Donc, d'après le $2^{ème}$ cas de similitude

**Conclusion**

Les triangles ABC et EFG sont semblables.



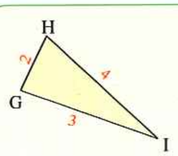

### *$3^{ème}$ cas de similitude*

**Propriété 4**

Si les longueurs des côtés de deux triangles sont deux à deux proportionnelles, alors ces triangles sont semblables.

**Exemple :**

**Données**





$\dfrac{LK}{HG} = \dfrac{JK}{GI} = \dfrac{JL}{HI} = 0,4$

**Propriété 4**

Donc, d'après le $3^{ème}$ cas de similitude

**Conclusion**

Les triangles ABC et EFG sont semblables.

## 1 UTILISER DES TRIANGLES SEMBLABLES POUR COMPARER DES AIRES

**Exemple 1**

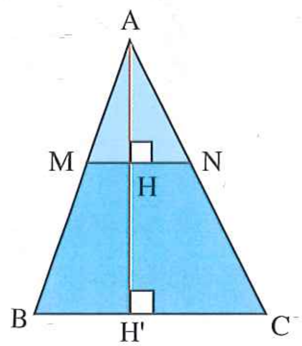
ABC est un triangle

Soit M un point de [AB].

La parallèle à (BC) passant par M coupe [AC] en N.

Calculer le rapport entre l'aire du triangle AMN et celle du triangle ABC.

**Calculons** $\dfrac{\text{Aire AMN}}{\text{Aire ABC}}$.




Considérons la sécante (AB) aux parallèles (MN) et (BC) .

On a : $\widehat{AMN} = \widehat{ABC}$ ① (angles correspondants)

En outre : $\widehat{MAN} = \widehat{BAC}$ ② (angles confondus)

De ① et ② et d'après le 1er cas de similitude, les triangles AMN et ABC sont semblables.

Il en résulte que les longueurs de leurs côtés homologues sont proportionnelles

c'est-à-dire : $\dfrac{AM}{AB} = \dfrac{AN}{AC} = \dfrac{MN}{BC}$

Soit k le rapport de similtude de AMN et ABC .

On a : $\dfrac{MN}{BC} = k$ , soit $MN = k\,BC$.

La perpendiculaire à (BC) passant par A coupe (MN) en H et (BC) en H'.

Donc [AH] et [AH'] sont des hauteurs des triangles AMN et ABC. (car (MN) // (BC)).

Alors : $\dfrac{AH}{AH'} = k$ ( en utilisant le théorème de Thalès )

Ainsi : $AH = k\,AH'$

Par suite : $\dfrac{\text{Aire AMN}}{\text{Aire ABC}} = \dfrac{\frac{1}{2} \times AH \times MN}{\frac{1}{2} \times AH' \times BC} = \dfrac{k\,AH' \times k\,BC}{AH' \times BC} = k^2$

Donc : $\dfrac{\text{Aire AMN}}{\text{Aire ABC}} = k^2$ où $k = \dfrac{MN}{BC}$ ou encore $\dfrac{\text{Aire AMN}}{\text{Aire ABC}} = \left(\dfrac{MN}{BC}\right)^2$

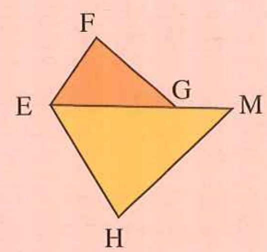
## 2 UTILISER DES TRIANGLES SEMBLABLES POUR COMPARER DES ANGLES

**Exemple 2**

Sur la figure ci-contre :

- $EF = 8$ ; $FG = 10$ et $EG = EH = 12$.
- $EM = 18$ et $HM = 15$.
- E, G et M sont des points alignés.

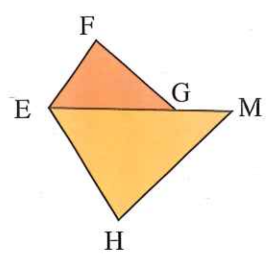
Montrer que [EM] est bissectrice de l'angle $\widehat{FEH}$.




**Montrons que [EM] est bissectrice de l'angle $\widehat{FEH}$.**

On constate que l'énoncé de l'exercice ne contient que les longueurs des côtés des deux triangles EFG et EMH, donc, on peut penser à utiliser le troisième cas de similitude.

On a : $\dfrac{EF}{EH} = \dfrac{8}{12} = \dfrac{2}{3}$ ; $\dfrac{FG}{HM} = \dfrac{10}{15} = \dfrac{2}{3}$ ; $\dfrac{EG}{EM} = \dfrac{12}{18} = \dfrac{2}{3}$.




Donc : $\dfrac{EF}{EH} = \dfrac{FG}{HM} = \dfrac{EG}{EM}$.

D'après le troisième cas de similitude, les triangles EFG et EHM sont semblables.

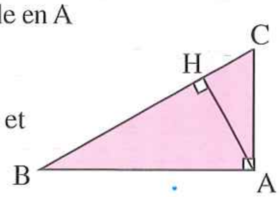
Il est résulte que leurs angles homologues ont mêmes mesures. donc : $\widehat{FEG} = \widehat{MEH}$.

D'où : [EM] est bissectrice de l'angle $\widehat{FEH}$.

## CALCUL D'ANGLE

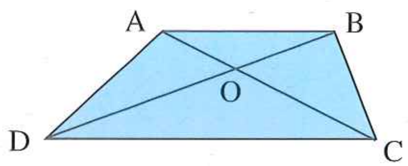
**1** ABC est un triangle rectangle en A et [AH] sa hauteur.

Montrer que les triangles BAH et ABC sont semblables.



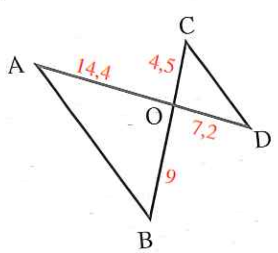

**2** ABCD est un trapèze de bases [AB] et [DC].

Soit O le point d'intersection de ses diagonales.




Montrer que les triangles DOC et BOA sont semblables.

**3** Sur la figure suivante :

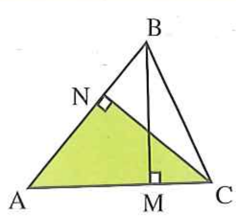



- OA = 14,4 ; OB = 9 ; OC = 4,5 ; OD = 7,2
- (BC) et (AD) sont sécantes en O.

Montrer que les triangles DOC et BOA sont semblables.

**4** ABC est un triangle.

Soit M le projeté orthogonal de B sur (AC).




Soit N le projeté orthogonal de C sur (AB).

Montrer que les triangles BAM et CAN sont semblables.

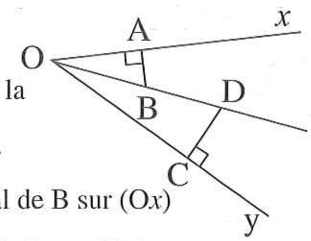
## TRIANGLES SEMBLABLES

**5** $x\hat{O}y$ est un angle aigu.

B et D sont deux points de la bissectrice de l'angle $x\hat{O}y$ .

Soit A le projeté orthogonal de B sur (O$x$) et C le projeté orthogonal de D sur (Oy).

Montrer que les triangles DOC et BOA sont semblables.

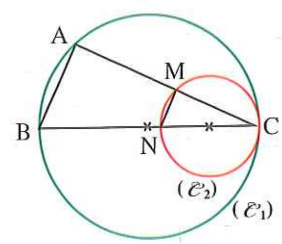



**6** Sur la figure ci-contre :

[BC] est un diamètre de $(\mathscr{C}_1)$.

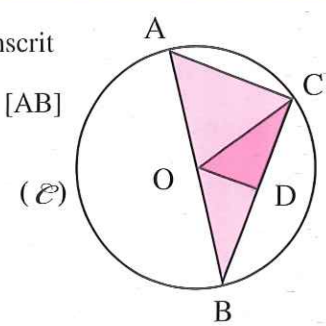
[NC] est un diamètre de $(\mathscr{C}_2)$.

Montrer que les triangles MNC et ABC sont semblables.




**7** ABC est un triangle inscrit dans un cercle de diamètre [AB] et de centre O.

Soit D le projeté orthogonal de O sur (BC).

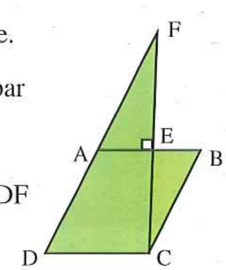



Montrer que les triangles DOC et ABC sont semblables .

**8** ABCD est un parallélogramme.

La perpendiculaire à (AB) passant par C coupe (AB) en E et (AD) en F.

Montrer que les triangles BEC et CDF sont semblables.



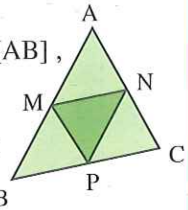
**9** EFG est un triangle isocèle en E tel que : EFG = 72°

La bissectrice de l'angle EGF coupe [EF] en H.

Montrer que les triangles EFG et FGH sont semblables.

**10** ABC est un triangle.

Soit M, N et P les milieux respectifs de [AB] , [AC] et [BC].




*1)* Montrer que les triangles MNP et ABC sont semblables.

*2)* Calculer le rapport de similitude des triangles MNP et ABC.

**11** ABC est un triangle iscocèle en A.

Soit M le milieu de [BC] et E un point de [AM].

La parallèle à (AC) passant par E coupe (BC) en N.

Montrer que les triangles ABM et MEN sont semblables.

## TRIANGLES SEMBLABLES POUR DÉMONTRER

**12** ABC et MNP sont deux triangles tels que :

BC = 9 ; $\widehat{BAC} = 58°$ ; $\widehat{ABC} = 42°$ ; $\widehat{NMP} = 58°$ et $\widehat{MNP} = 80°$

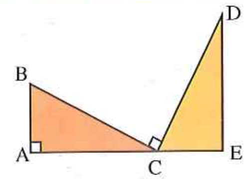
*1)* Montrer que les triangles ABC et MNP sont semblables.

*2)* Calculer PN sachant que : AB = 12 et MP = 10.

**13** Sur la figure ci-dessous :

. A, C et E sont des points alignés.

. (AB)⊥(AE) ; (DE)⊥(AC) et (BC)⊥(CD).

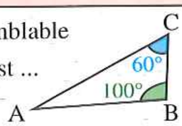
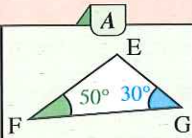
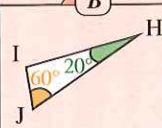
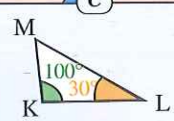
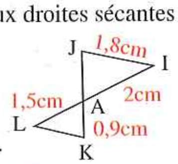



*1)* Montrer que les triangles ABC et CDE sont semblables.

*2)* En déduire que : CA × CE = AB × DE .

## MON BILAN

***1) Indiquer la bonne réponse par A , B ou C :***

| | A | B | C |
|---|---|---|---|
| **1** Un triangle semblable au triangle ABC est ...  |  |  |  |
| **2** IJK est un triangle isocèle en I tel que IJ = 5cm et IK = 4cm. LMN est un triangle semblable à IJK avec J et M homologues, ainsi que k et N . On sait que : MN = 14 cm, Alors ... | LM = 14 cm | LM = 15 cm | LM = 17,5 cm |
| **3** ABC est un triangle tel que : AB = 6cm , BC = 5cm , CA = 9cm un triangle semblable à ABC est le triangle ... | DEF tel que : DE = 8cm EF = 7cm DF = 11 cm | GHI tel que : GH = 12,6cm HI = 8,4cm IG = 7 cm | JKI tel que : JK = 7,2cm KL= 6cm LJ = 9,9 cm |
| **4** FAR et SUN sont deux triangles semblables tels que : $\frac{FA}{UN} = \frac{RA}{US} = \frac{RF}{NS}$ . Alors : | $\widehat{FAR} = \widehat{SUN}$ | $\widehat{AFR} = \widehat{USN}$ | $\widehat{FRA} = \widehat{SNU}$ |
| **5** (JK) et (IL) deux droites sécantes en A et les droites (IJ) et (KL) sont parallèles. Alors ...  | $\widehat{KLA} = \widehat{AJI}$ | AJ = 1,2cm | LK = 1,2cm |



Corrections page : 247

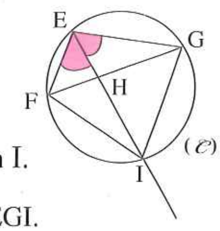
***2) En cas d'erreur, voici quelques conseils :***

| | Savoir | Pratique |
|---|---|---|
| **Ex: 1** | Définition | |
| **Ex: 2** | Propriété 1 | |
| **Ex: 3** | Propriété 4 | |
| **Ex: 4** | Propriété 2 | |
| **Ex: 5** | Propriété 1 | |

***3) Exercices pour la remédiation voir R10 page : 248***

## POUR MONTRER

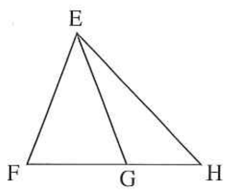
**14** E,F et G sont des points d'un cercle ($\mathscr{C}$).
La bissectrice de l'angle $\widehat{FEG}$ coupe (FG) en H et recoupe ($\mathscr{C}$) en I.




*1)* Comparer les triangles EFH et EGI.

*2)* En déduire que : EF × EG = EH × EI

**15** Sur la figure ci-contre :
EFG est un triangle isocèle en E.
EFH est un triangle isocèle en H.
G un point de [FH].




*1)* Montrer que les triangles EFG et EHF sont semblables.

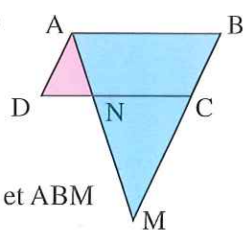
*2)* En déduire que : $EF^2 = EH \times FG$.

**16** ABCD est un parallélogramme tel que :

AB = 8 et AD = 3.

Soit N un point de [DC].

La droite (AN) coupe (BC) en M.




*1)* Montrer que les triangles ADN et ABM sont semblables.

*2)* En déduire que : BM × DN = 24.

**17** ABC est un triangle rectangle isocèle inscrit dans un demi-cercle de diamètre [BC]. Soit M le milieu de [AC].La droite (BM) recoupe le demi-cercle en N. Soit H le projeté orthogonal de N sur [AC].

*1)* Démontrer que les triangles BAM, MNH et MCN sont semblables

*2)*En déduire que : NH = 2MH et CH = 2NH.

**18** ABC est un triangle.
La bissectrice de l'angle $\widehat{BAC}$ coupe [BC] en D.
La parallèle à (AC) passant par B coupe (AD) en E

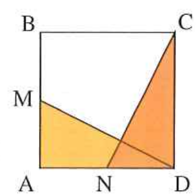
*1)* Démontrer que les triangles DAC et BED sont semblables.

*2)* Montrer que ABE est un triangle isocèle.

*3)* Déduire des deux questions précédentes que : $\frac{DB}{DC} = \frac{AB}{AC}$.

**19** ABC est un triangle.
La médiatrice (Δ) de [BC] coupe [BC] en M.
Soit E le symétrique de A par rapport à (Δ).
Les droites (ME) et (AC) se coupent en N.
La parallèle à (CE) passant par N coupe (BC) en F.
Montrer que : MA × MF = MN × MB.

**20** ABCD est un carré.
Soit M et N les milieux respectifs de [BA] et [AD]

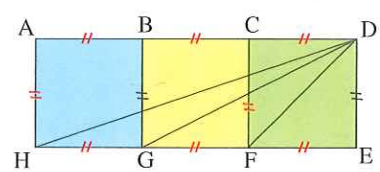



*1 )* Montrer que les triangles DAM et CND sont semblables.

*2 )* En déduire que (CN) et (MD) sont perpendiculaires.

**21** Sur la figure ci-contre : ADEH est un rectangle tel que : AD = 3 et AH = 1.

*1)* Calculer : $\frac{BH}{GF}$, $\frac{DH}{GD}$ et $\frac{BD}{DF}$.




*2)* En déduire une comparaison des triangles BDH et DFG.

*3)* Montrer que : $\widehat{DHE} + \widehat{DGE} = \widehat{DFE}$.

**22** ABC est un triangle tel que :

AB = 30 , BC = 40 et AC = 60

Soit M le milieu de [AB] et N le point de [AC]

tel que : $\widehat{AMN} = \widehat{ACB}$ .

*1)* Calculer AN et MN.

*2)* Montrer que : Aire$\left(MAN\right) = \frac{1}{16}$ Aire$\left(ABC\right)$.

## PROBLÈMES OUVERTS

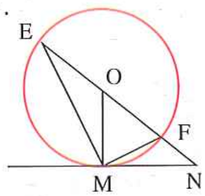
**23** ($\mathscr{C}$) est un cercle de centre O et de diamètre [EF].

Soit M un point de ($\mathscr{C}$) ($M \neq E$ et $M \neq F$) .

La tangente à ($\mathscr{C}$) en M coupe (EF) en N.

*1)* Montrer que les triangles MEN et FMN sont semblables.

*2)* En déduire que : $MN^2 = EN \times FN$.




**24** **AVEC TICE**

Sur la figure ci-contre :

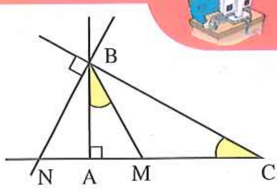
ABC est un triangle rectangle en A et AB < AC.

La perpendiculaire à (BC) en B coupe (AC) en N.

M est un point de [AC] tel que : $\widehat{MBA} = \widehat{ACB}$ .

*1)* Exploiter la dynamisme de logiciel ***Geogebra*** pour conjecturer la position du point A sur [MN] .

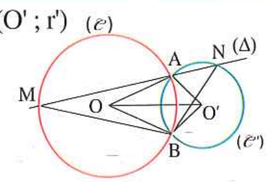
*2)* Montrer que A est le milieu de [MN].




**25** Les cercles $\mathscr{C}(O\,;r)$ et $\mathscr{C}'(O'\,;r')$ se coupent en A et B.

Une droite (Δ) passant par A recoupe ($\mathscr{C}$) en M et ($\mathscr{C}'$) en N.

Montrer que les triangles OAO' et MBN sont semblables.




## CHALLENGES

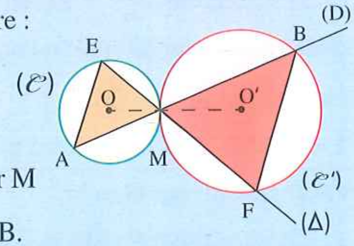
**26** Sur la figure ci-contre :

($\mathscr{C}$) et ($\mathscr{C}'$) sont tangents en M.

Une droite (D) passant par M coupe ($\mathscr{C}$) en A et ($\mathscr{C}'$) en B.

O et O' sont les centres respectifs de ($\mathscr{C}$) et ($\mathscr{C}'$).

Montrer que AME et BMF sont semblables .



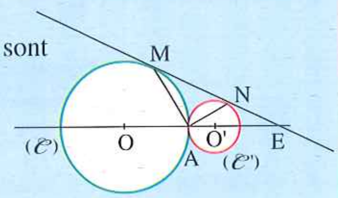

**27** $\mathscr{C}(O\,;r)$ et $\mathscr{C}'(O'\,;r')$ sont deux cercles tangents extérieurement en A.

Soit M un point de ($\mathscr{C}$) et N un point de ($\mathscr{C}'$) tels que (MN) soit une tangente commune aux cercles ($\mathscr{C}$) et ($\mathscr{C}'$).

La droite (MN) coupe (OO') en E.

*1)* Montrer que ANE et AME sont des triangles semblables.

*2)* En déduire que : $AE^2 = ME \times NE$.




**28** Soit ABC un triangle .

Construire un carré MNPQ tel que :

M est un point de [AB] , N est un point de [AC] ,

P est un point de [BC] et Q est un point de [BC] .

## SITUATIONS PROPOSÉES AUX OLYMPIADES

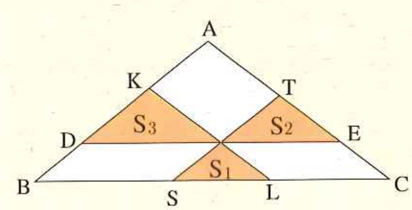
Sur la figue ci-contre, ABC est un triangle tel que :

(KL) // (AC) et (DE) // (BC) et (TS) // (AB) et SL = 6.

*** Calculer BC.**

*** Montrer que :** $\sqrt{S} = \sqrt{S_1} + \sqrt{S_2} + \sqrt{S_3}$

où S est l'aire de ABC et $S_1$ , $S_2$ , $S_3$ sont les aires indiquées sur la figure.



**29 Exercice résolu**

EFG est un triangle tel que :

EF = 8 , EG = 7 et FG = 10.

Soit M un point de [FG] tel que : GM = 4.

Soit P le milieu de [MF].

La parallèle à (EM) passant par P coupe la parallèle à (FG) passant par E en N.

Les droites (NP) et (EF) se coupent en A.

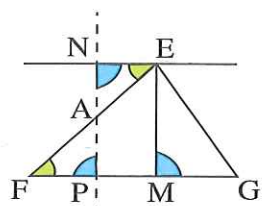
*1)* Montrer que les triangles ANE et MEF sont semblables.

*2)* En déduire que : $\frac{AE}{NE} = \frac{4}{3}$.

**Correction : 29**

***1 )* Montrons que les triangles ANE et MEF sont semblables.**

Considérons la sécante (EF) aux parallèles (NE) et (FG).




Donc : $\widehat{NEA} = \widehat{EFM}$ ❶ (angles alternes-internes).

On a : (NE) // (MP) et (NP) // (EM).

Donc MPNE est un parallélogramme.

Il en résulte que : $\widehat{ENA} = \widehat{EMF}$ ❷ (angles opposés).

De ❶ , ❷ et d'après le premier cas de similitude, les triangles ANE et EMF sont semblables.

***2)* En déduire que** : $\frac{AE}{AF} = \frac{3}{4}$

On sait que ANE et EMF sont des triangles semblables.

Donc les longueurs de leurs côtés homologues sont proportionnelles.

Il en résulte que : $\frac{AN}{EM} = \frac{AE}{EF} = \frac{NE}{MF}$

Par ailleurs : MF = FG – MG = 10 – 4 = 6

(car M est un point de [FG]) et EF = 8)

Donc : $\frac{AE}{8} = \frac{NE}{6}$ et $\frac{AE}{NE} = \frac{8}{6}$

D'où : $\frac{AE}{NE} = \frac{4}{3}$.

**30** ABC est un triangle isocèle en A et ($\mathscr{C}$) son cercle circonscrit.

La bissectrice de l'angle $\widehat{BAC}$ recoupe ($\mathscr{C}$) en E et [BC] en F.

*1)* Montrer que les triangles ABE et CEF sont semblables.

*2)* En déduire que : $BE^2 = EA \times EF$.

**31** EFGH est un rectangle tel que :

EF = 5 et FG = 3 .

Soit M le projeté orthogonal de E sur (FH) .

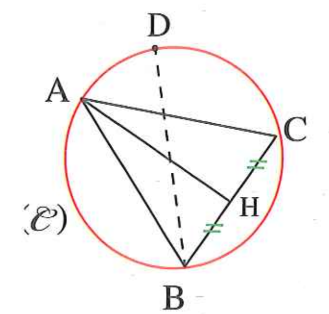
*1)* Comparer les triangles FGH et EMF .

*2)* En déduire la distance MF .

**32** [AB] et [AC] sont deux cordes d'un cercle ($\mathscr{C}$) de rayon 3 telles que : AB = AC.

Soit D le point de ($\mathscr{C}$) diamétralement opposé à B.

Soit H le milieu de [BC].




*1)* Montrer que les triangles CAH et DAB sont semblables.

*2)* En déduire que : $AC^2 = 6AH$.

**33** ABC est un triangle isocèle en A . Soit M le milieu de [BC] et E un point de [AM].

La parallèle à (AC) passant par E coupe (BC) en N.

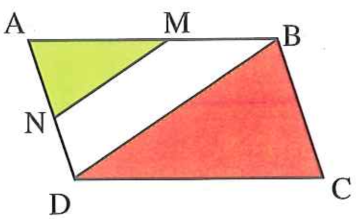
*1)* Montrer que les triangles BAM et MEN sont semblables.

*2)* En déduire que : $\widehat{MEN} = \frac{1}{2}\widehat{BAC}$.

**34** ABCD est un parallélogramme

Soit M un point de [AB].

La parallèle à (DB) passant par M coupe [AD] en N.

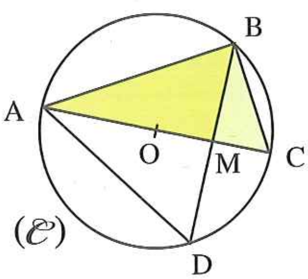



*1)* Montrer que les triangles MAN et BCD sont semblables.

*2)* En déduire que : $AN \times AB = AM \times AD$.

**35** $(\mathscr{C})$ est un cercle de centre O, de diamètre [AC] et de rayon 3. $(\Delta)$ est la médiatrice de [OC].

$(\Delta)$ coupe [OC] en M et le cercle $(\mathscr{C})$ en B et D.




*1)* Montrer que les triangles BMC et BAC sont semblables.

*2)* Calculer alors $DC \times BC$.

**36** ABCD est un parallélogramme.

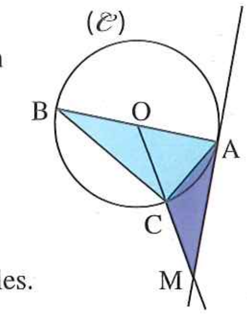
La parallèle à (AC) passant par B coupe (DC) en E et (DA) en F.

Montrer que les triangles ACD et DEF sont semblables.

**37** $(\mathscr{C})$ est un cercle de centre O et de diamètre [AB].

Soit C un point de $(\mathscr{C})$ tel que : $AC = OC$

La tangente au cercle $(\mathscr{C})$ en A coupe (OC) en M.




Montrer que les triangles MAO et ABC sont semblables.

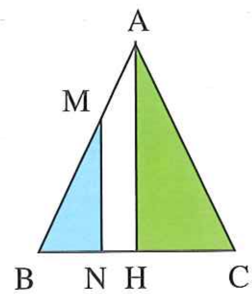
**38** ABC est un triangle isocèle en A tel que :

$AB = 9$ et $BC = 5$

Soit M un point de [AB] tel que : $AM = 3$.

Soit N le projeté orthogonal de M sur (BC).

H est le milieu de [BC].




*1)* Montrer que les triangles CAH et BNM sont semblables.

*2)* En déduire que : $\frac{BN}{2} = \frac{CH}{3}$.

**39** ABC est un triangle isocèle en A tel que :

$AC = 24$ et $BC = 36$.

Soit M un point de [AB] tel que : $AM = 6$.

Soit N un point de [AB] tel que : $BN = 12$.

*1 )* Montrer que BMN et BAC sont des triangles semblables.

*2 )* Calculer le périmètre du triangle BMN.

# ÉQUATIONS ET INÉQUATIONS

## Prérequis :

* Développement et factorisation.
* Équations d'inconnue rationnelle.

## Un point d'histoire

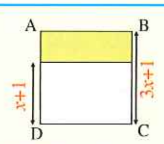
**Al Khawarizmy (780 ; 850)**

AL Khawarizmy a écrit un manuscrit d'algèbre traitant la résolution d'équations. Dans cet ouvrage, il appelle l'inconnue d'une équations *chay'e* qui signifie littéralement «chose».
Les premières traductions en latin ont transcrit phonétiquement ce mot par «xay» . Mais au fil du temps, on a fini pour n'en conserver que l'initiale «$x$» qui deviendra la désignation habituelle de l'inconnue pour les mathématiciens.

## TEST DIAGNOSTIQUE : Je m'évalue

## CHOISIR LA BONNE RÉPONSE.

**Pour chaque question, cocher la bonne réponse en justifiant.**

| | Réponses : | | |
|---|---|---|---|
| Pour $x = -3$ , l'expression $(x-2)(x+3)$ est égale à ...... | $-5$ | $2$ | $0$ |
| L'équation $3x - 7 = 0$ a pour solution ... | $-\frac{7}{3}$ | $\frac{7}{3}$ | $\frac{3}{7}$ |
| $-4$ est la solution de l'équation ... | $\frac{x}{2} = -2$ | $3x - 3 = x + 2$ | $x - 3 = 1$ |
| 5 est une solution de quelle équation ? | $x^2 = 5$ | $x^2 - 25 = 0$ | $x^2 + 2x \times 5 + 5^2 = 0$ |
| ABCD est un carré. L'aire de la surface coloriée est ...  | $(3x+1)(x+1)$ | $(3x+1)^2 - (3x+1)(x+1)$ | $(3x+1)^2 + (x+1)^2$ |
| Si $x + 4 \leq 4x + 2$ , alors ... | $3x \leq 2$ | $2x + 8 \leq 8x + 4$ | $x \geq \frac{-2}{3}$ |
| Si $2x \leq -7$ , alors ... | $2x + 1 \leq -8$ | $x \leq -3,5$ | $-2x \geq -7$ |
| Si $x \leq 7$ , alors ... | $5x + 1 < 35$ | $x - 4 \leq 3$ | $\frac{-x}{3} < \frac{7}{3}$ |
| Quelle valeur de $x$ vérifie $2x + 1 > x$ ... ? | $-2$ | $5$ | $\frac{3}{4}$ |

Solutions page : 246

# ACTIVITÉS : JE DÉCOUVRE

## Activité 1 Résolution d'un problème concret

Le prix d'une place de cinéma est de 35DH pour un adulte et de 20 DH pour un enfant.

100 personnes ont vu le film et payé au total 2720 Dh.

Déterminer le nombre d'enfants parmi ces 100 personnes.

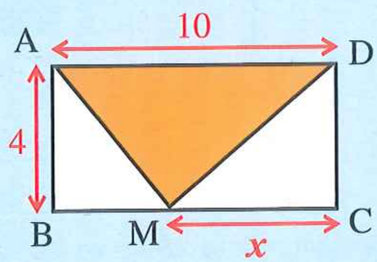
## Activité 2 Utilisation des équatiuons pour résoudre un problème géométrique

1. On considère l'expression E : $E = (x - 2)(x - 8)$.

   Développer et réduire l'expression E.

2. Soit ABCD un rectangle tel que : $AB = 4$ et $AD = 10$.

   Soit M un point de [BC] tel que : $MC = x$.




Déterminer $x$ pour que le triangle MAD soit rectangle en M.

## Activité 3 Utilisation des inéquatiuons pour résoudre un problème

Une bibliothèque propose à ses lecteurs, pour l'emprunt d'un livre, le choix entre deux tarifs annuels.

**Tarif 1 :** abonnement annuel de 450 DH plus 5 DH par livre emprunté.

**Tarif 2 :** 15 DH par livre sans abonnement.

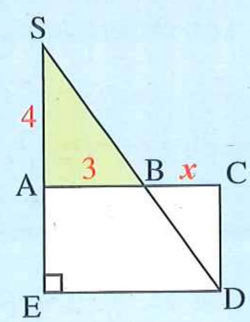
A partir de quel nombre de livres le **tarif 1** est-il plus avantageux?

## Activité 4 Résolution d'un problème géométrique en utilisant les inéquations

Sur la figure ci-contre:

- ACDE est un rectangle
- B est un point de [AC] , $AS = 4$ cm , $BC = x$ cm et $AB = 3$ cm.

Pour quelles valeurs de $x$ l'aire du triangle BAS est- elle inférieure à l'aire du rectangle ACDE ?



# SAVOIR
## Je révise

## 1 ÉQUATION DU PREMIER DEGRÉ À UNE INCONNUE

**Définition 1** On appelle **équation du premier degré à une inconnue $x$** toute équation qui peut s'écrire sous la forme : $\mathbf{ax + b = 0}$ où a et b sont deux réels donnés.

Résoudre une équation c'est trouver toutes les solutions.

**Exemples :** Résolvons les équations suivantes :

*1)* $x\sqrt{3}+2=x\sqrt{27}+1$

$(\sqrt{3}-\sqrt{27})x=-1$

$(\sqrt{3}-3\sqrt{3})x=-1$

$-2\sqrt{3}\,x=-1$

$x=\dfrac{1}{2\sqrt{3}}$

$x=\dfrac{\sqrt{3}}{6}$

$\dfrac{\sqrt{3}}{6}$ est la solution unique de cette équation.

*2)* $\dfrac{x-2}{4}-\dfrac{x}{6}=1-\dfrac{4-x}{12}$

$\dfrac{3(x-2)}{12}-\dfrac{2x}{12}=\dfrac{12}{12}-\dfrac{(4-x)}{12}$

$3x-6-2x=12-4+x$

$x-6=8+x$

$0x=14$

$0=14$ impossible

L'équation proposée n'a pas de solution.

*3)* $(x-2)(x-1)-5=x(x-2)-(3+x)$

$x^2-x-2x+2-5=x^2-2x-3-x$

$x^2-3x-3=x^2-3x-3$

$x^2-3x-x^2+3x=-3+3$

$0x=0$ ;

ceci est vraie pour tout réel $x$.

Tous les nombres réels sont solutions de cette équation.

## 2 ÉQUATION DE LA FORME $(ax+b)(cx+d)=0$

**Propriété 1** Un produit de facteurs est nul si et seulement si l'un au moins des facteurs est nul.

**Autrement dit :** $\alpha$ et $\beta$ sont deux nombres réels : $\alpha\times\beta=\mathbf{0}$ signifie : $\alpha=\mathbf{0}$ **ou** $\beta=\mathbf{0}$.

**Propriété 2** a , b et c sont des nombres réels.

Les solutions de l'équation $(ax+b)(cx+d)=0$ sont les solutions des deux équations : $ax+b=0$ et $cx+d=0$.

**Exemple :** Résolvons l'équation : $(x\sqrt{2}-3)(-x+\sqrt{3})=0$

On a : $(x\sqrt{2}-3)(-x+\sqrt{3})=0$

c'est-à-dire : $x\sqrt{2}-3=0$ ou $-x+\sqrt{3}=0$

$$x\sqrt{2} - 3 = 0 \quad \text{ou} \quad -x + \sqrt{3} = 0$$

$$x = \frac{3}{\sqrt{2}} \quad \text{ou} \quad x = \sqrt{3}$$

$$x = \frac{3\sqrt{2}}{2} \quad \text{ou} \quad x = \sqrt{3}$$

Cette équation admet donc deux solutions : $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ et $\sqrt{3}$ .

## 3 INÉQUATION DU PREMIER DEGRÉ À UNE INCONNUE

**Définition 2**

On appelle **inéquation du premier degré à une inconnue *x*** toute inéquation qui peut s'écrire sous la forme : $\mathbf{a}x+\mathbf{b} \leq \mathbf{0}$ **ou** $\mathbf{a}x+\mathbf{b} < \mathbf{0}$ , où a et b sont deux réels donnés.

Résoudre une inéquation, c'est déterminer toutes ses solutions.

**Exemples :** Résolvons les inéquations suivantes :

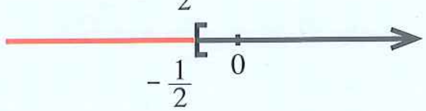
*1)* $4x + 3 < 1$

$$4x < 1 - 3$$

$$x < -\frac{2}{4}$$

$$x < -\frac{1}{2}$$

Les solutions de cette inéquation sont les nombres réels strictement inférieurs à $-\frac{1}{2}$.

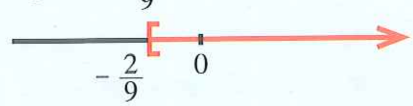



*2)* $-2x \leq \frac{4}{9}$

$$x \geq \frac{4}{9} \times \left(\frac{-1}{2}\right) \quad (\text{car } \frac{-1}{2} < 0)$$

$$x \geq \frac{-2}{9}$$

Les solutions de cette inéquation sont les nombres réels supérieurs ou égaux à $-\frac{2}{9}$ .




## 4 MISE EN ÉQUATION OU EN INÉQUATION D'UN PROBLÈME

**Pour résoudre un problème, on respecte les étapes suivantes:**

1. Choix de l'inconnue.
2. Mise en équation ou en inéquation (on traduit chaque donnée en fonction de l'inconnue) .
3. Résolution de l'équation ou de l'inéquation.
4. Vérification et interprétation du résultat.

## 1 RÉSOUDRE UNE ÉQUATION EN FACTORISANT

**Exemple 1** Résoudre chacune des équations suivantes :

1. $(x\sqrt{2}-1)^2 - 4x^2\sqrt{2} + 4x = 0$.
2. $9x^2 - 12 + 4 = 3$.

**1 Résolution de l'équation : $(x\sqrt{2}-1)^2 - 4x^2\sqrt{2} + 4x = 0$.**

Si un facteur commun existe, ça ne peut être : $x\sqrt{2}-1$

Ainsi l'équation devient :

$$(x\sqrt{2}-1)^2 - 4x(x\sqrt{2}-1) = 0$$
$$(x\sqrt{2}-1)\left[(x\sqrt{2}-1) - 4x\right] = 0$$
$$(x\sqrt{2}-1)\left[(\sqrt{2}-4)x - 1\right] = 0$$

Ce produit est nul lorsque :

$$x\sqrt{2}-1 = 0 \quad \text{ou} \quad (\sqrt{2}-4)x - 1 = 0$$
$$x\sqrt{2} = 1 \quad \text{ou} \quad (\sqrt{2}-4)x = 1$$
$$x = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{ou} \quad x = \frac{1}{\sqrt{2}-4}$$
$$x = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{ou} \quad x = \frac{-4-\sqrt{2}}{14}$$

Donc les solutions de l'équation sont : $\frac{\sqrt{2}}{2}$ et $-\frac{2}{7} - \frac{\sqrt{2}}{14}$.

**2 Résolution de l'équation : $9x^2 - 12x + 4 = 3$.**

On constate que le premier membre de cette équation est une identité remarquable de la forme : $\mathbf{a^2 - 2ab + b^2}$.

L'équation devient : $(3x-2)^2 = (\sqrt{3})^2$

On sait que : $a^2 = b^2$ signifie que $a = b$ ou $a = -b$.

Donc :

$$3x - 2 = \sqrt{3} \quad \text{ou} \quad 3x - 2 = -\sqrt{3}$$
$$3x = 2 + \sqrt{3} \quad \text{ou} \quad 3x = 2 - \sqrt{3}$$
$$x = \frac{2+\sqrt{3}}{3} \quad \text{ou} \quad x = \frac{2-\sqrt{3}}{3}$$

D'où les solutions de l'équation sont : $\frac{2+\sqrt{3}}{3}$ et $\frac{2-\sqrt{3}}{3}$.

## 2 RÉSOUDRE UN PROBLÈME

**Exemple 2**

La somme des âges d'une personne P, de sa mère et de sa grand-mère est 135 ans.
La grand-mère a le triple de l'âge de la mère et l'âge de P est la moitié de celui de la mère .
Quel est l'âge de chacune de ces personnes ?

**1** ***Choix de l'inconnue :*** Soit $x$ l'âge de la mère. contraire de l'age : $x$ doit être strictement positif.

> Bien souvent l'énoncé du problème impose des contraintes concernant l'inconnue

**2** ***Mise en équation :*** L'âge de la grand-mère est $3x$.

L'âge de la personne P est $\frac{1}{2}x$ on obtient l'equation $x + 3x + \frac{1}{2}x = 135$

**3** ***Résolution de l'équation :*** $x + 3x + \frac{1}{2}x = 135$

Donc : $4x + \frac{1}{2}x = 135$

$$\frac{8x + x}{2} = \frac{270}{2}$$

$$9x = 270$$

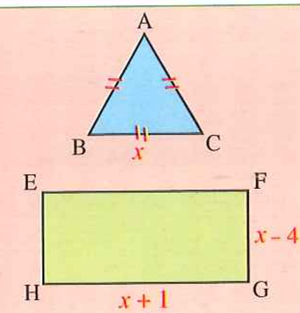
$$x = 30.$$

**4** ***Retour au problème (vérification)*** $30 + 3 \times 30 + \frac{1}{2} \times 30 = 30 + 90 + 15 = 135$

**Conclusion :** L'âge de la mère est 30 ans, celui de la grand-mère est 90 ans et P a 15 ans.

**Exemple 3**

ABC est un triangle équilatéral de côté $x$.
EFGH est un rectangle (voir figure).
$x$ est un réel strictement supérieur à 4.
Déterminer les valeurs de $x$ pour lesquelles le périmètre du rectangle est strictement inférieur à celui du triangle.




Le périmètre du rectangle EFGH est : $2\left[(x + 1) + (x - 4)\right] = 2(2x - 3) = 4x - 6.$

Le périmètre du triangle ABC est : $3x$ .

On obtient ainsi l'inéquation : $4x - 6 < 3x$

donc : $4x - 3x < 6$ c'est-à-dire : $x < 6$

Comme $4 < x$ , alors les valeurs que peut prendre $x$ sont strictement comprises entre 4 et 6 : $4 < x < 6$.

### VÉRIFIER UNE SOLUTION

**1** $-3$ est-il solution de l'équation : $-2x + 1 = x - 7$ ?

**2** 2 est-il solution de l'équation :

$$2x - 1 - (x + 2) = x - 4 - 2(x + 1) ?$$

**3** Déterminer la valeur de a sachant que $-2$ est solution de l'équation : $ax^2 - 2(a + 2)x - (2a + 5) = 0$

**4** Quels sont parmi les nombres $-\frac{2}{3}$, $-1$, $0$, $3$, $4$ et $\frac{10}{3}$ ceux qui sont solutions de l'inéquation :

$$3x - 2 < x + 4 \ ?$$

**5**
*1)* Résoudre l'inéquation : $2x + 3 < x - 4$
*2)* Donner trois solutions.

**6** *1)* Résoudre l'inéquation : $x\sqrt{5} - 2 < 3x + \sqrt{5}$
*2)* Déterminer les nombres entiers négatifs solutions de cette inéquation.
*3)* $-3 - \sqrt{5}$ est-il solution de cette inéquation ?.

**7** Déterminer les valeurs de m pour que $-2$ soit solution de l'inéquation : $m(-x + 3) + 2 < mx - m$

### ÉQUATIONS

**8** Résoudre les équations suivantes :

*1)* $x - 3 = -4$ *2)* $8x + 2 = 0$
*3)* $5 - 3 = -4$ *4)* $-5x = -8$
*5)* $-x = 9x + 3$ *6)* $11 = 2x + 1$

**9** Résoudre les équations suivantes :

*1)* $\frac{2}{3}x - 5 = -x + \frac{4}{3}$
*2)* $4x - \frac{1}{2} = x - \frac{5}{4}$
*3)* $\frac{x+1}{9} - 3 = \frac{3x-2}{6} - \frac{7}{4}$

**10** Résoudre les équations suivantes:

*1)* $4x - 3 = \sqrt{6} + 2x$ *2)* $x\sqrt{2} - 3 = 4$
*3)* $\sqrt{3}(x - 1) = 3\sqrt{3}$ *4)* $x\sqrt{20} + \sqrt{45} = 0$
*5)* $-2\sqrt{3} + 7x = 3(x - 4\sqrt{2})$ *6)* $x\sqrt{12} - \sqrt{27} = x\sqrt{75}$

**11** Résoudre les équations suivantes :

*1)* $\frac{x}{18} - \frac{x}{12} - 1 = \frac{x}{9} + \frac{1}{3}$
*2)* $\frac{4x-1}{4} \quad \frac{x+2}{4} = \frac{x-3}{2} - 1$
*3)* $\frac{2(x-1)}{14} + \frac{x+3}{21} = \frac{x+1}{7} - \frac{3(x+1)}{9}$

**12** Résoudre les équations suivantes :

*1)* $2 - 3(\sqrt{3} + x) = 4(2\sqrt{3} - x)$
*2)* $(\sqrt{3} - 1)x + \sqrt{2} = (\sqrt{3} + 1)x - \sqrt{2}$
*3)* $x\sqrt{3} + (1 + \sqrt{2})x - x\sqrt{2} = \sqrt{3} - \sqrt{2}$
*4)* $x\sqrt{3} + \sqrt{3} = x\sqrt{6} + 2\sqrt{2}\,(3 - \sqrt{3})$
*5)* $3x - \sqrt{5} = x\sqrt{18} + 2\sqrt{3} - (4 + \sqrt{5})$
*6)* $(1 - \sqrt{7})(x + 2) = x - (2 + \sqrt{7})^2$

**13** Résoudre les équations suivantes :

*1)* $3(x - 1) + 1 - 5x = 7 - 2(x + 4)$
*2)* $\frac{1}{12}(5x - 2) + \frac{3}{4}(2 + x) = 2 - \frac{1}{3}(x + 2)$
*3)* $\frac{4x-3}{3} + \frac{x+3}{2} = 3 - \frac{5}{6}x$

### INÉQUATIONS

**14** Résoudre les inéquations suivantes :

*1)* $(4x - 3) - (x + 6) < 2$
*2)* $8(x - 2) + 5(0{,}3 + 2x) \leq 0$
*3)* $15 - 3(4 + x) - 6x > -10$
*4)* $7 - (3x + 2) \leq 5x - 2(x + 1)$
*5)* $4 + 2(x - 3) \leq 3x - (6 - 3x)$
*6)* $2(x - 1) - 3(x + 2) < 4(x - 3) + (x + 1)$

**15** Résoudre les inéquations suivantes et représenter graphiquement les solutions :

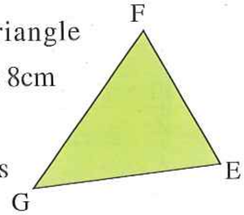
1) $\frac{3}{7}x \leq -\frac{2}{3}$

2) $\frac{x}{3} - \frac{5}{2} + \frac{7x}{6} > 0$

3) $\frac{5x+1}{15} - \frac{x+1}{1} \leq \frac{x}{6} - \frac{x+1}{10}$

4) $2 - \frac{x+1}{4} \geq 4 + \frac{x-2}{8}$

**16** Les côtés [EF] et [FG] d'un triangle EFG ont respectivement 6 cm et 8cm de longueur.
Déterminer les longueurs possibles pour le côté [EG].




**17** Résoudre les inéquations suivantes :

1) $x-2 \leq 3$

2) $8x+2 \geq 10x$

3) $-4x < 5$

4) $2x-1 > x+2$

5) $2x+7 \leq 1$

6) $-6x+2 > -x+3$

**18** Résoudre les inéquations suivantes et représenter graphiquement les solutions :

1) $3x - 4\sqrt{3} \leq \sqrt{3}$

2) $2x > \sqrt{2} - 1$

3) $2x\sqrt{5} \geq -9$

4) $\sqrt{6} - 3x \leq 4$

5) $x\sqrt{2} - \sqrt{2} < 3x - 1$

6) $\sqrt{3}(x+2) \geq 2x - 1$

**19**

1) Résoudre l'inéquation : $4(x-1) < 2x+8$

2) Résoudre l'inéquation : $4x+1 > 2x-2$

3) Résoudre l'inéquation : $(2x-1)(2-3x) > 0$

**20**

1) Résoudre l'inéquation : $4x-6 > 5x-4$

2) Résoudre l'inéquation : $2x-1 < 4x-2$

3) Résoudre l'inéquation : $(2x-1)^2 - x^2 < 0$

**21**

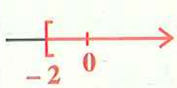
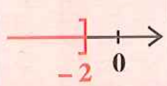
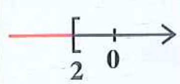
1)a. Résoudre l'inéquation suivante : $-3x+4 > -2$

b. Résoudre l'inéquation suivante : $4x-5 \geq -3$

2) Résoudre le système suivant : $\begin{cases} -3x+4 > -2 \\ 4x-5 \geq -3 \end{cases}$

## MON BILAN

***1) Indiquer la bonne réponse par A , B ou C :***

| | A | B | C |
|---|---|---|---|
| 1 L'équation : $(2x : 3) - (5x - 1) = 0$ a pour solution(s) ... | $-\frac{3}{2}$ et $\frac{1}{3}$ | $\frac{4}{3}$ | $-\frac{3}{2}$ et $\frac{1}{3}$ |
| 2 L'équation $(3x-5)(2x+10) = 0$ a pour solution(s) ... | $\frac{11}{5}$ | $-\frac{5}{3}$ et $5$ | $-\frac{5}{3}$ et $5$ |
| 3 L'équation $(x+3)^2 = 4$ a pour solution(s) ... | $-1$ | $-5$ | $-1$ et $-5$ |
| 4 L'équation $(x+1)^2 - 2(x^2-1)^2 = 0$ pour solution(s) ... | $-1$ et $3$ | $-1$ et $-3$ | $-1$ |
| 5 Les solutions de l'inéquation : $2x+1 \leq 4x-2$ sont toutes les valeurs de $x$ vérifiant ... | $x \leq \frac{3}{2}$ | $x \geq \frac{3}{2}$ | $x \leq -\frac{3}{2}$ |
| 6 Les solutions de l'inéquation : $8x+5 \leq 5x-1$ sont toutes les valeurs de $x$ vérifiant ... |   |   |   |
| 7 "Il y a inq ans, j'avais la moitié de l'âge que j'aurai dans cinq ans. Quel est mon âge?" Ce problème peut se mettre en équation ainsi ... | Si $x$ désigne son âge il y a 5ans : $2x = x + 10$ | Si $x$ désigne son âge actuel : $2x = x + 10$ | Si $x$ désigne son âge dans : $x = 2(x-5)$ |

Corrections page : 247

***2) En cas d'erreur, voici quelques conseils :***

| | Savoir | Pratique |
|---|---|---|
| Ex: 1 | Exemple 1 | |
| Ex: 2 | Exemple 2 | |
| Ex: 3 | | Exemple 1 |
| Ex: 4 | | Exemple 1 |
| Ex: 5 | Exemple 3 | |
| Ex: 6 | Exemple 3 | |
| Ex: 7 | | Exemple 2 |

***3) Exercices pour la remédiation voir R11 page : 249***

# APPROFONDISSEMENT
## Je recherche

### INÉQUATIONS

**22** Représenter sur une droite graduée les solutions des inéquations suivantes :

*1)* $x-5<0$ *2)* $x+8\geq 12$ *3)* $6x\geq 4$ *4)* $-\frac{7}{3}x>2$

**23** Résoudre les systèmes d'inéquations suivants :

*1)* $\begin{cases} 5x+2<2x-3 \\ x-8>3x-4 \end{cases}$ *2)* $\begin{cases} \frac{x-3}{6}-\frac{x+2}{4}\leq\frac{x-1}{3} \\ \frac{x+2}{9}-\frac{x+1}{2}\leq x+\frac{1}{4} \end{cases}$

**24** *1)* Résoudre l'inéquation : $2(x-1)\geq 3(x+2)$

*2)a.* Résoudre l'inéquation :

$$(x\sqrt{2}-2)(x-1)-(x\sqrt{2}-2)(2-x)<0$$

*b-* Résoudre l'inéquation : $x^2-9>2x-6$

### EQUATIONS DE TYPE COMPOSÉ

**25** Résoudre les équations suivantes :

*1)* $(-x+2)(2x+3)=0$ *2)* $-4x(x-4)=0$

*3)* $(\frac{x}{3}-2)(2x+\frac{1}{4})=0$ *4)* $x^2+4=0$

*5)* $(8-7x)^2=0$ *6)* $(x\sqrt{2}-\sqrt{3})(3x-\sqrt{6})=0$

**26** Résoudre les équations suivantes :

*1)* $(x+3)^2=(x+3)(x-2)$

*2)* $6x^2-x=0$

*3)* $9x^2-25=0$

*4)* $(x-2)(2x-1)=(x-2)(3x+2)$

*5)* $9x^2-4-3(3x-2)-x(3x-2)=0$

*6)* $(x-3)(2x+1)-(x-3)(5x+6)+x^2-9=0$

**27** Résoudre les équation suivantes :

*1)* $(8x-1)(x+4)-(1-8x)(2x-3)=0$

*2)* $(x-5)(2x-4)=20$

*3)* $(5x-2)^2=(3x-2)(6-15x)$

*4)* $(4x-3)_2-9(x+1)_2+2x_2-12x=0$

*5)* $x^3-x=4x^2-4$

*6)* $2x^2-2x\sqrt{6}+3=8x^2-12$

**28** **AVEC TICE**

$x$ est un nombre réel.

*1)a.* Montrer que : $x^2-5x-6=(x+1)(x-6)$

*b.* En déduire la résolution de l'équation : $x^2-5x-6=0$

*2)* Retrouver les solutions de l'équation demandée en utilisant l'outil "Résoudre (< Equation >)" de ***Geogebra***.

**29** $x$ est un nombre réel.

*1)* Montrer que : $x^2-9x=(x-\frac{9}{2})^2-\frac{81}{4}$.

*2)* En déduire la résolution de l'équation : $x^2-9x+20=0$

**30** $x$ est un nombre réel.

*1)a.* Montrer que : $3x^2-2x=\left(x\sqrt{3}-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2-\frac{1}{3}$

*b.* En déduire la résolution de l'équation :

$$3x^2-2x-1=0.$$

*2)a.* Vérifier que : $3x^2-2x-1=3x^2-3x+x-1$

*b.* En déduire de nouveau la résolution de l'équation :

$$3x^2-2x-1=0.$$

**31** Résoudre les équations suivantes :

*1)* $x^2-7x+12=0$ *2)* $x^2+8x-12=0$

*3)* $-3x^2-9x-12=0$ *4)* $4x^2-4x-15=0$

**32** Un élève a obtenu 12 et 16 aux deux premiers contrôles de Maths.

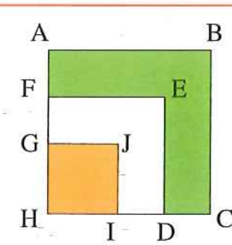
Quelle note doit-il avoir au troisième contrôle pour obtenir 15 de moyenne ?

**33** Sur la figure ci-contre :

Les quadrilatères ABCH , DEFH et IJGH sont des carrés.

On donne :

AF = FG = 5cm et FH = $x$ .




Calculer le périmètre du polygone ABCDEF sachant que les aires des surfaces coloriées sont égales .

## PROBLÈMES OUVERTS

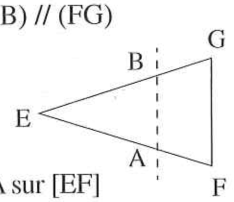
**34** Sur la figure ci-contre: (AB) // (FG)

EF = 6cm ; EG = 8cm

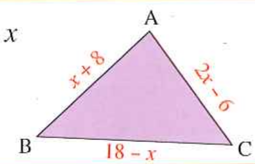
A un point de [EF]

B un point de [EG]

Déterminer la position du point A sur [EF] pour que : EA = BG.




**35** Déterminer les valeurs de $x$ pour lesquelles le triangle ABC est constructible.




**36** Un parc de loisirs propose plusieurs tarifs :

**Tarif 1** : 70DH par entrée.

**Tarif 2** : un abonnement de 350DH puis 45DH par entrée.

*1)* À partir de combien d'entrées le tarif 2 est-il plus avantageux que le tarif 1 ?

*2)* Ce parc propose a ussi un **tarif 3** : un abonnement annuel de 1430DH pour un nombre illimité d'entrées.

À partir de combien d'entrées le tarif 3 est-il plus avantageux que le tarif 2 ?

**37** Résoudre les équations suivantes :

*1)* $x-\sqrt{x^2+3} = -3$ *2)* $\sqrt{x^2+x-2} = x+3$

*3)* $1+\sqrt{(4x-3)(x+3)} = 3x$ *4)* $\sqrt{x+3}-\sqrt{x-2} = 1$

**38** Déterminer trois nombres entiers consécutifs dont la somme de leurs carrés est 974.

## CHALLENGES

**39** L'âge d'un père est le double de celui de son fils. Il y a 12 ans, l'âge du père était le triple de celui de son fils. Déterminer l'âge du fils.

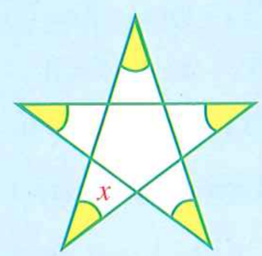
**40** Une personne achète 12 assiettes plates, 6 assiettes creuses et 6 assiettes à dessert. Une assiette creuse coûte 2DH de moins qu'une assiette plate.

Une assiette à dessert coûte 5DH de moins qu'une assiette plate.

Elle dépense en tout 540DH.

Quel est le prix de chaque sorte d'assiette ?

**41** On considère une étoile régulière à cinq branches (figure). Déterminer l'angle indiqué sur la figure.



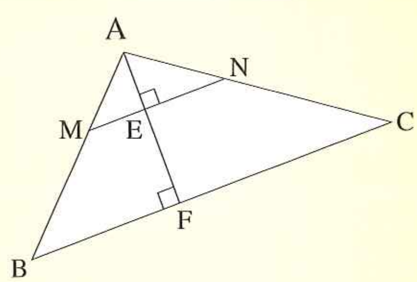

## SITUATIONS PROPOSÉES AUX OLYMPIADES

ABC est un triangle tel que : AB = 2 , BC = 4 et AC = 3.

M est un point de [AB]. On pose AM = $x$ .

La parallèle à (BC) passant par M coupe (AC) en N.

Déterminer $x$ pour que l'aire du triangle AMN soit égale à celle du trapèze BMNC.



## 42 Exercice résolu

*1)a.* Résoudre les deux équations :
$(E_1) : x-\sqrt{3}=0$ et $(E_2) : \sqrt{3}x-1=0$

*b.* Vérifier que : $(\sqrt{3}x-1)(x-\sqrt{3})=\sqrt{3}x^2-4x+\sqrt{3}$

*c.* En déduire la résolution de l'équation :
$(E) : \sqrt{3}x^2-4x+\sqrt{3}=0$

*2)* Résoudre l'inéquation :
$(I) : \dfrac{x-1}{2}-\dfrac{2x+3}{2}\leq\dfrac{x}{6}$

### Correction : 42

*1)a.* • L'équation s'écrit $x-\sqrt{3}=0$ s'écrit : $x=\sqrt{3}$
Donc $\sqrt{3}$ est la solution de l'équation $(E_1)$.
• L'équation $\sqrt{3}x-1=0$ s'écrit : $\sqrt{3}x=1$

$$x=\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$x=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

Donc $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ est la solution de l'équation $(E_2)$.

*b.* On a : $(\sqrt{3}x-1)(x-\sqrt{3})=\sqrt{3}x^2-3x-x+\sqrt{3}$
$=\sqrt{3}x^2-4x+\sqrt{3}$

Donc : $(\sqrt{3}x-1)(x-\sqrt{3})=\sqrt{3}x^2-4x+\sqrt{3}$

*c.* On a : $\sqrt{3}x^2-4x+\sqrt{3}=0$

Donc : $(\sqrt{3}x-1)(x-\sqrt{3})=0$

(d'après la question ***b.***)

c'est-à-dire : $\sqrt{3}x-1=0$ ou $x-\sqrt{3}=0$

D'après la question ***1)a.***, $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ et $\sqrt{3}$ sont les solutions de l'équation (E).

***2)* Résolution de l'inéquation (I) :**

$$\frac{x-1}{2}-\frac{2x+3}{2}\leq\frac{x}{6}$$

$$\frac{3(x-1)}{6}-\frac{3(2x+3)}{6}\leq\frac{x}{6}$$

$$3x-3-6x-9\leq x$$

$$-3x-12\leq x$$

$$-3x-x\leq 12$$

$-4x\leq 12$ c'est-à-dire $\dfrac{-4x}{-4}\geq\dfrac{12}{-4}$

Donc : $x\geq -3$

Les solutions de l'inéquation (I) sont les réels supérieurs ou égaux à $-3$

## 43 Exercice résolu

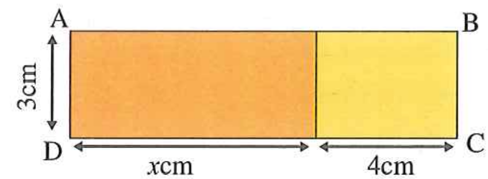
I. On considère l'expression : $A=x^2-6x+5$

*1)* Vérifier que : $A=(x-3)^2-4$.

*2)* Montrer que : $A=(x-1)(x-5)$.

*3)* En déduire les solutions de l'équation : $x^2-6x+5=0$

II. On considère la figure suivante :
(où ABCD est un rectangle)




Déterminer la valeur du nombre réel $x$ sachant que l'aire de rectangle ABCD est $36cm^2$.

III. Résoudre l'inéquation : $3x+12\leq 36$

### Correction : 43

I.*1)* On a $(x-3)^2-4=x^2-6x+9-4$
$=x^2-6x+5$

Or : $A=x^2-6x+5$,
alors : $A=(x-3)^2-4$.

*2)* On a : $A=(x-3)^2-4$
$A=(x-3)^2-2^2$
$=(x-3+2)(x-3-2)$
$=(x-1)(x-5)$

Donc : $A=(x-1)(x-5)$.

**Ou bien** $(x-1)(x-5)=x^2-5x-x+5$
$=x^2-6x+5$

Or : $A=x^2-6x+5$,
alors : $A=(x-1)(x-5)$.

# JE ME PRÉPARE À L'EXAMEN RÉGIONAL

*3)* On a : $x^2 - 6x + 5 = 0$

s'écrit : $(x - 1)(x - 5) = 0$

$x - 1 = 0$ ou $x - 5 = 0$.

Donc, $x = 1$ ou $x = 5$

D'où , les solutions de cette équation sont 1 et 5.

**II .** On sait que l'aire du rectangle ABCD est $36\text{cm}^2$.

Donc : Aire ABCD = 36.

$AD \times DC = 36$

$3(x + 4) = 36$

$x + 4 = 12$

Donc : $x = 8$ cm.

**III. Résolution de l'inéquation : $3x + 12 \leq 36$ .**

On a : $3x + 12 \leq 36$

$3x \leq 36 - 12$

$3x \leq 24$

$\frac{3x}{3} \leq \frac{24}{3}$

Donc : $x \leq 8$.

D'où, les solutions de l'inéquation proposée sont les réels inférieurs ou égaux à 8.

**44**

*1)* Résoudre les équations :

*a.* $2x - 4 = 6$ ; *b.* $(x - 1)(2x + 5) + 3(x - 1) = 0$

*2)* Résoudre l'inéquation et représenter les solutions sur une droite graduée : $1 - 3x \leq -x + 7$ .

**45**

*1)a.* Résoudre l'équation : $5x + 2 = 3 - x$

*b.* En déduire les solutions de l'équation :

$5x^2 + 2 = 3 - x^2$.

*2)* Résoudre l'inéquation suivante et représenter les solutions sur une droite graduée :

$5x+2 < 3 - x$ .

**46**

*1)* Résoudre l'inéquation : $2x - 3 \geq -5x + 11$ .

*2)a.* Résoudre l'équation : $(x - 3\sqrt{3})(x - \sqrt{3}) = 0$.

*b.* Montrer que : $(x - 2\sqrt{3})^2 - 3 = (x - 3\sqrt{3})(x - \sqrt{3})$ .

*c-* En déduire les solutions de l'équation :

$(x - 2\sqrt{3})^2 - 6x = 3(1 - 2x)$.

**47**

*1)* Résoudre l'équation : $9x + 8 = 5(x + 4)$ .

*2)* Résoudre l'inéquation : $5x - 11 \geq -2x + 24$ .

*3)* Résoudre l'équation : $(2x + 1)^2 - (8x + 4) = 0$ .

**48**

*1)* Résoudre les équations : **a.** $7(x - 3) = 4(3 - x)$

**b.** $(4x - 1)^2 = 3(4x - 1)$ .

*2-* Résoudre l'inéquation : $2(x - 1) - 3(x + 2) \leq 0$

**49**

*1)* Résoudre les équations suivantes :

*a.* $3x - 1 = 2x - 3$ *b.* $x^2 - 1 = 24$

*2)* On considère l'inéquation : $3(x - 1) > -3x - 5$ .

*a.* 0 est-il une solution de cette inéquation? Justifier.

*b.* Déterminer les solutions de cette inéquation.

**50**

*1)* Résoudre les deux équations :

*a.* $\sqrt{5}x - 2 = \sqrt{5} - 2$

*b.* $x(x - 2) + (x - 2)(-2x + 1) = 0$

*2)* Résoudre l'inéquation :

$\frac{x}{2} + \frac{x - 3}{4} \leq 3$ .

**51**

*1)* Résoudre les deux équations :

*a.* $5x - 2 = 3x - 4$ *b.* $(2x + 6)^2 - x^2 = 0$

*2)* Résoudre les deux inéquations :

*a.* $5x + 15 \leq 5$ *b.* $2x + 5 > 6(x + 1) + 3$

# TRANSLATION ET VECTEURS

## Prérequis :

* Parallélogramme.
* Translation.

## Un point d'histoire

**Michel Chasles (1793 ; 1880)**

M. Chasles est un mathématicien français. On lui doit d'importants travaux en géométrie projective où il a introduit le rapport anharmonique ou birapport. Son nom est attaché à la relation de Chasles. Par ailleurs, il a inventé le terme d'homothétie. Il travailla aussi sur les homographies.

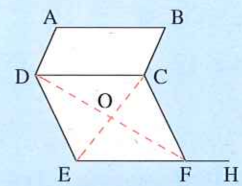
## TEST DIAGNOSTIQUE : Je m'évalue

## CHOISIR LA BONNE RÉPONSE.

**Pour chaque question, cocher la bonne réponse en justifiant.**

Sur la figure, ABCD et CDEF sont deux parallélogrammes.

Utiliser cette figure pour répondre aux questions suivantes.

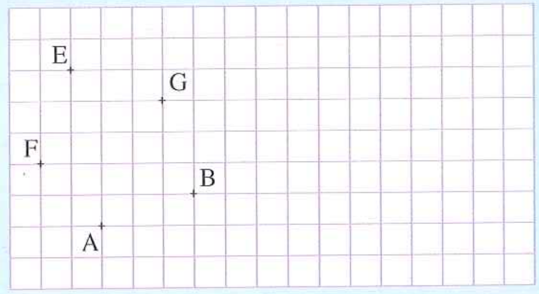



| | Réponses : | | |
|---|---|---|---|
| Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{HE}$ ont même ... | sens | norme | direction |
| Le vecteur $\overrightarrow{DE}$ et égal à ... | $\overrightarrow{BF}$ | $\overrightarrow{CF}$ | $\overrightarrow{BH}$ |
| $\overrightarrow{CO}+\overrightarrow{CO}$ est égal à ... | $2\overrightarrow{OC}$ | $-\overrightarrow{CE}$ | $\overrightarrow{CE}$ |
| $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CF}$ est égal à ... | $\overrightarrow{DF}$ | $\overrightarrow{AF}$ | $\overrightarrow{BC}$ |
| Quelle est l'image de O par la translation de vecteur $\overrightarrow{DO}$ ? | E | F | C |
| Quelle est l'égalité vectorielle exacte? | $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BC}$ | $\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{CF}$ | $\overrightarrow{AB}=-\overrightarrow{AB}$ |
| K est l'image de D par la translation qui transforme C en H signifie que ..... | CHDK est un parallélogramme | $\overrightarrow{DK}=\overrightarrow{HC}$ | $\overrightarrow{DK}+\overrightarrow{HC}=\vec{0}$ |

Solutions page : 246

# ACTIVITÉS : JE DÉCOUVRE

## Activité 1 Somme de deux vecteurs



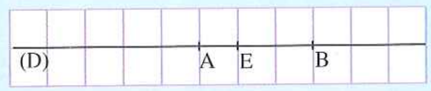

1. Recopier la figure ci-contre.

   *a.* Construire le point H tel que EFGH soit un parallélogramme.

   *b.* Construire le vecteur $\overrightarrow{EF} + \overrightarrow{EG}$ .

2. Construire le vecteur $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{EF}$ .

## Activité 2 Produit d'un vecteur par un réel

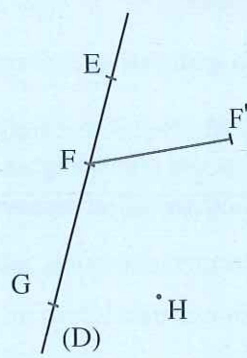



1. Recopier l'axe (D).
2. Combien de points M existe t-il sur (D) tels que : $AM = \frac{5}{6} AB$ ?
3. $\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{AB}$ ont même sens et $AE = \frac{1}{3} AB$

   On écrit : $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$.

   Placer les points F et G sur (D) tels que : $\overrightarrow{AF} = 2\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{6}\overrightarrow{AB}$.

## Activité 3 Conservatiobn de l'alignement, du parallélisme et des angles par une translation



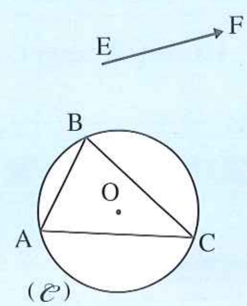

Recopier la figure ci-contre.

1. Construire les points E' et G' images respectives de E et G par la translation t de vecteur $\overrightarrow{FF'}$.
2. Montrer que les points E' et F' et G′ sont alignés.
3. Quelle est l'image de la droite (D) par la translation t ?
4. Soit (D') l'image de (D) par la translation t.

   Montrer que: (D') // (D).
5. Soit H' le translaté de H par la translation t.

   Montrer que : $\widehat{GFH} = \widehat{G'F'H'}$.

## Activité 4 Images d'une demi-droite et d'un cercle par une translation




Sur la figure ci-contre :

- (𝒞) est le cercle circonscrit au triangle ABC .
- E et F sont deux points à l'extérieur du cercle (𝒞) de centre O.

1. *a* - Recopier la figure.

   *b* - Construire les points A',B',C' et O' images respectifs de A , B , C et O par la translation t de vecteur $\overrightarrow{EF}$.
2. *a* -Montrer que : $\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{AB}$

   *b* -En déduire que : A'B'= AB
3. Déterminer l'image de la demi-droite [AB) par la translation t.
4. Déterminer et construire l'image de (𝒞) par la translation t.

# SAVOIR
## Je révise

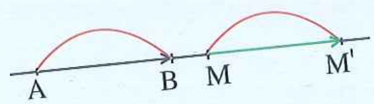
### 1 IMAGE D'UN POINT PAR UNE TRANSLATION

**Définition 1** A et B sont deux points distincts.

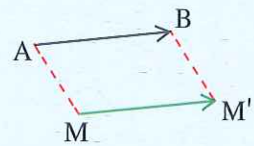
M′ est l'image de M par la translation qui transforme A en B signifie que ABM′M est un parallélogramme.

**Autrement dit :** M' est l'image de M par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$ signifie que : $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{AB}$

- Si M est un point de (AB)




- Si M n'est pas un point de (AB)



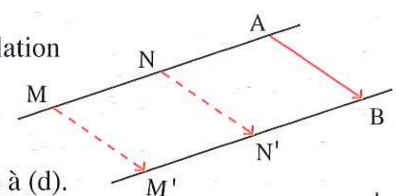

### 2 PROPRIÉTÉS DES TRANSLATIONS

**Propriété 1** *1/* Si M' et N' sont les images respectives des points M et N par une translation, alors M'N' = MN

**La translation conserve les longueurs .**

*2/* Si M , N et P sont trois points alignés, alors leurs images par une translation sont des points alignés.

**La translation conserve l'alignement.**



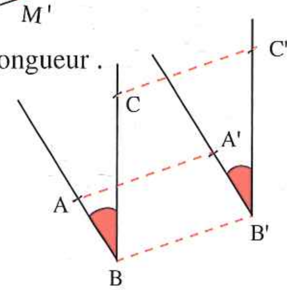

*3/* Par une translation, une droite (d) a pour image une droite (d') parallèle à (d).

*4/* Par une translation, un segment [MN] a pour image un segment [M'N'] de même longueur .

*5/* Par une translation, une demi-droite [MP) a pour image la demi-droite [M'P').

*6/* L'image d'un angle $\widehat{ABC}$ par une translation est l'angle $\widehat{A'B'C'}$ de même mesure.

**La translation conserve les mesures des angles.**

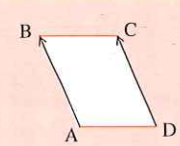



*7/* Un cercle de centre O a pour image un cercle de même rayon dont le centre O' est l'image de O par la translation.

### 3 ÉGALITÉ DE DEUX VECTEURS

**Définition 2**

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ signifie que : $\begin{cases} \overrightarrow{AB} \text{ et } \overrightarrow{DC} \text{ ont la même direction} \\ \overrightarrow{AB} \text{ et } \overrightarrow{DC} \text{ ont le même sens} \\ \overrightarrow{AB} \text{ et } \overrightarrow{DC} \text{ ont la même longueur} \end{cases}$



**Autrement dit :** $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ signifie que ABCD est un parallélogramme.

## 4 VECTEUR ET MILIEU D'UN SEGMENT

**Propriété 2**

A, M et B sont des points .

M est le milieu de [AB] signifie que : $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MB}$

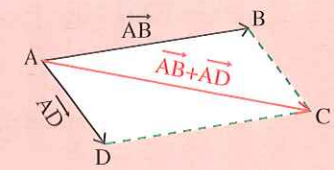

## 5 SOMME DE DEUX VECTEURS

**Définition 3**

A, B,C et D sont des points tels que ABCD est un parallélogramme.

Le vecteur $\overrightarrow{AC}$ est appelé **la somme** des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$ :

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$$




**Autrement dit :** $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$ signifie que ABCD est un parallélogramme.

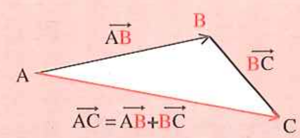
## 6 RELATION DE CHASLES

**Définition 4**

A, B et C sont des points .

La relation $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$ est appelée **relation de Chasles .**

même point




## 7 PRODUIT D'UN VECTEUR PAR UN RÉEL

**Définition 5**

Soit k un nombre réel et $\overrightarrow{AB}$ un vecteur non nul.

Le vecteur $\overrightarrow{AC}$ est le produit du vecteur $\overrightarrow{AB}$ par le nombre réel k si, C est un point de la droite (AB) tel que :

- AC = kAB et les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ont le même sens si k est positif.
- AC = – kAB et les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont de sens contraires si k est négatif.
- C = A si k = 0.

**Conséquences**

$\overrightarrow{AB}$ est un vecteur non nul et k un nombre réel non nul.

- $\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AB}$ signifie que M est un point de (AB).
- Si $\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AB}$ et $k > 0$, alors les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AB}$ ont le même sens.
- Si $\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AB}$ et $k < 0$, alors les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont de sens contraires.

# PRATIQUE
## J'applique

## 1 CONSTRUIRE EN UTILISANT UNE ÉGALITÉ VECTORIELLE

**Exemple 1** ABC est un triangle.

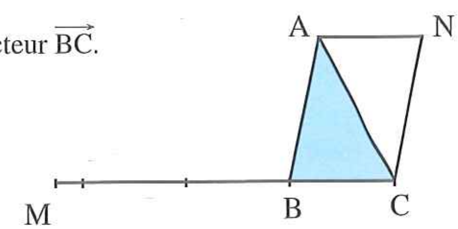
1. Construire le point N image de A par la translation de vecteur $\overrightarrow{BC}$.
2. Construire le point M tel que : $\overrightarrow{BM} = -\frac{9}{4}\overrightarrow{BC}$.

1. **Construction du point N :**

On sait que N est l'image de A par la translation de vecteur $\overrightarrow{BC}$.

Donc : $\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{BC}$

D'où ANCB est un parallélogramme.




2. **Construction du point M :**

On a : $\overrightarrow{BM} = -\frac{9}{4}\overrightarrow{BC}$

Donc :
- M est un point de (BC) car (BM) // (BC) ,
- Le sens de $\overrightarrow{BM}$ est l'opposé de celui de $\overrightarrow{BC}$ ,
- $BM = \frac{9}{4}BC$.

## 2 DÉMONTRER EN UTILISANT LA RELATION DE CHASLES

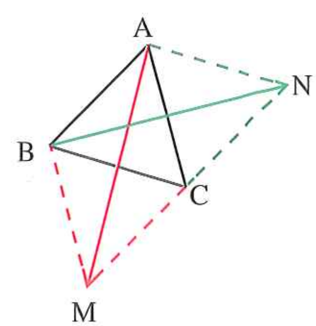
**Exemple 2** ABC est un triangle.

1. Construire les points M et N tels que : $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BN} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}$
2. Démontrer que C est le milieu de [MN].

1. • **Construction du point M :**

On a : $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$ ;

alors ABMC est un parallélogramme.




• **Construction du point N :**

On a : $\overrightarrow{BN} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}$ ;

alors BANC est un parallélogramme.

**2 Démontrons que C est le milieu de [MN] .**

Pour cela, on va comparer $\overrightarrow{MC}$ et $\overrightarrow{CN}$.

On a : $\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AC}$ (relation de Chasles)

$= \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AM}$

$= \overrightarrow{AC} - (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$ (car $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$ )

$= \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$

$= \overrightarrow{BA}$

$= \overrightarrow{BN} - \overrightarrow{BC}$ (car $\overrightarrow{BN} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}$ )

$= \overrightarrow{BN} + \overrightarrow{CB}$

$= \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BN}$

$= \overrightarrow{CN}$

Donc : $\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{CN}$.

Par conséquent C est le milieu de [MN].

**Exemple 3**

Soit un parallélogramme ABCD, M le milieu de [AB] et N le point du segment [DM] tel que :

$$\overrightarrow{MN} = \frac{1}{3}\overrightarrow{MD} .$$

Montrer que les points C,A et N sont alignés .

Pour montrer que les points A, N et C sont alignés, on doit chercher une relation entre les vecteurs $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AN}$ .

On sait que ABCD est un parallélogramme ;

alors : $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$

Or : $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AM}$ (car M est le milieu de [AB]) ,

alors : $\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AM} + (\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MD})$

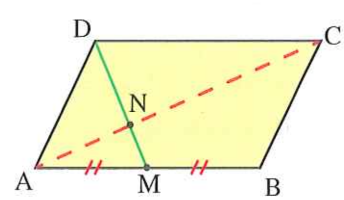
Donc : $\overrightarrow{AC} = 3\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MD}$

Or $\overrightarrow{MD} = 3\overrightarrow{MN}$ car $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{3}\overrightarrow{MD}$ ( par hypothèse)

Il en résulte que : $\overrightarrow{AC} = 3\overrightarrow{AM} + 3\overrightarrow{MN}$

$\overrightarrow{AC} = 3(\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MN})$

$\overrightarrow{AC} = 3\overrightarrow{AN}$




Donc les points C, A et N sont alignés.

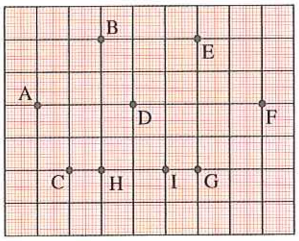
# INVESTISSEMENT
## Je m'entraîne

### CONSTRUCTION

**1**

*1)* Construire les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ , $\overrightarrow{CD}$ , $\overrightarrow{CE}$ , $\overrightarrow{BH}$ , $\overrightarrow{EF}$

*2)* Compléter le tableau ci-dessous en mettant une croix lorsque les conditions sont vérifiées.




| | même direction | même sens | même longueur | égaux | opposés | ni l'un ni l'autre |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DE}$ | | | | | | |
| $\overrightarrow{CE}$ et $\overrightarrow{GF}$ | | | | | | |
| $\overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{ED}$ | | | | | | |
| $\overrightarrow{IG}$ et $\overrightarrow{FE}$ | | | | | | |
| $\overrightarrow{CH}$ et $\overrightarrow{CG}$ | | | | | | |

**2** Soit EFG un triangle.

*1)* Construire le point H tel que : $\overrightarrow{EH} = \overrightarrow{FG} + \overrightarrow{FE}$

*2)* Construire le point I tel que : $\overrightarrow{EI} = \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{EG}$ .

**3** Soit EFG un triangle.

*1)* Construire le point M tel que : $\overrightarrow{EM} = 2\overrightarrow{FG}$ .

*2)* Construire le point N tel que : $\overrightarrow{FN} = -3\overrightarrow{EF}$ .

*3)* Construire le point P tel que : $\overrightarrow{GP} = \frac{2}{3}\overrightarrow{EF}$ .

**4** Soit EFG un triangle.

*1)* Construire le point A tel que $\overrightarrow{EA} = \overrightarrow{FG}$

*2)* Construire le point B tel que $\overrightarrow{FB} = \overrightarrow{EG}$ .

*3)* Construire le point C tel que $\overrightarrow{GC} = \overrightarrow{FG}$ .

**5** ABCD est un parallélogramme.

Construire les points E,F et G tels que :
$\overrightarrow{AE} = -3\overrightarrow{AB}$ , $\overrightarrow{DF} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{CB} - 3\overrightarrow{BA}$.

**6** A et B sont deux points distincts.
Construire le point M tel que : $-4\overrightarrow{MA} + 7\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{0}$

### TRANSLATION / CONSTRUCTION

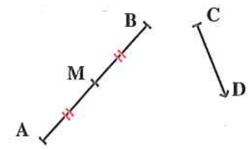
**7** EFG est un triangle.

*1)* Construire les points A et B tels que :
$\overrightarrow{GA} = -2\overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{EB} = -2\overrightarrow{FE} + \overrightarrow{EG}$

*2)* Montrer que : $\overrightarrow{BG} = 2\overrightarrow{FE}$ .

*3)* En déduire que G est le milieu de [AB].

**8** [AB] est un segment et $\overrightarrow{CD}$ un vecteur.




*1)* Construire les points E , N et F images respectives de A , M et B par la translation de vecteur $\overrightarrow{CD}$.

*2)* Démontrer que N est le milieu de [EF].

*3)* Conclure.

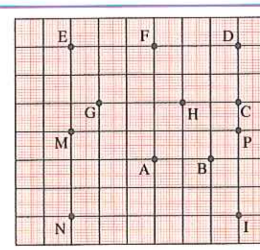
**9** *1)* Quels sont les vecteurs égaux au vecteur $\overrightarrow{MN}$?

*2)* Quelle est l'image de G par la translation de vecteur $\overrightarrow{HD}$ ?

*3)* Quelle est l'image de B par la translation de vecteur $\overrightarrow{AH}$ ?

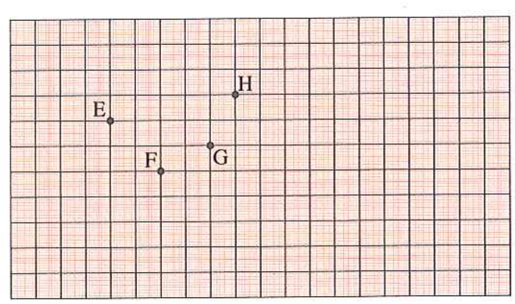
*4)* Quel point a pour image I par la translation de vecteur $\overrightarrow{ED}$ ?

*5)* Quel point a pour image M par la translation de vecteur $\overrightarrow{DP}$ ?




**10** Construire l'image d'un rectangle EFGH par la translation de vecteur $\overrightarrow{FH}$.

**11** *1)* Construire le point M image de E par la translation de vecteur $\overrightarrow{FG}$.



2) Construire le point N image de F par la translation de vecteur $\overrightarrow{EG}$.

3) Construire le point P image de H par la translation de vecteur $\overrightarrow{EH}$.

**12** Soit $(\mathscr{C})$ un cercle de centre O, de rayon 4cm et E un point de $(\mathscr{C})$ .

Construire l'image de $(\mathscr{C})$ par la translation de vecteur $\overrightarrow{OE}$ .

**13** Soit EFGH un parallélogramme.

1) Construire le point M image de F par la translation de vecteur $\overrightarrow{EG}$.

2) Construire le point N image de E par la translation de vecteur $\overrightarrow{FH}$.

3) Montrer que les points M,N,G et H sont alignés.

**14** Soit EFG un triangle, M le milieu de [EF] et N un point de [MG].

1) Construire les points A et B images de N et G par la translation de vecteur $\overrightarrow{EM}$.

2) Montrer que les points F,A et B sont alignés.

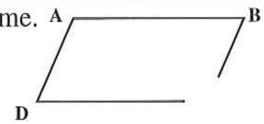
**15** On considère un triangle EFG rectangle en G. Soit A,B et C les milieux respectifs des segments [EG] , [GF] et [FE].

1) Construire les points N et P images respectives de F et G par la translation de vecteur $\overrightarrow{EA}$.

2) Montrer que les points A , B et N sont alignés.

3) Montrer que B est l'image de C par cette translation .

**16** ABCD est un parallélogramme.

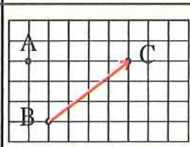
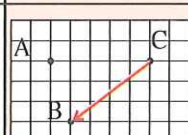
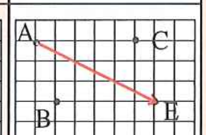



Sans construire le point C, construire le point E image de B par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$ puis construire le point F image de E par la translation de vecteur $\overrightarrow{BC}$.

C est l'image de F par la translation de vecteur $\overrightarrow{BA}$.

## MON BILAN

***1) Indiquer la bonne réponse par A , B ou C :***

| | A | B | C |
|---|---|---|---|
| 1 Deux vecteurs ne sont pas égaux car ils sont de sens contraires lesquels? | $\overrightarrow{CB}$ et $\overrightarrow{EA}$ | $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ | $\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{CE}$ |
| 2 EFGH est un parallélogramme.Indiquer laquelle de ces trois égalités vectorielles est fausse | $\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{HG}$ | $\overrightarrow{FG}=\overrightarrow{EH}$ | $\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{GH}$ |
| 3 P est l'image de R par la translation de vecteur $\overrightarrow{EF}$ . ALors ... | $\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{RP}$ | $\overrightarrow{PR}=\overrightarrow{EF}$ | $\overrightarrow{EP}=\overrightarrow{FR}$ |
| 4 O est le milieu de [UV]. ALors ... | $\overrightarrow{OU}=\overrightarrow{OV}$ | $\overrightarrow{UO}=\overrightarrow{OV}$ | $\overrightarrow{UO}=\overrightarrow{VO}$ |
| 5 ABCD est un parallélogramme . Donc : ... | $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{DB}$ | $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$ | $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$ |
| 6 $\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{NP}$ est égal à ... |   |   |   |

Corrections page : 247

***2) En cas d'erreur, voici quelques conseils :***

| | Savoir | Pratique |
|---|---|---|
| Ex: 1 | Exemple 1 | |
| Ex: 2 | Exemple 2 | |
| Ex: 3 | | Exemple 1 |
| Ex: 4 | | Exemple 1 |
| Ex: 5 | Exemple 3 | |
| Ex: 6 | Exemple 3 | |

***3) Exercices pour la remédiation voir R12 page : 249***

## TRANSLATION

**17** Soit ABC un triangle et D le milieu de [BC].

*1)* Construire les points E et F tels que :

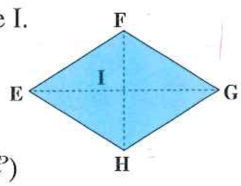
$$\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB} \text{ et } \overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AC}.$$

*2)* Montrer que : $\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{CF}$.

*3)* Quelle est l'image de la droite (CB) par la translation t de vecteur $\overrightarrow{AD}$ ?

*4)* La droite (AD) coupe la droite (EF) en G. Montrer que G est l'image de D par cette translation.

**18** EFGH est un losange de centre I.




Soit t la translation qui transforme F en H.

*1)* Construire l'image du cercle ($\mathscr{C}$) de centre F qui passe par I par la translation t.

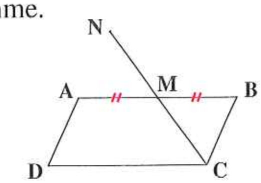
*2)* Construire J et K les images de I et G respectivement par la translation t.

*3)* Montrer que HJK est un triangle rectangle.

*4)* Montrer que (EH) est l'image de la droite (FG) par la translation t.

## RELATION DE CHASLES

**19** ABCD est un parallélogramme.




Soit M le milieu de [BC].

*1)* Construire le point N image de M par la translation de vecteur $\overrightarrow{CM}$.

*2)* Montrer que les points A , D et N sont alignés.

**20** ABC est un triangle.

Soit M le milieu de [BC] et G le point tel que :

$$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$$

Montrer que les point G, M et A sont alignés.

**21** ABC est un triangle. E est le milieu de [AB] .

Soit F l'image de C par la translation de vecteur $\overrightarrow{AC}$ .

La droite (EF) coupe (BC) en M.

Montrer que : $\overrightarrow{CM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{CB}$.

**22** En utilisant la relation de Chasles, compléter les égalités :

*1)* $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{....}$ *2)* $\overrightarrow{B..} + \overrightarrow{O..} = \overrightarrow{BN}$

*3)* $\overrightarrow{ME} + \overrightarrow{NM} = \overrightarrow{....}$ *4)* $\overrightarrow{A..} + \overrightarrow{B..} = \overrightarrow{..D}$

*5)* $\overrightarrow{EF} + \overrightarrow{FE} = \overrightarrow{....}$ *6)* $\overrightarrow{E..} + \overrightarrow{H..} + \overrightarrow{M..} = \overrightarrow{EN}$

*7)* $\overrightarrow{EU} + \overrightarrow{UL} + \overrightarrow{LN} = \overrightarrow{....}$ *8)* $\overrightarrow{BE} + ... + \overrightarrow{EC} = \overrightarrow{BM}$

**23** Dans chaque cas, exprimer le plus siplement possible les sommes de vecteurs :

*1)* $\overrightarrow{EF} - \overrightarrow{HF} - \overrightarrow{EH}$ *2)* $4\overrightarrow{AB} + 4\overrightarrow{BC}$

*3)* $\overrightarrow{EM} - \overrightarrow{FM} + \overrightarrow{FE}$ *4)* $\overrightarrow{EF} + \overrightarrow{EG} - \overrightarrow{FH} - \overrightarrow{HG}$

*5)* $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{CB}$ *6)* $2\overrightarrow{EH} + \overrightarrow{FH} - 3\overrightarrow{EH}$

**24** A,B,C et D sont quatre points du plan distincts deux à deux.

Parmi les égalités suivantes, lesquelles signifient que ABCD est un parallélogramme ?

*1)* $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{BA}$ *2)* $\overrightarrow{DB} = \overrightarrow{DC}$

*3)* $\overrightarrow{DA} = \overrightarrow{CB}$ *4)* $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BD}$

*5)* $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC}$ *6)* $\overrightarrow{BD} - \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD}$

**25** Montrer que les points F et H sont confondus sachant que : $\overrightarrow{FE} + \overrightarrow{GF} - \overrightarrow{GH} = \overrightarrow{GE} - \overrightarrow{FH} + \overrightarrow{HG}$.

**26** Soit E, F, G et H quatre points du plan.

Montrer que : $3\overrightarrow{HE} + \overrightarrow{FH} - 2\overrightarrow{HG} = 3\overrightarrow{FE} + 2\overrightarrow{GF}$.

**27** Soit EFG un triangle.

M et N sont respectivement les milieux de [EF] et [EG].

*1)* Montrer que : $\overrightarrow{ME} = \frac{1}{2}\overrightarrow{FE}$ .

*2)* Montrer que : $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{FG}$ .

## PROBLÈMES OUVERTS

**28** A et B sont deux points distincts et M le milieu de [AB].

C et D sont deux points tels que : $\overrightarrow{AD} + 3\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB}$.

Montrer que D est l'image de M par la translation de vecteur $3\overrightarrow{MC}$.

**29** A et B sont deux points distincts .

Parmi les égalités suivantes, lesquelles signifient que le point M est le milieu de [BA]?

*1)* $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{BM}$ *2)* $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \vec{0}$

*3)* $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MB}$ *4)* $AB = 2BM$

*5)* $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BA}$ *6)* $\overrightarrow{BA} = 2\overrightarrow{BM}$

**30** A,B,C et D sont quatre points du plan tels que :

$$5\overrightarrow{AB} = 3\overrightarrow{AC} + 2\overrightarrow{AD}.$$

Montrer que les points B,C et D sont alignés.

**31** A,B,C et D sont quatre points du plan tels que :

$$2\overrightarrow{BC} - 9\overrightarrow{AC} - 7\overrightarrow{DA} = \vec{0}$$

Montrer que : (AB) // (DC).

**32** On considère un triangle EFG.

M et N sont deux points définis par :

$\overrightarrow{EM} = 3\overrightarrow{EF} + \overrightarrow{GF}$ et $\overrightarrow{FN} = 2\overrightarrow{EF} - \overrightarrow{GE} - 2\overrightarrow{FG}$

Montrer que les points M et N sont confondus.

## CHALLENGES

**33** Soit ABC un triangle et M le milieu de [AB].

*1)* Construire les points E et F définis par :

$$\overrightarrow{BE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{CB} \text{ et } \overrightarrow{CF} = -\frac{4}{5}\overrightarrow{AC}$$

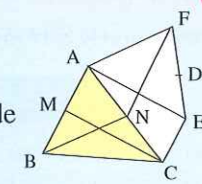
*2)a.* Exprimer $\overrightarrow{ME}$ et $\overrightarrow{MF}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

*b.* En déduire que les points M , E et F sont alignés.

**34** **AVEC TICE**


Soit ABC un triangle.

Sur la figure ci-contre,




. M et N sont les milieux de [AB] et [AC].

. AMCE et ABNF sont des parallélogrammes.

. D est le milieu de [EF].

*1)* Construire la figure en utilisant l'outil de Geogebra puis conjecturer la positionn relative des droites (AD) et (BC).

*2)* Montrer que : (AD) // (BC).

**35** Soit ABC un triangle .

On définit les points D , E et F par :

$\overrightarrow{AD} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{BA}$ ; $\overrightarrow{AE} = 2\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BF} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{CB}$

Montrer que les points D , E et F sont alignés .

**36** ABC est un triangle. E et F sont deux points tels que : $\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$

Montrer que les points A, D et E sont alignés.

## SITUATIONS PROPOSÉES AUX OLYMPIADES

ABC est un triangle. M, N et P sont les points définis par :

$$\overrightarrow{AM} = \frac{1}{5}\overrightarrow{AB} \text{ , } \overrightarrow{CN} = \frac{1}{5}\overrightarrow{BC} \text{ et } \overrightarrow{AP} = x\overrightarrow{AC} \text{ où } x \text{ est un réel.}$$

**Déterminer $x$ pour que M , N et P soit alignés.**

# JE ME PRÉPARE À L'EXAMEN RÉGIONAL

## 37 Exercice résolu

ABCD est un losange de centre I.

Soit t la translation qui transforme A en B.

*1)a.* Montrer que C est l'image de D par la translation t.

*b.* Construire J l'image de I par la translation t.

*2)a.* Déterminer l'image de l'angle $\widehat{AID}$ par la translation t.

*b.* En déduire que le triangle BJC est rectangle .

*3)* Soit K le point tel que $\overrightarrow{DK} = \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC}$ .

*a.* Montrer que $\overrightarrow{BK} = \overrightarrow{DC}$.

*b.* En déduire que K est l'image de B par la translation t .

### Correction : 37

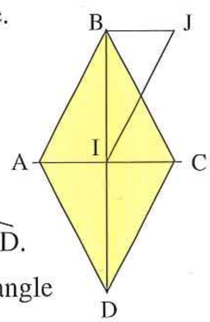
*1)a.* On sait que ABCD est un losange, donc : $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB}$

D'où C est l'image de D par la translation t.

*b.* **Construction de J**

J est l'image de I par la translation t, donc :$\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{AB}$.

D'où ABJI est un parallélogramme.




*2)a.* Par la translation t ,

on a B est l'image de A

et J est l'image de I

et C est l'image de D

D'où $\widehat{BJC}$ est l'image de l'angle $\widehat{AID}$.

*b.* On sait que $\widehat{BJC}$ est l'image de l'angle $\widehat{AID}$ par la translation t .

Et la translation conserve les mesures des angles.

Donc : $\widehat{BJC} = \widehat{AID}$.

Or : $\widehat{AID} = 90°$ (car I est centre du losange ABCD),

alors : $\widehat{BJC} = 90°$.

Par conséquent BJC est un triangle rectangle en J.

*3)a.* On a : $\overrightarrow{DK} = \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC}$

$-\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DK} = \overrightarrow{DC}$

$\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DK} = \overrightarrow{DC}$

Donc : $\overrightarrow{BK} = \overrightarrow{DC}$

*b.* On a : $\overrightarrow{BK} = \overrightarrow{DC}$ et $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB}$ ,

donc : $\overrightarrow{BK} = \overrightarrow{AB}$.

D'où K est l'image de B par la translation t.

## 83 Exercice résolu

EFG est un triangle, I est le milieu de [EG] et H le symétrique de F par rapport au point I.

Soit t la translation qui transforme E en F.

*1)a.* Construire le point K image de G par la translation t.

*b.* Montrer que G est l'image de H par la translation t.

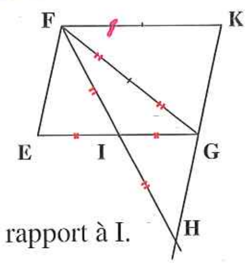
*c.* En déduire que G est le milieu du segment [HK].

*2)* Soit ($\mathscr{C}$) le cercle de diamètre [HK].

Déterminer l'image du cercle ($\mathscr{C}$) par la translation t.

### Correction : 38

*1)a.* **Construction de K.**




K est l'image de G par la translation t .

D'où : $\overrightarrow{GK} = \overrightarrow{EF}$

*b.* H est le symétrique de F par rapport à I.

D'où I est le milieu de [HF].

Et comme I est aussi le milieu [EG],

alors HGFE est un parallélogramme .

Il en résulte que $\overrightarrow{HG} = \overrightarrow{EF}$

Donc, G est l'image de H par la translation t .

*c.* On a : $\overrightarrow{GK} = \overrightarrow{EF}$ (d'après les données)

et : $\overrightarrow{HG} = \overrightarrow{EF}$ (d'après la question précédente)

D'où : $\overrightarrow{HG} = \overrightarrow{GK}$.

Donc G est le milieu de [HK].

*2)* On sait que [HK] est un diamètre du cercle ($\mathscr{C}$).

et G est le centre de ($\mathscr{C}$).

En outre K est l'image de G par la translation t.

Donc le cercle de centre K et de rayon $\frac{HK}{2}$ est l'image du cercle ($\mathscr{C}$) par la translation t.

## 39

ABCD est un rectangle de centre I.

Soit I' et C' les translatés respectifs de I et C par la translation t de vecteur $\overrightarrow{AB}$.

*1)a.* Faire une figure.

*b.* Déterminer l'image de A par la translation t.

*2)* Montrer que les points B, I' et C' sont alignés.

**40** ABC est un triangle rectangle en A tel que :

AB = 2 et BC= 4.

I est le milieu de [BC] .

t est la translation qui transforme A en I.

*1)* Construire le point D image de B par la translation t.

*2)* Montrer que BDI est un triangle équilateral.

**41** Soit OIJ un triangle rectangle isocèle en O et M le milieu [IJ].

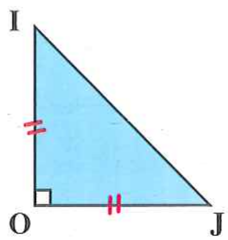
*1)* Construire le point B tel que $\overrightarrow{JB} = \overrightarrow{OM}$ .

*2)* On considère la translation t de vecteur $\overrightarrow{OM}$.

*a.* Construire A image de I par la translation t.

*b.* Déterminer l'image de J par la translation t.

*c.* En déduire que MAB est un triangle rectangle isocèle.




**42** ABCD est un parallélogramme de centre O.

*1)* Construire les points M et P tels que :

$$\overrightarrow{CM} = \overrightarrow{OB} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{BC}.$$

*2)* On considère la translation t qui transforme O en C .

*a.* Déterminer l'image de B par la translation t.

*b.* Montrer que l'image de D par la translation t est P.

*3)* Montrer que les points P, C et M sont alignés.

**43** On considère un triangle ABA' et le point C tel que :

$$\frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CA'} = \overrightarrow{AA'}$$

*1)* Montrer que : $\overrightarrow{AC} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$.

Que peut-on dire des points A , B et C ?

*2)* B' et C' sont respectivement les images de B et C par la translation qui transforme A en A'.

Montrer que les points A' , B' et C' sont alignés.

**44** Soit ABCD un trapèze tel que : $\overrightarrow{DC} = 2\overrightarrow{AB}$.

M le milieu de [DC] et t la translation qui transforme D en M.

*1)a.* Construire le point E image de B par la translation t.

*b.* Déterminer l'image de et l'image de M par la translation t.

*2)a.* Quelle est l'image de [DB] par la translation t.

*b.* Montrer que le quadrilatère AECD est un parallélogramme.

**45** I et J sont deux point du plan tels que : IJ = 4cm.

Les cercles $\mathscr{C}(I\,;5)$ et $\mathscr{C}'(J\,;5)$ se coupent en A et B.

*1)* Faire un figure.

*2)a.* Montrer que (AB) est la médiatrice de [IJ].

*b.* Déterminer l'image de ($\mathscr{C}$) par la translation de vecteur $\overrightarrow{IJ}$.

*3)* Soit A' l'image de A par la translation de vecteur $\overrightarrow{IJ}$.

Montrer que [A'B] est un diamètre du cercle image de ($\mathscr{C}$) par la translation t.

**46** On considère un triangle ABC et la translation t de vecteur $2\overrightarrow{AB}$ .

M et M' sont deux points du plan tels que :

$$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{BM'} = \overrightarrow{AB}$$

Montrer que M' est l'image de M par la translation t.

**47** Soit ABC un triangle .

M et N sont deux points tels que :

$$\overrightarrow{AM} = \frac{5}{2}\overrightarrow{AC} - \frac{3}{2}\overrightarrow{BC} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{CN} = -2\overrightarrow{AC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{BA}$$

*1)* Calculer $\overrightarrow{BM}$ et $\overrightarrow{BN}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ .

*2)* En déduire que B est le milieu de [MN].

# FONCTIONS LINÉAIRES

## Prérequis :

* Proportionnalité.
* Repère.
* Graphe d'une situation de proportionnalité.

## Un point d'histoire

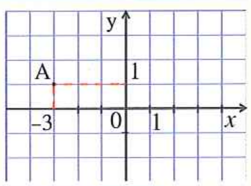
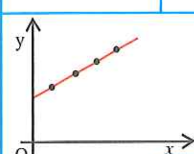
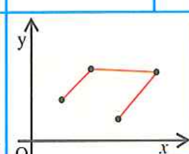
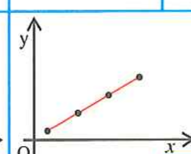
**Gottfried Wilhelm Leibniz (1646 ; 1716)**

La définition du concept de fonction a évolué depuis son introduction par Leibniz à la fin du XVII[e] siècle .Il s'agissait alors d'associer un objet à chaque point d'une courbe, par exemple la tangente. Le lien entre l'expression d'une fonction et sa courbe conduit Euler à élargir la notion en admettant les définitions par morceaux puis des courbes qui ne peuvent être obtenues que par des expressions analytiques.

## TEST DIAGNOSTIQUE : Je m'évalue

## CHOISIR LA BONNE RÉPONSE.

**Pour chaque question, cocher la bonne réponse en justifiant.**

<table>
<tr><th></th><th colspan="3">Réponses :</th></tr>
<tr><td>
</td><td>A(1 ; -3)</td><td>B(0 ; 4)</td><td>B(4 ; 0)</td></tr>
<tr><td>On donne : $A = x^2 - x - 2$.<br>Si $x = -1$, alors ...</td><td>A = -4</td><td>A = -2</td><td>A = 0</td></tr>
<tr><td>Si $3x - y = 0$,<br>alors ...</td><td>$y = 3x$</td><td>$y = -3x$</td><td>$y = \frac{1}{3}x$</td></tr>
<tr><td>L'égalité $y = -2x$<br>est vraie pour : ...</td><td>$x = 2$ et $y = 1$</td><td>$x = -2$ et $y = -1$</td><td>$x = 1$ et $y = -2$</td></tr>
<tr><td>Le prix d'un objet est.<br>25 DH. Il a augmenté de 5%.<br>Son nouveau prix est : ...</td><td>30 DH</td><td>26,25 DH</td><td>25,50 DH</td></tr>
<tr><td>Quel graphique traduit une situation de proportionnalité ?</td><td>
</td><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td>Lequel des tableaux suivants traduit une situation de proportionnalité ?</td><td><table><tr><td>5</td><td>6</td><td>12</td></tr><tr><td>6</td><td>7</td><td>14</td></tr></table></td><td><table><tr><td>40</td><td>44</td><td>60</td></tr><tr><td>10</td><td>11</td><td>15</td></tr></table></td><td><table><tr><td>4</td><td>12</td><td>16</td></tr><tr><td>3</td><td>9</td><td>6</td></tr></table></td></tr>
</table>

Solutions page : 246

# ACTIVITÉS : JE DÉCOUVRE

## Activité 1 Un exemple de fonction linéaire

Le périmètre d'un carré est - il proportionnel à la longueur $x$ de son côté?

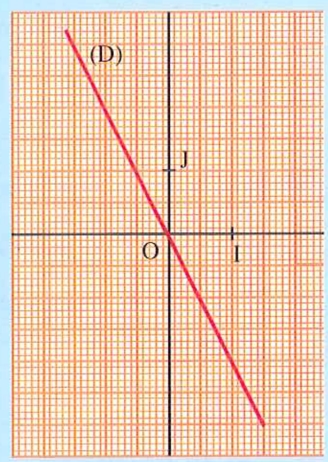
La relation qui relie la longueur $x$ du côté d'un carré avec son périmètre y est une **fonction linéaire**.

On la note : $f : x \longmapsto 4x$ et on écrit : $y = f(x) = 4x$

$f(x)$ est l'image du nombre $x$ par la fonction linéaire f.

1. Déterminrer les images des nombres suivants : $2 ; 3 ; 5 ; \frac{7}{6}$ par la fonction f.
2. Calculer : $f\left(\frac{1}{4}\right)$ ; $f(3)$ ; $f\left(\frac{3}{8}\right)$.
3. Déterminer le nombre dont l'image est 18 par f.
4. Construire la représentation graphique de la fonction f dans un repère orthonormé (O ; I ; J).

## Activité 2 Fonction linéaire dont on connaît le graphique




(O ; I ; J) est un repère orthonormé . Sur le graphique ci-contre, (D) est la représentation d'une fonction linéaire g.

1. Lire sur le graphique les images des nombres -2 , -1 , 0 , 1 et 2 par g.
2. Lire sur le graphique, les nombres dont les images sont $\frac{3}{2}$; -1 et -2 par g.
3. Le point $M\left(-\frac{3}{2} ; -1\right)$ appartient-il à la droite (D)?
4. Déterminer $g(x)$ en fonction de $x$.

## Activité 3 Graphique d'une fonction linéaire

1. On considère la fonction linéaire h définie par $h(x) = -\frac{3}{2}x$.
2. Déterminer les images des nombres -3 , -1 et 6 par h.
3. Déterminer l'antécédent de $\frac{-3}{4}$ par h c'est-à-dire le nombre réel $x$ tel que : $h(x) = \frac{-3}{4}$.
4. Construire la courbe de la fonction h dans un repère orthonormé (O ; I ; J).

## Activité 4 Détermination d'une fonction linéaire connaissant l'image d'un réel non nul

Soit f la fonction linéaire telle que : $f(3) = 5$.

1. Déterminer l'image de $x$ par f .
2. Existe-t-il une fonction linéaire g telle que : $g(1) = 2$ et $g(2) = 3$ ?

## 1 FONCTION LINÉAIRE

**Définition** Soit a un nombre donné.

La relation **f** qui , à tout nombre réel $x$, fait correspondre le produit a$x$ est appelée **fonction linéaire de coefficient a.**

On la note **f :** $x \longmapsto ax$

Le nombre a$x$ est l'image de $x$ par f, et on écrit : $f(x) = ax$ , $f(x)$ se lit " f de $x$ " .

**Remarque 1 :** Une situation de proportionnalité se traduit par une fonction linéaire

**Exemple :** Le périmètre d'un triangle équilatéral est proportionnel à la longueur de son côté,

Soit $x$ la longueur du côté, le périmètre de ce triangle est : $3x$.

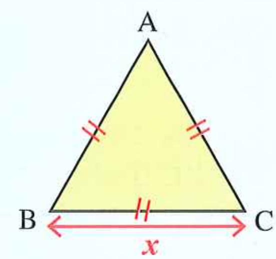
Ainsi, on a défini la fonction linéaire p telle que : $p(x) = 3x$ .

L'image de 4 par p se note p(4).

$p(4) = 3 \times 4 = 12$

12 est l'image de 4 par la fonction linéaire p.

4 est l'antécédent de 12 par la fonction linéaire p.




**Remarque 2 :**

- Ne pas confondre p(4) et p × (4).
- Pour calculer $f(x)$, on multiplie $x$ par a le cœfficient de la fonction linéaire.

## 2 COEFFICIENT D'UNE FONCTION LINÉAIRE

**Propriété 1**

Si f est une fonction linéaire et $x$ un nombre réel non nul, alors $\dfrac{f(x)}{x}$ est le cœfficient de f.

**Exemple :** Soit f une fonction linéaire tel que : $f(-4) = 5$.

Calculons $f(-3)$.

f est une fonction linéaire; donc $f(x) = ax$.

Or : $f(-4) = 5$ , alors : $a = \frac{f(-4)}{-4} = \frac{5}{-4} = \frac{-5}{4}$

Par conséquent : $f(x) = \frac{-5}{4}x$.

Donc : $f(-3) = \frac{-5}{4} \times (-3)$ c'est-à-dire : $f(-3) = \frac{15}{4}$.

## 3 REPRÉSENTATION GRAPHIQUE D'UNE FONCTION LINÉAIRE

**Propriété 2**

La représentation graphique d'une fonction linéaire est une droite passant par l'origine du repère.

**Remarque 3 :**

- La représentation graphique ou la courbe d'une fonction linéaire f est notée $(C_f)$ ou (D).
- $M(x\,;\,y)$ est un point de $(C_f)$ signifie que : $f(x) = y$.

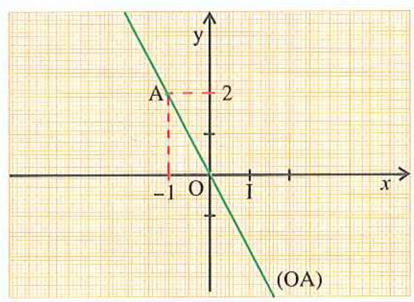
**Exemple :**

Représentation graphique de la fonction linéaire $h : x \longmapsto -2x$

| $x$ | 0 | -1 |
|---|---|---|
| $h(x)$ | 0 | 2 |
| | O | A |

$h(-1) = -2 \times (-1) = 2$.

Il en résulte que la droite (OA) est la courbe de la fonction linéaire h.




**Remarque 4 :** Toute droite passant par O représente une fonction linéaire.

## 4 PROPRIÉTÉ DES FONCTIONS LINÉAIRES

**Propriété 3**

Soit f une fonction linéaire de cœfficient a, on a toujours : $\mathbf{f(0) = 0}$ et $\mathbf{f(1) = a}$

## 1 RÉSOUDRE UN PROBLÈME EN UTILISANT DES FONCTIONS LINÉAIRES

**Exemple 1** Un prix $x$ augmente de 6%.

1. Quel est le nouveau prix?
2. Par quelle fonction f est donné le nouveau prix?
3. En déduire les nouveaux prix correspondant à 30 dirhams, 215 dirhams et 402 dirhams.

1. Un article coûte $x$ dirhams.

Après une augmentation de 6%, son prix devient :

$$x + 6\%\ x = x + \frac{6}{100}\ x = \left(1 + \frac{6}{100}\right)x = 1{,}06x.$$

Donc : $1{,}06x$ est le nouveau prix.

2. Le nouveau prix est donné par la fonction linéaire f de cœfficient 1,06 .

$$f : x \longmapsto 1{,}06\ x \quad \text{c'est-à-dire :} \quad f(x) = 1{,}06x.$$

3. On sait que : $f(x) = 1{,}06\ x$

Donc : $f(30) = 1{,}06 \times 30 = 31{,}8$

$f(215) = 1{,}06 \times 215 = 227{,}9$

$f(402) = 1{,}06 \times 402 = 426{,}12$

| Ancien prix : $x$ | 30 | 215 | 402 |
|---|---|---|---|
| Nouveau prix : $1{,}06\ x$ | 31,80 | 227,90 | 426,12 |

## 2 DÉTERMINER L'EXPRESSION ALGÉBRIQUE D'UNE FONCTION LINÉAIRE

**Exemple 2** Déterminer la fonction linéaire g pour laquelle l'image de –4 est 24.

On sait que g est une fonction linéaire.

Donc : $g(x) = ax$

$$a = \frac{g(x)}{x} \quad \text{c'est-à-dire} \quad a = \frac{\text{image du nombre}}{\text{le nombre}}$$

Comme : $g(-4) = 24$ , alors : $a = \dfrac{g(-4)}{-4} = \dfrac{24}{-4} = -6$

Par conséquent $g(x) = -6x$.

## 3 REPRÉSENTER GRAPHIQUEMENT UNE FONCTION LINÉAIRE

**Exemple 3** (O ; I ; J) est un repère orthonormé.

On considère la fonction linéaire h définie par : h $(x) = 3x$.

1. Tracer (D) la courbe de la fonction h.
2. Les points A(−200 ; −600) et B($-\frac{7}{3}$; 7) appartiennent-ils à (D)?
3. Calculer le nombre a sachant que le point M(m − 3 ; $\frac{m}{3}$ ) appartient à (D).

**1 Traçons la droite (D).**

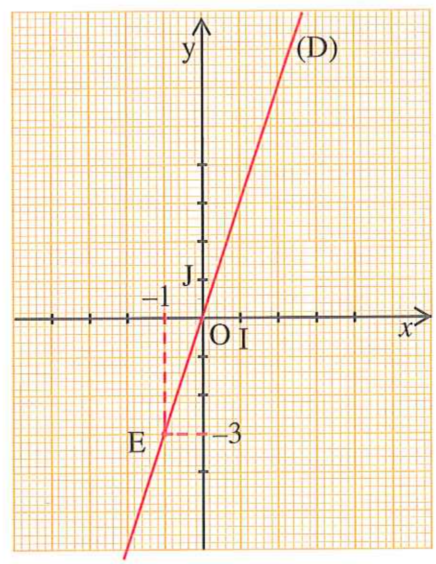
On sait que la courbe d'une fonction linéaire est une droite passant par l'origine du repère.

Pour tracer cette droite (D) , il faut un deuxième point .

Par exemple, si $x = 1$ , alors : $h(-1) = 3\times(-1) = -3$

Donc le point E (−1 ; −3) appartient à (D).

Par conséquent : (D) = (OE).




**2 Les points A et B appartiennent-ils à (D)?**

- On a : $h(x) = 3x$

  Donc : $h(-200) = 3(-200) = -600$

  puisque : A(−200 ; −600) , alors A appartient à la droite (D).
- On a : $h\left(-\frac{7}{3}\right) = 3 \times \left(-\frac{7}{3}\right) = -7$

  Or : $B\left(-\frac{7}{3} ; 7\right)$ et $h\left(-\frac{7}{3}\right) \neq 7$, alors B n'appartient pas à la droite (D)

**3 Calculons m .**

M(m − 3 ; $\frac{m}{3}$) appartient à la droite (D) signifie que : $h(m-3) = \frac{m}{3}$

Puisque : $h(x) = 3x$ , alors $3(m-3) = \frac{m}{3}$

c'est-à-dire : $3m - 9 = \frac{m}{3}$

$3m - \frac{m}{3} = 9$

$\frac{8}{3}m = 9$

D'où : $m = \frac{27}{8}$.

## POUR RÉVISER TON COURS

**1** Recopier et compléter les phrases suivantes :

La fonction f : $x \longmapsto -7x$ est une fonction ................
de cœfficient ..................
On la note ...... = $-7x$.
Sa représentation graphique est une ............................
passant par .................. du repère.

**2** Écrire sous la forme d'une égalité chacune des phrases suivantes :

- L'image de −8 par f est 4 : ...... = ......
- L'image par f de $\sqrt{2}$ est $-\sqrt{6}$ : ...... = ......
- 57 est l'image de 19 par f : ...... = ......
- −21 est l'antécédent de 9 par f : ...... = ......

**3** Soit g la foction linéaire définie par : $g(x) = -8x$.

*1)* Quelle est l'image de −8 par g ?
*2)* Quelle est l'image de $\frac{\sqrt{2}}{2}$ par g ?
*3)* Calculer $g\left(\frac{\sqrt{3}}{8}+2\right)$.
*4)* Quel nombre a pour image −8 par g ?
*5)* Quel est l'antécédent de $-\frac{11}{6}$ par g?
*6)* Trouver le nombre a tel que : $g(a) = -\frac{9}{7}$.

**4** Soit g la fonction linéaire de cœfficient −2,5 .
Calculer $g\left(\frac{2}{5}\right)$, $g(-1)$, $g(\sqrt{7})$ et $g\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$.

**5** Calculer les images des nombres :

$-7$ ; $2$ ; $\frac{1}{3}$ et $\sqrt{2}$

par les fonctions linéaires f,g et h définies par :

$f(x) = -x$ ; $g(x) = \sqrt{2}\,x$ et $h(x) = \frac{1}{7}\,x$.

**6** Recopier et compléter le tableau suivant où g désigne une fonction linéaire.

| $x$ | −9 | 9 | | | 18 |
|---|---|---|---|---|---|
| $g(x)$ | −6 | | −15 | 12 | |

## DÉTERMINER UNE FONCTION LINEAIRE

**7** Déterminer les fonctions linéaires f, g et h tels que :

**a.** $f(9) = -18$ ; **b.** $g(-5) = 3$ ; **c.** $h(-2) = -6$

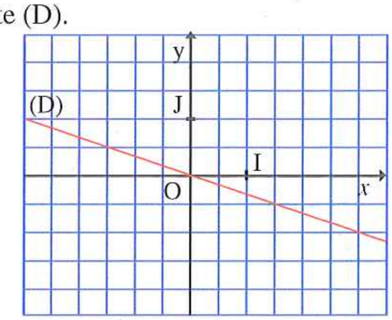
**8** Déterminer la fonction linéaire f dans chacun des cas suivants :

*1)* L'image de 2 par f est −11
*2)* $f(-6) = -5$
*3)* La représentation graphique de f passe par le point E(−3 ; −2).

**9** Parmi les fonctions suivantes, indiquer celles qui sont linéaires ?

*1)* $f(x) = \frac{x}{4}$ *1)* $k(x) = \frac{x}{4}$
*3)* $g(x) = 3\sqrt{x}$ *4)* $m(x) = 4x - 3$
*5)* $h(x) = 2x\,(x - 4) - 2x^2$ *6)* $n(x) = 6x - 9x$

**10** La fonction linéaire f est représentée ci-dessous par la droite (D).




*1)* Lire sur le graphique l'image de 3,5 et −3,5
*2)* Déterminer sur le graphique le nombre dont l'image est $-\frac{1}{2}$.
*3)* Définir la fonction linéaire f.

**11** Parmi les fonctions suivantes, quelles sont celles qui sont linéaires?

*1)* $f_1(x) = 3(-x + 2) - 2(2x + 3)$
*2)* $f_2(x) = (4x - 3)(x + 3) - (2x - 3)^2$
*3)* $f_3(x) = 5(x - 6)$
*4)* $f_4(x) = 2\sqrt{x}$

**12** f est une fonction linéaire telle que : $f(x) = \frac{-5}{6}x$

*1)* Calculer $f(-3)$ et $f\left(\frac{2}{15}\right)$.

*2)* Déterminer l'antécédent de $\frac{6}{5}$ par f.

*3)* Soit (D) la représentation graphique de f.

*a.* Montrer que (D) passe par le point $M(-6 ; 5)$.

*b.* Construire (D) dans un repère orthonormé.

**13** On considère la fonction linéaire g dont la représentation graphique passe par le point $M(1 ; -4)$.

*1)* Montrer que : $g(x) = -4x$

*2)a.* Montrer que : $g(5 - \sqrt{2}) = g(5) - g(\sqrt{2})$

*b.* Montrer que : $g(\frac{2}{3}\sqrt{3}) = \frac{2}{3}g(\sqrt{3})$

**14** Existe-t-il une fonction linéaire h telle que :

$h(-4) = 2$ et $h(3) = -9$?

**15** Déterminer la fonction linéaire f telle que :

$f(4) = f(-6) + 5$.

**16** Au moment des soldes, on peut lire sur la vitrine d'un magasin :

"30% de remise sur tous les articles "

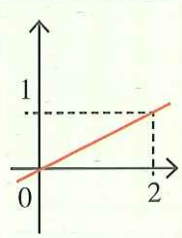
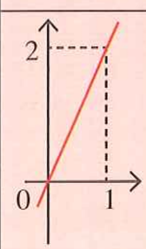
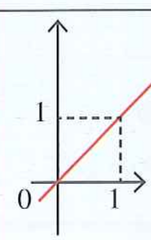
Montrer que le prix après réduction est une fonction linéaire du prix initial.

**17** Dans une station service, le prix du carburant vient d'augmenter de 4%.

Montrer que le nouveau prix est une fonction linéaire du prix initial.

## MON BILAN

***1) Indiquer la bonne réponse par A , B ou C :***

| | A | B | C |
|---|---|---|---|
| 1 Par la fonction linéaire de coefficient 5, à chaque nombre on associe ... | son produit par 5 | sa somme avec 5 | son quotient par 5 |
| 2 f est la fonction linéaire qui à $x$ assicie $-\frac{3}{7}x$ . Alors f(2) = ... | $-\frac{32}{7}$ | $-0,857$ | $-\frac{6}{7}$ |
| 3 Le prix P d'un objet subit une augmentation est ... | 1,1P | 110P | 0,9P |
| 4 Par une fonction linéaire g, l'image de 2 est -3 . le coefficient de g est ... | $-\frac{2}{3}$ | $-\frac{3}{2}$ | $-6$ |
| 5 La fonction linéaire qui à $x$ associe $2x$ est représentié sur la figure ... |  |  |  |

Corrections page : 247

***2) En cas d'erreur, voici quelques conseils :***

| | Savoir | Pratique |
|---|---|---|
| Ex: 1 | Définition | |
| Ex: 2 | Exemple 1 | |
| Ex: 3 | | Exemple 1 |
| Ex: 4 | | Exemple 2 |
| Ex: 5 | Exemple 3 | |

***3) Exercices pour la remédiation voir R12 page : 249***

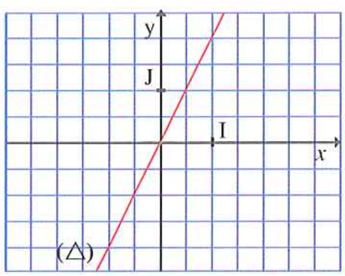
## REPRÉSENTATION GRAPHIQUE

**18** Tracer la représentation graphique de chacune des fonctions linéaires suivantes dans un repère orthonormé (O ; I ; J) :

*1)* $f_1(x) = -2x$ *2)* $f_2(x) = x$

*3)* $f_3(x) = \frac{1}{4}x$ *4)* $f_4(x) = -x$

**19** La fonction linéaire g est représentée ci-dessous par la droite (Δ).




*1)* Lire sur le graphique l'image de 1 et $-\frac{1}{2}$.

*2)* Lire sur le graphique le nombre dont l'image est 1.

*3)* Définir la fonction g.

**20** Dans un repère, on donne les points :

E(−35 ; 280) et F(43 ; −344).

La droite (EF) passe-t-elle par l'origine du repère?

Justifier la réponse.

**21** Dans un repère, on donne les points :

E(42 ; −77) et H(−17 ; 33).

Les points G et H appartiennent-ils à la courbe (Cf) de la fonction f : $x \longmapsto \frac{-11}{6}x$ .

**22** (O ; I ; J) est un repère orthonormé.

On considère les fonctions f et g définies par :

$f(x) = \frac{2}{3}x$ et $g(x) = \frac{3}{4}x$

*1)a.* Calculer f(−2) ; f(−1) et f(−3)

*b.* Calculer g(8) ; g($\frac{-7}{9}$) et g(4).

*2)* Tracer dans le même repère, les courbes des fonctions f et g.

**23** *1)* Calculer f(−3) et f($\frac{2}{15}$).

*2)* Déterminer l'antécédent de $\frac{6}{5}$ par f.

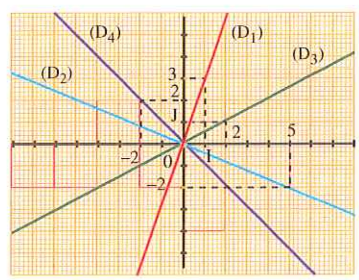
*3)* Soit (D) la représentation graphique de f.

*a.* Montrer que (D) passe par le point M(−6 ; 5).

*b.* Construire (D) dans un repère orthonormé.

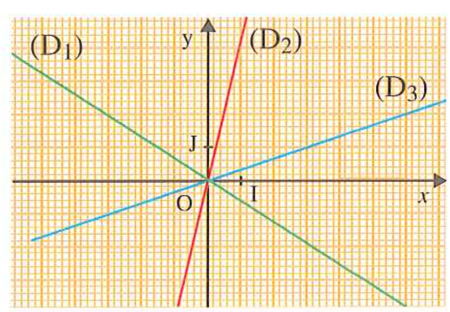
**24** On a représenté dans un même repère orthonormé (O ; I ; J), les fonctions linéaires f , g , h et k définies par :

$f(x) = \frac{1}{2}x$ ; $g(x) = 3x$ ; $h(x) = -\frac{2}{5}x$ ; $k(x) = -x$




Indiquer pour chaque fonction la droite qui la représente.

**25** Déterminer l'expression algébrique des fonctions f, g et h dont les droites




$(D_1)$ , $(D_2)$ et $(D_3)$ sont leurs représentations respectives.

## PROBLÈMES OUVERTS

**27** Une employé a gagné 1260 DH pour 18 heures de travail.

*1)* Calculer son salaire horaire.

*2)* Déterminer la relation qui lie son salaire f($x$) et le nombre d'heures de travail $x$.

*3)* Tracer la coube de la fonction linéaire obtenue pour $0 \leq x \leq 24$ . (1cm pour 2h et 1 cm pour 100DH)

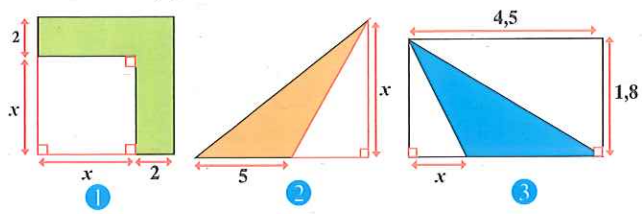
*4)a.* Déterminer graphiquement :

- le salaire correspondant à 10 heures de travail.
- le nombre d'heures de travail correspondant à un salaire de 1050DH.

*b.* Vérifier ces résultats par le calcul.

**28** Dans chacun des cas suivants, exprimer l'aire A($x$) de la surface coloriée en fonction de $x$.

Préciser si A($x$) est une fonction linéaire.




**28** On définit la relation f par :

$$3(x - 4) + 2f(x) = 3[-4 + f(x)]$$

*1)* Montrer que f est une fonction linéaire.

*2)* Déterminer les nombres a et b sachant que les points E(-3 ; a + 2) et F(b + 1 ; $\frac{b}{3}$) appartiennent à la représentation graphique de f.

*3)* Construire la courbe de f dans un repère orthonormé.

## CHALLENGES

**29** *1)* Exprimer les trois fonctions linéaires associées à chaque taux qui permettent de passer du prix HT au prix TTC [désigner par $x$ le prix HT]

| Taux | Fonction linéaire |
|---|---|
| **Taux faible** 2,3% | ... |
| **Taux réduit** 5,6% | ... |
| **Taux normal** 18,5% | ... |

*2)***a.** Le prix HT d'un objet A est 380 DH. Sa taxe est au taux réduit. Quel est son prix TTC?

**b.** Un objet B d'une valeur de 150 DH est vendu 179. Quel est le taux ?

**c.** Le prix TTC d'un objet est de 4084 DH. Sa taxe est au taux faible. Quel est son prix HT?

**30** a et b sont deux nombres réels.

On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = (a - 2)x - b + 3$$

Déterminer a et b pour que f soit une fonction linéaire de cœfficient -4.

**31** Soit f une fonction linéaire telle que :

$$3f(x) + f(1 - x) = 6x + 3 \text{ pour tout réel } x.$$

Calculer f($x$) en fonction de $x$.

## SITUATIONS PROPOSÉES AUX OLYMPIADES

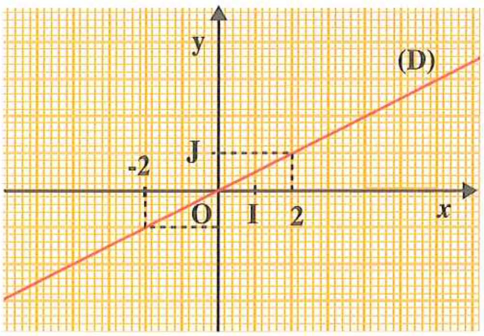
Soit f une relation telle que :

$$2f(x) + 3f(1 - x) = 15 - 5x \quad \text{pour tout réel } x.$$

**Calculer f($x$) en fonction de $x$.**

**32 Exercice résolu**

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé (O ; I ; J), on considère la droite (D) représentation graphique d'une fonction linéaire f (voir la figure ci-dessous).




*1)* Déterminer f(0) et f(–2).

*2)* Déterminer le nombre dont l'image est 1 par la fonction f.

*3)* Déterminer le cœfficient de la fonction f.

**Correction : 32**

*1)* **Déterminons f(0) et f(–2).**

On sait que f est une fonction linéaire.

Donc : f(0) = 0

D'après la figure, la droite (D) passe par le point de coordonnées (–2 ; –1).

Donc : f(–2) = –1

*2)* D'après la figure, la courbe (D) de la fonction f passe par le point de coordonnées (2 ; 1).

Donc 2 est l'antécédent de 1 par la fonction f.

*3)* On sait que f est une fonction linéaire.

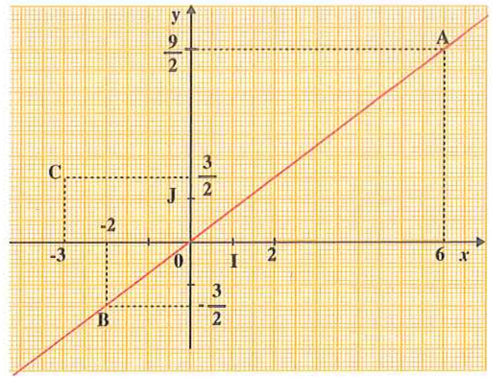
Donc : $\frac{f(2)}{2}$ est le cœfficient de la fonction f.

Or f(2) = 1, alors : $\frac{f(2)}{2} = \frac{1}{2}$

D'où $\frac{1}{2}$ est le cœfficient de la fonction f.

**33 Exercice résolu**

Dans un repère orthonormé (O ; I ; J), on considère les points $A\left(6 ; \frac{9}{2}\right)$, $B\left(-2 ; -\frac{3}{2}\right)$ et $C\left(-3 ; \frac{3}{2}\right)$ (voir la figure).




La droite (OA) est la représentation graphique de la fonction g.

*1)* Quelle est la nature de la fonction g?

*2)* Déterminer graphiquement g(–2).

*3)* Montrer que : $g(x) = \frac{3}{4}x$.

**Correction : 33**

*1)* **Nature de la fonction g.**

On sait que la droite (OA) passe par l'origine du repère .

Et (OA) est la courbe de la fonction g.

Donc, g est une fonction linéaire.

*2)* D'après la figure, la droite (OA) passe par le point $B(-2 ; \frac{-3}{2})$.

Donc, $g(-2) = \frac{-3}{2}$

*3)* g est une fonction linéaire et $g(-2) = \frac{-3}{2}$

D'où $\frac{g(-2)}{-2}$ est le cœfficient de g .

Or $\frac{g(-2)}{-2} = \frac{-3}{2} \times \frac{-1}{2} = \frac{3}{4}$

Donc : $g(x) = \frac{3}{4}x$.

**34** Soit g la fonction linéaire telle que : g(–1) = 3

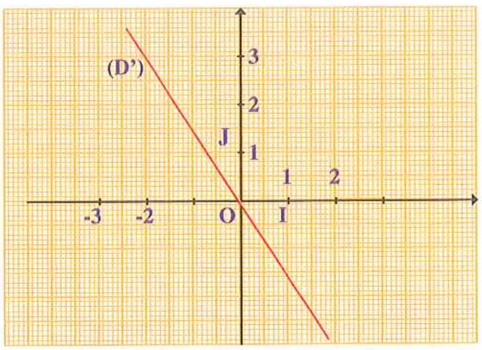
*1)* Déterminer le cœfficient de g.

*2)* Montrer que le point $B\left(\frac{1}{3} ;-1\right)$ appartient à la courbe de la fonction g.

*3)* Construire la courbe de la fonction g dans un repère orthonormé (O ; I ; J).

# JE ME PRÉPARE À L'EXAMEN RÉGIONAL

**35** Sur la figure ci-dessous, la droite (D') est la représentation graphique de la fonction linéaire g.




*1)* Déterminer graphiquement g(−1).

*2)* Déterminer $g(x)$ pour tout réel $x$.

*3)* Recopier et compléter le tableau suivant :

| | | | |
|---|---|---|---|
| $x$ | −4 | ... | −10 |
| $g(x)$ | ... | 3 | ... |

**36** On considère la fonction linéaire f définie par :

$$f(x) = \frac{2}{3}x$$

*1)* Calculer f(3) et f(−3).

*2)* Calculer le nombre dont l'image par f est 4.

*3)* Construire la représentation graphique de la fonction f.

**37** Soit g la fonction linéaire dont la représentation graphique passe par le point A(1 ; 2) dans un repère orthonormé (O ; I ; J).

*1)* Tracer la courbe de g.

*2)* Déterminer graphiquement l'image de 2 par g (c'est-à dire g(2)).

*3)* Déterminer graphiquement le nombre dont l'image par g est −2.

*4)* Montrer que : $g(x) = 2x$.

**38** *1)* Déterminer l'expression de la fonction linéaire f sachant que sa représentation graphique passe par A(2 ; 6).

*2)* Déterminer le nombre réel m tel que : f(m) = 9.

**39** On considère la fonction g définie par :

$$g(x) = 2(2x - 1) + 2$$

*1)* Montrer que g est une fonction linéaire.

*2)* Vérifier que : g(1) = 4.

**40** On considère la fonction linéaire g définie par : $g(x) = -\frac{1}{2}x$ et soit (D) sa représentation graphique dans un repère orthonormé (O ; I ; J).

*1)* Calculer g(2) et $g\left(\frac{1}{5}\right)$.

*2)* Déterminer le nombre dont l'image par g est $\sqrt{2}$ .

*3)* Construire (D).

**41** Soit g la fonction linéaire telle que : g(2) = 6 .

*1)* Déterminer l'expression de g.

*2)* Représenter la fonction g dans un repère orthonormé .

*3)* Le point E(100 ; 300) appartient-il à la représentation graphique de la fonction g?

**42** Soit g la fonction linéaire telle que : g(2) = 30 .

*1)* Montrer que 15 est le cœfficient de g.

*2)* Calculer g(0).

*3)* $A(\sqrt{3}\ ;\ 3\sqrt{3})$ appartient-il à la représentation graphique de la fonction g ? Justifier.

**43** Soit f une relation telle que pour tout nombre réel $x$ :

$$1 + 3(x + 5) - 7f(x) = 8(2 - f(x))$$

*1)* Montrer que f est une fonction linéaire.

*2)* Montrer pour tout nombre réel $x$ : $f(4x) = 4f(x)$

*3)* Déterminer les nombres réels a et b sachant que la représentation graphique de la fonction linéaire f passe pare les points : A(a ; 2) et $B\left(\frac{1}{2}\ ;\ b\right)$.

# FONCTIONS AFFINES

## Prérequis :

* Fonctions linéaires.
* Translation.

## Un point d'histoire

**Jean Bernoulli (1667 ; 1748)**

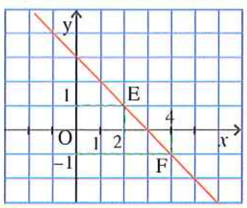
Jean Bernoulli est un mathématicien et physicien suisse.

Dans les «Mémoires de l'Académie des Sciences» , en 1718, Bernoulli définit une fonction d'une grandeur variable comme étant une quantité composée de quelque manière que ce soit de cette grandeur variable et de constantes.

## TEST DIAGNOSTIQUE : Je m'évalue

## CHOISIR LA BONNE RÉPONSE.

**Pour chaque question, cocher la bonne réponse en justifiant.**

| | Réponses : | | |
|---|---|---|---|
|   | E(1 ; 2) et F(-1 ; 4) | E(2 ; 1) et F(-1 ; 4) | E(2 ; 1) et F(4 ; -1) |
| f est une fonction linéaire telle que : $f(x) = \frac{1}{3}x$ ; donc ... | $f(0) = \frac{1}{3}$ | $f(1) = \frac{1}{3}$ | $f(-1) = 0$ |
| (O ; I ; J) est un repère. ($\Delta$) est la courbe d'une fonction linéaire f, donc ... | O est un point de ($\Delta$) | I est un point de ($\Delta$) | J est un point de ($\Delta$) |
| A(-2 ; 3) est un point de la courbe d'une fonction linéaire f ; donc ... | $f(3) = -2$ | $f(-2) = 3$ | $f(-2) - f(3) = 0$ |
| f est une fonction linéaire telle que $f(6) = -7$, alors le cœfficient de f est ... | $\frac{f(6)}{-7}$ | $\frac{f(6)}{6}$ | $\frac{f(-7)}{-7}$ |
| Si $3x + 2y = x - y + 3$ alors ... | $y = \frac{-2x+1}{3}$ | $y = \frac{-2}{3}x + 1$ | $y = \frac{-2}{3}x + 3$ |
| l'égalité $y + 3 = 2x + 5$ est vraie pour ... | $x = 1$ et $y = 10$ | $x = 0$ et $y = -8$ | $x = -1$ et $y = 0$ |

Solutions page : 246

# ACTIVITÉS : JE DÉCOUVRE

## Activité 1 Fonction affine

Le gérant d'une salle de cinéma propose une carte d'abonnement donnant droit à un tarif réduit pour chaque séance. Ainsi, la personne paie un abonnement annuel de 300 DH et 6 DH par séance.

1. Compléter le tableau suivant :

| Nombre de séances de cinéma | 2 | 6 | 11 | 15 | 24 |
|---|---|---|---|---|---|
| Somme payée annuellement en DH | ... | ... | ... | ... | ... |

2. Ce tableau est-il un tableau de proportionnalité?
3. On désigne par **f** la relation qui permet de calculer la somme **f(*x*)** à payer par un client qui a assisté à $x$ séances durant l'année.

   *a.* Montrer que : $f(x) = 6x + 300$ .

   La relation f est appelée une **fonction affine.**

   f(3) est la somme à payer pour 3 séances $6 \times 3 + 300 = 318$, donc : $f(3) = 318$

   On dit que 318 est l'image de 3 par f.

   *b.* Calculer f(8) et f(12).

## Activité 2 Représentation graphique d'une fonction affine

On considère la fonction affine f telle que : $f(x)= -2x + 3$ et la fonction linéaire g telle que : $g(x) = -2x$

1. Construire (Δ) la représentation graphique de g dans un repère orthonormé (O ; I ; J).
2. Représenter le point A(0 ; 3) et un point M $(x ; -2x)$.
3. Soit (Δ′) l'image de (Δ) par la translation de vecteur $\overrightarrow{OA}$.

   *a.* Construire (Δ′)

   *b.* Construire M' image de M par la translation de vecteur $\overrightarrow{OA}$.

   *c.* Quelle est la nature du quadailatère OMM′A?
4. *a.* Calculer la longueur MM′

   *b.* En déduire que : $y = -2x + 3$ où y est l'ordonnée de M′.

   On dit que (Δ′) est **la représentation graphique** de la fonction affine f.

## Activité 3 Coefficient d'une fonction affine

Soit f la fonction affine par : $f(x) = -3x + 4$.

1. Compléter le tableau suivant.

| $x$ | − 2 | ... | 3 | ... | − 1 |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | ... | 4 | ... | − 6 | ... |

2. *a.* Calculer : $\dfrac{f(-2) - f(3)}{-2 -3}$ ; $\dfrac{f(3) - f(-3)}{3 -(-3)}$ ; $\dfrac{f(-1) - f(-2)}{-1 -(-2)}$.

   *b.* Sans faire de calcul, donner le résultat de $\dfrac{f(1960) - f(2021)}{1960 - 2021}$
3. $x_1$ et $x_2$ sont deux nombres réels distincts.

   Calculer : $\dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$ .
4. Construire la représentation graphique de la fonction f.

## 1 FONCTIONS AFFINES

**Définition** Soit a et b deux nombes réels donnés.

La relation f qui à tout nombre réel $x$ fait correspondre le nombre a$x$ + b est appelée **une fonction affine** de **coefficient** a.

On la note : f : $x \longmapsto ax + b$, et on dit que $ax + b$ est l'image de $x$ par f , et on écrit : $f(x) = ax + b$.

b est appelé l'**ordonnée à l'origine .**

**Exemple :** La fonction f telle que $x \longmapsto -4x + 3$ est une fonction affine (a = -4 et b = 3)

On écrit : $f(x) = -4x + 3$.

- L'image de -2 est f(-2) : $f(-2) = -4(-2) + 3 = 8 + 3 = 11$.

  11 est l'image de -2 par f, et -2 est l'antécédent de 11 par la fonction affine f.
- $f(0) = -4(0) + 3 = 3$ , donc le nombre 3 est l'ordonnée à l'origine .

**Remarque 1 :**
- Toute fonction linéaire est une fonction affine particulière : $f(x) = ax$ peut s'écrire : $f(x) = ax + 0$
- Une fonction affine f définie par $f(x) = b$ est appelée **une fonction constante** : $f(x) = 0 \times x + b$

## 2 PROPRIÉTÉ DES FONCTIONS AFFINES

**Propriété 1** $x_1$ et $x_2$ sont deux nombres réels distincts.

Si f est une fonction affine, alors $\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$ est le cœfficient de la fonction f.

**Exemple :** Soit f une fonction affine telle que : $f(-2) = 4$ et $f(5) = 7$

Calculons f(3).

On sait que : $\dfrac{f(3)-f(5)}{3-5} = \dfrac{f(-2)-f(5)}{-2-5}$ (cœfficient de la fonction affine f).

Donc : $\dfrac{f(3)-7}{-2} = \dfrac{4-7}{-7}$ c'est-à-dire : $f(3) - 7 = -\dfrac{6}{7}$

$$f(3) = -\frac{6}{7} + 7$$

D'où : $f(3) = \dfrac{43}{7}$ .

## 3 REPRÉSENTATION GRAPHIQUE D'UNE FONCTION AFFINE

**Propriété 2** La représentation graphique d'une fonction affine dans un repère est une droite.

**Remarque 2 :** $M(x\ ;\ y)$ appartient à la courbe $(C_f)$ signifie que : $f(x) = y$

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O ; I ; J) .

On considère la fonction affine f telle que : $f(x) = ax + b$ .

On a : $f(0) = b$ et $f(1) = a + b$.

D'où la courbe de la fonction f est la droite qui passe par les points $A(0\ ;\ b)$ et $B(1\ ;\ a + b)$.

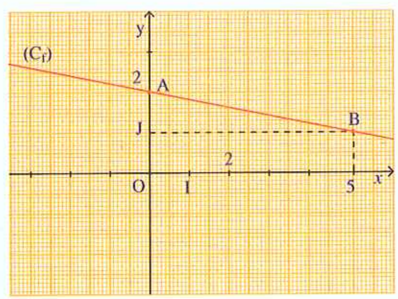
**Exemples :** *1)* Soit f la fonction affine définie par : $f(x) = -\frac{1}{5}x + 2$.

Traçons la représentation graphique de f.

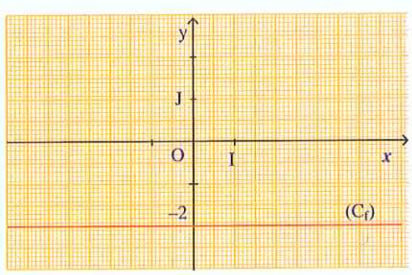
On a : $f(0) = 2$; donc $A(0\ ,\ 2)$ appartient à la courbe $(C_f)$.

Et $f(5) = -\frac{1}{5} \times 5 + 2 = 1$; donc $B(5\ ;\ 1)$ appartient à la courbe $(C_f)$

D'où (Cf) = (AB).




*2)* Soit g la fonction affine définie par : $g(x) = -2$




Représentation graphique d'une fonction constante g

**Remarque 3 :**
- La représentation graphique d'une fonction constante est parallèle à l'axe des abscisses.
- La représentation graphique de la fonction nulle est l'axe des abscisses.

## 1 UTILISER LES PROPRIÉTÉS D'UNE FONCTION AFFINE POUR DÉMONTRER QUE TROIS POINTS SONT ALIGNÉS

**Exemple 1** Soit les points : $A(-2 , -8)$ ; $B(4 ; 10)$ et $C(6 ; 16)$.

Démontrer que A,B et C sont des points alignés.

On détermine la fonction affine f dont la représentation graphique passe par les points A et B (par exemple) puis on vérifie que le point C appartient à la représentation de f

On a : f est une fonction affine. donc : $f(x) = ax + b$.

Les points $A(-2 ; -8)$ et $B(4 ; 10)$ appartiennent à la courbe (Cf),

cela entraîne que : $f(-2) = -8$ et $f(4) = 10$ .

- **Calculons a :** On a : $a = \dfrac{f(4) - f(-2)}{4 - (-2)} = \dfrac{10 - (-8)}{4 + 2} = \dfrac{18}{6} = 3$

Donc : $f(x) = 3x + b$.

- **Calculons b :**

On sait que : $f(4) = 10$.

Donc : $3 \times 4 + b = 10$

$12 + b = 10$

$b = 10 - 12 = -2$

Donc : $f(x) = 3x - 2$ .

- **Calculons f(6) :**

On a : $f(6) = 3 \times 6 - 2 = 18 - 2 = 16$

Puisque $C(6 ; 16)$, alors C appartient à la droite $(C_f)$.

Par conséquent les points A,B et C sont alignés.

## 2 RÉSOUDRE UN PROBLÈME

**Exemple 2** Monsieur MATHS doit effectuer fréquemment des trajets en train entre Casablanca et Marrakech en 1ère classe. Soit $x$ le nombre de trajets par an . Il a le choix entre deux options :

***Option A :*** Le prix d'un trajet 150 DH.

***Option B :*** on achète une carte à 500 DH et on paie 100 DH par trajet.

**1** On désigne par f($x$) le prix total à payer avec l'option A et on désigne par g($x$) le prix total à payer avec l'option B.

**a.** Exprimer f($x$) et g($x$) en fonction de $x$.

**b.** Calculer f(18) et g(18).

**2** Dans un repère orthonomé (O ; I ; J), représenter les deux fonctions f et g.

Prendre :
- Sur l'axe des abscisses, 0,5cm pour un trajet.
- Sur l'axe des ordonnées, 1cm pour 200DH.

**3** A l'aide du graphique, déterminer le nombre de trajets pour lequel l'option A est plus avantageuse que l'option B.

Vérifier ce résultat algébriquement.

**1** *a.* On a : $f(x) = 150x$ ***( option A )***

$g(x) = 100x + 500$ ***( option B )***

*b.* • **Calcul de f(18) :**

On a : $f(x) = 150\,x$

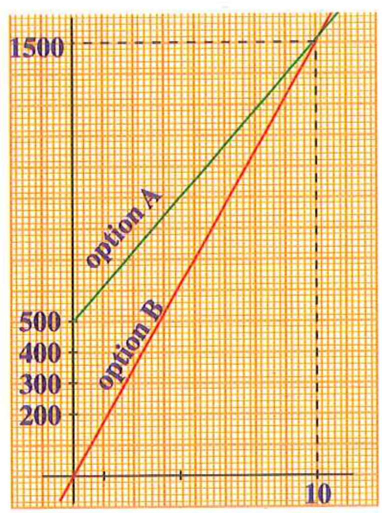
D' où : $f(18) = 150 \times 18 = 2700$

• **Calcul de g(18) :**

On a : $g(x) = 100x + 500$

Donc : $g(18) = 100 \times 18 + 500 = 2300$.

**2** Représentations graphiques des deux options :




**3** Graphiquement, on constate que l'option A est plus avantageuse si l'on doit effectuer moins de 10 trajets.

On peut confirmer ce résultat par le calcul en résolvant l'inéquation :

$$f(x) < g(x).$$

$$150x < 100x + 500$$

$$150x - 100x < 500$$

$$50x < 500$$

$$x < \frac{500}{50}$$

Donc : $x < 10$.

# INVESTISSEMENT
## Je m'entraîne

### POUR RÉVISER SON COURS

**1** Recopier et compléter les phrases suivantes :

- La fonction f : $x \longmapsto -6x+7$ est une fonction .... de cœfficient .... et .... est l'ordonnée à l'origine.

On la note .... $= -6x + 7$

- Sa représentation graphique est une ....

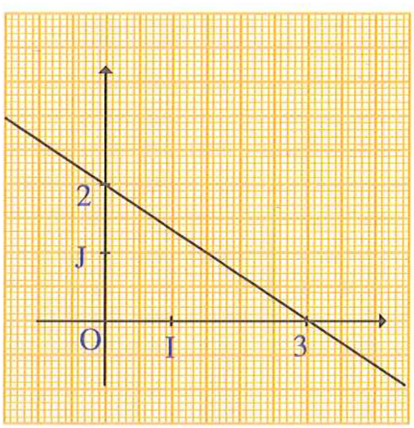
**2** On considère la fonction affine f définie par :

$$f(x) = -3x + 4.$$

Recopier et compléter les égalités suivantes :

- $f(-2) = -3 \times ... + 4 = ...$
- L'image de 5 par f : $f(...) = -3 \times ... + 4 = ...$
- L'antécédent de 2 est $\frac{2}{3}$ : $f(...) = ...$
- $\frac{f(4) - f(-5)}{4 - (-5)} = ...$

**3** On considère ci-dessous la représentation graphique de la fonction affine f.




Recopier et compléter :

L'image de 3 est ...

L'antécédent de 0 est ...

Le cœfficient de f est ...

L'ordonnée à l'origine est ...

L'expression de la fonction f est : $f(x) = ...\, x + ...$

**4** Mettre une croix où la réponse est oui

| La fonction .... est une fonction | affine | linéaire | constante | non affine |
|---|---|---|---|---|
| $f(x) = -8x + 2$ | ... | ... | ... | ... |
| $g(x) = 3x^2 - 4$ | ... | ... | ... | ... |
| $h(x) = \sqrt{7}x$ | ... | ... | ... | ... |
| $i(x) = 5x - 2 + 5x$ | ... | ... | ... | ... |
| $j(x) = \frac{7 - 2x}{3}$ | ... | ... | ... | ... |
| $k(x) = \frac{7}{6x - 1}$ | ... | ... | ... | ... |

**5** On considère les trois fonctions suivantes :

$f : x \longmapsto -4$ ; $g : x \longmapsto 3x + 2$ ; $h : x \longmapsto -6$

*1)* Quelle est la nature de ces trois fonctions ?

*2)* Pour chaque fonction, calculer l'image de $\frac{2}{9}$ .

*3)* Pour chaque fonction, déterminer les antécédents de $\frac{3}{5}$ .

### REPRÉSENTATION GRAPHIQUE

**6** Représenter graphiquement dans un même repère orthonormé (O ; I ; J) les fonctions suivantes :

$f(x) = -x + 1$ ; $g(x) = 2x - 1$ et $h(x) = \frac{3}{4}x - 1$

**7** Dans un repère orthonormé (O ; I ; J) du plan, on considère les points :

E(0 ; 2) ; F(–3 ; 4) ; G(–5 ; –3) et H(4 ; –2).

*1)* Tracer les droites (EF) , (HG) et (EG).

*2)* Déterminer les fonctions affines représentées par les trois droites précédentes.

**8** *1)* Représenter dans un même reprère les fonctions f et g définies par : $f(x) = -\frac{2}{3}x + 4$ et $g(x) = x - 1$.

*2)* Lire sur le graphique les coordonnées du point A d'intersection des deux représentations graphiques.

*3)* En résolvant l'équation $f(x) = g(x)$, déterminer les coordonnées de A.

**9** (O ; I ; J) est un repère orthonormé .

*1)* Construire la droite (Δ) la courbe de la fonction f définie par : $f(x) = -\frac{1}{3}x - 2$

*2)a.* Placer les points E(4 ; –2) et F(–2 ; 4).

*b.* Déterminer la fonction g représentée graphiquement par la droite (EF).

**10** *1)* Construire (D) la courbe de la fonction f définie par :

$$f(x) = \frac{3}{4}x + \frac{1}{4}$$

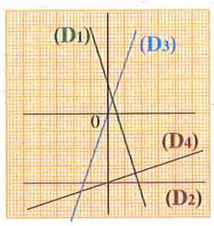
*2)* La droite (D) coupe l'axe des abscisses en M et l'axe des ordonnées en N.

Calculer les coordonnées des points M et N.

**11** On a représenté dans un même repère orthonormé, les fonctions affines f , g , h et i definies par :

$f(x) = -3x + 1$ ; $g(x) = 2x$

$h(x) = \frac{1}{4}x - 2$ ; $i(x) = -2$.




Indiquer pour chaque fonction la droite qui la représente.

## DÉTERMINATION D'UNE FONCTION AFFINE

**12** f et g sont deux fonctions définies par :

$$f(x) = ax - 2 \quad \text{et} \quad g(x) = ax + 3$$

Calculer f(-3) sachant que : g(2)= –5.

**13** f et g sont deux fonctions affines telles que :

$$f(x) = ax + 2 \quad \text{et} \quad g(x) = -\frac{3}{4}x + b$$

*1)* Calculer a et b sachant que : f(8) = 3 et g(8) = 3

*2)* Résoudre l'équation : f(x) = g(x).

**14** Soit f une fonction affine définie par : $f(x) = ax + b$.

*1)* Calculer $f(x + 1) - f(x)$.

*2)* Sachant que : f(4) = –12 et f(5)= –18 , calculer a et b.

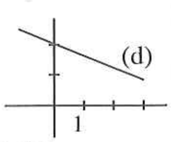
**15** f et g sont deux fonctions définies par :

$$f(x) = ax + b \quad \text{et} \quad g(x) = ax.$$

Sachant que : f(2) = 7 et g(2) = –4 , calculer a et b.

## MON BILAN

***1) Indiquer la bonne réponse par A , B ou C :***

| | A | B | C |
|---|---|---|---|
| 1 L'image des nombre – 6 par la fonction affine $x \longmapsto 3x - 6$ | 24 | 12 | –24 |
| 2 L'antécédent du nombre O par la fonction affine f définie par : $f(x) = -2x + 3$ est : | 3 | $\frac{3}{4}$ | $-\frac{3}{4}$ |
| 3 f est une fonction affine $x \longmapsto 3x + b$ telle que : f(9) – f(1) = 4. Alors ... | a = 8 | a = 2 | a = 0,5 |
| 4 est une fonction affine $x \longmapsto ax + b$ elle que : f(–1) = 7 et f(2) = – 5 . Alors ... | a = – 4<br>b = 3 | $a = -\frac{1}{4}$<br>$b = \frac{27}{4}$ | $a = -\frac{9}{6}$<br>$b = -\frac{9}{2}$ |
| 5 La droite (d) représente la fonction affine f qui à $x$ anoire ...  | $-3x + 1$ | $-\frac{1}{3}x + 2$ | $\frac{1}{3}x + 2$ |



Corrections page : 247

***2) En cas d'erreur, voici quelques conseils :***

| | Savoir | Pratique |
|---|---|---|
| Ex: 1 | Exemple 1 | |
| Ex: 2 | Exemple 2 | |
| Ex: 3 | Définition | |
| Ex: 4 | Définition | |
| Ex: 5 | Propriété 2 | |

***3) Exercices pour la remédiation voir R14 page : 249***

## DÉTERMINATION D'UNE FONCTION AFFINE

**16** Déterminer la fonction affine f dans chacun des cas suivants :

*1)* L'image de 2 par f est $-3$ et l'image de $-2$ par f est 4.

*2)* $f(0) = 4$ et $f(-2) = 0$

*3)* La droite représentative de f passe par les points :

$$A\left(-\frac{6}{7} ; 1\right) \quad \text{et} \quad B\left(1 ; \frac{7}{6}\right).$$

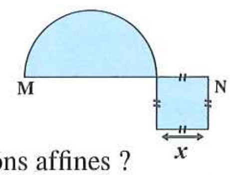
**17** On considère la figure ci-contre: MN = 8

On désigne par :

$p(x)$ : le périmètre de la figure.

$a(x)$ : l'aire de la figure.

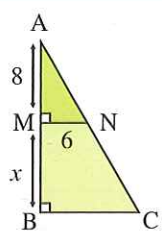
$p(x)$ et $a(x)$ sont-elles des fonctions affines ?




**18** Sur la figure ci-contre :

MAN et BAC sont deux triangles rectangles en M et B.

*1)* Exprimer AB, BC et AC en fonction de $x$.




*2)* Montrer que le périmètre p du triangle BAC est une fonction affine.

*3)a.* Calculer p lorsque : $x = 4{,}8$.

*b.* Calculer $x$ lorsque : $p = 45{,}8$

**19** On cosidère la fonction affine f définie par : $f(x) = -4x + 3$.

*1)* Calculer le réel a sachant que :

$$f(a - 2) - f(2a) = 3a + 1$$

*2)* soit g la fonction telle que : $g(x) = f(x - 1) - 7$

Montrer que g est une fonction linéaire.

**20** Soit f la fonction définie par : $f(x) = x^2 - 3x - 4$.

*1)* Calculer f(4) et f(−2).

*2)* Déterminer la fonction affine g telle que :

$$g(4) = f(4) \quad \text{et} \quad g(-2) = f(-2).$$

**21** *1)* Soit f la fonction linéaire telle que : $f(x) = -5x$.

*a.* Calculer $f(-1)$

*b.* Calculer a sachant que la courbe (Cf) de f passe par le point $A(a - 1 ; 2a)$

*c.* Construire (Cf) dans un repère orthonomé (O ; I ; J).

*2)* Déterminer la fonction affine g sachant que :

$$B(-2 ; 0) \in (Cg) \quad \text{et} \quad g(-4) - g(2) = -1$$

*3)* Résoudre algébriquement l'inéquation :

$$2g(x) - 1 \leq f(x + 2)$$

**22** *1)* On considère les fonctions f et g définies par .

$$f(x) = (4x - 1)^2 - 2 \quad \text{et} \quad g(x) = 4(2x^2 + 1)$$

f et g sont-elles des fonctions affines?

*2)* Soit S la fonction telle que : $S(x) = f(x) - 2g(x)$

*a.* Montrer que S est une fonction affine.

*b.* Construire la courbe de la fonction S .

## PROBLÈME DE LA VIE QUOTIDIENNE

**23** A l'occasion des soldes, un commerçant accorde une réduction de 10% sur le prix de tous les articles.

*1)* Exprimer $f(x)$ la remise sur un prix $x$ en dirhams.

*2)* Exprimer $g(x)$ le nouveau prix après réduction.

**24** Le prix à payer pour un trajet en taxi comprend une prise en charge fixe et une somme proportionelle au nombre de kilomètres parcourus.

Un passager $P_1$ a payé 12 DH un trajet de 4 km tandis qu'un passager $P_2$ a payé 18,25 DH pour un trajet de 6,5 kilomètres.

Déterminer le montant de la prise en charge et le prix du kilomètre parcouru.

**25** Soit f la fonction affine définie par : $f(x) = -3x + 2$

*1)* Calculer f(−2) et f(2).

*2)* Exprimer $f(-x)$ en fonction de $x$.

*3)* Montrer que : $f(x + 1) = -3x - 1$

*4)* Montrer que : $f(x - 3) - f(x + 3) = 18$

## PROBLÈMES OUVERTS

**26** Pour la location d'une voiture, on propose :

| | Forfait | Prix de 1 km |
|---|---|---|
| Tarif 1 | 0 | 20 DH |
| Tarif 2 | 1000 DH | 13,50 |

*1)* On désigne par $x$ la distance parcourue (en km).

*a.* Exprimer $f(x)$ la somme à payer en **tarif 1** en fonction de $x$.

*b.* Exprimer $g(x)$ la somme à payer en **tarif 2** en fonction de $x$.

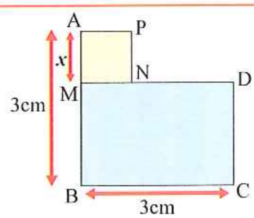
*2)* Quelle tarif choisir, si on veut parcourir un trajet de 542 km?

*3)* A partir de quelle distance le **tarif 2** est plus avantageux que le **tarif 1 ?**

**27**

Dans la figure ci-contre, M est un point variable du segment [AB].

On pose : $AM = x$




AMNP est un carré et BCDM est un rectangle.

*1)a.* Préciser les valeurs possibles de $x$.

*b.* Représenter la figure lorsque : AM = 2cm.

c. Exprimer les périmètres du carré AMNP et du rectangle BCDM en fonction de $x$ .

*2)* Déterminer $x$ de façon que ces périmètres soient égaux. Quel est alors le périmètre commun?

*3)* Tracer dans un même repère, les représentations graphiques des deux fonction affines :

$$f : x \longmapsto 4x \quad \text{et} \quad g : x \longmapsto -2x + 12$$

Comment contrôler sur le graphique le résultat de la troisième question?

## CHALLENGES

**28** Déterminer les fonctions affines f telles que :

$$[f(1)]^2 - [f(0)]^2 = 0.$$

**29** Soit la fonction f telle que pour tout nombre réel $x$ :

$$2f(3 - x) + f(x) = -3x$$

Montrer que f est une fonction affine.

**30** Déterminer la fonction affine f telle que pour tout nombre réel $x$ : $f(x) + 3f(2 - x) = 4x$

**31** Soit f une fonction telle que pour tous réels $x$ et y :

$$f(x \times y) = f(x) \times f(y) - x - y$$

*1)* Montrer que $f(1) = 2$

*2)* Démontrer que f est une fonction affine.

**32** Soit f une fonction telle que pour tous réels $x$ et y :

$$f(x + y) = f(x) + f(y) .$$

*1)* Montrer que $f(0) = 0$

*2)* Montrer que : $f(-x) = -f(x)$ pour tout réel $x$.

*3)* Calculer $f(20)$ sachant que $f(1) = 2$

*4)* Soit n un entier naturel non nul.

On pose : $f(1) = a$.

Calculer $f(n)$ et $f(-n)$ en fonction de a.

**33** Soit f et g deux fonctions affines telles que pour tous réels $x$ et y :

$$f(x + g(y)) = 2x + y + 5$$

Calculer $g(x + f(y))$.

## SITUATIONS PROPOSÉES AUX OLYMPIADES

f est une fonction affine telle que :

$$f(f(f(x))) = 8x - 7$$

**Calculer f(1).**

## JE ME PRÉPARE À L'EXAMEN RÉGIONAL

### 34 Exercice résolu

On considère la fonction affine f définie par :

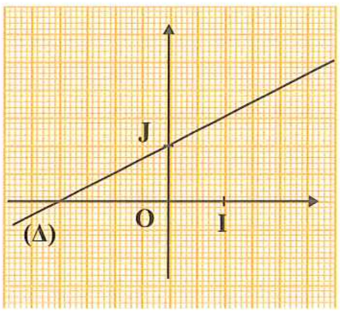
$$f(x) = \frac{1}{2}x + 1$$

*1)* Calculer l'image de 2 par la fonction f.

*2)* Déterminer le nombre dont l'image est 0 par f.

*3)* La droite (Δ) représentée ci-dessous ,

est-elle la représentation graphique de la fonction f?




### Correction : 34

*1)* On a : $f(x) = \frac{1}{2}x + 1$

Donc : $f(2) = \frac{1}{2} \times 2 + 1 = 1 + 1 = 2$ ;

alors : f(2) = 2.

2 est l'image de 2 par f.

*2)* Soit a l'antécédent de 0 par f.

On a : f(a) = 0; donc : $\frac{1}{2}a + 1 = 0$ et $a = -2$

*3)* Sur le graphe, on constate que (Δ) passe par les points A(2 ; 2) et B(−2 ; 0).

Or : f(2) = 2 et f(−2) = 0 , par conséquent la droite (Δ) est la représentation graphique de f.

### 35 Exercice résolu

*1)* Sur la figure ci-dessous, la droite (D) coupe l'axe des abscisses au point d'abscisse 6 et coupe l'axe des ordonnées au point d'ordonnée -3.

***a.*** Quelle est la nature de la fonction f représentée par la droite (D)?

***b.*** Vérifier que : $f(x) = \frac{1}{2}x - 3$

***c.*** Trouver l'expression de la fonction linéaire g sachant que sa courbe coupe la droite (D) en A(4 ; −1).

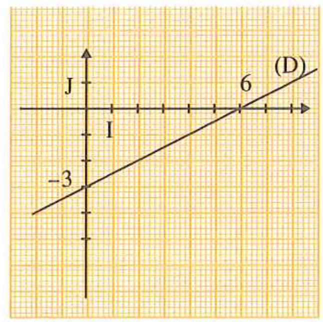
*2)* On considère la fonction h telle que :

$$h(x) = -x + 3$$

***a.*** Déterminer le nombre $x$ dont l'image par la fonction h est −1.

***b.*** En déduire que les représentations graphiques des fonctions f , g et h se coupent au point A(4 ; −1).

*3)* Résoudre l'inéquation : $f(x) \leq g(x)$




### Correction : 35

***1)a.*** Puisque la droite (D) est la courbe de la fonction f, alors , f est une fonction affine.

***b.*** On sait que : E(6 ; 0) et F(0 ; -3) appartiennent à (D).

Donc : f(6) = 0 et f(0) = −3

On a : $f(x) = ax + b$ car f est une fonction affine.

Et on a : f(0) = −3. Alors : b = −3 .

$$\text{On a : } a = \frac{f(6) - f(0)}{6 - 0} = \frac{0 - (-3)}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

D'où: $f(x) = \frac{1}{2}x - 3$.

***c.*** g est une fonction linéaire, donc : $g(x) = a'x$ .

Et A (4 ; −1) apprtient à (Cg) donc : g(4) = −1

Il en résulte que $a' = \frac{g(4)}{4} = \frac{-1}{4}$

D'où : $g(x) = \frac{-1}{4}x$

***2)a.*** Soit m l'antécédent de −1 par h.

Donc h(m) = −1.

Or : $h(x) = -x + 3$, alors :

$-m + 3 = -1$

$-m = -4$

$m = 4$

L'antécédent de $-1$ est 4 par la fonction h.

**b.** D'après la question précédente, $h(4) = -1$.

Et $A(4\ ;\ -1)$ ppartient à (Ch)

Or A est un point de (D) et A est un point de (Cg), alors A appartient aux courbes des fonctions f, g et h.

*3)* **Résolution de l'inéquation :** $f(x) \leq g(x)$ .

On a : $f(x) \leq g(x)$

signifie : $\frac{1}{2}x - 3 \leq -\frac{1}{4}x$

$2x - 12 \leq -x$

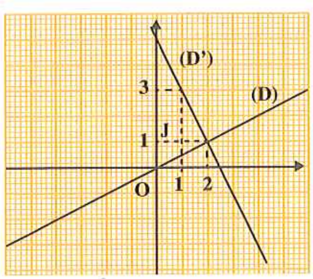
$3x \leq 12$

$x \leq 4$

Donc les solutions de cette inéquation sont les réels inférieurs ou égaux à 4.

**36** (O ; I ; J) est un repère orthonormé.

On considère les droites (D) et (D') où (D) est la représentation graphique d'une fonction linéaire f. (Voir la figure).




*1)a.* Déterminer f(0) et f(−2).

*b.* Déterminer le nombre dont l'image par f est 1.

*c.* Déterminer le cœfficient de f.

*2)* On considère la fonction g telle que : $g(x) = -2x + 5$.

*a.* Calculer g(1) et g(2).

*b.* Montrer que (D') est la courbe de g.

*3)* Vérifier graphiquement que : f(2) = g(2).

**37** On considère la fonction affine f de cœfficient $\frac{-3}{2}$ telle que : $f(4) = -3$ et (D) sa représentation graphique.

*1)a.* Montrer que : $f(x) = \frac{-3}{2}x + 3$ pour tout réel $x$ .

*b.* Calculer f(2).

*c.* Déterminer le réel a tel que : $f(a) = 6$.

*2)* La représentation graphique ($\Delta$) d'une fonction affine g passe par l'origine du repère et par le point $A(2\ ;\ 3)$.

*a.* Quelle est la nature de la fonction g?

*b.* Déterminer $g(x)$ pour tout réel $x$.

*c.* Verifier $f(1) = g(1)$.

*d.* En déduire les coordonnées du point de d'intersection des droites (D) et ($\Delta$).

**38** *1)* Soit f la fonction linéaire telle que : $f(-2) = 3$ .

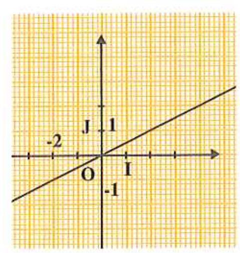
*a.* Montrer que : $f(x) = -\frac{3}{2}x$ .

*b.* Construire dans un repère orthonormé la courbe de f.

*2-* Soit g la fonction affine dont la courbe coupe la courbe de f au point $A(-2\ ;\ 3)$ et telle que : $g(1) = 0$

Déterminer $g(x)$ en fonction de $x$.

**39** *1)* la figure ci-contre représente l a courbe de la fonction linéaire g dans un repère orthonormé.




*a.* Déterminer g(−2).

*b.* Déterminer le nombre dont l'image par g est 1.

*c.* Déterminer le cœfficient de g.

*2)* On considère la fonction affine f définie par :

$f(x) = -\frac{1}{2}x + 1$ et (D) sa courbe .

*a.* Calculer f(−2) et f(1).

*b.* Déterminer les coordoonées du point d'intersection de (D) avec l'axe des abscisses.

*c.* Construire (D).

*d.* Déterminer graphiquement le nombre a tel que :

$f(a) = 1$.

# REPÈRE DANS LE PLAN

**Prérequis :**

* Repère.
* Translation.
* Pythagore.

## Un point d'histoire

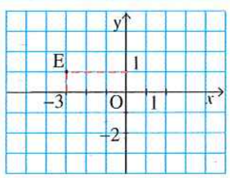
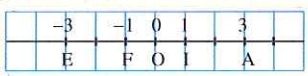
**René Descartes (1596 ; 1650)**

La création de la géométrie analytique est l'oeuvre de Descartes. Il propose de résoudre des problèmes de géométrie par le recours systématique au calcul algébrique. Dans sa «Géométrie» de 1637, Descartes en formule le principe. Il s'agit de représenter grandeurs connues et inconnues par des lettres, et de trouver autant de relations entre ces grandeurs qu'il y a d'inconnues au problème.

## TEST DIAGNOSTIQUE : Je m'évalue

## CHOISIR LA BONNE RÉPONSE.

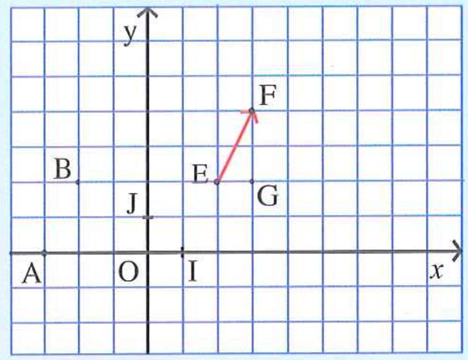
**Pour chaque question, cocher la bonne réponse en justifiant.**

| | Réponses : | | |
|---|---|---|---|
|   | $x_E = 1$ et $y_E = -3$ | E(-3 ; 1) | $x_E = -1$ et $y_E = 3$ |
|   | $EF = x_E - x_F$ | $EF = -1 - 3$ | $EF = -1 + 3$ |
| -8 -(-3) est égal à ... | -11 | 5 | -5 |
| $(6 - (-2))^2$ est égal à ... | $4^2$ | 64 | -64 |
| $\dfrac{-7 + (-4)}{2}$ est égal à ... | $\dfrac{-7-4}{2}$ | $\dfrac{11}{2}$ | -5,5 |
| Si ABC est un triangle rectangle en A , alors... | AB + BC = AC | $AB^2 + BC^2 = AC^2$ | $BC^2 = AB^2 + AC^2$ |
| M est l'image de N par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$ , donc ... | $\overrightarrow{NB} = \overrightarrow{AM}$ | $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{NM}$ | BNAM est un parallélogramme |
| M milieu de [AB] , donc ... | $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AM}$ | $\overrightarrow{MA} = \overrightarrow{MB}$ | $\overrightarrow{MB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BA}$ |

Solutions page : 246

## Activité 1 Coordonnées d'un point et de son translaté

**1** Recopier la figure ci contre; puis déterminer les coordonnées des points E , F , G , A et B.




**2** *a.* Construire $A_1$ image de A par la translation de vecteur $\overrightarrow{EG}$ puis déterminer les coordonnées de $A_1$.

*b.* Construire $A_2$ image de $A_1$ par la translation de vecteur $\overrightarrow{GF}$ puis déterminer les coordonnées de $A_2$.

**3** *a.* Construire $B_1$ image de B par la translation de vecteur $\overrightarrow{EG}$ puis déterminer les coordonnées de $B_1$.

*b.* Construire $B_2$ image de $B_1$ par la translation de vecteur $\overrightarrow{GF}$, puis déterminer les coordonnées de $B_2$.

Montrer que : $\overrightarrow{AA_2} = \overrightarrow{BB_2} = \overrightarrow{EF}$ .

## Activité 2 Coordonnées d'u vecteur

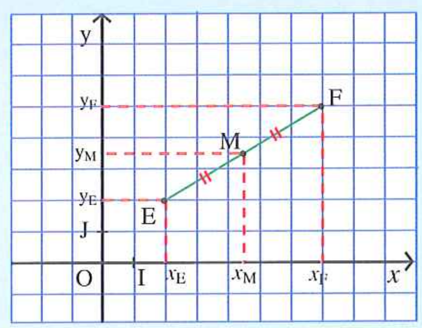
**1** On considère le point E (-3 , 4) et le vecteur $\overrightarrow{EF}$ (2 ; -5) (dans un repère orthonormé donné)
Déterminer les coordonnées de F.

**2** Soit A ($x_A$ ; $y_A$) et B ($x_B$ ; $y_B$) et le vecteur $\overrightarrow{AB}$ (a;b)

*a.* Déterminer les coordonnées de B .

*b.* Montrer que : $a = x_B - x_A$ et $b = y_B - y_A$.

## Activité 3 Coordonnées du milieu d'un segment




Dans le plan rapporté à un repère orthonormé (O ; I ; J) ,
On considère les points E($x_E$ ; $y_E$) et F ($x_F$ ; $y_F$) .

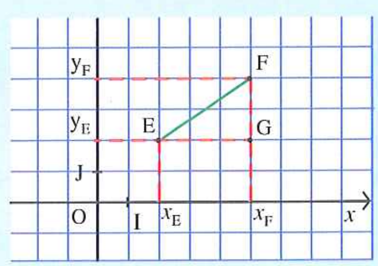
**1** Soit M ($x_M$ ; $y_M$ ) le milieu de [EF] (figure 2 ).

Montrer que : $x_M - x_E = x_F - x_M$ et $y_M - y_E = y_F - y_M$ .

**2** En déduire que : M $\left(\dfrac{x_E + x_F}{2} ; \dfrac{y_E + y_F}{2}\right)$.

## Activité 4 Distance entre deux points

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé (O ; I ; J) (figure 3) , on considère les points E ($x_E$ ; $y_E$) et F($x_F$ ; $y_F$) tels que : $x_E < x_F$ et $y_E < y_F$ .
Soit le point G ($x_F$ ; $y_E$).



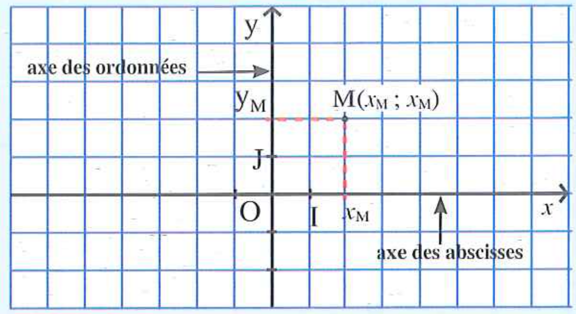

**1** *a.* Calculer EG en fonction de $x_E$ et $x_F$ .

*b.* Calculer FG en fonction de $y_E$ et $y_F$ .

**2** En déduire que : $EF = \sqrt{(x_F - x_E)^2 + (y_F - y_E)^2}$ .

# SAVOIR
## Je révise

## 1 COORDONNÉES D'UN POINT




Le plan est muni d'un repère orthonormé (O ; I ; J) :

$x_M$ est **l'abscisse** du point M, et $y_M$ est **l'ordonnée** du point M.

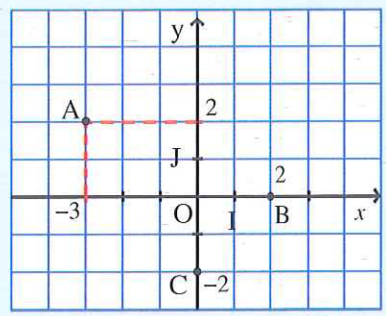
$x_M$ et $y_M$ sont **les coordonnées** de M, on écrit : $M(x_M\ ;\ y_M)$.

**Remarque :**
- Si M est un point de l'axe des abscisses, alors $y_M = 0$ .
- Si N est un point de l'axe des ordonnées, alors $x_N = 0$ .

Ainsi : $M(x_M ; 0)$ appartient à la droite (OI) et $N(0 ; y_N)$ appartient à la droite (OJ).

**Exemple :** Sur la figure ci-contre, les coordonnées des points A , B et C :

A (-3 ; 2)
B (2 ; 0)
C (0 ; -2)




## 2 COORDONNÉES D'UN VECTEUR

**Propriété 1** Dans un repère, si deux points $A(x_A ; y_A)$ et $B(x_B ; y_B)$, alors le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $(x_B - x_A\ ;\ y_B - y_A)$. On écrit : $\overrightarrow{AB}\ (x_B - x_A ; y_B - y_A)$ .

**Exemple :** On donne : A(-3 ; 4) et B(-2 ; -1).

On a : $x_B - x_A = -2-(-3) = -2 + 3 = 1$ et $y_B - y_A = -1 - 4 = -5$

Donc : $\overrightarrow{AB}(1 ; -5)$

## 3 VECTEURS ÉGAUX

**Propriété 2** Deux vecteurs sont égaux signifie qu'ils ont les mêmes coordonnées.

**Autrement dit :** $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ signifie que : $x_B - x_A = x_D - x_C$ et $y_B - y_A = y_D - y_C$

## 4 COORDONNÉES DE LA SOMME DE DEUX VECTEURS

**Propriété 3**

Si $\overrightarrow{AB}$ (a ; c) et $\overrightarrow{CD}$ (b ; d), alors $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}$ (a + b ; c + d)

**Exemple :** On donne $\overrightarrow{AB}(-4 ; -2)$ et $\overrightarrow{CD}(6 ; -3)$, donc : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}$ $(-4 + 6 ; -2 -3)$

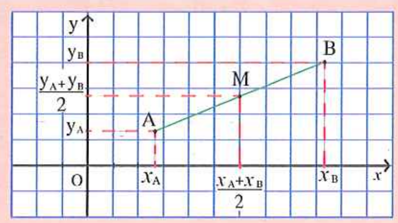
D'où : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}$ $(2 ; -5)$

## 5 COORDONNÉES DU MILIEU D'UN SEGMENT

**Propriété 4**

Soit $A(x_A ; y_A)$ et $B(x_B ; y_B)$ deux points dans un repère.

Si M est le milieu de [AB] , alors : $x_M = \dfrac{x_A + x_B}{2}$ et $y_M = \dfrac{y_A + y_B}{2}$




**Exemple :** On donne $A(-7 ; 2)$ et $B(-1 ; -4)$

Les coordonnées de M milieu de [AB] : $x_M = \dfrac{x_A + x_B}{2} = \dfrac{-7 - 1}{2} = -4$ et $y_M = \dfrac{y_A + y_B}{2} = \dfrac{2 - 4}{2} = -1$

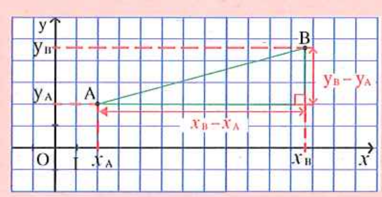
Donc : $M(-4 ; -1)$.

## 6 DISTANCE DE DEUX POINTS DANS UN REPÈRE ORTHONORMÉ

**Propriété 5**

Soit $A(x_A ; y_A)$ et $B(x_B ; y_B)$ deux points dans un repère orthonormé, alors :

$AB^2 = (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2$ et $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$.




**Exemple :** On donne $A(-0{,}5 ; 1{,}5)$ et $B(3 ; -0{,}5)$

$AB^2 = (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 = (3 + 0{,}5)^2 + (-0{,}5 - 1{,}5)^2$

$AB^2 = 3{,}5^2 + (-2)^2 = 16{,}25$

Donc : $AB = \sqrt{16{,}25}$ cm et $AB \simeq 4$ cm .

## DÉMONTRER AVEC LES COORDONNÉES D'UN POINT ET LES COMPOSANTES D'UN VECTEUR

**Exemple 1**

Dans un repère orthonormé (O ; I ; J), on considère les points :

$$A(2\,;-\frac{1}{3})\ ;\ B(-\frac{1}{2}\,;3)\ \text{et}\ C(-2\,;-3).$$

Déterminer les coordonnées du point D sachant que ABCD est un parallélogramme.

On sait que ABCD est un parallélogramme. donc : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$.

Cela entraîne que : $x_B - x_A = x_C - x_D$ et $y_B - y_A = y_C - y_D$

Puisque : $A\left(2\,;-\frac{1}{3}\right)$ ; $B\left(-\frac{1}{2}\,;3\right)$ et $C\left(-2\,;-3\right)$,

alors : $-\frac{1}{2} - 2 = -2 - x_D$ et $3 - \left(\frac{1}{3}\right) = -3 - y_D$

$-\frac{5}{2} = -2 - x_D$ et $\frac{10}{3} = -3 - y_D$

$x_D = -2 + \frac{5}{2}$ et $y_D = -3 - \frac{10}{3}$

$x_D = \frac{1}{2}$ et $y_D = \frac{19}{3}$

Donc : $D\left(\frac{1}{2}\,;-\frac{19}{3}\right)$.

**Exemple 2**

Dans un repère orthonormé, on donne les points E(–2 ; –8) ; F(5 ; 13) et G(–4 ; –14)

Montrer que les points E, F et G sont alignés.

Pour démontrer que les points E, F et G sont alignés, on trouve une relation entre les vecteurs $\overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{EG}$ (par exemple)

On a : $\overrightarrow{EF}\,(x_F - x_E\,;\,y_F - y_E)$ et $\overrightarrow{EG}\,(x_G - x_E\,;\,y_G - y_E)$

$\overrightarrow{EF}\,(5 - (-2)\,;\,13 - (-8))$ et $\overrightarrow{EG}(-4 - (-2)\,;\,-14 - (-8))$

$\overrightarrow{EF}\,(5 + 2\,;\,13 + 8)$ et $\overrightarrow{EG}(-4 + 2\,;\,-14 + 8)$

$\overrightarrow{EF}\,(7\,;\,21)$ et $\overrightarrow{EG}\,(-2\,;\,-6)$

$\frac{1}{7}\overrightarrow{EF}\,(1\,;\,3)$ et $-\frac{1}{2}\overrightarrow{EG}\,(1\,;\,3)$

Donc : $\frac{1}{7}\overrightarrow{EF} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{EG}$

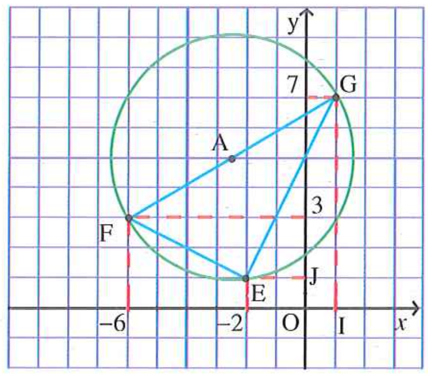
D'où : $\overrightarrow{EF} = -\frac{7}{2}\,\overrightarrow{EG}$.

Par conséquent les points E, F et G sont alignés.

**Exemple 3**

1. Dans un repère orthonormé (O ; I ; J), placer les points E(-2 ; 1) , F(-6 ; 3) et G(1 ; 7).
2. Calculer le périmètre p du triangle EFG.
3. Déterminer les coordonnées du centre A du cercle circonscrit au triangle EFG puis calculer son rayon r.

1. Construction de la figure.




2. Calcul de p .

On a : p = EF + EG +FG

Calculons EF , EG et FG.

On a : $EF^2 = (x_F - x_E)^2 + (y_F - y_E)^2$
$= (-6+2)^2 + (3-1)^2$
$= (-4)^2 + 2^2$
$= 16 + 4$

Donc : $EF = \sqrt{20}$ car $EF > 0$
$EF = 2\sqrt{5}$.

On a : $EG = \sqrt{(x_G - x_E)^2 + (y_G - y_E)^2}$
$= \sqrt{(1+2)^2 + (7-1)^2}$
$= \sqrt{9+36}$
$= \sqrt{45}$

Donc : $EG = 3\sqrt{5}$

On a : $\overrightarrow{FG}\,(x_G - x_E\,;\, y_G - y_E)$
$\overrightarrow{FG}\,(1+6\,;\,7-3)$
$\overrightarrow{FG}\,(7\,;\,4)$
$FG = \sqrt{7^2+4^2} = \sqrt{49+16}$

Alors $FG = \sqrt{65}$

Par suite : $p = 2\sqrt{5} + 3\sqrt{5} + \sqrt{65}$

D'où : $p = 5\sqrt{5} + \sqrt{65}$

- **Coordonnées de A.**

On a : $EF^2 + EG^2 = (\sqrt{20})^2 + (\sqrt{45})^2 = 20 + 45 = 65$

Et : $FG^2 = (\sqrt{65})^2 = 65$ , donc : $FG^2 = EF^2 + EG^2$.

D'après la réciproque du théorème de Pythagore, EFG est un triangle rectangle en E.

Il en résulte que A milieu de l'hypoténuse [FG], est le centre du cercle circonscrit au triangle rectangle EFG et que le rayon de ce cercle est $\dfrac{FG}{2}$ .

On a A est le milieu de [FG], donc : $x_A = \dfrac{x_F + x_G}{2}$ et $y_A = \dfrac{y_F + y_G}{2}$

$x_A = \dfrac{-6+1}{2} = \dfrac{-5}{2}$ et $y_A = \dfrac{3+7}{2} = 5$

Donc : $A\left(\dfrac{-5}{2}\,;\,5\right)$.

- **Le rayon r.**

On a : $FG = \sqrt{65}$ , donc : $r = \dfrac{FG}{2} = \dfrac{\sqrt{65}}{2}$ .

# INVESTISSEMENT
## Je m'entraîne

### COORDONNÉS D'UN POINT - D'UN VECTEUR

**1**

*1)* Dans le plan muni d'un repère orthonormé (O ; I ; J),
placer les points : A(2 ; - 2) , B(- 5 , - 3) ; C(1 , 3) D(2 , - 4) et E(- 2 , - 3).

*2)* Calculer les coordonnées des vecteurs :
$\overrightarrow{AB}$ , $\overrightarrow{BC}$ , $\overrightarrow{DC}$ , $\overrightarrow{EA}$ , $\overrightarrow{ID}$ et $\overrightarrow{JE}$.

**2**

(O ; I ; J) est un repère orthonormé.
On considère les points : A(4 ; -5) , B(-1 ; -4) et C(0 ; -3)

*1)* Calculer les coordonnées du point D tel que :
$$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}.$$

*2)* Calculer les coordonnées du point E tel que :
$$\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{CB}.$$

*3)* Calculer les coordonnées du point F tel que :
$$\overrightarrow{BF} = \overrightarrow{AC}.$$

**3**

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O ; I ; J).
On considère les points E(-4 ; -3) , F(2 ; 3) et G(-1 ; 1).
Calculer les coordonnées du point A pour que FAEG soit un parallélogramme.

**4**

On donne les points :
A(- 2 ; 3) ; B(- 1 , 4) ; C(2 ; 5) et D(0 ; - 2).
Déterminer les coordonnées du point M tel que :
$$\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{DA}.$$

**5**

Dans un repère orthonormé (O ; I ; J),
on donne les points $E\left(\frac{2}{3} ; \frac{1}{4}\right)$ et $F\left(-\frac{1}{3} ; \frac{3}{4}\right)$.

*1)* Calculer les coordonnées de M tel que E soit le milieu de [FM].

*2)* Calculer les coordonnées de N tel que F soit le milieu de [NE].

**6**

Dans un repère orthonormé (O ; I ; J),
on donne les points A(-6 ; 7) et B(3 ; -4).

*1)* Calculer les coordonnées du point C symétrique de A par rapport à B.

*2)* Calculer les coordonnées du point D tel que B soit le symétrique de D par rapport à A.

**7**

Dans un repère orthonormé, on donne les points
A(-3 ; -2) et B(1 , -4).
Calculer les coordonnées des points E , F et G tels que
$$\overrightarrow{AE} = -2\overrightarrow{AB} \;,\; \overrightarrow{BF} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB} \text{ et } \overrightarrow{GB} - 5\overrightarrow{GA} = \overrightarrow{0}$$

**8**

Dans le plan muni d'un repère orthonormé (O ; I ; J),
on donne les points E(4 , -5) , F(-6 , 7) et G(-8 , 9).

*1)* Calculer les coordonnées de A image de E par la translation de vecteur $\overrightarrow{FG}$.

*2)* Calculer les coordonnées de B image de F par la translation de vecteur $\overrightarrow{GE}$.

**9**

Dans un repère orthonormé (O ; I ; J),
on donne les points : A(-3 ; 4) , B(-7 ; 6) et C(2 ; -5).

*1)* Calculer les coordonnées du milieu M de [BC].

*2)* Calculer les coordonnées du milieu N de [AI].

### POUR DÉMONTRER

**10**

Soit (O ; I ; J) un repère orthonormé et $(\mathscr{C})$ le cercle de centre A(3 ; -2) et de rayon 5.

*1)* Montrer que B(6 ; -6) appartient à $(\mathscr{C})$.

*2)* Soit C le point diamétralement opposé au point B sur le cercle $(\mathscr{C})$.
Déterminer les coordonnées de C.

*3)* Soit le point $D\left(\frac{8}{5} ; \frac{14}{5}\right)$
Montrer que le triangle BCD est rectangle en D.

**11** *1)* On donne les points A(–1 ; 0) , B(0 ; 2) et $C\left(-\frac{5}{2} ; -3\right)$.

Montrer que B est un point de (AC).

*2)* On donne les points :

E(2 ; –2) , F(5 ; 1) , G(–2 ; –1) et H(6 ; 7).

Les droites (EF) et (HG) sont-elles parallèles ?

**12** Dans un repère orthonormé (O ; I ; J), placer les points A(1 ; 4) , B(4 ; 3) , C(2 ; –3) et D(–1 ; –2).

Montrer que ABCD est un parallélogramme.

**13** Dans un repère orthonormé (O ; I ; J), on donne les points M(–2 ; 1) , N(8 ; –7) et A(–2 ; –7).

*1)* Montrer que A appartient au cercle ($\mathscr{C}$) de diamètre [MN] .

*2)* Déterminer les coordonnées du point B, symétrique de A par rapport au centre E du cercle ($\mathscr{C}$).

*3)* Quelle est la nature du quadrilatère MANB?

**14** On considère les points A(2 ; 1) , B(0 ; 4) , C(4 ; 4) , et D (6 ; 1).

Montrer que ABCD est un parallélogramme.

**15** *1)* Dans un repère orthonormé (O ; I ; J), placer les points : A(–1 ; 1) , B(2 ; 1) et C(–2 ; 2)

*2)a.* Déterminer les coordonnées du point G tel que :

$$\overrightarrow{GA} + 2\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{0}$$

*b.* Construire le point G.

*3)a.* Déterminer les coordonnées du point E tel que :

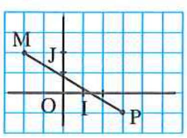
$$\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BA}$$

*b.* Construire le point D.

*4)* Montrer que les points B , G et D sont alignés de deux manières différentes.

## MON BILAN

***1) Indiquer la bonne réponse par A , B ou C :***

| | A | B | C |
|---|---|---|---|
| 1 Une seule copie est entièrement juste. Laquelle ?   | $\overrightarrow{MP}(5;3)$ $\overrightarrow{PM}(3;-5)$ | $\overrightarrow{MP}(-3;5)$ $\overrightarrow{PM}(-5;3)$ | $\overrightarrow{MP}(5;3)$ $\overrightarrow{PM}(-5;3)$ |
| 2 Dans un repère, on a K(– 3 ; 1) et L(– 4 ; – 2). Le vecteura $\overrightarrow{KL}$ pour coordonnées ... | (– 1 ; – 3) | (– 7 ; – 1) | (1 ; 3) |
| 3 On donne : A(– 2 ; 3) et B(5 ; 6) I le milieu du segment [AB] a pour coordonnées ... | $\left(\frac{3}{2};\frac{2}{3}\right)$ | $\left(\frac{3}{2};\frac{9}{2}\right)$ | $\left(\frac{7}{2};\frac{9}{2}\right)$ |
| 4 Dans un repère orthonormée E(– 4 ; 3) et L(7 ; – 1). Le distance EF est égales ... | 137 | $\sqrt{137}$ | $\sqrt{13}$ |
| 5 Dans un repère orthonormée on a $\overrightarrow{AB}$ (– 4 ; – 5) LA destance AB est égale ... | $\sqrt{-41}$ | $-\sqrt{41}$ | $\sqrt{41}$ |

Corrections page : 247

***2) En cas d'erreur, voici quelques conseils :***

| | Savoir | Pratique |
|---|---|---|
| **Ex: 1** | Propriété 1 | |
| **Ex: 2** | Propriété 1 | |
| **Ex: 3** | Propriété 3 | |
| **Ex: 4** | Propriété 5 | |
| **Ex: 5** | Propriété 5 | |

***3) Exercices pour la remédiation voir R15 page : 249***

# APPROFONDISSEMENT
## Je recherche

### POUR DÉMONTRER

**16** Dans un repère orthonormé (O ; I ; J), placer les points E(6 ; 3), F(2 ; -5), G(-2 ; 2) et M(4 ; -1).
Montrer que (MG) est la médiatrice de [EF].

**17** (O ; I ; J) est un repère orthonormé.
On considère les points A(3 ; 3), B(4 ; 0) et D(-2 ; -2).
*1)* Montrer que le triangle ABD est rectangle.
*2)* Déterminer les coordonnées du point C tel que :
$$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$$
*3)* Montrer que ABDC est un rectangle.

**18** Dans un repère orthonormé (O ; I ; J), on considère les points : E(0 ; -5) ; F(-6 ; -7), G(-4 ; -1) et H(2 ; 1).
*1)* Faire une figure.
*2)* Calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{HG}$.
*3)* Calculer $\overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{FG}$.
*4)* Montrer que EFGH est un losange.

**20** Soit les points : A(-2 ; 3), B(-4 , -2) et C(1 ; -3)
*1)* Déterminer les coordonnées du point G tel que :
$$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$$
*2)a.* Déterminer les coordonnées du milieu M de [BC].
*b.* Montrer que les points A, M et G sont alignés (en utilisant les coordonnées de A, M et G).

**21** Dans un repère orthonormé, on considère les points
$E\left(-2 ; \frac{7}{2}\right)$, F(-5 ; 2), $G\left(\frac{-13}{2} ; -5\right)$ et $H\left(\frac{-5}{2} ; -3\right)$
*1) a.* Déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{HG}$.
*b.* En déduire que EFGH est un trapèze.
*2)* Soit M le point tel que : $\overrightarrow{EM} = \frac{3}{4}\overrightarrow{HM}$
Montrer que les coordonnées de M sont $(-\frac{1}{2} ; 23)$.
*3)* Les points M, F et G sont-ils alignés?
*4)a.* A et B sont les milieux respectifs de [EF] et [HG].
Déterminer les coordonnées des points A et B.
*b.* Montrer que les points M, A et B sont alignés.

### COORDONNÉES - DISTANCES

**22** Dans un repère orthonormé (O ; I ; J), placer les points : A(4 ; 6), B(2 ; 2), C(-1 ; -4) et D(-4 ; 0).
*1)a.* Calculer AB, BC et AC
*b.* En déduire que les points A, B et C sont alignés.
*2)* Calculer AD.
*3)* La parallèle à la droite (DC) passant par B coupe (AD) en E. Calculer AE.

**23** Dans un repère orthonormé (O ; I ; J), on considère les points A(6 ; -1) ; B(4 ; 3) et C(-2 ; -5).
*1)* Calculer AB, AC et BC. En déduire la nature du triangle ABC.
*2)* Déterminer les coordonnées de D tel que ADBC est un parallélogramme.
*3)* Calculer les coordonnées de E image de B par la translation de vecteur $\overrightarrow{AC}$.
*4)* Calculer les coordonnées de F image de A par la symétrie de centre C.
*5)* Calculer l'aire de ABEF.

**24** ABC est un triangle rectangle en A.
On considère les points E et F tels que :
$$\overrightarrow{AE} = 2\overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{BF} = -\frac{7}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{BC}$$
*1)* Exprimer $\overrightarrow{AF}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.
*2)* On choisit le repère (A ; B ; C).
*a.* Donner les coordonnées des points A, B et C.
*b.* Déterminer les coordonnées des points E et F dans ce repère.
*c.* Les points A, E et F sont-ils alignés?
*3)* Faire une figure dans le repère (A ; B ; C).

## PROBLÈMES OUVERTS

**25** *1)* Dans un repère orthonomé (O , I , J), placer les points : A(2 ; 0) , B(3,5 ; 6) et C(9 ; 5,5)

*2)* Placer dans ce repère le point D tel que :

$$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$$

*3)* Calculer les coordonnées de vecteur $\overrightarrow{BC}$.

*4)* Calculer les coordonnées du milieu M de [AC].

*5)* Soit f la fonction affine telle que : f(2) = 0 et f(3,5) = 6.

Trouver l'expression algébrique de f.

*6)* Tracer la représentation graphique de la fonction de f.

**26** Le plan est muni d'un repère orthonormé (O , I , J)
(L'unité choisie est le centimètre)

*1)* Placer les points : A(4 ; 5) , B(0 ; -3) et C(-6 , 0).

*2)a.* Montrer que : $AB = \sqrt{80}$ ; $AC = \sqrt{125}$ et $BC = \sqrt{45}$

*b.* En déduire que ABC est un triangle rectangle.

*3)a.* Construire le point D tel que : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$.

*b.* Démontrer que ABCD est un rectangle.

*c.* Calculer les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$.

*d.* Vérifier à l'aide d'un calcul que les coordonnées du point D sont (-2 ; 8) .

*4)a.* Calculer les coordonnées du point K milieu du segment [AC].

*b.* Que représente le point K pour ABCD ?

*5)* Quels sont le centre et le rayon du cercle ($\mathscr{C}$) circonscrit au triangle ABC? Justifier.

*6)* Montrer que le point D est sur le cercle ($\mathscr{C}$).

*7)* Soit F l'image du point A par la translation de vecteur $\overrightarrow{CB}$. Montrer que la droite (CF) coupe le segment [AB] en son milieu.

## CHALLENGES

**27** Dans un repère orthonormé (O ; I ; J) , on considère les points E et F définis par :

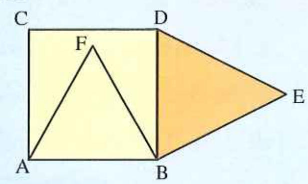
$$\overrightarrow{OF} = \frac{1}{4}\overrightarrow{OJ} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{IE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{IJ}.$$

Les droites (OE) et (IF) se coupent en H.

Montrer que H est le milieu de [OE].

**28** **AVEC TICE**

On considère la figure ci-contre composée d'un carré ABDC et de deux triangles équilatéraux BAF et DEB.

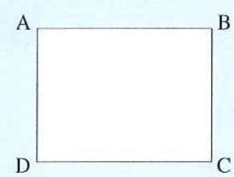



*1)* Construire la figure en utilisant l'outil de Geogebra puis conjecturer l'alignement des points C, E et F.

*2)* Montrer que les points C , E et F sont alignés en utilisant le repère (A ; B ; C).

**29** Soit ABCD un rectangle tel que :

$$AB = 10 \quad \text{et} \quad AD = 7{,}5$$



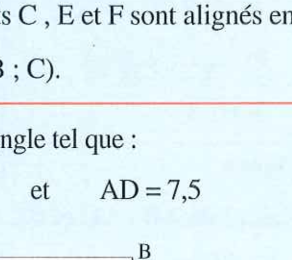

H est le point définit par : $\overrightarrow{AH} = \frac{16}{25}\overrightarrow{AC}$

Montrer que les droites (BH) et (AC) sont perpendiculaires

## SITUATIONS PROPOSÉES AUX OLYMPIADES

Les points de la figure suivante sont placés dans un repère orthonormal

tels que : $\begin{cases} A(-4;6) \text{ et } C(0;4) \\ \text{et } (AB) \perp (AC) \end{cases}$




**Déterminer les coordonnées de B.**

**30 Exercice résolu**

Dans un repère orthonormé (O ; I ; J) , on considère les points A(1 ; 1) , B(-1 ; 5) , C(3 ; 2) et soit F le milieu de [AB].

*1)a.* Montrer que les coordonnées de F sont (0 ; 3).

*b.* Placer les points A , B , C et F dans le repère (O ; I ; J).

*c.* Calculer AB , BC et AC .

En déduire que ABC est un triangle rectangle .

*2)* On considère les points E(2 ; 4) et M(-2 ; 7).

Soit t la translation qui transforme C en F.

*a.* Montrer que : $\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{AF} = \overrightarrow{CE}$.

*b.* En déduire que F et M sont les image respectives de A et B par la translation t .

**Correction : 30**

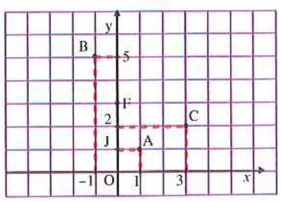
***1)a.*** F est le milieu de [AB]

Donc : $F(\dfrac{x_A + x_B}{2} ; \dfrac{y_A + y_B}{2})$

$F(\dfrac{1-1}{2} ; \dfrac{1+5}{2})$

D'où : F(0 ; 3).

***b.* Figure.**




***c.* Calcul de AB , AC et BC :**

- $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$
  $= \sqrt{(-1-1)^2 + (5-1)^2}$
  $= \sqrt{4+16}$
  $AB = \sqrt{20}$

donc $AB = 2\sqrt{5}$ .

- $AC = \sqrt{(x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2}$
  $= \sqrt{(3-1)^2 + (2-1)^2}$
  $= \sqrt{4+1}$
  $= \sqrt{5}$

donc $AC = \sqrt{5}$.

- $BC = \sqrt{(x_C - x_B)^2 + (y_C - y_B)^2}$
  $= \sqrt{(3+1)^2 + (2-5)^2}$
  $= \sqrt{16+9}$
  $= \sqrt{25}$

donc : BC = 5.

Et : $AB^2 + AC^2 = (\sqrt{20})^2 + (\sqrt{5})$

D'où $BC^2 = AB^2 + AC^2$.

D'après la réciproque du théorème de Pythagore , le triangle ABC est rectangle en A.

***2)* Calcul des coordonnées de $\overrightarrow{BM}$.**

$\overrightarrow{BM}(x_M - x_B ; y_M - y_B)$ ; $\overrightarrow{AF}(x_F - x_A ; y_F - y_A)$ ;
$\overrightarrow{CE}(x_E - x_C ; y_E - y_C)$

$\overrightarrow{BM}(-1 ; 2)$ ; $\overrightarrow{AF}(0-1 ; 3-1)$ ; $\overrightarrow{CE}(2-3 ; 4-2)$.

$\overrightarrow{BM}(-1 ; 2)$ ; $\overrightarrow{AF}(-1 ; 2)$ ; $\overrightarrow{CE}(-1 ; 2)$

Donc : $\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{AF} = \overrightarrow{CE}$

***b.*** On a : $\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{CE}$ et $\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{CE}$

Donc F et M sont les images des points A et B par la translation de vecteur $\overrightarrow{CE}$.

**31 Exercice résolu**

Dans un repère orthonormé (O ; I ; J) , on considère les points A(-3 ; -1) , B(3 ; 1) et C(1 ; 7).

*1)* Montrer que D(-5 ; 5) est l'image de A par la translation de vecteur $\overrightarrow{BC}$.

*2)* Montrer que K(-1 ; 3) est le milieu de [AC].

*3)* Sans faire de calculs , déterminer le milieu de [BD].

**Correction : 31**

*1)* Soit D' l'image de A par la translation de vecteur $\overrightarrow{BC}$.

Donc : $\overrightarrow{AD'} = \overrightarrow{BC}$

Cela entraîne que :

$x_{D'} - x_A = y_C - y_B$ et $y_{D'} - y_A = y_C - y_B$

$x_{D'} + 3 = 1 - 3$ et $y_{D'} + 1 = 7 - 1$

$x_{D'} = -2 - 3$ et $y_{D'} = 6 - 1$

$x_{D'} = -5$ et $y_{D'} = 5$

D'où : D'(-5 ; 5)

Or : D(-5 ; 5)

Donc : D = D'

Par conséquent, D est l'image de A par la translation de vecteur $\overrightarrow{BC}$.

*2)* On a : $\dfrac{x_A + x_C}{2} = \dfrac{-3+1}{2} = -1$ et $\dfrac{y_A + y_C}{2} = \dfrac{-1+7}{2} = 3$

Et K(-1 ; 3)

Donc K est le milieu de [AC].

*3)* On a : $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$ (d'après la question 1)
Donc ABCD est un parallélogramme .
Or K est le milieu de [AC] (d'après la question 2),
alors K est le milieu de [BD].

**32** Dans un repère orthonormé (O ; I ; J),
on considère les points P(4 ; 2) et Q(0 ; 5).

*1)a.* Placer les points P et Q.
*b.* Vérifier que K(2 ; 1) est le milieu de [OP].
*2)* Calculer OQ et QP.
*3)* Soit R le point tel que : $\overrightarrow{PR} = \overrightarrow{QO}$.
*a.* Déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{QO}$ et $\overrightarrow{PR}$
*b.* En déduire les coordonnées de R .
*c.* Montrer que le quadrilatère OQPR est un losange.

**33** (O ; I ; J) est un repère orthonormé.
on considère les points A(3 ; -3) , B(-1 ; 0) ,
C(3 ; 2) et D(1 ; 1).

*1)* Vérifier que D est le milieu de [BC].
*2)* Déterminer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$.
*3)* Montrer que ABC est un triangle isocèle.

**34** (O ; I ; J) est un repère orthonormé.
On considère les points A(-2 ; 0) , B(2 ; 4) ,
C(4 ; 2) et D(0 ; -2).

*1)a.* Placer les points A , B , C et D .
*b.* Calculer AB , AC et BC.
*c.* En déduire la nature du triangle ABC.
*2)a.* Déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DC}$ .
*b.* En déduire la nature du quadrilatère ABCD.
*c.* Déterminer les coordonnées du point I' centre de quadrilatère ABCD.

**35** (O ; I ; J) est un repère orthonormé, placer le point
A(4 ; -1)

*1)* Déterminer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AJ}$ puis calculer AJ .

*2)* Déterminer les coordonnées du point C pour que le quadrilatère AIJC soit un parallélogramme puis construire C.

**36** Dans un repère orthonormé (O ; I ; J),
on considère les points A(-2 ; -2) , B(3 ; -2) et D(1 ; 2).

*1)* Construire les points A , B et D.
*2)* Montrer que E(2 ; 0)est le milieu de [BD].
*3)* Soit C le symétrique de A par rapport à I.
*a.* Verifier que les coordonnées de C sont (6 ; 2),
*b.* Montrer que : $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CD}$.

**37** Dans un repère orthonormé (O ; I ; J), on considère les points E(6 ; 3) , F(2 ; 5) , G(-2 ; -3) et cercle ($\mathscr{C}$) de diamètre [EG].

*1)* Placer les points E , F et G.
*2)* Déterminer les coordonnées du point H centre du cercle ($\mathscr{C}$).
*3)* Calculer le rayon de ($\mathscr{C}$).
*4)* On considère la translation t qui transforme E en F.
Soit ($\mathscr{C}$ ') l'image de ($\mathscr{C}$) par la translation t .
*a.* Calculer le rayon de ($\mathscr{C}$ ').
*b.* Déterminer les coordonnées de H' centre de ($\mathscr{C}$ ') puis construire ($\mathscr{C}$ ').

**38** Dans un repère orthonormé (O ; I ; J),
on considère les points A(1 ; 2) , A'(3 ; 5) et B(3 ; -1).

*1)a.* Placer les points A , A' et B.
*b.* Déterminer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AA'}$.
*2)* Soit B' l'image de B par la translation t de vecteur $\overrightarrow{AA'}$ .
*a.* Vérifier que : $AB = \sqrt{13}$
*b.* En déduire la longeur A'B'.
*c.* Déterminer les coordonnées du point B'.

# ÉQUATION D'UNE DROITE

## Prérequis :

* Fonction affines.
* Coordonnées.

## Un point d'histoire

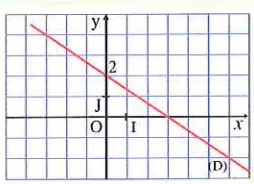
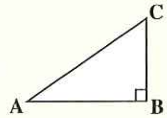
**Diophante (200 ; 284)**

Diophante est considéré comme « le père de l'algèbre» . Ses Arithmétiques introduisent les exposants, la règle des signes, etc. L'enfance de Diophante occupa un sixième de toute sa vie. Le douzième fut pris par son adolescence. Après une nouvelle période équivalente au septème de sa vie, il se maria. Cinq ans plus tard, il eut un fils. La vie de ce fils fut exactement une demie de celle de son père. Diophante mourut quatre ans après la mort de son fils.

## TEST DIAGNOSTIQUE : Je m'évalue

## CHOISIR LA BONNE RÉPONSE.

**Pour chaque question, cocher la bonne réponse en justifiant.**

| | Réponses : | | |
|---|---|---|---|
| Quelle est parmi les relations suivantes celle qui représente une fonction affine? | $f(x) = 5x^2 + 1$ | $y = 2x - 4$ | $y = \frac{2}{x} - 5$ |
| Soit f une fonction affine telle que $f(x) = 2x - 1$ et (D) sa courbe. Alors ... | A(-3 ; -5) appartient à la droite (D) | B(2 ; 3) appartient à la droite (D) | C(0 ; 1) appartient à la droite (D) |
| (D) est la représentation d'une fonction affine ...   | $f(x) = \frac{-3}{2}x + 1$ | $f(x) = \frac{-3}{2}x$ | $f(x) = -\frac{2}{3}x + 2$ |
| f est une fonction affine définie par : $f(x) = 3x - 2$ ; donc son cœfficient est : | $\frac{f(3) - f(0)}{3 - 0}$ | $-\frac{2}{3}$ | $\frac{4 - 7}{f(4) - f(7)}$ |
| ABC est un triangle rectangle en B. Alors ...   | $BC^2 = AB^2 + AC^2$ | $AC = AB + BC$ | $AC^2 = AB^2 + BC^2$ |
| A est l'image de B par la translation t de vecteur $\overrightarrow{CD}$ , alors ... | (AB) // (DC) | [BC] et [AD] ont même milieu | $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ |

Solutions page : 246

# ACTIVITÉS : JE DÉCOUVRE

## Activité 1 Équation réduite d'une droite

On considère la fonction affine f définie par : $f(x) = 3x - 2$

1. Construire la représentation graphique (D) de la fonction f dans un repère orthonormé.
2. Les points A(0 ; -2) ; B (-1 ; -5) ; C$\left(\frac{2}{3} ; 3\right)$ ; E$\left(\frac{2}{3} ; 0\right)$ appartiennent-ils à la droite (D)?
3. Soit M ($x$ ; y) un point de (AB) tel que : $M \neq A$ et $M \neq B$.

**a.** Montrer que : $\frac{y - y_A}{x - x_A} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$.

**b.** En déduire que $y = 3x - 2$.

- $y = 3x - 2$ est appelé **l'équation réduite** de la droite (AB).
- $\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$ est appelé le **coefficient directeur** (ou la **pente**) de la droite (AB).

## Activité 2 Parallélisme de deux droites données par leur équation réduite

Dans un repère orthonormé (O ; I ; J), on considère les droites (D) et (Δ) d'équations respectives :

$y = 2x + 3$ et $y = ax + b$ où a et b sont des réels donnés.

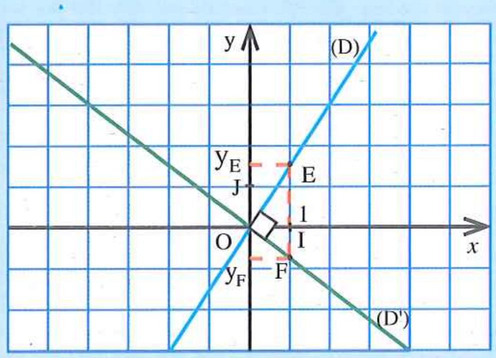
1. Déterminer les points A et B de (D) tels que : $x_A = 1$ et $x_B = 2$.
2. Déterminer les points E et F de (Δ) tels que : $x_E = 0$ et $x_F = 1$.
3. Déterminer a sachant que : $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{AB}$.

Montrer que (Δ) // (D) dans ce cas.

## Activité 3 Perpendicularité de deux droites

Dans un repère orthonormé (O ; I ; J), Soit (D) et (D') les droites d'équations respectives :
$y = ax$ et $y = a'x$ où a et a' sont des réels non nuls donnés.

1. Déterminer E de (D) et F de (D') tels que : $x_E = 1$ et $x_F = 1$.
2. Calculer OE , OF et EF.
3. On suppose que : (D) ⊥ (D')
Montrer que : $a \times a' = -1$
4. On suppose que : $a \times a' = -1$
Montrer que : (D) ⊥ (D').




5. (Δ) et (Δ') sont deux droites définies par leurs équations respectives

(Δ) : $y = ax + b$

(Δ') : $y = ax + b$

Déterminer la condition pour que (Δ) ⊥ (Δ').

# 1 ÉQUATION D'UNE DROITE

**Définition :** Soit (O ; I ; J) un repère orthonormé.

Toute droite (D), non parallèle à l'axe des ordonnées, a une **équation réduite** de la forme : **$y = ax + b$.**

**a** est appelé le **coefficient directeur** ou la **pente** de la droite (D) .

**b** est appelé **l'ordonnée à l'origine** de la droite (D).

(D) la droite d'équation : $y = ax + b$

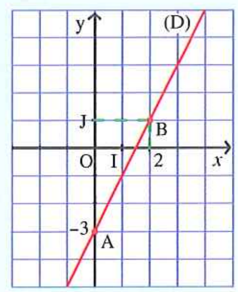
coeffitient directeur de la droite (D) — l'ordonnée à l'origine

### Exemple :

Soit (D) la droite d'équation : $y = 2x - 3$

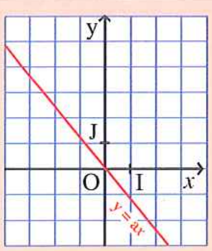
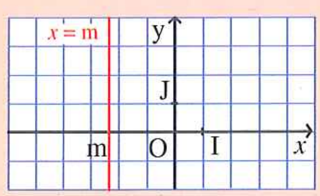
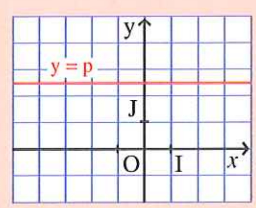
2 est la pente de (D) et $-3$ est l'ordonnée à l'origine.

| | | |
|---|---|---|
| $x$ | 0 | 2 |
| y | -3 | 1 |
| | A | B |




**Remarque 1 :** Soit (D) une droite d'équation : $y = ax + b$ .
$M(x_M \,;\, y_M)$ appartient à la droite (D), signifie que : $y_M = ax_M + b$

### Cas particuliers :

| | | |
|---|---|---|
| • L'équation d'une droite passant par l'origine du repère est de la forme : $y = ax$ | • L'équation d'une droite parallèle à l'axe des ordonnées est de la forme : $x = m$ | • L'équation d'une droite parallèle à l'axe des abscisses est de la forme : $y = p$ |
|  |  |  |







**Remarque 2 :**

- $x = 0$ est l'équation de l'axe des ordonnées.
- $y = 0$ est l'équation de l'axe des abscisses.

## 2 PROPRIÉTÉ DU COEFFICIENT DIRECTEUR D'UNE DROITE

**Propriété 1** Si $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$ sont deux points distincts d'une droite (D) d'équation : $y = ax + b$ où $x_A \neq x_B$, alors : $a = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$ est le cœfficient directeur de la droite (D).

**Remarque 3 :** $\dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$ est aussi la pente de la droite (D) .

**Exemple :** On donne A(-3 ; -4) et B(5 ; -2).

On a : $\dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \dfrac{-2+4}{5+3} = \dfrac{1}{4}$, donc $\dfrac{1}{4}$ est le cœfficient directeur de la droite (AB).

## 3 CONDITION DE PARALLÉLISME DE DEUX DROITES

**Propriété 2** Soit deux droites (D) et (D') d'équations respectives : $y = ax + b$ et $y = a'x + b'$

*1/* Si a = a' , alors (D) // (D').

*2/* Si (D) // (D'), alors a = a'.

**Autrement dit :** Deux droites sont parallèles signifie qu'elles ont le même cœfficient directeur.

**Exemple :** Soit les droites (D) : $y = 2x + 1$ et (D') : $y = 2x - 3$

(D) // (D') car elles ont 2 comme cœfficient directeur commun.

## 4 CONDITION D'ORTHOGONALITÉ DE DEUX DROITES

**Propriété 2** Soit deux droites (D) et (D') d'équations respectives : $y = ax + b$ et $y = a'x + b'$

*1/* Si $a \times a' = -1$ , alors (D) $\perp$ (D').

*2/* Si (D)$\perp$(D') , alors $a \times a' = -1$.

**Exemple :** Soit deux droites (D) et (D') d'équations respectives : $y = -\dfrac{1}{2}x$ et $y = 2x - 3$

Les droites (D) et (D') sont perpendiculaires car $-\dfrac{1}{2} \times 2 = -1$ .

# PRATIQUE
## J'applique

## 1 CONSTRUIRE UNE DROITE D'ÉQUATION DONNÉE

**Exemple 1**

Tracer la droite (Δ) d'équation : $y = \frac{2}{3}x - 4$

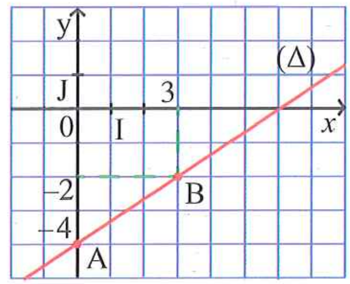
Pour construire la droite (Δ), on choisit deux points de la droite (Δ).

On choisit $x$ puis on calcule y

$x = 0 \rightarrow y = -\frac{2}{3} \times 0 - 4 = -4$

$x = 3 \rightarrow y = -\frac{2}{3} \times (3) - 4 = -2$

| $x$ | 0 | 3 |
|---|---|---|
| y | -4 | -2 |
| | A | B |




Donc : (Δ) = (AB) où A(0 ; -4) et B(3 ; -2).

## 2 UTILISER LA PROPRIÉTÉ DU COEFFICIENT DIRECTEUR D'UNE DROITE

### *1. Pour montrer l'alignement de points.*

**Exemple 2**

Montrer que les points A(3 ; 1) , B(-4 ; -13) et C(0 ; -5) sont alignés.

Pour cela, on va déterminer la pente de la droite (AB) et (AC) (par exemple).

On a : A(3 ; 1) et B(-4 ; -13)

Donc : $\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{-13-1}{-4-3} = \frac{-14}{-7} = 2$

Alors 2 est le cœfficient directeur de la droite (AB)

On a : A(3 ; 1) et C(0 ; -5)

Donc : $\frac{y_C - y_A}{x_C - x_A} = \frac{-5-1}{0-3} = \frac{-6}{-3} = 2$

Alors 2 est le cœfficient directeur de la droite (AC).

Il en résulte que les droite (AB) et (AC) ont la même pente , donc : (AB) // (AC)

D'où A , B et C sont des points alignés.

### *2. Pour calculer l'une des coordonnées d'un point.*

**Exemple 3**

On considère les points : E(-4 ; 5) , F(6 ; -2) et G(-3 ; b).

Calculer b sachant que la droite (EF) passe par le point G.

La droite (EF) passe par le point G signifie que G appartient à la droite (EF), alors (EG) // (EF)

On en déduit que (EF) et (EG) ont la même pente.

Donc : $\dfrac{y_G - y_E}{x_G - x_E} = \dfrac{y_F - y_E}{x_F - x_E}$

$\dfrac{b-5}{-3+4} = \dfrac{-2-5}{6+4}$

$b - 5 = -\dfrac{7}{10}$

$b = -\dfrac{7}{10} + \dfrac{50}{10}$

D'où : $b = \dfrac{43}{10}$.

## 3 POUR DÉTERMINER L'ÉQUATION D'UNE DROITE

**Exemple 4**

On donne : A(-4 ; 2) , B(-3 ; -1) et C(5 ; -3).

Déterminer l'équation de la droite (Δ) perpendiculaire (AB) et passant par le point C.

Soit $y = mx + p$ l'équation de la droite (Δ)

- **Calculons m :**

On a : $\dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \dfrac{-1-2}{-3-2} = \dfrac{3}{5}$ ; donc $\dfrac{3}{5}$ est le cœfficient directeur de (AB).

Et comme $(\Delta) \perp (AB)$ , alors : $\dfrac{3}{5} \times m = -1$ donc : $m = -\dfrac{5}{3}$.

- **Calculons p :**

On a $(\Delta) : y = -\dfrac{5}{3}x + p$

Or : C(5 ; -3) est un point de (Δ) , donc : $-3 = -\dfrac{5}{3} \times 5 + p$

$-3 + \dfrac{25}{3} = p$

$\dfrac{16}{3} = p$

D'où : $y = -\dfrac{5}{3}x + \dfrac{16}{3}$ est l'équation de la droite (Δ).

# INVESTISSEMENT
## Je m'entraîne

### CONSTRUCTION D'UNE DROITE

**1** Dans un repère orthonormé (O ; I ; J) ,
on considère la droite (D) d'équation : $y = 3x + 4$.

*1)* Déterminer l'ordonnée du point A de (D) sachant que son abscisse est 0.

*2)* Déterminer l'abscisse du point B de (D) sachant que son ordonnée est 1.

*3)* Représenter (D).

**2** Tracer dans un même repère orthonormé (O ; I ; J) chacune des droites suivantes :

$(D_1) : y = -x + 2$ ; $(D_2) : y = -3x$ ; $(D_3) : y = 5$

$(D_4) : x = -3$ ; $(D_5) : 2x - 3y + 1 = 0$

**3** Dans le plan rapporté à un repère orthonormé (O ; I ; J), on considère les droites (D) et (Δ) définies par leurs équations respectives : $y = 3x - 1$ et $y = -2x + 9$.

*1)* Représenter les droites (D) et (Δ) .

*2)* Déterminer graphiquement les coordonnées du point M d'intersection des droites (D) et (Δ) .

### L'ÉQUATION D'UNE DROITE

**4** Soit (Δ) la droite d'équation : $y = -2x + 3$.
Calculer les nombres a, b, $x$ et m sachant que A(a ; –2) et B(3 ; –b) et C($x$ + 2 ; 3$x$) et D(–m ; –2m + 1) sont sur (Δ).

**5** Déterminer l'équation réduite de la droite passant par les points M(–6 ; 2) et N(3 ; –4).

**6** Soit (D) la droite d'équation : $y = 5x - \frac{1}{3}$
Déterminer l'équation de la droite (D') parallèle à (D) passant par $E(-2\ ; -\frac{4}{3})$.

**7** Dans un repère orthonormé (O ; I ; J) , on considère les points : A(0 ; –2) , B(2 ; 1) , C(–1 ; –3) ,
D(5 ; 0) , E(a ; –1).
et la droite (Δ) d'équation : $3x - 2y - 4 = 0$.

*1)* A , B et C sont-ils des points de la droites (Δ) ?

*2)* Calculer l'abscisse de E tel que : E un point de (Δ).

*3)* Déterminer l'ordonnée du point F sachant que son abscisse est –4 et F un point de (Δ).

*4)a.* Déterminer les coordonnées de M sachant que (Δ) coupe l'axe des abscisses en M.

*b.* Déterminer les coordonnées de N sachant que (Δ) coupe l'axe des ordonnées en N.

**8** On donne E(–2 ; 3) et F(4 ; –5).
Dans chaque cas, déterminer l'équation de la tangente en E au cercle :

*1)* de centre O (origine du repère) et contenant E.

*2)* de diamètre [EF].

**9** On donne les points B(–2 ; 3) et C(–4 ; –5).
Déterminer une équation de la médiatrice du segment [BC].

**10** On considère le triangle ABC défini par :
A(0 ; –4) ; B(2 ; 1) et C(5 ; 0).
Déterminer une équation de :

*1)* $(D_1)$ la hauteur issue de A.

*2)* $(D_2)$ la médiane issue de B.

*3)* $(D_3)$ la médiatrice de [AB] .

*4)* $(D_4)$ la parallèle à (AB) passant par C.

**11** On considère la droite (D) d'équation : $y = 3x - 5$
et les points A(0 ; –5) ; B(1 ; 2) ; C(3 ; 4) ;
D(–2 ; 0) et $E\left(-\frac{2}{3} ; -7\right)$ .
Indiquer parmi les points A , B , C , D et E ceux qui appartiennent à la droite (D).

## DROITES PERPENDICULAIRES DROITES PARALLÈLES.

**12** Dans chaque cas, préciser si les droites (D) et (Δ) sont parallèles.

*1)* $\begin{cases} (D) : y = \frac{-1}{4}x - 2 \\ (\Delta) : y = -0{,}25x + 1 \end{cases}$ *2)* $\begin{cases} (D) : y = -2 \\ (\Delta) : y = 2 \end{cases}$

**13** Déterminer une équation de chacune des droites :

*1)* $(\Delta_1)$ passant par M(–3 ; 1) et parallèle à la droite d'équation : $y = -6x + 1$.

*2)* $(\Delta_2)$ passant par N(2 ; –4) et parallèle à la droite d'équation : $x = 7$.

**14** Parmi les droites $(\Delta_1)$ ; $(\Delta_2)$ ; $(\Delta_3)$ et $(\Delta_4)$ définies par leurs équations, indiquer celles qui sont perpendiculaires.

$(\Delta_1) : y = \frac{5}{3}x - 1$ ; $(\Delta_3) : y = -\frac{5}{3} + \frac{1}{4}$

$(\Delta_2) : y = \frac{-3}{5}x + 2$ ; $(\Delta_4) : -3x + 5y + 2 = 0$

**15** *1)* Déterminer l'équation de la droite (D) qui est perpendiculaire à la droite $(\Delta) : y = -\frac{3}{7}x + 2$ et qui passe par le point M (2 ; 1).

*2)* Déterminer l'équation de la droite $(D_1)$ qui est perpendiculaire à la droite $(\Delta_1) : y = x - 2$ et dont l'ordonnée à l'origine est –3.

**16** (O ; I ; J) est un repère orthonormé.

On considère les points A(2 ; 1) , B(–2 ; –7) , C(4 ; –1) , D(–6 ; 4) et la droite (Δ) d'équation : $-2x + y + 4 = 0$.

*1)* Vérifier que : $y = 2x - 3$ est une équation de la droite (AB).

*2)* Les points A , B et C sont - ils alignés ?

*3)* Montrer que les droites (AB) et (Δ) sont parallèles.

*4)* Montrer que les droites (AB) et (DC) sont perpendiculaires .

**17** Dans chaque cas, préciser si les droites (D) et (Δ) sont parallèles.

*1)* $\begin{cases} (D) : y = 3x - 9 \\ (\Delta) : y = 3x + 4 \end{cases}$ *2)* $\begin{cases} (D) : y = 4x - 6 \\ (\Delta) : 4x - y + 1 = 0 \end{cases}$

## MON BILAN

***1) Indiquer la bonne réponse par A , B ou C :***

| | A | B | C |
|---|---|---|---|
| 1 La droite (D) d'équation : $y = 2x - \frac{1}{2}$ a pour cofficient directeur ... | $-2$ | $-\frac{1}{2}$ | $2$ |
| 2 L'équation de la droite (D) de coefficient directeur 5 et d'ordonnet à l'origine -3 est ... | $-3x + 1$ | $5x - 3$ | $\frac{1}{5}x - 3$ |
| 3 L'équation de la droite passant par le point A(4 ; –3) et parallèle à l'axe des abscisse est ... | $y = -3$ | $x = -3$ | $y = 0$ |
| 4 L'équation de la droite passant par le point A(4 ; –3) et parallèle à l'axe des ordonnées est ... | $y = -3$ | $x = -3$ | $y = 4$ |
| 5 L'équation à l'origine de la drite (D) d'équation : $y = -\frac{3}{2}x + 5$ est ... | $-\frac{3}{2}$ | $5$ | $\frac{1}{5}$ |
| 6 On donne (3 ; –1) et (–5 ; 2) le coefficient directeur de la droite (AB) est ... | $-\frac{3}{8}$ | $\frac{3}{2}$ | $-\frac{8}{3}$ |

Corrections page : 247

***2) En cas d'erreur, voici quelques conseils :***

| | Savoir | Pratique |
|---|---|---|
| Ex: 1 | Définition | |
| Ex: 2 | Définition | |
| Ex: 3 | Cas particulier | |
| Ex: 4 | Remarque 3 | |
| Ex: 5 | Remarque 2 | |
| Ex: 6 | Propriété 1 | |

***3) Exercices pour la remédiation voir R16 page : 249***

## DROITES PERPENDICULAIRES DROITES PARALLÈLES.

**18** Soit (D) la droite d'équation : $y = -4$.
Déterminer l'équation de la parallèle à (D) passant par $F(5 ; -2)$.

**19** Déterminer dans chacun des cas suivants les valeurs de m pour que les droites (Δ) et (D) soient parallèles :

*1)* $\begin{cases} (D) : y = (2m - 1)x + m - 2 \\ (\Delta) : y = (m + 4)x - 5 \end{cases}$

*2)* $\begin{cases} (D) : y = (m^2 - 4)x + - 1 \\ (\Delta) : y = (2m - 5)x + 3 \end{cases}$

**20** Déterminer dans chacun des cas suivants les valeurs du réel m pour que les droites (Δ) et (D) soient perpendiculaires :

*1)* $\begin{cases} (D) : y = (m - 4)x - 2 \\ (\Delta) : y = (4 - m)x + 3 \end{cases}$

*2)* $\begin{cases} (D) : y = (3m - 1)x + m - 1 \\ (\Delta) : y = (4m + 1)x + 5. \end{cases}$

**21** On considère la droite (D) d'équation :

$$mx - (2 - m)y + m - 1 = 0$$

*1)* Déterminer m sachant que (D) passe par le point $E(-2 ; 4)$.

*2)* Déterminer m pour que la pente de (D) soit égale à $-2$.

*3)* Déterminer m pour que (D) soit parallèle à l'axe des abscisses.

*4)* Déterminer m pour que (D) soit parallèle à l'axe des ordonnées.

**22** Le plan est muni d'un repère orthonormé (O ; I ; J), placer les points $E(0 ; -2)$ ; $F(-2 ; -6)$ et $G(-2 ; 2)$

*1)* Quelle est la nature du triangle EFG?

*2)* Déterminer une équation de la droite (D) passant par E et perpendiculaire à la droite (EG).

*3)* Soite (D') la parallèle à l'axe des ordonnées passant par F. Déterminer les coordonnées du point d'intersection M des droites (D) et (D').

*4)a.* Montrer que le point E appartient au cercle $(\mathscr{C})$ de diamètre [GM].

*b.* Déterminer les coordonnées du centre N de $(\mathscr{C})$.

## COEFFICIENT DIRECTEUR / PENTE

**23** Déterminer le coefficient directeur de chacune des droites suivantes :

$(D_1) : y = \frac{2}{3}x + 1$ ; $(D_2) : 4y = x - 1$ ;
$(D_3) : x = 2y - 5$ ; $(D_4) : 4x - 5y + 2 = 0$ ; $(D_5) : y = 8$

**24** On considère les points :

$E(3 ; -2)$ ; $F(-4 ; 5)$ et $G(-2 ; -3)$

*1)* Déterminer la pente de la droite (EF).

*2)* Déterminer la pente de droite (EG).

*3)* Déterminer la pente de la droite (FG).

**25** Déterminer l'équation réduite de la droite (Δ) passant par le point $E(-5 ; -3)$ et de coe fficient directeur (-2).

## POUR DÉMONTRER

**26** Montrer que les points $E(1 ; -1)$ , $F(-8 ; -4)$ et $G(-5 ; -3)$ sont alignés.

**27** (O ; I ; J) est un repère orthonormé. On considère les droites (Δ) et (Δ') : $(\Delta) : y = 2x + 3$ et $(\Delta') : y = \frac{1}{2}x$ .
Soit les points $E(0 ; 2)$ et $F(2 ; 1)$.

*1)* Faire une figure.

*2)* Calculer les coordonnées du point M d'intersection des droites (Δ) et (Δ') .

*3)*Déterminer une équation de la droite (EF).

*4)* Déterminer les coordonnées du point N d'intersection des droites (EF) et (Δ).

*5)* Quelle est la nature du triangle FMN?

*6)* Soit G l'image de F par la translation de vecteur $\overrightarrow{NM}$.

*a.* Déterminer les coordonneés de G.

*b.* Quelle est la nature du quadrilatère NFGM ?

## DROITES PERPENDICULAIRES DROITES PARALLÈLES,

**12** Dans chaque cas, préciser si les droites (D) et (Δ) sont parallèles.

*1)* $\begin{cases} (D) : y = \frac{-1}{4}x - 2 \\ (\Delta) : y = -0{,}25x + 1 \end{cases}$ *2)* $\begin{cases} (D) : y = -2 \\ (\Delta) : y = 2 \end{cases}$

**13** Déterminer une équation de chacune des droites :

*1)* ($\Delta_1$) passant par M(–3 ; 1) et parallèle à la droite d'équation : $y = -6x + 1$.

*2)* ($\Delta_2$) passant par N(2 ; –4) et parallèle à la droite d'équation : $x = 7$.

**14** Parmi les droites ($\Delta_1$) ; ($\Delta_2$) ; ($\Delta_3$) et ($\Delta_4$) définies par leurs équations, indiquer celles qui sont perpendiculaires.

$(\Delta_1) : y = \frac{5}{3}x - 1$ ; $(\Delta_3) : y = -\frac{5}{3} + \frac{1}{4}$

$(\Delta_2) : y = \frac{-3}{5}x + 2$ ; $(\Delta_4) : -3x + 5y + 2 = 0$

**15** *1)* Déterminer l'équation de la droite (D) qui est perpendiculaire à la droite (Δ) : $y = -\frac{3}{7}x + 2$ et qui passe par le point M (2 ; 1).

*2)* Déterminer l'équation de la droite ($D_1$) qui est perpendiculaire à la droite ($\Delta_1$) : $y = x - 2$ et dont l'ordonnée à l'origine est –3.

**16** (O ; I ; J) est un repère orthonormé.

On considère les points A(2 ; 1) , B(–2 ; –7) , C(4 ; –1) , D(–6 ; 4) et la droite (Δ) d'équation : $-2x + y + 4 = 0$.

*1)* Vérifier que : $y = 2x - 3$ est une équation de la droite (AB).

*2)* Les points A , B et C sont - ils alignés ?

*3)* Montrer que les droites (AB) et (Δ) sont parallèles.

*4)* Montrer que les droites (AB) et (DC) sont perpendiculaires .

**17** Dans chaque cas, préciser si les droites (D) et (Δ) sont parallèles.

*1)* $\begin{cases} (D) : y = 3x - 9 \\ (\Delta) : y = 3x + 4 \end{cases}$ *2)* $\begin{cases} (D) : y = 4x - 6 \\ (\Delta) : 4x - y + 1 = 0 \end{cases}$

## MON BILAN

***1) Indiquer la bonne réponse par A , B ou C :***

| | A | B | C |
|---|---|---|---|
| **1** La droite (D) d'équation : $y = 2x - \frac{1}{2}$ a pour cofficient directeur ... | $-2$ | $-\frac{1}{2}$ | $2$ |
| **2** L'équation de la droite (D) de coefficient directeur 5 et d'ordonnet à l'origine -3 est ... | $-3x + 1$ | $5x - 3$ | $\frac{1}{5}x - 3$ |
| **3** L'équation de la droite passant par le point A(4 ; –3) et parallèle à l'axe des abscisse est ... | $y = -3$ | $x = -3$ | $y = 0$ |
| **4** L'équation de la droite passant par le point A(4 ; –3) et parallèle à l'axe des ordonnées est ... | $y = -3$ | $x = -3$ | $y = 4$ |
| **5** L'équation à l'origine de la drite (D) d'équation : $y = -\frac{3}{2}x + 5$ est ... | $-\frac{3}{2}$ | $5$ | $\frac{1}{5}$ |
| **6** On donne (3 ; –1) et (–5 ; 2) le coefficient directeur de la droite (AB) est ... | $-\frac{3}{8}$ | $\frac{3}{2}$ | $-\frac{8}{3}$ |

Corrections page : 247

***2) En cas d'erreur, voici quelques conseils :***

| | Savoir | Pratique |
|---|---|---|
| **Ex: 1** | Définition | |
| **Ex: 2** | Définition | |
| **Ex: 3** | Cas particulier | |
| **Ex: 4** | Remarque 3 | |
| **Ex: 5** | Remarque 2 | |
| **Ex: 6** | Propriété 1 | |

***3) Exercices pour la remédiation voir R16 page : 249***

## DROITES PERPENDICULAIRES DROITES PARALLÈLES,

**18** Soit (D) la droite d'équation : $y = -4$.
Déterminer l'équation de la parallèle à (D) passant par F(5 ; -2).

**19** Déterminer dans chacun des cas suivants les valeurs de m pour que les droites (Δ) et (D) soient parallèles :

*1)* $\begin{cases} (D) : y = (2m - 1)x + m - 2 \\ (\Delta) : y = (m + 4)x - 5 \end{cases}$

*2)* $\begin{cases} (D) : y = (m^2 - 4)x + - 1 \\ (\Delta) : y = (2m - 5)x + 3 \end{cases}$

**20** Déterminer dans chacun des cas suivants les valeurs du réel m pour que les droites (Δ) et (D) soient perpendiculaires :

*1)* $\begin{cases} (D) : y = (m - 4)x - 2 \\ (\Delta) : y = (4 - m)x + 3 \end{cases}$

*2)* $\begin{cases} (D) : y = (3m - 1)x + m - 1 \\ (\Delta) : y = (4m + 1)x + 5. \end{cases}$

**21** On considère la droite (D) d'équation :
$$mx - (2 - m)y + m - 1 = 0$$
*1)* Déterminer m sachant que (D) passe par le point E(-2 ; 4).
*2)* Déterminer m pour que la pente de (D) soit égale à - 2.
*3)* Déterminer m pour que (D) soit parallèle à l'axe des abscisses.
*4)* Déterminer m pour que (D) soit parallèle à l'axe des ordonnées.

**22** Le plan est muni d'un repère orthonormé (O ; I ; J), placer les points E(0 ; -2) ; F(-2 ; -6) et G(-2 ; 2)
*1)* Quelle est la nature du triangle EFG?
*2)* Déterminer une équation de la droite (D) passant par E et perpendiculaire à la droite (EG).
*3)* Soite (D') la parallèle à l'axe des ordonnées passant par F. Déterminer les coordonnées du point d'intersection M des droites (D) et (D').
*4)a.* Montrer que le point E appartient au cercle ($\mathscr{C}$) de diamètre [GM].
*b.* Déterminer les coordonnées du centre N de ($\mathscr{C}$).

## COEFFICIENT DIRECTEUR / PENTE

**23** Déterminer le coefficient directeur de chacune des droites suivantes :
$(D_1) : y = \frac{2}{3}x + 1$ ; $(D_2) : 4y = x - 1$ ;
$(D_3) : x = 2y - 5$ ; $(D_4) : 4x - 5y + 2 = 0$ ; $(D_5) : y = 8$

**24** On considère les points :
E(3 ; -2) ; F(-4 ; 5) et G(-2 ; -3)
*1)* Déterminer la pente de la droite (EF).
*2)* Déterminer la pente de droite (EG).
*3)* Déterminer la pente de la droite (FG).

**25** Déterminer l'équation réduite de la droite (Δ) passant par le point E(-5 ; -3) et de coe fficient directeur (-2).

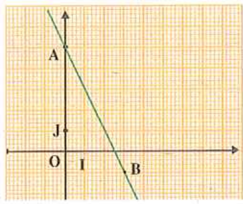
## POUR DÉMONTRER

**26** Montrer que les points E(1 ; -1) , F(-8 ; -4) et G(-5 ; -3) sont alignés.

**27** (O ; I ; J) est un repère orthonormé. On considère les droites (Δ) et (Δ') : $(\Delta) : y = 2x + 3$ et $(\Delta') : y = \frac{1}{2}x$.
Soit les points E(0 ; 2) et F(2 ; 1).
*1)* Faire une figure.
*2)* Calculer les coordonnées du point M d'intersection des droites (Δ) et (Δ') .
*3)*Déterminer une équation de la droite (EF).
*4)* Déterminer les coordonnées du point N d'intersection des droites (EF) et (Δ).
*5)* Quelle est la nature du triangle FMN?
*6)* Soit G l'image de F par la translation de vecteur $\overrightarrow{NM}$.
*a.* Déterminer les coordonneés de G.
*b.* Quelle est la nature du quadrilatère NFGM ?

## PROBLÈMES OUVERTS

**28** Le plan est muni d'un repère orthonormal(O,I,J).




Les coordonnées des points A et B sont des nombres entiers relatifs.

*1)* Trouver une équation de la droite (AB). Justifier la réponse.

*2)* Tracer la droite (Δ) d'équation : $y = \frac{1}{2}x + 1$.

*3)* Montrer que le point C(–4 ,–1) est sur la droite (Δ).

*4)* On appelle D le point d'intersection des droites (Δ) et (AB).

Montrer que le triangle BCD est rectangle en D.

**29** Soit m un réel.Pour quelles valeurs de m , les droites (D) : $y = (m - 1)x - 2$ et (Δ) : $3x - (m + 1)y = 0$ sont - elles :

*1)* parallèles ?

*2)* perpendiculaires?

**30** Le plan est rapporté au repère (O, I , J) l'unité graphique est le centimètre

*1)* Placer les points : A(3 ; 5) ; B(–1 ; 2) ; C(1 ; 1).

Calculer les coordonnés du point K, milieu du segment [AB] .

*2)* Quelle est la nature du triangle ABC ?

*3)* Construire le point E image du point B par la translation du vecteur $\overrightarrow{CA}$.

*a.* Quelle est la nature du quadrilatère CAEB?

*b.* Calculer les coordonnées du point E.

*4)a.* Déterminer l'équation de la droite (AB).

*b.* La droite (AB) coupe l'axe d'abscisses en H.

Quelle est la mesure, arrondie au degré, de l'angle KHI ?

## CHALLENGES

**31** Soit (D) la droite d'équation $y = \frac{1}{3}x - 1$ et le point A(–1 ; 2) , B et C sont deux points distincts de (D).

Soit M le milieu de [AB] et N celui de [AC].

Déterminer une équation de la droite (MN).

**32** Soit ($\mathscr{C}$) un cercle de diamètre [AB] tel que :

A(2 ; –1) et B(4 ; –3).

Déterminer l'équation de (Δ) la tangente en A au cercle ($\mathscr{C}$).

**33** On donne : A(8 ; 8) , B(8 ; 0) et C(0 ; 4).

Démontrer que les pieds des perpendiculaires issues de M(5 ; 9) aux côtés du triangle ABC sont alignés.

**34** On considère les points M(8 ; –1) , A(1 ; –2) et B(3 ; 4).

*1)* Déterminer une équation de la bissectrice de l'angle $\widehat{AMB}$.

*2)* Calculer l'aire du triangle MAB.

**35** (O ; I ; J) est un repère orthonormé.

Soit (Δ) la droite d'équation : $y = -\frac{3}{7}x - \frac{1}{2}$

Calculer la distance du point O à la droite (Δ).

**36** (D) est la droite d'équation : $y = -\frac{1}{2}x + 1$

et le point M (1 ; 1).

A et B deux points distincts de la droite (D).

Déterminer une équation de la droite (IJ) telle que I milieu de [AM] et J milieu de [BM].

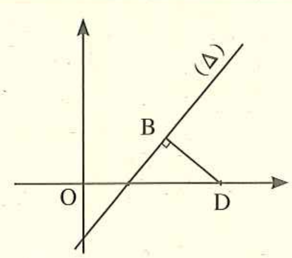
## SITUATIONS PROPOSÉES AUX OLYMPIADES

Sur la figure suivante :

D(6 ; 0) ; $BD = \sqrt{2}$ et $(BD) \perp (\Delta)$

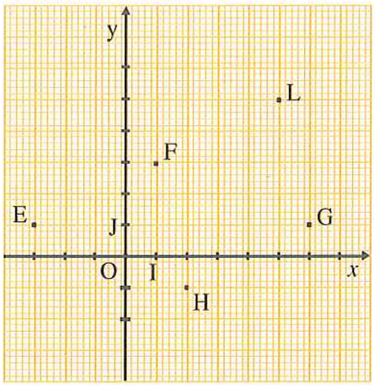
$(\Delta) : y = x + n$

**Déterminer n.**



**37 Exercice résolu**

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé (O ; I ; J), on considère les points E(-3 ; 1) , F(1 ; 3) , L(5 ; 5) , H(2 ; -1) et G.




*1)* Déterminer graphiquement les coordonnées de G.

*2)* Calculer EH.

*3)a.* Vérifier que l'équation réduite de la droite (EL) est :

$$y = \frac{1}{2}x + \frac{5}{2}.$$

*b.* Déterminer une équation réduite de la droite (D) passant par H et perpendiculaire à (EL).

**Correction : 38**

*1)* Les coordonnées de G sont : G(6 ; 1).

*2)* On a : E(-3 ; 1) et H (2 ; -1)

Donc : $EH = \sqrt{(x_H - x_E)^2 + (y_H - y_E)^2}$

$EH = \sqrt{(2+3)^2 + (-1-1)^2}$

$EH = \sqrt{25+4}$ . D'où $EH = \sqrt{29}$ .

*3)a.* On a : E(-3 ; 1)

et $\frac{1}{2}x_E + \frac{5}{2} = \frac{1}{2}(-3) + \frac{5}{2} = \frac{2}{2} = 1$

D'où $y_E = \frac{1}{2}x_E + \frac{5}{2}$ ①

On a : L(5 ; 5)

et $\frac{1}{2}x_L + \frac{5}{2} = \frac{1}{2} \times 5 + \frac{5}{2} = \frac{10}{2} = 5$

D'où : $y_L = \frac{1}{2}x_L + \frac{5}{2}$ ②

De ① et ②, on déduit que : (EL) : $y = \frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$

*b.* Soit (D) la droite telle que (D)⊥(EL) et H ∈ (D).

Posons que (D) : $y = ax + b$

- **Calculons a :**

On a : (EL) : $y = \frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$

Donc : $\frac{1}{2}$ est le coefficient de (EL).

Et comme (D) ⊥ (EL),

alors $\frac{1}{2} \times a = -1$ donc : $a = -2$.

- **Calculons b:**

On a (D) : $y = -2x + b$ et H ∈ (D)

Donc : $y_H = -2x_H + b$

Or : H(2 ; -1)

Par suite : $-1 = -2(2) + b$

$-1 + 4 = b$

$3 = b$

D'où : (D) : $y = -2x + 3$

**39 Exercice résolu**

Dans un repère orthonormé (O ; I ; J), on considère les points A(0 ; -1) , B(4 ; -2) , E(1 ; 3) et F(-1 ; -5).

*1)* Placer les points A , B , E et F.

*2)a.* Montrer que $\frac{-1}{4}$ est la pente de la droite (AB) .

*b.* Déterminer une équation de la droite (Δ) passant par O l'origine du repère et parallèle à ( AB).

*3)* Montrer que : $y = 4x - 1$ est l'équation réduite de la droite (EF).

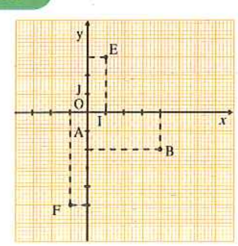
*4)a.* Montrer que A est le milieu de [EF].

*b.* Montrer que (AB) est la médiatrice de [EF]

*5)* Calculer la distance BE , puis en déduire BF.

**Correction : 39**

*1)* **Figure .**




*2)a.* On a : A(0 ; -1) et B (4 ; -2)

$$\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{-2+1}{4-0} = \frac{-1}{4}$$

Donc : $\frac{-1}{4}$ est la pente de (AB).

*b.* Posons que (Δ) : $y = mx + p$

- **Calculons m.**

On a : $\frac{-1}{4}$ et la pente de (AB)

Et $(\Delta)$ // (D).

Donc : $a = \frac{-1}{4}$

- **Calculons p.**

On a $(\Delta) : y = -\frac{1}{4}x + p$

Et O(0 ; 0) appartient à $(\Delta)$.

Donc $p = 0$

D'où : $(\Delta) : y = \frac{-1}{4}x$

*3)* Soit M($x$ ; y) appartient à (EF) et $M \neq E$

Donc : $\frac{y - y_E}{x - x_E} = \frac{y_F - y_E}{x_F - x_E}$

$\frac{y-3}{x-1} = 4$

$y - 3 = 4x - 4$

$y = 4x - 4 + 3$

D'où : (EF) : $y = 4x - 1$

*4)a.* On a : $\frac{x_E + x_F}{2} = \frac{1-1}{2} = 0$ et $\frac{y_F + y_E}{2} = \frac{3-5}{2} = -1$

Et A(0 ; -1)

Donc : A est le milieu de [EF].

*b.* On a : 4 est la pente de (EF)

Et $\frac{-1}{4}$ est la pente de (AB)

Or : $4 \times \frac{-1}{4} = -1$

Donc : $(AB) \perp (EF)$

En outre A est le milieu de [EF]

D'où : (AB) est la médiatrice de [EF].

*5)* On a $\overrightarrow{BE}(1 - 4 ;\ 3 + 2)$

$\overrightarrow{BE}(-3 ; 5)$.

Donc : $BE = \sqrt{(-3)^2 + 5^2} = \sqrt{9 + 25} = \sqrt{34}$

On sait que B appartient à la médiatrice de [EF].

alors : BF = BE

D'où : $BF = \sqrt{34}$.

**40** Dans un repère orthonormé (O ; I ; J), on considère les points A(2 ; 2) ; B (4 ; –2) et C(6 ; 2) .

*1)a.* Déterminer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$.

*b.* Déterminer les coordonnées du milieu M de [AB].

*c.* Montrer que –2 est la pente de la droite (AB).

*2)* Soit (D) la droite d'équation : $y = \frac{1}{2}x - 1$.

*a.* Montrer que la droite (D) par le point C.

*c.* Montrer que les droites (D) et (AB) sont perpendiculaires.

*3)* Déterminer les coordonnées du point d'intersection de (D) avec l'axe des abscisses.

*4)* Déterminer les coordonnées du point K pour que ACBK soit un parallélogramme.

**41** Dans un repère orthonormé (O ; I ; J) , on considère les points $A(-\frac{1}{2} ; 0)$ , B(2 ; 0) , $C(\frac{1}{2} ; 2)$ et D(-2 ; 2).

*1)* Montrer que : $y = 2x + 1$ est l'équation réduite de la droite (AC).

*2)* Montrer que : $y = -\frac{1}{2}x + 1$ est l'équation réduite de la droite (BD).

*3)* En déduire que : $(AC) \perp (BD)$.

*4)* Vérifier que J(0 ; 1) est un point des droites (AC) et (BD).

*5)* Montrer que [AC] et [BD] ont même milieu .

*6)* En déduire la nature du quadrilatère ABCD. Justifier la réponse.

**42** (O ; I ; J ) est un repère orthonormé.

*1)a.* On considère les points A(2 ; 1) et C(-2 ; 2). Déterminer les coordonnés du milieu E de [AC].

*b.* Déterminer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AC}$ puis calculer AC.

*2)* Montrer que : $y = x - 1$ est l'équation réduite de la droite (AI).

*3)* On considère la translation t qui transforme A en E.

*a.* Contruire B l'image du point I par latranslation t.

*b.* Quelle est l'image du point E par la translation t? Justifier la réponse.

*c.* Soit (D) l'image de la droite (AI) par la translation t . Déterminer une équation réduite de la droite (D).

# SYSTÈME DE DEUX ÉQUATIONS DU PREMIER DEGRÉ À DEUX INCONNUES

## Prérequis :

* Equation d'une droite.
* Positions relative de deux droites.

## Un point d'histoire

**Carl Friedrich Gauss (1777 ; 1855)**

C. F. Gauss est un mathématicien, astronome et physicien allemand. Il a apporté de très importantes contributions à ces trois domaines. Surnommé «le prince des mathématiciens», il est considéré comme l'un des plus grands mathématiciens de tous les temps. Il s'intéressa, entre autres, à la construction de polygones réguliers à la règle et au compas. L'un des algoritmes pour déterminer les solutions d'un système d'équations est appelé méthode du pivot de Gauss, en hommage à C. F. Gauss.

## TEST DIAGNOSTIQUE : Je m'évalue

## CHOISIR LA BONNE RÉPONSE.

**Pour chaque question, cocher la bonne réponse en justifiant.**

| | Réponses : | | |
|---|---|---|---|
| On donne $A = 2x - y + 3$. Pour $x = -1$ et $y = 2$, on a : | $A = -7$ | $A = -1$ | $A = -3$ |
| On a : $(D) : y = 2x - 4$ et $A(2 ; b)$. $A \in (D)$ ; donc : ... | $b = 1$ | $b = 0$ | $b = -1$ |
| $x$ et y sont deux nombres tels que : $3x - 2y = 5$. Si $x = 3$, alors ... | $y = \frac{1}{2}$ | $y = -2$ | $y = 2$ |
| On donne $(D) : 2x - y + 3 = 0$. L'équation réduite de la droite (D) est : | $x = \frac{1}{2}y - \frac{3}{2}$ | $y = 2x + 3$ | $2x = y - 3$ |
| Si $x = 2a - b$ et $y = a + 3b$, alors ... | $3x + y = 7a$ | $3x + y = 3a + 2b$ | $3x + 2y = 7a + 2b$ |
| On a : $(D) : y = 2x - 5$ et $(\Delta) : y = -2x + 1$ ; donc : ... | (D) et ($\Delta$) sont strictement parallèles | (D) et ($\Delta$) sont sécantes | $(D) = (\Delta)$ |
| La somme de deux nombres est 91 et leur différence est égale à 45; donc ces nombres sont : ... | 86 et 5 | 68 et 23 | -68 et -23 |

Solutions page : 246

# ACTIVITÉS : JE DÉCOUVRE

## Activité 1 Mise en équation d'une situation

La tirelire d'un enfant de 12 ans contient 40 pièces, les unes de 5 DH, les autres de 10DH, pour un montant total de 275DH.

Soit $x$ le nombre de pièces de 5DH et y le nombre de pièces de 10DH.

1. En exprimant le nombre total de pièces, donner une relation entre $x$ et y.
2. En exprimant le montant total, donner une relation entre $x$ et y.
3. *a.* Quelles sont les deux relations que doivent vérifier $x$ et y?

   *b.* Calculer $x$ et y.

## Activité 2 Résolution d'un système par substitution

On se propose de déterminer les deux nombres réels $x$ et y vérifiant les deux équations :

$$\begin{cases} x - 2y = 10 & (1) \\ 2x + 3y = -1 & (2) \end{cases}$$

1. Calculer $x$ en fonction de y en utilisant l'équation (1).
2. Remplacer $x$ par son expression en fonction de y dans l'équation (2).
3. Déterminer y puis $x$.

## Activité 3 Résolution d'un système par combinaison linéaire

On considère le système suivant : $\begin{cases} 3x - 4y = 2 & (1) \\ 2x + 5y = -9 & (2) \end{cases}$

1. *a.* Multiplier par 5 chaque membre de l'équation (1), on obtient une autre équation (3)

   *b.* Multiplier par 4 chaque membre de l'équation (2), on obtient l'équation (4).

   *c.* Additionner membre à membre les équations (3) et (4).

   *d.* Trouver $x$
2. De la même manière, calculer y.

## Activité 4 Résolution graphique d'un système

On considère le système : $\begin{cases} 2x + y - 10 = 0 \\ x + 3y = 15 \end{cases}$

Dans le plan muni d'un repère orthonomé (O ; I ; J) , on considère les droites $(D_1)$ et $(D_2)$ :

$(D_1)$ : $2x + y - 10 = 0$ et $(D_2)$ : $x + 3y = 15$.

1. Tracer les droites $(D_1)$ et $(D_2)$.
2. Déterminer graphiquement le point M $(x_M , y_M)$ d'interssection des droites $(D_1)$ et $(D_2)$.
3. Vérifier que le couple $(x_M , y_M)$ est solution du système proposé.

# SAVOIR
## Je révise

## 1 SYSTÈME DE DEUX ÉQUATIONS À DEUX INCONNUES

**Définition 1** a,b,c,a',b' et c' sont des nombres réels donnés .

Le système : $\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$

est appelé **système de deux équations du premier degré à deux inconnues $x$ et y**.

**Exemple :** $\begin{cases} 3x - y = 4 \\ x + 2y = 13 \end{cases}$ est un système de deux équations du premier degré à deux inconnus $x$ et y.

**Résoudre** un système de deux équations à deux inconnues $x$ et y, c'est touver tous les couples ($x$ ; y) pour lesquels, **les deux équations** sont vérifiées simultanément.

**Exemples :** *1)* Le couple (3 ; 5) est solution du système présédent car :

- (3 ; 5) est solution de la première équation : $3 \times 3 - 5 = 4$.
- (3,5) est solution de la deuxième équation : $3 + 2 \times 5 = 13$.

*2)* Le couple (1 , 6) n'est pas solution du système présédent car : $3 \times 1 - 6 \neq 4$

bien qu'il soit solution de la deuxième équation : $1 + 2 \times 6 = 13$

**REMARQUE :** Dans un couple de nombres ($x$ ; y), l'ordre des termes est important.

Par exemple : (3 , 5) est solution de l'équation $3x - y = 4$ mais (5,3) n'est pas solution.

## 2 MÉTHODES DE RÉSOLUTION ALGÉBRIQUES

### *1. Méthode de substitution .*

**Technique 1** On détermine l'une des deux inconnues en fonction de l'autre dans l'une des deux équations, puis on la substitue dans l'autre équation.

**Exemples :** Résolvons le système : $\begin{cases} 3x - y = 4 & (1) \\ x + 2y = 13 & (2) \end{cases}$

*1)* Déterminons $x$ en fonction de y dans l'équation (2) , on obtient : $x = 13 - 2y$ (3).

*2)* Substituons (remplaçons) $x$ dans l'équation (1) par 13 - 2y, on obtient :

## Activité 1 Mise en équation d'une situation

La tirelire d'un enfant de 12 ans contient 40 pièces, les unes de 5 DH, les autres de 10DH, pour un montant total de 275DH.

Soit $x$ le nombre de pièces de 5DH et y le nombre de pièces de 10DH.

1. En exprimant le nombre total de pièces, donner une relation entre $x$ et y.
2. En exprimant le montant total, donner une relation entre $x$ et y.
3. *a.* Quelles sont les deux relations que doivent vérifier $x$ et y?

   *b.* Calculer $x$ et y.

## Activité 2 Résolution d'un système par substitution

On se propose de déterminer les deux nombres réels $x$ et y vérifiant les deux équations :

$$\begin{cases} x - 2y = 10 & (1) \\ 2x + 3y = -1 & (2) \end{cases}$$

1. Calculer $x$ en fonction de y en utilisant l'équation (1).
2. Remplacer $x$ par son expression en fonction de y dans l'équation (2).
3. Déterminer y puis $x$.

## Activité 3 Résolution d'un système par combinaison linéaire

On considère le système suivant : $\begin{cases} 3x - 4y = 2 & (1) \\ 2x + 5y = -9 & (2) \end{cases}$

1. *a.* Multiplier par 5 chaque membre de l'équation (1), on obtient une autre équation (3)

   *b.* Multiplier par 4 chaque membre de l'équation (2), on obtient l'équation (4).

   *c.* Additionner membre à membre les équations (3) et (4).

   *d.* Trouver $x$
2. De la même manière, calculer y.

## Activité 4 Résolution graphique d'un système

On considère le système : $\begin{cases} 2x + y - 10 = 0 \\ x + 3y = 15 \end{cases}$

Dans le plan muni d'un repère orthonomé (O ; I ; J) , on considère les droites ($D_1$) et ($D_2$) :

$$(D_1) : \ 2x + y - 10 = 0 \quad \text{et} \quad (D_2) : \ x + 3y = 15.$$

1. Tracer les droites ($D_1$) et ($D_2$).
2. Déterminer graphiquement le point M ($x_M$ , $y_M$) d'interssection des droites ($D_1$) et ($D_2$).
3. Vérifier que le couple ($x_M$ , $y_M$) est solution du système proposé.

# SAVOIR
## Je révise

## 1 SYSTÈME DE DEUX ÉQUATIONS À DEUX INCONNUES

**Définition 1**

a,b,c,a',b' et c' sont des nombres réels donnés .

Le système : $\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$

est appelé **système de deux équations du premier degré à deux inconnues $x$ et y.**

**Exemple :** $\begin{cases} 3x - y = 4 \\ x + 2y = 13 \end{cases}$ est un système de deux équations du premier degré à deux inconnus $x$ et y.

**Résoudre** un système de deux équations à deux inconnues $x$ et y, c'est touver tous les couples $(x ; y)$ pour lesquels, **les deux équations** sont vérifiées simultanément.

**Exemples :** *1)* Le couple (3 ; 5) est solution du système présédent car :

- (3 ; 5) est solution de la première équation : $3 \times 3 - 5 = 4$.
- (3,5) est solution de la deuxième équation : $3 + 2 \times 5 = 13$.

*2)* Le couple (1 , 6) n'est pas solution du système présédent car : $3 \times 1 - 6 \neq 4$

bien qu'il soit solution de la deuxième équation : $1 + 2 \times 6 = 13$

**REMARQUE :** Dans un couple de nombres $(x ; y)$, l'ordre des termes est important.

Par exemple : (3 , 5) est solution de l'équation $3x - y = 4$ mais (5,3) n'est pas solution.

## 2 MÉTHODES DE RÉSOLUTION ALGÉBRIQUES

### *1. Méthode de substitution .*

**Technique 1** On détermine l'une des deux inconnues en fonction de l'autre dans l'une des deux équations, puis on la substitue dans l'autre équation.

**Exemples :** Résolvons le système : $\begin{cases} 3x - y = 4 & (1) \\ x + 2y = 13 & (2) \end{cases}$

*1)* Déterminons $x$ en fonction de y dans l'équation (2) , on obtient : $x = 13 - 2y$ (3).

*2)* Substituons (remplaçons) $x$ dans l'équation (1) par $13 - 2y$, on obtient :

$$3(13 - 2y) - y = 4 \text{ c'est-à-dire : } 39 - 6y - y = 4$$
$$-7y = -35$$
$$y = \frac{-35}{-7} \text{ ; soit } y = 5$$

Substituons y dans l'équation (3) par 5 ; on obtient : $x = 13 - 2 \times 5 = 3$

**Vérification :** $\begin{cases} 3\times 3 - 5 = 9 - 5 = 4 \\ 3 + 2\times 5 = 3 + 10 = 13 \end{cases}$. Donc, la solution de ce système est le couple (3 ; 5).

### 2. *Méthode de combinaison linéaire*

**Technique 2** On annule l'une des deux inconnues en additionnant les deux équations multipliées par des coefficients convenables membre à membre.

**Exemples :** Résolvons le système : $\begin{cases} -2x + 3y = -4 & (1) \\ 5x + 2y = -1 & (2) \end{cases}$

*1)* Pour éliminer y , on multiplie les membres de la première équation par -2 et ceux de la seconde par 3 :

$$\begin{cases} -2(-2x + 3y) = -2\,(-4) \\ 3(5x + 2y) = 3\times(-1) \end{cases} \text{ c'est-à-dire : } \begin{cases} 4x - 6y = 8 \\ 15x + 6y = -3 \end{cases}$$

Additionnons membre à membre les membres des deux équations : $4x - \cancel{6y} + 15x + \cancel{6y} = 8 - 3$

donc : $19x = 5$ soit : $x = \frac{5}{19}$.

*2)* Pour éliminer $x$, on multiplie les membres de la première équation par 5 et ceux de la seconde par 2 :

$$\begin{cases} 5(-2x + 3y) = 5\,(-4) \\ 2(5x + 2y) = 2(-1) \end{cases} \text{ c'est-à-dire : } \begin{cases} -10x + 15y = -20 \\ 10x + 4y = -2 \end{cases}$$

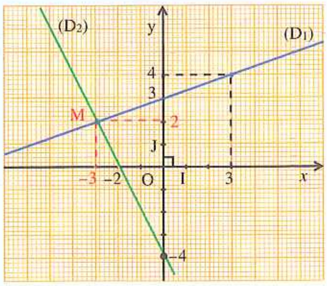
Additionnons membre à membre les membres des deux équations : $-\cancel{10x} + 15y + \cancel{10x} + 4y = -20 - 2$

donc : $19y = -22$ soit : $y = \frac{-22}{19}$.

D'où le couple $\left(\frac{5}{19}; \frac{-22}{19}\right)$ est la solution du système.

## 3 MÉTHODE DE RÉSOLUTION GRAPHIQUE

**Exemple :** Résolvons le système : $\begin{cases} x - 3y = -9 \\ 2x + y = -4 \end{cases}$




En exprimant y en fonction de $x$ dans chacune des équations,

on obtient : $\begin{cases} y = \frac{1}{3}x + 3 \\ y = -2x - 4 \end{cases}$

On considère les droites : $(D_1)$ : $y = \frac{1}{3}x + 3$ et $(D_2)$ : $y = -2x - 4$

$(D_1)$ et $(D_2)$ n'ont pas la même pente, donc $(D_1)$ et $(D_2)$ sont sécantes en M(–3 ; 2).

D'où (-3 ; 2) est la solution du système.

# PRATIQUE
## J'applique

## 1 RÉSOUDRE UN PROBLÈME PAR UN SYSTÈME DE DEUX ÉQUATIONS À DEUX INCONNUES

**Exemple 1** Une agence de voyages a reçu un chèque de 46800 DH pour le déplacement du personnel d'une société de 40 salariés. Les cadres prennent l'avion qui coûte 2500 DH tandis que les employés prennent le train qui coûte 600 DH.

Combien faut-il faire de réservations en train et en avion?

Soit $x$ le nombre de cadres et y le nombre d'employés.

Il y a 40 salariés. Donc : $x + y = 40$

Le coût des billets d'avion : $2500x$

Le coût des billets en train : $600y$

Le montant du chèque est 46800 DH, donc : $2500x + 600y = 46800$

Soit : $25x + 6y = 448$

Pour trouver $x$ et y, on résout le système : $\begin{cases} x + y = 40 \\ 25x + 6y = 468 \end{cases}$

On a : $\begin{cases} x + y = 40 \\ 25x + 6y = 468 \end{cases}$ c'est-à-dire : $\begin{cases} x = 40 - y \\ 25x + 6y = 468 \end{cases}$

$\begin{cases} x = 40 - y \\ 25(40 - y) + 6y = 468 \end{cases}$ c'est-à-dire : $\begin{cases} x = 40 - y \\ 1000 - 25y + 6y = 468 \end{cases}$

$\begin{cases} x = 40 - y \\ -19y = -532 \end{cases}$ c'est-à-dire : $\begin{cases} x = 40 - y \\ y = 28 \end{cases}$

$\begin{cases} x = 40 - 28 \\ y = 28 \end{cases}$ donc : $\begin{cases} x = 12 \\ y = 28 \end{cases}$

**Vérification :** $\begin{cases} x + y = 12 + 28 = 40 \\ 2500x + 600y = 2500 \times 12 + 600 \times 28 = 46800. \end{cases}$

Interprétation des résultats, il y a 12 réservations en avion et 28 réservations en train.

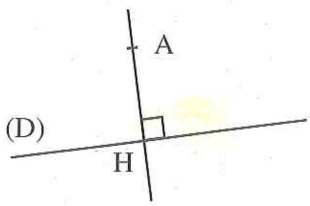
**Exemple 2** Dans un repère orthonormé (O ; I ; J), on considère le point A(-3 , 9) et la droite (D) d'équation :

$$y = 3x - 2$$

Déterminer la distance entre le point A et la droite (D).

Soit H(a ; b) le projeté orthogonal de A sur (D).

On détermine les coordonnées de H.



Pour cela, on détermine une équation de (AH) .

Posons que : (AH) : $y = mx + p$

On a 3 est le coefficient directeur de (D)

et : $(AH) \perp (D)$

Donc : $m = -\frac{1}{3}$. Ainsi : (AH) : $y = -\frac{1}{3}x + p$

En outre A(−3 ; 9) appartient à (AH) :

$$9 = -\frac{1}{3} \times (-3) + p$$

$$9 - 1 = p \text{ ; donc : } p = 8$$

Et : (AH) : $y = -\frac{1}{3}x + 8$ et H(a ; b)appartient à (D)

Donc : $b = -\frac{1}{3}a + 8$ et $b = 3a - 2$

c'est-à-dire : $a + 3b = 24$ et $3a - b = 2$

On résout le système : $\begin{cases} 3a - b = 2 \\ a + 3b = 24 \end{cases}$

$$\begin{matrix} \times 3 \\ \times 1 \end{matrix} \begin{cases} 3a - b = 2 \\ a + 3b = 24 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{matrix} \times 1 \\ \times (-3) \end{matrix} \begin{cases} 3a - b = 2 \\ a + 3b = 24 \end{cases}$$

$$+ \begin{cases} 9a - 3b = 6 \\ a + 3b = 24 \end{cases} \quad \text{et} \quad + \begin{cases} 3a - b = 2 \\ -3a - 9b = -72 \end{cases}$$

$$10a = 30 \quad \text{et} \quad -10b = a\ 70a$$

$$a = 3 \quad \text{et} \quad b = 7$$

donc : H(3 ; 7)

On a : $AH = \sqrt{(x_H - x_A)^2 + (y_H - y_A)^2} = \sqrt{(3+3)^2 + (7-9)^2}$

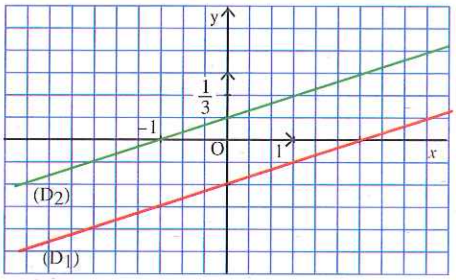
$$= \sqrt{40}$$

Donc : $2\sqrt{10}$ est la distance entre A et la droite (D) .

## 2 RÉSOUDRE DES SYSTÈMES PARTICULIERS

**Exemple 3** Résoudre le système : $\begin{cases} -x + 3y = 12 \\ 2x - 6y = 4 \end{cases}$

On a : $\begin{matrix} \times 2 \\ \times 1 \end{matrix} \begin{cases} -x + 3y = 12 \\ 2x - 6y = 4 \end{cases}$ Donc : $\begin{cases} -2x + 6y = 24 \\ 2x - 6y = 4 \end{cases}$




En additionnant membre à membre, on obtient :

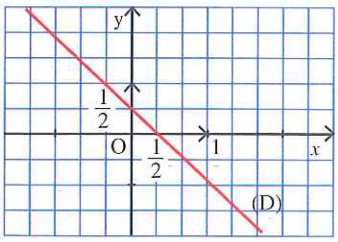
$0x + 0y = 28$ c'est-à-dire $0 = 28$ et ceci est impossible

Il n'y a pas de couple solution.

Interprétation graphique : $\left.\begin{matrix} (D_1) : y = \frac{1}{3}x + \frac{1}{3} \\ (D_2) : y = \frac{1}{3}x - \frac{2}{3} \end{matrix}\right\}$ donc , $(D_1)$ et $(D_2)$ sont strictement parallèles.

**Exemple 4** Résoudre le système : $\begin{cases} 3x + 6y = 3 \\ -2x - 4y = -2 \end{cases}$

On a : $\begin{matrix} \times 2 \\ \times 1 \end{matrix} \begin{cases} 3x + 6y = 3 \\ -2x - 4y = -2 \end{cases}$ donc $\begin{cases} 6x + 12y = 6 \\ -6x - 12y = -6 \end{cases}$




En additionnant membre à membre, on obtient : $0x + 0y = 0$ ceci est vrai pour tous nombres reéls $x$ et y, donc il y a une infinité de couples solutions.

**Interprétation graphique :** $\left.\begin{matrix} (D_1) : y = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \\ (D_2) : y = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \end{matrix}\right\}$ donc , les droites $(D_1)$ et $(D_2)$ sont confondues.

# INVESTISSEMENT
## Je m'entraîne

### RÉSOUDRE DES SYSTÈMES

**1** Résoudre les systèmes suivants :

*1)* $\begin{cases} 3x - y = 5 \\ -12x + 4y = -2 \end{cases}$ *2)* $\begin{cases} -2x + 3y = 4 \\ 6x - 9y = -12 \end{cases}$

**2** Résoudre les systèmes suivants :

*1)* $\begin{cases} x = 2y - 1 \\ 3x - 4y = 5 \end{cases}$ *2)* $\begin{cases} 4x - 5y = 2 \\ 2x + 5y = -3 \end{cases}$

**3** Résoudre les systèmes suivants :

*1)* $\begin{cases} 2(x - y) - 3x = 4 \\ -x + 2(x + y) = 0 \end{cases}$ *2)* $\begin{cases} \frac{x}{3} - \frac{y}{4} = 3 - y \\ \frac{x}{2} + \frac{3y}{6} = \frac{1}{3} \end{cases}$

**4** Résoudre les systèmes suivants :

*1)* $\begin{cases} \frac{3x - y}{10} - \frac{x + y}{4} = 1 - \frac{x - y}{5} \\ \frac{3x - 2y}{16} + \frac{x + 3y}{8} = 1 - \frac{x - y - 3}{4} \end{cases}$ *2)* $\begin{cases} \frac{x - 1}{3} = \frac{y + 2}{2} \\ x - y = -5 \end{cases}$

**5** Résoudre les systèmes suivants :

*1)* $\begin{cases} (\sqrt{2} + 1)x + 3y = -1 \\ 2x - (\sqrt{2} - 1)y = 1 - \sqrt{2} \end{cases}$ *2)* $\begin{cases} \frac{x\sqrt{2}}{\sqrt{2} + 1} = \frac{2y\sqrt{2}}{\sqrt{2} - 1} \\ x - y = 2\sqrt{2} \end{cases}$

**6** Résoudre les systèmes suivants :

*1)* $\begin{cases} x\sqrt{5} + y\sqrt{6} = -1 \\ x\sqrt{6} \quad y\sqrt{5} = 2 \end{cases}$ *2)* $\begin{cases} \sqrt{3} - y\sqrt{2} = -\sqrt{3} \\ \sqrt{2} + y\sqrt{3} = 2\sqrt{2} \end{cases}$

**7** **AVEC TICE**


*1)* Exploiter le dynamique du logiciel ***Geogebra*** pour conjecturer la solution du système :

$$\begin{cases} 2x - 3y = -7 \\ 3x + 2y = 22 \end{cases}$$

*2)* Résoudre le système : $\begin{cases} 2x - 3y = -7 \\ 3x + 2y = 22 \end{cases}$

**8** Résoudre graphiquement le système :

$$\begin{cases} x - y = 5 \\ x + y = 11 \end{cases}$$

### VÉRIFIER UNE SOLUTION

**9** On considère le système suivant : $\begin{cases} -2x + y = -3 \\ 3x - 2y = 4 \end{cases}$

*1)* Le couple (3 ; –2) est-il solution du système?

*2)* Le couple (–2 ; 1) est-il solution du système?

**10** Déterminer les valeurs des nombres réels a et b sachant que le couple (2 ; –3) est solution du système (d'inconnues $x$ et y) : $\begin{cases} (a + b)x - (2b + 1)y = a - 3 \\ (a - 1)x + (a - 3b)y = 2b + 1 \end{cases}$

**11** *1)* Résoudre le système : $\begin{cases} -20x + 6y = -70 \\ 15x - 12y = -60 \end{cases}$

*2)* En déduire que : $\frac{8x \quad 40}{y - 5} = \frac{11x + 20}{2y + 15}$

Si ($x$ ; y) est le couple solution du système.

**12** Calculer les nombres a et b sachant que le couple (4 ; -5) est solution du système d'inconnues $x$ et y :

$$\begin{cases} -3x + y = a + 1 \\ 2x + 3y = -b \end{cases}$$

**13** les systèmes d'équations d'inconnues $x$ et y :

$\begin{cases} -3x + by = 2 \\ 2x - 4y = a \end{cases}$ et $\begin{cases} x - y = 2 \\ x + 2y = -3 \end{cases}$

ont la même solution.

Calculer a et b.

### RÉSOUDRE UN PROBLÈME PAR UN SYSTÈME

**14** Un troupeau est composé de chameaux et de dromadaires. On compte 86 têtes et 120 bosses.

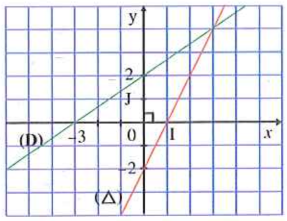
Sachant qu'un dromadaire a une bosse et qu'un chameau en a deux, combien y'a-t-il d'animeaux de chaque espèce?

**15** Dans ma tirelire, j'ai des pièces de 2DH et des pièces de 5DH.

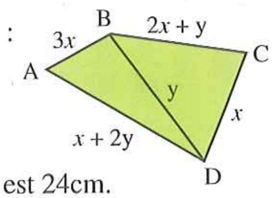
Comien ai-je de pièces de chaque sorte sachant que j'ai 50 pièces et 139DH?

**16** Il y a 4ans, Othmane avait trois fois l'âge de sa soeur Kenza. Dans 8ans , Othmane aura deux fois l'âge de Kenza.
Déterminer les âges de Kenza et de Othmane.

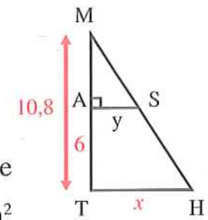
**17** Voici l'interprétation graphique d'un système d'équations.
Déterminer les deux équations du système et le résoudre algébriquement.




**18** Calculer $x$ et y sachant que :
Le périmètre du quadrilatère ABCD est 34cm et le périmètre du triangle ABD est 24cm.




**19** Sur la figure ci-contre :
MT = 10,8cm et AT = 6cm
On pose : AS = y et TH = $x$
Déterminer $x$ et y sachant que l'aire du trapèze ASHT est égale à 39cm$^2$.




## RÉSOUDRE DES SYSTÈMES COMPLEXES

**20** Résoudre les systèmes d'équations suivants :

1) $\begin{cases} \dfrac{4}{x} - \dfrac{6}{y} = 26 \\ \dfrac{15}{x} + \dfrac{3}{y} = -2 \end{cases}$  2) $\begin{cases} -\dfrac{3}{2x} + \dfrac{1}{3y} = -5 \\ \dfrac{5}{2x} - \dfrac{2}{3y} = 8 \end{cases}$

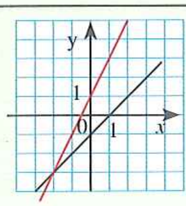
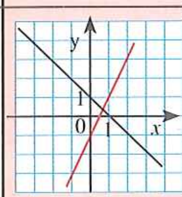
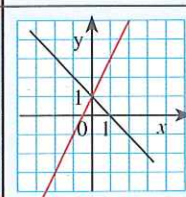
3) $\begin{cases} \dfrac{4}{x-3} - \dfrac{3}{y+2} = 0 \\ -\dfrac{1}{x-3} + \dfrac{2}{y+2} = -1 \end{cases}$  4) $\begin{cases} \dfrac{2}{x-y} + \dfrac{3}{2x+y} = 4 \\ -\dfrac{1}{x-y} - \dfrac{2}{2x+y} = -3 \end{cases}$

**21** Résoudre les systèmes suivants :

1) $\begin{cases} 2\sqrt{x} - 3\sqrt{y} = 0 \\ -\sqrt{x} + 2\sqrt{y} = 1 \end{cases}$  2) $\begin{cases} \sqrt{x} - \frac{1}{4}\sqrt{y} = 4 \\ 3\sqrt{x} + 2\sqrt{y} = 23 \end{cases}$

## MON BILAN

***1) Indiquer la bonne réponse par A , B ou C :***

| | A | B | C |
|---|---|---|---|
| 1 La solution du système $\begin{cases} 2x + 3y = 2 \\ 3x + 4y = 1 \end{cases}$ est ... | (5 ; –4) | (–5 ; 4) | (4 ; –5) |
| 2 Pour résoudre le système $\begin{cases} 4x - y = 3 \\ -x + y = 5 \end{cases}$ | $4x - y + (-x + y) = 2$ | $4x - y - (-x + y) = 2$ | $4x - y + (-x + y) = 8$ |
| 3 Le système $\begin{cases} x + y = 1 \\ 2x - y = -1 \end{cases}$ est représenté dans un repère par ... |  |  |  |
| 4 f est une fonction affine telle que : f(-1) = 3 et f(-2) = -5 Pour trouver l'expression de l'image de x par f on peut résoudre le système ... | $\begin{cases} 3a + b = -1 \\ -5a + b = -2 \end{cases}$ | $\begin{cases} -a + b = 3 \\ -2a + b = -5 \end{cases}$ | $\begin{cases} -a + b = -2 \\ 3a + b = -5 \end{cases}$ |

Corrections page : 247

***2) En cas d'erreur, voici quelques conseils :***

| | Savoir | Pratique |
|---|---|---|
| Ex: 1 | Définition 1 | |
| Ex: 2 | Définition 4 | |
| Ex: 3 | Définition 3 | |
| Ex: 4 | Propriété 3 | |

***3) Exercices pour la remédiation voir R17 page : 249***

## RÉSOUDRE DES SYSTÈMES À TROIS INCONNUES

**22** Résoudre les systèmes suivants :

*1)* $\begin{cases} z = y - x \\ -x + y + z = 4 \\ x + y - z = -2 \end{cases}$ *2)* $\begin{cases} \frac{x}{3} = \frac{y}{4} = \frac{z}{6} \\ x + y - z = 18 \end{cases}$

*3)* $\begin{cases} x - y = 4 \\ y + z = -2 \\ x - z = 5 \end{cases}$ *4)* $\begin{cases} x + y + z = -3 \\ x - y + z = -9 \\ x + y - z = 1 \end{cases}$

## RÉSOUDRE DES PROBLÈMES PAR UN SYSTÈME

**23** Dans un service administratif il y a 32 personnes. 5 femmes et 3 hommes partent en retraite et ne seront pas remplacés.Il y aura alors 2 fois d'hommes que de femmes dans ce service.
Déterminer le nombre d'hommes et de femmes dans ce service.

**24** Un père a le triple de l'âge de son fils.
Dans 14 ans l'âge du père sera le double de celui du fils.
Déterminer les âges du père et du fils.

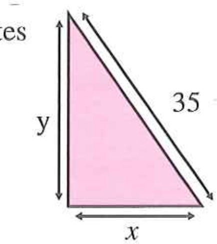
**25** Un père a le triple de l'âge de son fils.
Dans 14 ans l'âge du père sera le double de celui du fils.
Déterminer les âges du père et du fils.

**26** Il y a 5 ans , un père avait 5 fois l'âge de sa fille.
Dans 5 ans, l'âge de la fille sera les $\frac{2}{5}$ de celui de son père. Déterminer l'âge actuel de chacun d'eux.

**27** Si on diminue la longueur d'un champ rectangulaire de 2m et que l'on augmente sa largeur de 4m, alors son aire augmente de $16m^2$.
Si on augmente la longueur de ce champ rectangulaire de 5m et on diminue sa largeur de 3m, alors son aire diminue de $5m^2$.
Déterminer les dimensions de ce champ.

**28** E,F et G sont trois points alignés du plan tels que :
$EF = FG = x + 2$ et $EG = y$ et $EF + FG + EG = 24cm$
Déterminer $x$ et y.

**29** $x$ et y sont les longeurs des côtes d'un triangle rectangle tels que:
$4x = 3y$ et que la longueur de l'hypoténuse de ce triangle est 35.
Calculer $x$ et y.




**30** Déterminer deux entiers naturels sachant que leur somme est 494 et que si on divise le plus grand par le plus petit le quotient est 6 et le reste est 32.

**31** La différence de deux nombres est 48.
Si l'on ajoute 4 à chacun de ces deux entiers, on obtient deux nouveaux nombres dont le plus grand est le quadruple du plus petit .
Déterminer ces deux nombres.

**32** *1)* Résoudre le système : $\begin{cases} x + y = 8 \\ x + 2y = 11 \end{cases}$

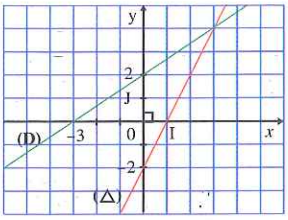
*2)* Le périmètre d'un rectangle est 16 cm.
Si l'on ajoute 3 cm à la longueur , et si on double la largeur, le périmètre devient 28 cm .
Quelles sont les dimensions initiales du rectangle?

**33** La route qui relie A et B comporte, de A vers B, une montée puis une descente. Un cycliste, dont la vitesse moyenne est 10km/h en montée et 30km/h en descente, met 1h30min pour aller de A vers B et 2h 30min pour aller de B vers A.
Calculer la distance de chaque ville au point le plus élevé de la route.

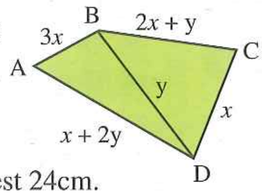
Comien ai-je de pièces de chaque sorte sachant que j'ai 50 pièces et 139DH?

**16** Il y a 4ans, Othmane avait trois fois l'âge de sa soeur Kenza. Dans 8ans , Othmane aura deux fois l'âge de Kenza.
Déterminer les âges de Kenza et de Othmane.

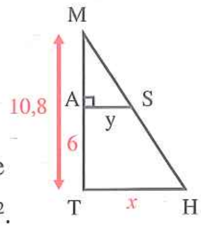
**17** Voici l'interprétation graphique d'un système d'équations.
Déterminer les deux équations du système et le résoudre algébriquement.




**18** Calculer $x$ et y sachant que :
Le périmètre du quadrilatère ABCD est 34cm et le périmètre du triangle ABD est 24cm.




**19** Sur la figure ci-contre :
MT = 10,8cm et AT = 6cm
On pose : AS = y et TH = $x$
Déterminer $x$ et y sachant que l'aire du trapèze ASHT est égale à $39cm^2$.




## RÉSOUDRE DES SYSTÈMES COMPLEXES

**20** Résoudre les systèmes d'équations suivants :

1) $\begin{cases} \dfrac{4}{x} - \dfrac{6}{y} = 26 \\ \dfrac{15}{x} + \dfrac{3}{y} = -2 \end{cases}$  2) $\begin{cases} -\dfrac{3}{2x} + \dfrac{1}{3y} = -5 \\ \dfrac{5}{2x} - \dfrac{2}{3y} = 8 \end{cases}$

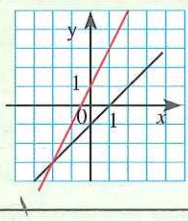
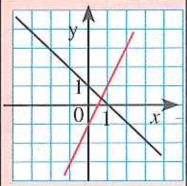
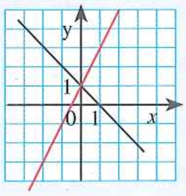
3) $\begin{cases} \dfrac{4}{x-3} - \dfrac{3}{y+2} = 0 \\ -\dfrac{1}{x-3} + \dfrac{2}{y+2} = -1 \end{cases}$  4) $\begin{cases} \dfrac{2}{x-y} + \dfrac{3}{2x+y} = 4 \\ -\dfrac{1}{x-y} - \dfrac{2}{2x+y} = -3 \end{cases}$

**21** Résoudre les systèmes suivants :

1) $\begin{cases} 2\sqrt{x} - 3\sqrt{y} = 0 \\ -\sqrt{x} + 2\sqrt{y} = 1 \end{cases}$  2) $\begin{cases} \sqrt{x} - \frac{1}{4}\sqrt{y} = 4 \\ 3\sqrt{x} + 2\sqrt{y} = 23 \end{cases}$

## MON BILAN

*1) Indiquer la bonne réponse par A , B ou C :*

| | A | B | C |
|---|---|---|---|
| **1** La solution du système $\begin{cases} 2x + 3y = 2 \\ 3x + 4y = 1 \end{cases}$ est ... | (5 ; –4) | (–5 ; 4) | (4 ; –5) |
| **2** Pour résoudre le système $\begin{cases} 4x - y = 3 \\ -x + y = 5 \end{cases}$ | $4x - y + (-x + y) = 2$ | $4x - y - (-x + y) = 2$ | $4x - y + (-x + y) = 8$ |
| **3** Le système $\begin{cases} x + y = 1 \\ 2x - y = -1 \end{cases}$ est représenté dans un repère par ... |  |  |  |
| **4** f est une fonction affine telle que : f(-1) = 3 et f(-2) = -5 Pour trouver l'expression de l'image de x par f on peut résoudre le système ... | $\begin{cases} 3a + b = -1 \\ -5a + b = -2 \end{cases}$ | $\begin{cases} -a + b = 3 \\ -2a + b = -5 \end{cases}$ | $\begin{cases} -a + b = -2 \\ 3a + b = -5 \end{cases}$ |

Corrections page : 247

*2) En cas d'erreur, voici quelques conseils :*

| | Savoir | Pratique |
|---|---|---|
| Ex: 1 | Définition 1 | |
| Ex: 2 | Définition 4 | |
| Ex: 3 | Définition 3 | |
| Ex: 4 | Propriété 3 | |

*3) Exercices pour la remédiation voir R17 page : 249*

## RÉSOUDRE DES SYSTÈMES À TROIS INCONNUES

**22** Résoudre les systèmes suivants :

1) $\begin{cases} z = y - x \\ -x + y + z = 4 \\ x + y - z = -2 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \frac{x}{3} = \frac{y}{4} = \frac{z}{6} \\ x + y - z = 18 \end{cases}$

3) $\begin{cases} x - y = 4 \\ y + z = -2 \\ x - z = 5 \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x + y + z = -3 \\ x - y + z = -9 \\ x + y - z = 1 \end{cases}$

## RÉSOUDRE DES PROBLÈMES PAR UN SYSTÈME

**23** Dans un service administratif il y a 32 personnes. 5 femmes et 3 hommes partent en retraite et ne seront pas remplacés.Il y aura alors 2 fois d'hommes que de femmes dans ce service.
Déterminer le nombre d'hommes et de femmes dans ce service.

**24** Un père a le triple de l'âge de son fils.
Dans 14 ans l'âge du père sera le double de celui du fils.
Déterminer les âges du père et du fils.

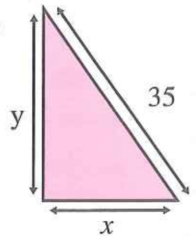
**25** Un père a le triple de l'âge de son fils.
Dans 14 ans l'âge du père sera le double de celui du fils.
Déterminer les âges du père et du fils.

**26** Il y a 5 ans , un père avait 5 fois l'âge de sa fille.
Dans 5 ans, l'âge de la fille sera les $\frac{2}{5}$ de celui de son père. Déterminer l'âge actuel de chacun d'eux.

**27** Si on diminue la longueur d'un champ rectangulaire de 2m et que l'on augmente sa largeur de 4m, alors son aire augmente de $16m^2$.
Si on augmente la longueur de ce champ rectangulaire de 5m et on diminue sa largeur de 3m, alors son aire diminue de $5m^2$.
Déterminer les dimensions de ce champ.

**28** E,F et G sont trois points alignés du plan tels que :
$EF = FG = x + 2$ et $EG = y$ et $EF + FG + EG = 24cm$
Déterminer $x$ et y.

**29** $x$ et y sont les longeurs des côtes d'un triangle rectangle tels que:
$4x = 3y$ et que la longueur de l'hypoténuse de ce triangle est 35.
Calculer $x$ et y.




**30** Déterminer deux entiers naturels sachant que leur somme est 494 et que si on divise le plus grand par le plus petit le quotient est 6 et le reste est 32.

**31** La différence de deux nombres est 48.
Si l'on ajoute 4 à chacun de ces deux entiers, on obtient deux nouveaux nombres dont le plus grand est le quadruple du plus petit .
Déterminer ces deux nombres.

**32** 1) Résoudre le système : $\begin{cases} x + y = 8 \\ x + 2y = 11 \end{cases}$

2) Le périmètre d'un rectangle est 16 cm.
Si l'on ajoute 3 cm à la longueur , et si on double la largeur, le périmètre devient 28 cm .
Quelles sont les dimensions initiales du rectangle?

**33** La route qui relie A et B comporte, de A vers B, une montée puis une descente. Un cycliste, dont la vitesse moyenne est 10km/h en montée et 30km/h en descente, met 1h30min pour aller de A vers B et 2h 30min pour aller de B vers A.
Calculer la distance de chaque ville au point le plus élevé de la route.

## PROBLÈMES OUVERTS

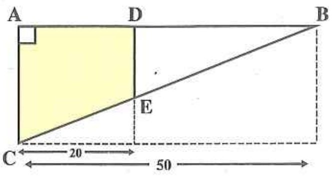
**34**

*1)* Résoudre le système : $\begin{cases} \dfrac{x}{y} = 0{,}6 \\ x + y = 32 \end{cases}$

*2)* ABC est un triangle en A.

Le quadrilatère ADEC est un trapèze d'aire 320 mm²

AB = 50 mm et AD = 20 mm




***a.*** Montrer que : $\dfrac{DE}{AC} = 0{,}6$ .

***b.*** Retrouver les longueurs des bases du trapèze.

**Conseil** Poser : DE = $x$ et AC = y

**35** Pour aller d'un village à un autre, il faut monter pendant 3 km puis redescendre pendant 6 km.

Les pentes de la montée et de la descente sont égales.

Un cycliste met 27 min pour faire le trajet aller et 36 min pour faire le trajet retour.

Quelle est sa vitesse en montée et quelle sa vitesse en descente? On supposera qu'il pédale aussi vite au retour qu'à l'aller.

**36** Trois jus d'orange et une limonade coûtent 39,5DH Sept jus d'orange et cinq limonades coûtent 113,50 DH Quel est le prix d'un jus d'orange? et celui d'une limonade?

## CHALLENGES

**37** Résoudre les systèmes suivants :

*1)* $\begin{cases} x + y = 1 \\ x^2 + y^2 = 13 \end{cases}$ *2)* $\begin{cases} x - y = 10 \\ x^2 - y^2 = 40 \end{cases}$

*3)* $\begin{cases} -x + y = -11 \\ -xy = 24 \end{cases}$ *4)* $\begin{cases} x^2 + y^2 = 41 \\ xy = 20 \end{cases}$

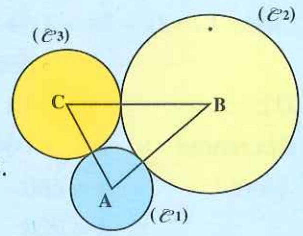
**38** Résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} (x - y + 2)(x + y - 1) = 0 \\ 2x + y = -1 \end{cases}$$

**39** Les trois cercles $\mathscr{C}_1$(A ; a) et $\mathscr{C}_2$(B ; b) et $\mathscr{C}_3$ (C ; c) sont tangents deux à deux tels que :

AB = 38cm et AC = 22cm et BC = 26cm

Calculer les rayons a,b et c.




**40** La différence de deux entiers est 13.

Si l'on ajoute 10 à chacun de ces deux entiers, on obtient deux nouveaux nombres dont le plus grand est le double du plus petit.

Quel sont les deux entiers choisis au départ?

## SITUATIONS PROPOSÉES AUX OLYMPIADES

**Déterminer les solutions de chacun des systèmes :**

$(S_1) : \begin{cases} x + y = 1 \\ x^3 + y^3 = 7 \end{cases}$ ; $(S_2) : \begin{cases} xy + xz = 6 \\ yz + yx = 8 \\ zx + zy = 10 \end{cases}$

## 41 Exercice résolu

*1)* Résoudre le système :

$$(I)\quad \begin{cases} x + y = 660 \\ 3x + 2y = 1544 \end{cases}$$

*2)* Dans un théâtre, deux tarifs sont pratiqués : un plein tarif à 224 DH et un tarif réduit à 80DH.

La recette d'un spectale auquel assistaient 660 personnes est 61760DH.

Calculer le nombre de billets plein tarif et le nombre de billets à tarif réduit qui ont été vendus.

### Correction : 41

***1)* Résolution du système (I).**

On a : $\begin{matrix} \times(-3) \\ \times 1 \end{matrix}\begin{cases} x + y = 660 \\ 3x + 2y = 1544 \end{cases}$

$$\begin{cases} -3x - 3y = -1980 \\ 3x + 2y = 1544 \end{cases}$$

Donc : $-3x - 3y + 3x + 2y = -1980 + 1544$

$-y = -436$

D'où : $y = 436$

Et comme $x + y = 660$

Alors $x = 660 - 436$

$x = 224$

Donc le couple solution du système (I) est (224 ; 436).

*2)* Soit $x$ le nombre de billets à plein tarif et y le nombre de billets à tarif réduit.

Il y a 660 personnes $\longrightarrow x + y = 660$

Recette des billets à plein tarif $\longrightarrow 120x$

Recette des billets à tarif réduit $\longrightarrow 80y$.

La recette totale du spectacle est 61760 DH.

Donc : $120x + 80y = 61760$

Soit : $3x + 2y = 1544$

On obtient ainsi le système : $\begin{cases} x + y = 660 \\ 3x + 2y = 1544 \end{cases}$

D'après la question précédente:

$x = 224$ et $y = 436$

Donc : 224 est le nombre de billets à plein tarif et 436 est le nombre de billets à tarif réduit.

## 42 Exercice résolu

Résoudre graphiquement le système suivant :

$$\begin{cases} 2x + 3y = 0 \\ -4x + 2y = -16 \end{cases}$$

### Correction : 42

Le plan muni d'un repère orthonormé (O ; I ; J), on considère les droites (D) et (Δ) définies par :

(D) : $2x + 3y = 0$

$3y = -2x$

$y = -\frac{2}{3}x$

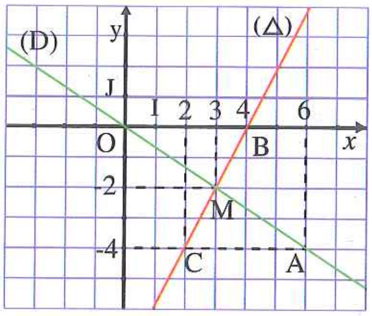
| $x$ | 0 | 6 |
|---|---|---|
| y | 0 | -4 |
| | O | A |

(Δ) : $-4x + 2y = -16$

$2y = 4x - 16$

$y = 2x - 8$

| $x$ | 4 | 2 |
|---|---|---|
| y | 0 | -4 |
| | B | C |




On constate que les droites (D) et (Δ) se coupent au point M(3 ; -2).

Vérifions-le :

$$\begin{cases} 2x + 3y = 2 \times 3 + 3(-2) = 6 - 6 = 0 \\ -4x + 2y = -4 \times 3 + 2(-2) = -12 - 4 = -16 \end{cases}$$

Donc, le couple (3 ; -2) est la solution du système proposé.

## 43

*1)* Résoudre le système : $\begin{cases} 4x + 3y = 123 \\ 3x + y = 61 \end{cases}$

*2)* A la terasse d'un café, Othmane et ses amis consomment 4 cafés et 3 jus de fruit.

Ils payent123DH.

À la table voisine, Ayoub et ses amis consomment 3 cafés et 1 jus de fruit. Ils payent 61DH.

Déterminer le prix d'un café et celui d'un jus.

**44**

*1)* Résoudre le système : $\begin{cases} x - 2y = 150 \\ x + y = 450 \end{cases}$

*2)* Meriem et sa soeur disposent à eux deux d'une somme d'argent de 450DH.

Meriem dit à sa soeur : " Si je te donne 50DH, mon avoir sera alors le double du tien "

Déterminer l'avoir initial de Meriem et de sa soeur.

**45**

*1)* Dans un repère orthonormé (O ; I ; J), construire les droites (D) et ($\Delta$) les courbes respectives des fonctions affines f et g définies par :

$$f(x) = -\frac{4}{3}x + \frac{1}{3} \quad \text{et} \quad g(x) = 2x - 5.$$

Soit M le point d'un point intersection des droites (D) et ($\Delta$).

*2)* Résoudre le système : $\begin{cases} 4x + 3y = 1 \\ -2x + y = -5 \end{cases}$

*3)* En déduire les coordonnées du point M.

**46**

Résoudre le système suivant :

*1)* $\begin{cases} 2x - 3y = 4 \\ -6x + 9y = -12 \end{cases}$ *2)* $\begin{cases} x = 2y - 1 \\ 5x + 3y = -8 \end{cases}$

*3)* $\begin{cases} x - 2y = 1 \\ -4x + 8y = 6 \end{cases}$ *4)* $\begin{cases} \frac{x}{2} = \frac{y}{3} \\ 5x - 4y = 20 \end{cases}$

**47**

*1)* Résoudre le système : $\begin{cases} 13x + 10y = 95 \\ -x + y = -2 \end{cases}$

*2)* Pour organiser une sortie de fin d'année, un collège loue des cars. Il y a des grands cars de 52 places et des petits cars de 40 places.

Il y a 2 grands cars de plus que de petits cars.

380 élèves participent à la sortie et tous les cars sont remplis.

Déterminer le nombre de cars de chaque catégorie.

**48**

*1)* Résoudre le système :

$$\begin{cases} 1{,}1x + y = 10{,}6 \\ x + 0{,}9y = 9{,}6 \end{cases}$$

*2)* Si la longueur d'un rectangle augment de 10% son demi-périmètre est alors de 10,6 cm.

Si la largeur de ce même rectangle diminue de 10%, son demi-périmètre est alors de 9,6 cm.

Quelles sont les dimensions initiales du rectangle ?

**49**

Résoudre les systèmes suivants :

*1)* $\begin{cases} \sqrt{2x} - 3y = 2\sqrt{2} \\ 2x - 3\sqrt{2}\,y = 8 \end{cases}$

*2)* $\begin{cases} \sqrt{3}x + \sqrt{2}y = 1 \\ \sqrt{2}x + \sqrt{3}y = 0 \end{cases}$

*3)* $\begin{cases} \sqrt{2}x - y = 2\sqrt{2} \\ -2x + \sqrt{2}\,y = 3 \end{cases}$

*4)* $\begin{cases} \frac{x}{3} = \frac{y}{2} \\ 3x - 9y = 2 \end{cases}$

# STATISTIQUE

## Prérequis :

* Moyenne d'une série statistique.
* Représentation d'une série statistique.

## Un point d'histoire

**William Playfair (1759 ; 1823)**

Playfair, ingénieur et économiste écossais, est l'un des pionniers de la représentation graphique de données statistiques. Il a introduit trois grands types de diagramme : en 1786 la série chronologique et l'histogramme de données, puis en 1801 le diagramme circulaire montrant les proportions relatives des parties au tout.

## TEST DIAGNOSTIQUE : Je m'évalue

## CHOISIR LA BONNE RÉPONSE.

**Pour chaque question, cocher la bonne réponse en justifiant.**

**Réponses :**

Voici la répartition des notes obtenues par les élèves d'une classe de troisième d'un collège à un devoir de mathématiques :

| Note n | $0 \leq n < 4$ | $4 \leq n < 8$ | $8 \leq n < 12$ | $12 \leq n < 16$ | $16 \leq n < 20$ |
|---|---|---|---|---|---|
| Nombre d'élèves | 3 | 2 | 9 | 4 | 7 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| L'effectif total est : ... | 5 | 9 | 25 |
| La classe qui a le plus grand effectif est : ... | $8 \leq n < 12$ | $4 \leq n < 8$ | $16 \leq n < 20$ |
| Le centre de la classe $12 \leq n < 16$ est : | 4 | 28 | $\frac{12+16}{2}$ |
| La moyenne de ces notes : ... | 50 | 11,88 | 10 |
| Le pourcentage d'élèves qui ont une note supérieure ou égale à 12 : ... | 44% | 12% | 28% |

Solutions page : 246

# ACTIVITÉS : JE DÉCOUVRE

## Activité 1 Médiane , moyenne et le mode

Voici la liste des notes obtenues par 25 élèves d'une classe de troisième à un devoir de mathématiques.

10 - 14 - 7 - 8 - 10 - 12 - 5 - 11 - 8 - 10 - 9 - 12 - 15
17 - 6 - 7 - 9 - 11 - 10 - 8 - 14 - 12 - 6 - 8 - 10

1. *a.* Dresser le tableau des effectifs de cette série statistique.
   *b.* Déterminer la note obtenue par le plus grand nombre d'élèves .
   Cette note est appelé ***le mode*** de cette série statistique.
2. *a.* Représenter graphiquement cette série statistique.
   *b.* Calculer sa valeur moyenne (moyenne arithmétique)
3. *a.* Ranger toutes les notes dans l'ordre croissant.
   *b.* Déterminer et entourer la note M qui dévise cette série en deux groupes de même effectif.
   En dit que M est ***la médiane*** de cette série statistique.
   Est-ce-que la médiane est égale à la moyenne ?
4. Déterminer la médiane de la série statistique constituée des notes d'élèves ayant obtenu 10 et plus.

## Activité 2 Classe médiane

On a relevé les taille de 60 personnes (en centimètres). Voici les résultats.

1. Compléter le tableau ci-contre.
2. En déduire la classe ***médiane*** de cette série.

| Taille en cm | $140 \leqslant t < 145$ | $145 \leqslant t < 150$ | $150 \leqslant t < 155$ | $155 \leqslant t < 160$ |
|---|---|---|---|---|
| Effectif | 24 | 10 | 12 | 14 |
| Effectif cumulé | ... | ... | ... | ... |

## Activité 3 Notion de dispersion

Deux professeurs comparent les notes obtenues par leurs élèves des classes 3$^{\text{ème}}$ A et 3$^{\text{ème}}$ B à un devoir commun de mathématiques.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 8 | 6 | 9 | 19 | 13 |
| 10 | 13 | 20 | 19 | 8 |
| 6 | 17 | 12 | 7 | 19 |
| 4 | 8 | 9 | 16 | 7 |

**Notes obtenues par les élèves de 3$^{\text{ème}}$ A**

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 9 | 11 | 9 | 11 | 10 |
| 13 | 13 | 12 | 9 | 9 |
| 11 | 14 | 15 | 16 | 13 |
| 8 | 10 | 12 | 15 | 10 |

**Notes obtenues par les élèves de 3$^{\text{ème}}$ B**

1. Pour chaque classe, dresser un tableau des effectifs.
2. Construire sur un même dessin, en utilisant deux couleurs, les diagrammes en bâtons représentant les notes de chaque classe .
3. Calculer la moyenne de chaque classe.
4. Calculer l'écart entre la plus grande note et la plus petite des notes attribuées par les deux professeurs
5. Quelle est la classe qui a obtenu les notes les plus dispersées de cette série ?
6. Interpréter les résultats.

# SAVOIR
## Je révise

## 1 MOYENNE PONDÉRÉE

**Définition 1** Pour calculer la **moyenne pondérée** m d'une série statistique ,

- on additionne les produits des effectifs par les valeurs associées du caractère;
- on divise la somme obtenue par l'effectif total de la série;

**Autrement dit :** Si $n_1, n_2, \dots, n_p$ sont respectivement les effectifs des valeurs $x_1, x_2, \dots, x_p$ du caractère et N l'effectif total, alors : $m = \dfrac{n_1 \times x_1 + n_2 \times x_2 + \dots + n_p \times x_p}{N}$

**Exemple :** On a interrogé 20 familles pour étudier le nombre de téléphones portables que chacune possède.

| Nombre de téléphones portables | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|
| Effectif | 2 | 3 | 8 | 4 | 3 |

L'effectif total : $N = 2 + 3 + 8 + 4 + 3 = 20$

Soit m le nombre moyen de téléphones portables dans une famille.

$$m = \frac{0 \times 2 + 1 \times 3 + 2 \times 8 + 3 \times 4 + 4 \times 3}{20} = \frac{43}{20} = 2,15.$$

Donc une famille possède en moyenne 2 téléphones portables.

## 2 MÉDIANE D'UNE SÉRIE STATISTIQUE

**Définition 2** On appelle **médiane** d'une série statistique ordonnée tout nombre qui partage cette série en deux séries d'effectifs égaux.

**Exemples :** *1) ( L'effectif total de la série est impair)*

Soit la série des 9 nombres classés dans l'ordre croissant :

$$\underbrace{7\ 8\ 8\ 9}_{\text{4 valeurs}}\ \mathbf{10}\ \underbrace{10\ 12\ 12\ 16}_{\text{4 valeurs}}$$

10 est la médiane

La médiane de cette serie est 10.

**La médiane de cette série est la valeur centrale de la série.**

*2) (L'effectif total de la série est pair)*

Soit la série des 10 nombres rangés dans l'ordre croissant :

$$\underbrace{4\ 4\ 5\ 6\ 7}_{\text{5 valeurs}}\ \ \underbrace{8\ 8\ 10\ 12\ 12}_{\text{5 valeurs}}$$

Toute valeur comprise entre 7 et 8 est une médiane de cette série.

En général, on choisit : $\frac{7+8}{2} = 7,5$ . Alors la médiane de la série est donc : 7,5.

### *Recherche la médiane d'une série statistique*

**Exemples :** *1)* On considère la série statistique suivante :

| Note | 6 | 6,50 | 8 | 9 | 10 | 12 | 13 | 13,50 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Effectif | 2 | 2 | 5 | 2 | 4 | 2 | 3 | 1 |
| Effectif cumulé | 2 | 4 | 9 | 11 | 15 | 17 | 20 | 21 |

L'effectif total (nombre d'élèves de la classe) est N = 21.

On a : $\frac{N}{2} = 10,5$ , donc la médiane de cette série statistique est 9 , la note d'effectif cumulé 11.

*2)* On considère la série statistique suivante :

| Classe (âge par ans) | $10 \leq x < 20$ | $20 \leq x < 30$ | $30 \leq x < 40$ | $40 \leq x < 50$ | $50 \leq x < 60$ | $60 \leq x < 70$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Nombre de victimes | 25 | 40 | 20 | 20 | 10 | 5 |
| Effectif cumulé | 25 | 65 | 85 | 105 | 115 | 120 |

L'effectif total (nombre de victimes) est N = 120.

On a : $\frac{N}{2} = 60$ , La classe correspond à l'éffectif cumulé 65 est $20 \leq x < 30$

Donc l'âge médiane de cette série statistique est dans la classe $20 \leq x < 30$.

## 3 DISPERSION

**Définition 3** Soit $S_1$ et $S_2$ deux séries statistiques ayant la même moyenne m.

La série $S_1$ est moins dispersée que la serie $S_2$ si les valeurs de $S_1$ sont les plus proches de m que les valeurs de $S_2$.

**Exemple :** Voici les notes obtenues à un même devoir de mathématiques par deux groupes d'élèves A et B.

| | |
|---|---|
| **Groupe A** | 8 ; 9 ; 9 ; 12 ; 13 ; 13 ; 15 ; 16 ; 16 ; 18 |
| **Groupe B** | 4 ; 6 ; 6 ; 10 ; 10 ; 17 ; 18 ; 19 ; 19 ; 20 |

On constate que la moyenne des notes obtenues dans chaque groupe est 12,9 .

Mais la répartition des notes n'est pas la même :

- Pour le premier groupe, les notes sont regroupées autour de la moyenne.
- Pour le deuxième groupe, elles sont très dispersées.

Donc, les notes du groupe A sont mieux regroupées que celles du groupe B.

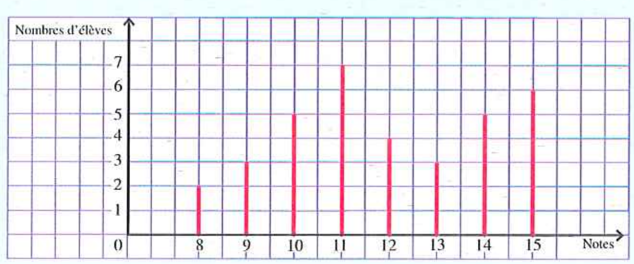
## 4 MODE D'UNE SÉRIE STATISTIQUE

**Définition 4** Le **mode** d'une série statistique est la valeur du caractère qui a le plus grand effectif.

**Exemple :** Voici le diagramme en bâtons des notes obtenues par une classe au premier devoir de mathématiques.

Sur le graphique, le mode correspond au bâton le plus élevé.

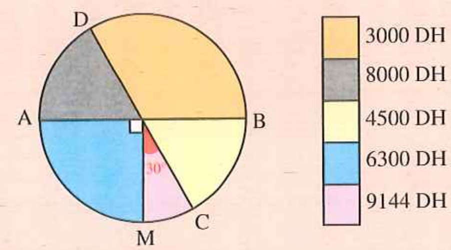
Le nombre 11 est le mode cette série statistique.



## CALCUL DU MODE, DE LA MÉDIANE ET DE LA MOYENNE D'UNE SÉRIE STATISTIQUE.

**Exemple 1** Le diagramme ci-dessous représente le résulat d'une enquête sur les salaires d'une entreprise d'un échantillon de 936 employés.

1. Dresser un tableau des effectifs associés à chaque salaire.
2. Déterminer le salaire le plus fréquent.
3. Quel est le salaire médian ?
4. Calculer le salaire moyen.




1. Tableau des effectifs :

| Salaire en DH | 3000 | 4500 | 6300 | 8000 | 9144 |
|---|---|---|---|---|---|
| $\alpha$ en degré | 120° | 60° | 90° | 60° | 30° |
| Effectif | 312 | 156 | 234 | 156 | 78 |

$936 \times \frac{30}{360} = 78$

2. Le mode de cette série statistique est 3000 car il a le plus grand effectif 312.
Donc , le **salaire le plus grand fréquent** est 3000 DH.

3. **Déterminons un salaire médian.**

On a : $936 : 2 = 468$

Un salaire médian est un salaire qui partage la population en deux groupe d'effectif 468.

On a : $312 + 156 = 468$

Donc un salaire médian est 4500 DH .

4. **Calculons le salaire moyen m.**

On a : $$m = \frac{312 \times 3000 + 156 \times 4500 + 234 \times 6300 + 156 \times 8000 + 78 \times 9144}{936}$$

$$m = \frac{5073432}{936}$$

$$m \simeq 5420,33$$

Donc le salaire moyen est 5420,33 DH.

**Exemple 2** Voici les résultats d'une enquête concernant les masses (en kg) des élèves d'une classe :

41 ; 42 ; 37 ; 40 ; 44 ; 42 ; 39 ; 47 ; 40 ; 38 ; 52 ; 36 ; 38 ; 41 ; 40 ; 41 ;
44 ; 50 ; 41 ; 56 ; 55 ; 43 ; 35 ; 36 ; 54 ; 47 ; 42 ; 38 ; 39 ; 53.

1 Compléter le tableau suivant :

| Masses (en kg) | $35 \leq x < 39$ | $39 \leq x < 43$ | $43 \leq x < 47$ | $47 \leq x < 51$ | $51 \leq x < 55$ | $55 \leq x < 59$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Effectif | ... | ... | ... | ... | ... | ... |

2 Quel est l'effectif total?

3 Déterminer le mode de cette série statistique.

4 Calculer la masse moyenne de cette série statistique.

5 Déterminer la médiane de cette série statistique.

6 Faire l'histogramme représentant le tableau des effectifs.

1 **Complétons le tableau.**

| Masses (en kg) | $35 \leq x < 39$ | $39 \leq x < 43$ | $43 \leq x < 47$ | $47 \leq x < 51$ | $51 \leq x < 55$ | $55 \leq x < 59$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Effectif | 7 | 12 | 3 | 3 | 3 | 2 |
| Effectif cumulés | 7 | 19 | 22 | 25 | 28 | 30 |

2 **L'effectif total** de cette série est : 30

3 On sait que 12 est le plus grand effectif.

Donc le mode de cette série statistique se trouve dans la classe : $39 \leq m < 43$

4 **Calculons la masse moyenne m** de cette série :

| Centre de la classe | 37 | 41 | 45 | 49 | 53 | 57 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Effectif | 7 | 12 | 3 | 3 | 3 | 2 |

On a : $$m = \frac{7 \times 37 + 12 \times 41 + 3 \times 45 + 3 \times 49 + 3 \times 53 + 2 \times 57}{30} = \frac{1306}{30}$$

$$m \simeq 43,53$$

Donc , la masse moyenne de cette série statistique est 43,53kg.

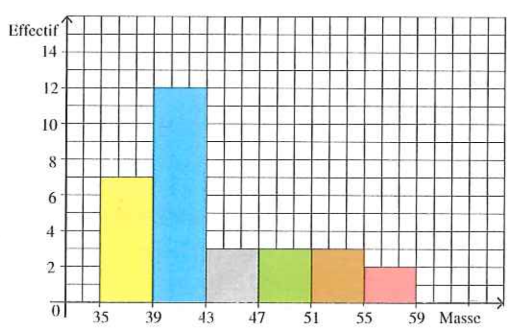
5 **Déterminons la masse médiane.**

On a : $30 : 2 = 15$

La classe qui correspond à l'effectif cumulé 19 est $39 \leq m < 43$

Donc la masse médiane de cette série est dans la classe $39 \leq m < 43$

6 Histogramme des effectifs :



# INVESTISSEMENT
## Je m'entraîne

### MOYENNE-MEDIANE

**1** Voici les tailles d'un groupe de personnes :

| Taille (en cm) | $160 \leq t < 165$ | $165 \leq t < 170$ | $170 \leq t < 175$ | $175 \leq t < 180$ | $180 \leq t < 185$ | $185 \leq t < 190$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Effectif | 12 | 14 | 19 | 15 | 6 | 8 |

Déterminer la taille médiane de cette série.

**2** On considère les deux séries suivantes:

S1 : 24 ; 26 ; 26 ; 28 ; 30 ; 30 ; 30 ; 36.

S2 : 8 ; 8 ; 9 ; 10 ; 12 ; 13 ; 15 ; 15 ; 18.

Pour chacune des deux séries, déterminer la médiane.

**3** Voici les notes de trois groupes d'élèves à l'épreuve de mathématiques à l'exame local :

**Groupe 1 :** 06 ; 08 ; 08 ; 10 ; 10 ; 12 ; 13 ; 13.
**Groupe 2 :** 08 ; 08 ; 08 ; 09 ; 09 ; 11 ; 11 ; 16.
**Groupe 3 :** 05 ; 07 ; 09 ; 09 ; 09 ; 10 ; 14 ; 16.

*1)* Recopier et compléter le tableau suivant :

| | Groupe 1 | Groupe 2 | Groupe 3 |
|---|---|---|---|
| Moyenne | | | |
| Médiane | | | |

*2)* Comparer qualitativement ces trois groupes

**4** Voici le début d'une série statistique :

6 ; 6 ; 7 ; 9 ; 10 ; 10 ; 10 ; 12 ; 14 ; 14 ; ..........

Déterminer l'effectif total de cette série sachant que sa médiane est 12.

**5** Voici une série croissante de valeurs dont les effectifs sont donnés dans le tableau suivant :

| Valeur | 8 | 10 | 12 | 14 | 16 | 18 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Effectif | 2 | 3 | 5 | 4 | $x$ | 1 |

Déterminer $x$ pour que la médiane de cette série soit 12.

**6** Thalès et Pythagore sont deux professeurs de mathématiques et ont chacun une classe de troisième ayant 20 élèves. Ils comparent les notes obtenues par leurs élèves au dernier devoir normalisé.

| Notes des élèves de Thalès | | | | | Notes des élèves de Pythagore | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 8 | 9 | 14 | 13 | 7 | 9 | 9 | 10 | 13 | 12 |
| 19 | 6 | 12 | 7 | 19 | 9 | 14 | 16 | 8 | 10 |
| 4 | 9 | 6 | 19 | 8 | 11 | 11 | 13 | 9 | 11 |
| 10 | 19 | 7 | 17 | 16 | 15 | 13 | 12 | 15 | 10 |

*1)* Construire, dans un même repère et avec deux couleurs différentes, le polygone représentant chaque série de notes.

*2)* Déterminer la moyenne de chaque série.
*3)* Déterminer la médiane de chaque série.
*4)* En déduire une comparaison des deux classes.

**7** **AVEC TICE**

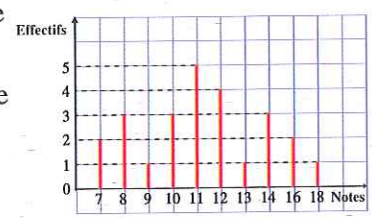
Voici les moyennes du premier semestre des élèves d'une classe de troisième d'un collège.

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 12 | 13 | 10 | 14 | 16,5 | 14 | 12 | 17 | 14,5 |
| 13,5 | 13 | 12 | 13 | 16 | 14,5 | 13 | 16 | 12,5 |
| 15,5 | 08 | 12 | 15 | 15 | 16 | 14 | 15 | 13 |

*1)* Calculer la moyenne demondé en s'aidant de la fonction moyenne sur Excel.

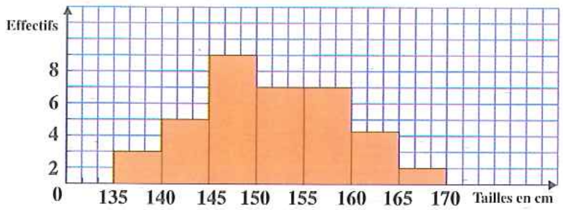
*2)* Calculer la note médiane.

**8** Voici le diagramme en bâtons des notes obtenues par une classe de 3ᵉ de 25 élèves au dernier devoir de mathématiques.




*1)* Calculer la moyenne des notes.
*2)* Déterminer la médiane des notes.
*3)* Calculer le pourcentage des élèves ayant obtenu une note strictement supérieur à 13.

**9** En utilisant l'histogramme ci-dessous :




*1)* Compléter le tableau:

| Tailles (en cm) | Effectifs |
|---|---|
| $135 \leq t < 140$ | |
| $140 \leq t < 145$ | |
| $145 \leq t < 150$ | |
| $150 \leq t < 155$ | |
| $155 \leq t < 160$ | |
| $160 \leq t < 165$ | |
| $165 \leq t < 170$ | |

*2)* Calculer la taille moyenne de cette série.

*3)* Déterminer la taille médiane de cette série.

**10** Une famille a noté la masse de ses ordures ménagères chaque mois.

| Mois | J | F | M | A | M | J | J | A | S | O | N | D |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Masse (en kg) | 20 | 18 | 28 | 30 | 25 | 30 | 40 | 20 | 24 | 26 | 36 | 50 |

*1)* Calculer la masse moyenne par mois.

*2)* Déterminer la masse médiane.

*3)* L'affirmation suivante est-elle exacte :

"40% des masses mensuelles des ordures ménagères de cette famille est compris entre 30kg et 45kg"?

**11** Une usine teste des ampoules électriques, sur un échantillon, en étudiant leur durée de vie en heures.

| d: durée de vie en heures | Nombre d'ampoules |
|---|---|
| $1000 \leq d < 1200$ | 550 |
| $1200 \leq d < 1400$ | 1460 |
| $1400 \leq d < 1600$ | 1920 |
| $1600 \leq d < 1800$ | 1640 |
| $1800 \leq d < 2000$ | 430 |

*1)* Quel est le pourcentage d'ampoules qui ont une durée de vie de moins de 1600 h?

*2)* Calculer la durée de vie moyenne d'une ampoule.

## MON BILAN

***1) Indiquer la bonne réponse par A, B ou C :***

| | A | B | C |
|---|---|---|---|
| 1 Série donné : 2 - 4 - 8 - 11 - 16 - 7 - 19 - 8 11. La médiane de cette série est ... | 16 | 9 | 8 |
| 2 Série donné : 3 - 11 - 9 - 12 - 8 - 17 - 5 13. La médiane de cette série est ... | 10 | 11 | 12 |
| 3 Série donné : 7 - 8 - 8 - 2 - 5 - 7 - 9 - 2 - 5 - 5. La moyenne de cette série est ... | 4,8 | 5,25 | 5,8 |

**Pour les exercices** 3 à 6 . Son intégre des personnes sur la durrée du forfait de leur téléphone portable. voici les resultats de cette enquête.

| Durée (en h) | 1 | 1,5 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Effectifs | 12 | 6 | 18 | 7 | 17 | 3 | 4 | 2 |

| | A | B | C |
|---|---|---|---|
| 4 Le mode de cette série est ... | 1 | 2 | 110 |
| 5 La médiane de cette série est ... | 2h | 3h | 18h |
| 6 Le moyenne de cette série est ... | $\frac{69}{205}$ | $\frac{205}{69}$ | $\frac{205}{70}$ |

Corrections page : 247

***2) En cas d'erreur, voici quelques conseils :***

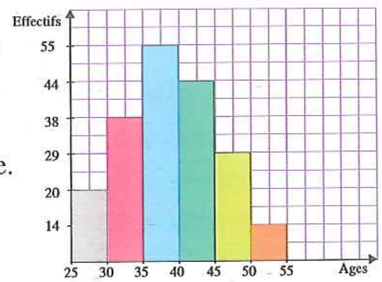
| | Savoir | Pratique |
|---|---|---|
| Ex: 1 | Définition 2 | |
| Ex: 2 | Recherche de médiane | |
| Ex: 3 | Définition 1 | |
| Ex: 4 | Définition 4 | |
| Ex: 5 | Recherche de médiane | |
| Ex: 6 | Définition 1 | |

***3) Exercices pour la remédiation voir R18 page : 249***

# APPROFONDISSEMENT
## Je recherche

### MOYENNE-MÉDIANE

**12** L'histogramme ci-contre représente les âges des 200 employés d'une société commerciale.




*1)* Compléter le tableau suivant :

| Ages | $25 \leq$ âge $< 30$ | $30 \leq$ âge $< 35$ | $35 \leq$ âge $< 40$ | $40 \leq$ âge $< 45$ | $45 \leq$ âge $< 50$ | $50 \leq$ âge $< 55$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Centres de classe | | | | | | |
| Effectifs | | | | | | |
| Fréquences en % | | | | | | |

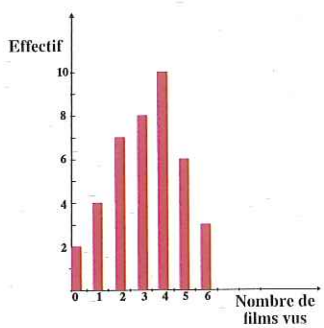
*2)* Quel est le mode de cette série?

*3)* Quel est le pourcentage des employés qui ont strictement moins de 45ans?

*4)* Déterminer l'âge médian.

*5)* Calculer l'âge moyen du personnel de cette société.

**13** On a demandé à des élèves le nombre de films qu'ils ont vu au cinéma depuis la rentrée scolaire. Les résultats sont présentés par le graphique suivant.




*1)* Dresser un tableau des effectifs cumulés.

*2)* Déterminer le mode et le "film" médian de cette série.

*3)* Calculer la moyenne de cette série.

**14** On a relevé, pour 30 familles, le nombre d'enfants par famille : 3 ; 0 ; 5 ; 1 ; 2 ; 5 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 0 ; 1 ; 3 ; 4 ; 2 ; 0 ; 4 ; 1 ; 2 ; 2 ; 1 ; 2 ; 0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 0 ; 3 ; 1 ; 3

*1)* Construire le tableau des effectifs.

*2)* Représenter cette série statistique par un diagramme en bâtons.

*3)* Calculer le nombre moyen d'enfants par famille.

*4)* Déterminer le nombre médian d'enfants par famille.

*5)a.* Combien de familles ont au plus 3 enfants?

*b.* Combien de familles ont au moins 3 enfants?

**15** On donne les performances en saut en hauteur des élèves d'une classe de troisième.
Les hauteurs sont données en centimètres.

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 118 | 110 | 130 | 130 | 128 | 108 | 129 | 122 | 110 | 105 |
| 120 | 125 | 120 | 120 | 130 | 130 | 100 | 100 | 110 | |

*1)* Préciser la population et le caractère étudiés.

*2)* Déterminer la performance moyenne M des élèves de cette classe, arrondie à l'unité.

*3)* Déterminer la performance médiane m et donner la signification de ce résultat.

**16** Une entreprise possède 16 voitures pour effectuer le transport des commerciaux.
Voici les consommations moyennes, en litre d'essence, de chaque véhicule pour 100km :

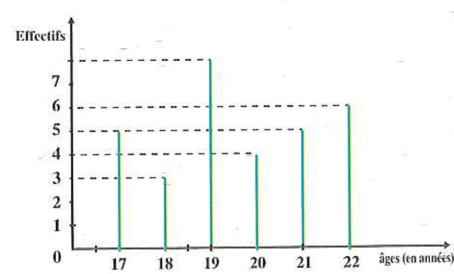
| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 8,2 | 11,4 | 8,4 | 6,7 | 8,2 | 10,1 | 9,3 | 6,9 | |
| 6,9 | 7,5 | 6,8 | 8,5 | 9 | 10,2 | 11 | 7 | 10 |

*1)* Calculer la consommation moyenne aux 100km des véhicules de cette entreprise.

*2)* Déterminer la médiane de cette série.

*3)* Sans refaire de nouveaux calculs, dire si l'affirmation suivante est exacte :
«50% des véhicules de cette entreprise consomme entre 6 litres et 8 litres aux 100 km».

**17** Le diagramme ci-dessous donne les âges des adhérents d'un club de foot-ball.



*1)* Déterminer l'effectif total.

*2)* Quel le mode de cette série statistique

*3)* Dresser le tableau des effectifs cumulés.

*4)* Quel est l'âge médian et l'âge moyen des adhérents de ce club?

## PROBLÈMES OUVERTS

**18** Dans une salle , neuf personnes sont assises; leur moyenne d'âge est de 30 ans.

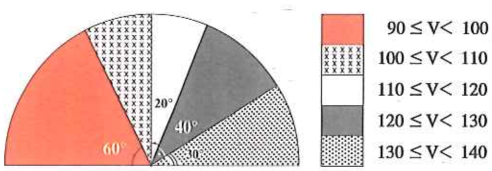
Dans une autre salle , onze personnes sont réunies ; leur moyenne d'âge est 50 ans.

On a réuni les deux groupes.

Quelle est la moyenne d'âge du groupe ainsi constitué?

**19** On a effectué un contrôle de vitesse de 216 véhicules sur une autoroute.

Les résultats de cette enquête sont donnés sur le diagramme semi-circulaire suivant :




*1)* Dresser le tableau des effectifs cumulés.

*2)* Déterminer la vitesse médiane des véhicules contrôlés.

*3)* Calculer la vitesse moyenne des conducteurs contrôlés.

*4)* Quel est le pourcentage des conducteurs en infraction?

## CHALLENGES

**20** Voici les notes sur vingt, obtenues par Said aux six devoirs de mathématiques de deuxième semestre :

| Devoir | n°1 | n°2 | n°3 | n°4 | n°5 | n°6 | Moyenne |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Notes de Said | 12 | 15 | 6 | 9 | $x$ | y | 11,5 |

La note obtenue par Said au devoir n°6 a augmenté de 25% par rapport à celle qu'il a obtenue au devoir n°5.

Calculer $x$ et y.

**21** Soit la série ordonnée par ordre croissant des notes d'un élève :

a ; 6 ; 8 ; 9 ; 11 ; 13 ; 14 ; b.

Déterminer a et b sachant que la moyenne des notes est 10,5 et l'étendue de cette série est 13.

(L'étendue est la différence des notes extrêmes).

**22** La moyenne des notes d'une classe à un devoir de mathématiques est de 9,6.

si l'on ne tient pas compte de la plus mauvaise note,qui est 4,5, et de la meilleure note, qui est 20, on obtient exactement 11,5 de moyenne.

Déterminer le nombre d'élèves qui ont fait ce devoir.

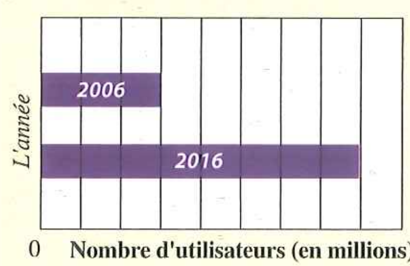
## SITUATIONS PROPOSÉES AUX OLYMPIADES

Samira prépare un rapport sur l'utilisation de l'Internet. Elle a trouvé l'histogramme ci-contre qui donne le nombre de personnes qui utilisent l'Internet dans le monde.

En 2006, le nombre d'utilisateurs de l'Internet était environ 1200 millions de personnes.

**Quel est environ leur nombre en 2016?**

**Nombre d'utilisateurs de l'Internet dans le monde en 2006 et 2016 .**



# JE ME PRÉPARE À L'EXAMEN RÉGIONAL

## 23 Exercice résolu

On a effectué une enquête sur le nombre d'enfants par famille.

On a résumé les résultats dans le tableau suivant :

| Nombre d'enfants | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Nombre de familles | 6 | 8 | 12 | 10 | 3 | 1 |

*1)* Quel est le mode ce cette série ?

*2)* Déterminer la médiane de cette série.

*3)* Calculer la moyenne de cette série.

### Correction : 23

*1)* 12 est l'effectif le plus grand.
Et 12 correspond à la valeur 2.
Donc 2 est le mode de cette série.

*2)* L'effectif total est :

$$6 + 8 + 12 + 10 + 3 + 1 = 40$$

Et $40 : 2 = 20$.
or : $6 + 8 + 12 = 26$
et l'effectif cumulé 26 correspond à la valeur 2,
alors 2 est la médiane de cette série.

*3)* Soit m la moyenne de cette série

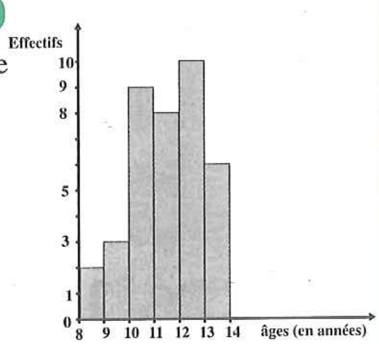
$$m = \frac{0 \times 6 + 1 \times 8 + 2 \times 12 + 3 \times 10 + 4 \times 3 + 5 \times 1}{40}$$

$$m = \frac{79}{40}$$

$$m \simeq 2$$

Donc la moyenne d'enfants par famille est 2.

## 24 Exercice résolu




L'histogramme ci-contre donne la répartition, selon l'âge, d'enfants inscrits à un club de natation.

*1)* Compléter le tableau suivant :

| Ages | $8 \leq a < 9$ | $9 \leq a < 10$ | $10 \leq a < 11$ | $11 \leq a < 12$ | $12 \leq a < 13$ | $13 \leq a < 14$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Effectifs | ... | ... | ... | ... | ... | ... |
| Effectifs cumulés | ... | ... | ... | ... | ... | ... |

*2)* Dans quelle classe est situé le mode de cette serie ?

*3)* Dans quelle classe est situé l'âge médian?

*4)* Calculer une approximation de l'âge moyen d'un enfant de ce club.

### Correction : 24

***1)* Tableau des effectifs.**

| Ages | $8 \leq a < 9$ | $9 \leq a < 10$ | $10 \leq a < 11$ | $11 \leq a < 12$ | $12 \leq a < 13$ | $13 \leq a < 14$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Effectifs | 2 | 3 | 9 | 8 | 10 | 6 |
| Effectifs cumulés | 2 | 5 | 14 | 22 | 31 | 38 |

*2)* Le mode de cette série se trouve dans la classe $12 \leq a < 13$ car il correspond à l'effectif le plus grand 10.

*3)* L'effectif total est 38.
on a : $38 : 2 = 19$.
La classe qui correspond à l'effecrtif cumulé 22 est $11 \leq a < 12$.
Donc, l'âge médian de cette série se trouve dans la classe $11 \leq a < 12$

*4)* Soit m l'âge moyen.
On a :

| Centre de la classe | 8,5 | 9,5 | 10,5 | 11,5 | 12,5 | 13,5 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Effectifs | 2 | 3 | 9 | 8 | 10 | 6 |

Donc :

$$m = \frac{2 \times 8{,}5 + 3 \times 9{,}5 + 9 \times 10{,}5 + 8 \times 11{,}5 + 10 \times 12{,}5 + 6 \times 13{,}5}{38}$$

$$m = \frac{438}{38}$$

$$m \simeq 11{,}5$$

D'où : 11,5 ans est une approximation de l'âge moyen d'un enfant de ce club.

## 25

Dans une classe de 26 élèves, les résultats suivants ont été obtenus à un devoir :

| Note | 6 | 7 | 9 | 10 | 12 | 13 | 15 | 16 | 18 | 20 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Effectifs | 2 | 2 | 3 | 4 | 7 | 8 | 4 | 5 | 3 | 2 |

*1)a.* Calculer la moyenne de ce devoir.

*b.* Calculer la fréquence des élèves de la classe qui ont eu une note supérieure ou égale à la moyenne. Le résultat sera arrondi au centième près.

*2)* Quel est le mode de cette série statistique?

*3)* Déterminer la note médiane.

**26** Une enquête a été réalisée dans 80 restaurants d'une région pour connaître l'effectif de leur personnel.

| Nombre de salariés | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Nombre de restaurants | 8 | 10 | 6 | 4 | 12 | 6 | 4 |
| Effectifs cumulés | | | | | | | |

*1)* Compléter le tableau.

*2)* Quel est le mode de cette série?

*3)* Calculer la moyenne et la médiane de la série en interprétant les résultats.

**27** Une enquête a été réalisée, sur un échantillon de 40 enfants, sur le temps passé devant la télévision à leur retour de l'école.

La répartition est donnée dans le tableau ci-dessous :

| Temps t (en heures) | $1 \leq t < 1,5$ | $1,5 \leq t < 2$ | $2 \leq t < 2,5$ | $2,5 \leq t < 3$ | $3 \leq t < 3,5$ | $3,5 \leq t < 4$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Nombre d'enfants | 8 | 6 | 10 | 4 | 7 | 5 |
| Effectifs cumulés | | | | | | |

*1)* Quelle est la fréquence d'enfants qui passent au moins deux heures devant la télévision?.

*2)* Déterminer la médiane et la moyenne de cette série statistique.

**28** Les élèves d'une classe ont répondu à la question suivante : "Combien de livres avez-vous lus durant l'année scolaire? ".

Voici les résultats de cette enquête :

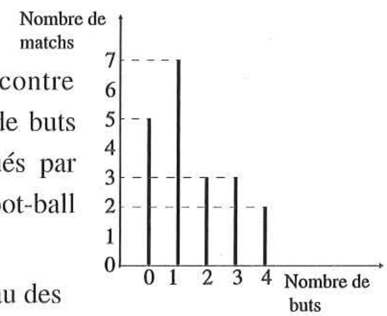
| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 3 | 0 | 2 | 3 | 1 | 1 | 2 | 2 |
| 0 | 1 | 1 | 4 | 3 | 4 | 3 | 3 |
| 0 | 2 | 2 | 1 | 3 | 3 | 4 | 5 |
| 1 | 1 | 0 | 0 | 2 | 2 | 2 | 2 |
| 2 | 2 | 1 | 1 | 0 | 3 | 3 | 3 |

*1)* Dresser un tableau des effectifs cumulés.

*2)* Calculer la moyenne et déterminer la médiane de cette série.

*3)* Quel est le pourcentage des élèves qui ont lu au moins deux livres?

**29** La diagramme ci-contre donne le nombre de buts qui ont été marqués par une équipe de foot-ball durant 20 matchs.




*1)* Dresser le tableau des effectifs.

*2)a.* Quel est le mode de cette série?

*b.* Déterminer la médiane.

*3)* Calculer la moyenne des buts marqués par cette équipe par match .

**30** On considère la série statistique suivante :

3 ; 5 ; 7 ; 5 ; 5 ; 3 ; 9 ; 9 ; 5 ; 18 ; 3 ; 5
9 ; 5 ; 9 ; 7 ; 7 ; 5 ; 9 ; 3 ; 5 ; 9 ; 18 ; 5

*1)* Compléter le tableau ci-dessous :

| Valeur | 3 | 5 | 7 | 9 | 18 |
|---|---|---|---|---|---|
| Effectifs | | | | | |
| Effectifs cumulés | | | | | |

*2)* Calculer la moyenne pondérée.

*3)* Déterminer la médiane.

# GÉOMÉTRIE DANS L'ESPACE

## Prérequis :

* Prisme, cylindre, cône, pyramide.
* Aires et volumes.
* Théorème de Pythagore.
* Théorème de Thalès.

## Un point d'histoire

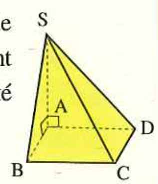
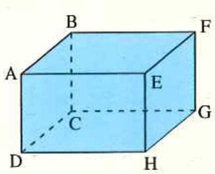
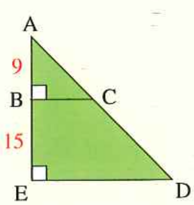
**Galileo Galilei (1564 ; 1642)**

Galilée est un mathématicien, géomètre, physicien et astronome italien.
Surtout connu pour ses travaux en astronomie, il rédigea, vers 1620, un petit mémoire sur les jeux de dés pour répondre à une demande du Duc de Toscane. Galilée est alors premier Mathématicien à l'Université de Pise.

## TEST DIAGNOSTIQUE : Je m'évalue

# CHOISIR LA BONNE RÉPONSE.

Pour chaque question, cocher la bonne réponse en justifiant.

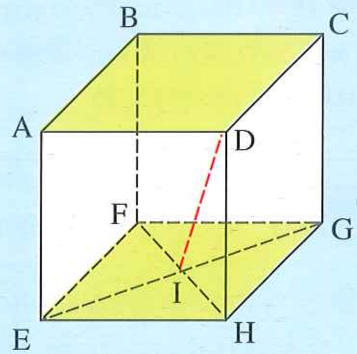
| | Réponses : | | |
|---|---|---|---|
| SABCD est une pyramide de hauteur 15 cm ayant pour base un carré de côté 6cm. Son volume est ...   | $288\ cm^3$ | $180\ cm^3$ | $432\ cm^3$ |
|   ABCDEFGH est un pavé droit. | (BF) // (EH) | (BE) // (CH) | (BD) // (AF) |
| | $CG^2 = CH^2 + GH^2$ | $BG^2 = BF^2 + FG^2$ | $BC^2 = AB^2 + AC^2$ |
| On considère la figure ci-contre : a est l'aire de ABC et b est l'aire de AED. Alors :   | $\frac{AC}{AD} = \frac{3}{8}$ | $BC = \frac{4}{27}$ | $\frac{AC}{AD} = \frac{3}{5}$ |
| | $a = 30{,}375$ | $a = \frac{9}{64}\ b$ | $a = \frac{4}{3}$ |
| La distance entre deux villes est 24km. La distance mesurée sur une carte est 3,2cm. L'échelle de cette carte est : | 7,5 | $\frac{1}{75}$ | $\frac{1}{750000}$ |

Solutions page : 246

# ACTIVITÉS : JE DÉCOUVRE

## Activité 1 Orthogonalité d'une droité et d'un plan , et de deux droites

ABCDEFGH est un cube d'arête a .




1. Montrer que : (DH) ⊥ (EH) et (DH) ⊥ (GH)

   On dit que (DH) est ***perpendiculaire*** au plan déterminé par les droites (EH) et (GH).

   On écrit : (DH) ⊥ (EGH).

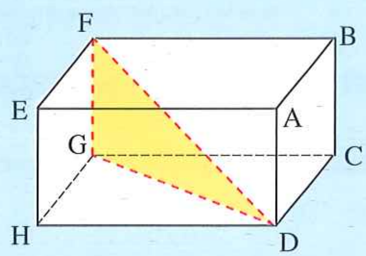
2. *a.* Montrer que DEG est un triangle équilatéral.

   ***b.*** Montrer que : $DI^2 = DH^2 + IH^2$

   ***c.*** En déduire que : (IH) ⊥ (DH).

## Activité 2 Emploi de l'orthogonalité pour démontrer qu'un triangle est rectangle

ABCDEFGH est un parallélépipède rectangle.




1. Montrer que la droite (FG) est perpendiculaire au plan (CDH).
2. En déduire que DFG est un triangle rectangle.

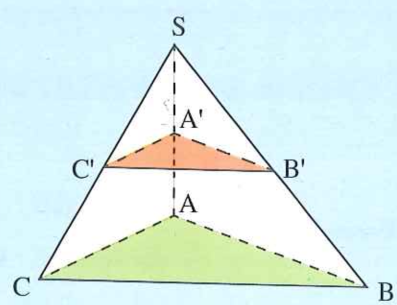
## Activité 3 Impact de l'agrandisement ou de la réduction

SABC est une pyramide de sommet S et de hauteur [SA] telle que ABC est un triangle rectangle en A.

On pose : SA = 9 cm ; AC = 12 cm et AB = 16 cm

Soit A' un point de [SA] tel que : SA' = 6 cm.

Soit B' et C' deux points de [SB] et [SC] tel que : (A'C') // (AC) et (A'B') // (AB).




1. Montrer que : (B'C') // (BC).
2. Montrer que : $\frac{SA'}{SA} = \frac{SB'}{SB} = \frac{SC'}{SC} = \frac{A'B'}{AB} = \frac{A'C'}{AC} = \frac{B'C'}{BC}$
3. La pyramide SA'B'C' est-elle une réduction de la pyramide SABC ?

   Quel est le cœfficient de réduction ?
4. Calculer $\frac{\text{Aire } A'B'C'}{\text{Aire } ABC}$ et $\frac{\text{Aire } SB'C'}{\text{Aire } SBC}$.

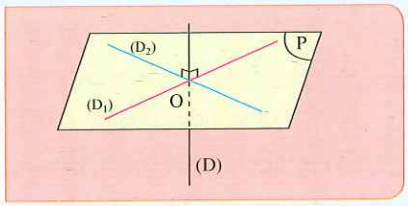
   Soit $V_1$ le volume de SA'B'C' et $V_2$ le volume de SABC.

   Calculer $\frac{V_1}{V_2}$.

# SAVOIR
## Je révise

## 1 ORTHOGONALITÉ D'UNE DROITE ET D'UN PLAN

**Définition 1** Une droite (D) est **perpendiculaire** (ou **orthogonale**) à un plan (P) en un point O s'il existe deux droites sécantes en O de (P) perpendiculaires à la droite (D). On écrit : $(D) \perp (P)$.



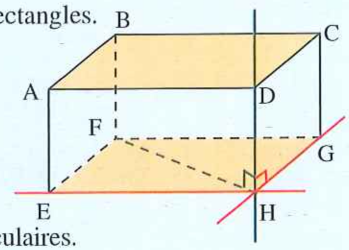

**Propriété 1** Si une droite (D) est perpendiculaire en O à un plan (P), alors toute droite de (P) est perpendiculaire à (D).

**Exemple :** ABCDEFGH est un parallélépipède rectangle,donc CDHG et ADHE sont deux rectangles.

Il en résulte que : $(DH) \perp (HG)$ et $(DH) \perp (EH)$.

Et comme les droites (HG) et (EH) sont incluses dans le plan (EFG),

alors $(DH) \perp (EFG)$.




Or (FH) est une droite du plan (EFG), alors les droites (DH) et (FH) sont perpendiculaires.

## 2 PARALLÉLISME D'UNE DROITE ET D'UN PLAN

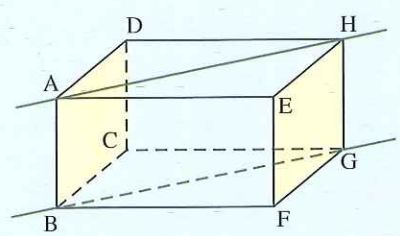
**Propriété 2** Si une droite (D) et un plan (P) n'ont aucun point commun ou si (D) est contenue dans le plan (P), alors (D) et (P) sont parallèles.

**Propriété 3** Si une droite (D) est parallèle à une droite ($\Delta$) contenue dans un plan (P), alors (D) est parallèle à (P).

**Exemple :** On a : $AB = DC$ et $(AB) // (DC)$

Et : $DC = HG$ et $(DC) // (HG)$

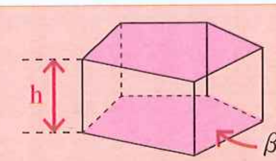
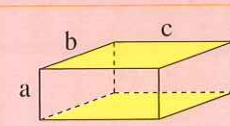
Donc : $AB = HG$ et $(AB) // (HG)$

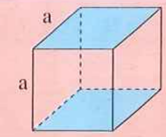
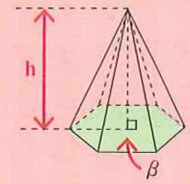
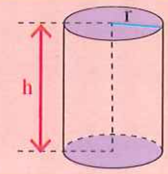



D'où ABGH est un parallélogramme ; cela entraîne que $(AH) // (BG)$.

Or (BG) est contenue dans le plan (BCG) , donc : $(AH) // (BCG)$.

## 3 CALCUL DES AIRES ET DES VOLUMES

| | | |
|---|---|---|
| **Prisme** | L'aire totale : $\mathcal{A} = 2\beta + ph$ où p le périmètre de la base<br>Le volume : $\mathcal{V} = \beta \times h$. |   |
| **Parallélépipède** | L'aire totale : $\mathcal{A} = 2(ab + bc + ca)$<br>Le volume : $\mathcal{V} = abc$ |   |

| | | |
|---|---|---|
| **Cube :** | L'aire totale : $\mathcal{A} = 6a^2$<br>Le volume : $\mathcal{V} = a^2$. |   |
| **Pyramide :** | Le volume : $\mathcal{V} = \frac{1}{3}\,\beta \times h$ |   |
| **Cylindre de révolution :** | L'aire totale : $\mathcal{A} = 2\pi \times r(r + h)$<br>Le volume : $\mathcal{V} = \pi \times r^2 \times h$ |   |

## 4 AGRANDISSEMENT ET RÉDUCTION

**Définition 2** Lorsque toutes les longueurs d'une figure ou d'un solide sont multipliées par un même nombre positif k, on obtient une autre figure ou un autre solide qui est :

- un agrandissement si $k > 1$
- une réduction si $0 < k < 1$

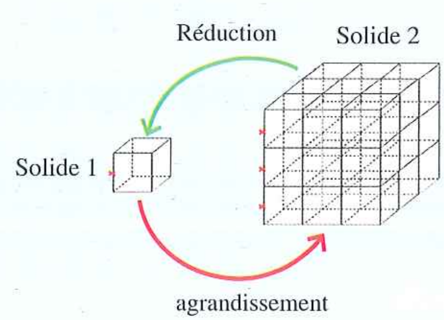
k est appelé le **coefficient d'agrandissement** ou **de réduction.**

**Remarque:** $k = \dfrac{\text{mesure agrandie (ou réduite)}}{\text{mesure originale correspondante}}$

**Propriété 4** Dans l'agrandissement ou la réduction d'un solide, si les longueurs sont multipliées par un nombre k strictement positif , alors
- les aires sont multipliées par $k^2$ ;
- les volumes sont multipliés par $k^3$ .

**Autrement dit :**
- $\mathcal{A} = k^2 \mathcal{A}'$ où $\mathcal{A}$ est l'aire de la figure initiale et $\mathcal{A}'$ est l'aire de la figure obtenue.
- $\mathcal{V} = k^2 \mathcal{V}'$ où $\mathcal{V}$ est le volume de la figure initiale et $\mathcal{V}'$ est le volume de la figure obtenue.

- c'est un agrandissement de rapport k = 3 ;
- les aires sont multipliées par 9, c'est-à-dire $k^2$.
- les volumes sont multipliés par 27 , c'est-à-dire $k^3$.

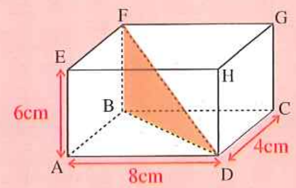


## 1 CALCUL DE LA LONGUEUR DE LA DIAGONALE D'UN PAVÉ DROIT.

**Exemple 1** ABCDEFGH est un parallélépipède rectangle tel que :

AE = 6cm , AD = 8cm et DC = 4cm.

Calculer la longueur de la diagonale [DF].




- **Calculons** d'abord $\mathbf{BD^2}$.

En appliquant le thérème de Pythagore dans le triangle BAD rectangle en A, on a :

$$BD^2 = AB^2 + AD^2$$
$$BD^2 = 4^2 + 8^2$$
$$BD^2 = 16 + 64$$
$$BD^2 = 80.$$

- **Montrons que BDF est un triangle rectangle en B.**

On sait que ABCDEFGH est un parallélépipède rectangle.

Donc ABFE et BCGF sont deux rectangles.

Il en résulte que $(BF) \perp (BA)$ et $(BF) \perp (BC)$.

Et comme (BA) et (BC) sont deux droites du plan (ABC).

Alors $(BF) \perp (ABC)$, (BD) est une droite du plan (ABC) ;

donc : $(BF) \perp (BD)$.

D'où BDF est un triangle rectangle en B.

- **Calculons DF .**

D'après le théorème de Pythagore appliqué au triangle BDF rectangle en B, on a :

$$DF^2 = BD^2 + BF^2$$
$$DF^2 = 80 + 6^2$$
$$DF^2 = 80 + 36$$
$$DF^2 = 116$$
$$DF = \sqrt{116} \quad \text{car} \quad DF > 0$$

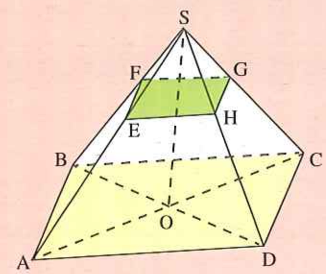
Donc : $DF = 2\sqrt{29}$ cm

## 2 CALCUL DU VOLUME D'UN TRONC DE PYRAMIDE

**Exemple 2** SABCD est une pyramide à base rectangulaire et de sommet S.

Les diagonales de ABCD se coupent en O et [OS] est la hauteur de la pyramide tels que :

$AD = 12$ cm ; $DC = 4$ cm et $SA = SC = 9$ cm.
On coupe la pyramide par un plan (P) parallèle à la base ABCD. (P) coupe les arêtes [SA], [SB], [SC] et [SD] respectivement en E, F , G et H tel que : $SE = 6$cm .
Calculer le volume du tronc SEFGH de pyramide ABCDEFGH.




**• Calcul de la hauteur SO.**

Dans le triangle BCD rectangle en C,
d'après le théorème de Pythagore, on a :

$$BD^2 = BC^2 + DC^2$$
$$BD^2 = 12^2 + 4^2$$
$$BD^2 = 144 + 16$$
$$BD^2 = 160 \quad \text{car } BD > 0$$
$$BD = \sqrt{160}$$

Donc : $BD = 4\sqrt{10}$ cm.

Et comme O est le centre du rectangle ABCD, alors O est le milieu de la diagonale [BD].

Donc : $BO = \frac{1}{2} BD$.

$$BO = \frac{4\sqrt{10}}{2}, \text{ soit } BO = 2\sqrt{10}.$$

On sait que [SO] est la hauteur de la pyramide SABCD.
D'où : $(SO) \perp (ABC)$
Donc (SO) est perpendiculaire à toutes les droites du plan (ABC); par conséquent $(SO) \perp (AC)$.
Il en résulte que OSA est un triangle rectangle en O.
D'après le théorème de Pythagore, on a :

$$SA^2 = SO^2 + OA^2$$
$$SO^2 = SA^2 - OA^2$$
$$SO^2 = SA^2 - OB^2 \text{ (car } AC = BD).$$
$$SO^2 = 9^2 - (2\sqrt{10})^2$$
$$SO^2 = 81 - 40$$
$$SO^2 = 41$$

Donc : $SO = \sqrt{41}$ cm.

**• Calculons du volume V de la pyramide SABCD.**

On sait que : $V = \frac{1}{3} \times SO \times \text{Aire } ABCD$

$$V = \frac{1}{3} \times \sqrt{41} \times 12 \times 4$$
$$V = 16\sqrt{41}\,\text{cm}^3$$

**• Calcul du volume V' de la pyramide SEFGH.**

La pyramide SEFGH est une réduction de la pyramide SABCD.

La rapport de réduction est : $\frac{SE}{SA} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$.

Donc : $V' = (\frac{2}{3})^3 V$

$$V' = \frac{8}{27} \times 16\sqrt{41}$$
$$V' = \frac{128}{27}\sqrt{41}\ \text{cm}^3$$

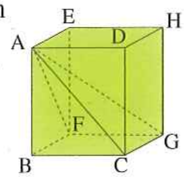
**• Calcul du volume V" du tronc de la pyramide ABCDEFGH.**

On a : $V'' = 16\sqrt{41} - \frac{128}{27}\sqrt{41}$

$$V'' = \frac{304}{27}\sqrt{41}\ \text{cm}^3$$

## CALCULE DES LONGUEURS / AIRES / VOLUMES

**1** ABCDEFGH est un cube d'arête 8cm



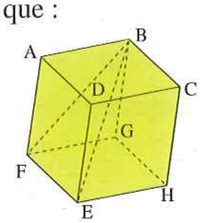

*1)* Calculer AC (donner la valeur exacte).

*2)* On admettra que le triangle ACG est rectangle en C. Calculer AG.

*3)* On considère la pyramide ABCGF. Calculer le volume de cette pyramide.

**2** ABCDEFGH est un pavé droit tel que :

AB = BG = 6cm et DB = 8cm

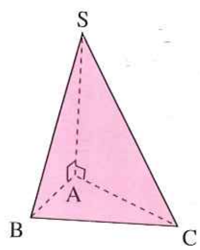



*1)* Calculer DA.

*2)* Calculer le volume de la pyramide ADEFB.

**3** Soit la pyramide SABC de sommet S et de base BAC.

Les triangles BAS et SAC sont rectangles en A.




On donne : SA = 54 cm ,

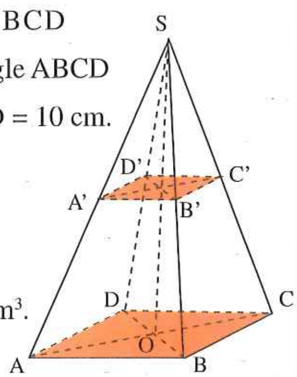
AB = 36cm ; CA = 48cm et CB = 60 cm.

*1)* Montrer que ABC est un triangle rectangle.

*2)* Calculer le volume de la pyramide SABC.

**4** Pour la pyramide SABCD ci-contre, la base est le rectangle ABCD de centre O. AB = 6cm et BD = 10 cm.

La hauteur [SO] mesure 9cm.




*1)* Montrer que AD = 8cm.

*2)* Calculer le volume de la pyramide SABCD coupe en $cm^3$.

*3)* Soit O' le milieu de [SO] .

On coupe la pyramide par un plan passant par O' et parallèle à sa base.

*a.* Quelle est la nature de la section A'B'C'D' obtenue?

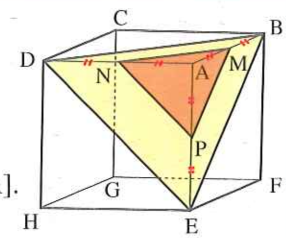
*b.* La pyramide SA'B'C'D' est une réduction de la pyramide SABCD.

Donner le rapport de cette réduction.

*c.* Calculer le volume de la pyramide SA'B'C'D'.

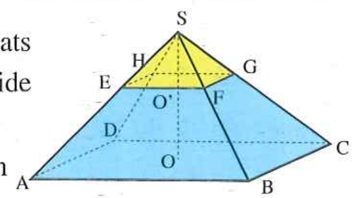
**5** ABCDEFGH est un cube de côté 8 cm.

Soit M le milieu de [AB], N celui de [DA] et P celui de [EA].




Calculer le volume du tronc de pyramide BDEMNP.

**6** Une boîte de chocolats a la forme d'une pyramide régulière de base carrée, sectionnée par un plan parallèle à la base. La partie supérieure est le couvercle et la partie inférieure contient les chocolats.



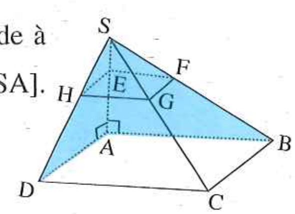

On donne : AB = 30 cm , SO = 27 cm et SO' = 9cm.

*1)* Calculer le volume de la pyramide SABCD.

*2)* En déduire celui de la pyramide SEFGH.

*3)* Calculer le volume du récipient ABCDEFGH qui contient les chocolats.

**7** SABCD est une pyramide à base rectangulaire de hauteur [SA]. Un plan, parallèle à la base, coupe les arêtes [SA], [SB], [SC] et [SD] respectivement en E, F , G et H.



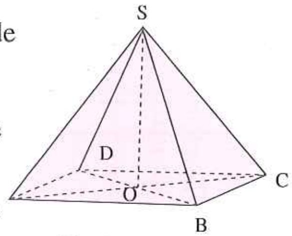

On donne : SA = 8cm ; AB = 6cm ;

BC = 4cm et HG =2cm

*1)* La pyramide SEFGH est une réduction de la pyramide SABCD. Calculer le rapport de réduction.

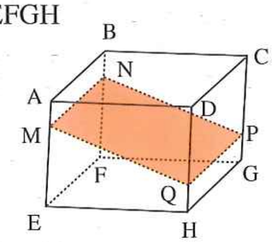
*2)* Calculer l'aire du rectangle EFGH de deux manières différentes.

**8** SABCD est une pyramide régulière, sa base ABCD est un carré de 4cm de côté et de centre O tel que : SA = 7.




Calculer la hauteur de cette pyramide.

**9** Un parallélépipède ABCDEFGH est coupé par un plan parallèle à l'arête [GH] et passant par les points M et Q (voir la figure).




On donne:

AD = 24cm ; DC = 18cm ; AE = 32cm ;

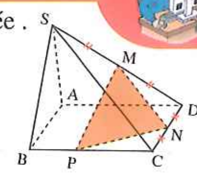
AM = HQ = 4cm.

Calculer le périmètre et l'aire de MNPQ.

## ORTHOGONALITÉ / PARALLÉLISME

**32** **AVEC TICE**

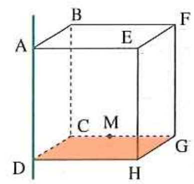

SABCD est une pyramide à base carrée . Soit P un point de [BC], M le milieu de [DS] et N celui de [DC].




*1)* S'aider du logiciel Geogebra (graphique 3D) pour conjectuer la position relative de la droite (CS) par rapport au plan (MNP).

*2)* Montrer que la droite (CS) est parallèle au plan (MNP) .

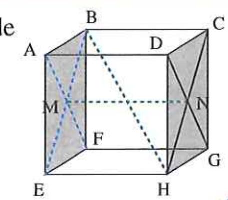
**11** ABCDEFGH est cube.




*1)* Montrer que la droite (AD) est perpendiculaire au plan (HGC).

*2)* En déduire que les droites (AD) et (DM) sont perpendiculaires.

**12** ABCDEFGH est un parallélépipède rectangle. Soit M le centre de AEFB et N celui de CGHD.

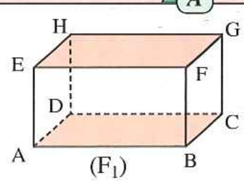



Montrer que la droite (MN) est parallèle au plan (BEH).

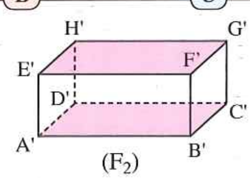
## MON BILAN

***1) Indiquer la bonne réponse par A , B ou C :***

Pour les exercices 1 et 6 , on utilise les figures ci-contre :




($F_1$)




($F_2$)

| | A | B | C |
|---|---|---|---|
| 1 La droite (OH) est ... | Parallèle au plan (ADC) | perpendiculaire au plan (ADC) | dans le plan (ADC) |
| 2 Les droites (DH) et (AC) sont ... | parallèles | perpendiculaire | sécantes |
| 3 Les droites (EH) et (AF) sont ... | parallèles | perpendiculaire | sécantes |
| 4 La droite (EG) est ... | parallèles au plan (ABC) | perpendiculaire au plan (ABC) | coupe le plan (ABC) |
| La figure ($F_2$) est un réduction de la figure ($F_1$) de coefficient $\frac{3}{4}$ | | | |
| 5 Si V' = 50 cm² l'aire de la figure ($F_1$) de la figure ($F_2$) est ... | 20 cm² | 40 cm² | 45 cm² |
| 6 Si V' = 27 cm³ le volume de la figure ($F_2$) alors la figure ($F_1$) est ... | 64 cm³ | 46 cm³ | 48 cm³ |

Corrections page : 247

***2) En cas d'erreur, voici quelques conseils :***

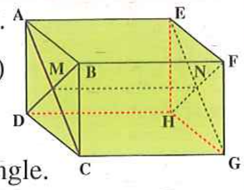
| | Savoir | Pratique |
|---|---|---|
| Ex: 1 | Définition 1 | |
| Ex: 2 | Propriété 1 | |
| Ex: 3 | Propriété 1 | |
| Ex: 4 | Propriété 3 | |
| Ex: 5 | Propriété 5 | |
| Ex: 6 | Propriété 5 | |

***3) Exercices pour la remédiation voir R19 page : 249***

# APPROFONDISSEMENT
## Je recherche

### ORTHOGONALITÉ / PARALLÉLISME

**13** ABCDEFGH est un pavé droit.
Soit M le centre de la face (ABCD) et N le centre de la face EFGH.

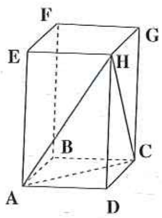



*1)* Montrer que AEGC est un rectangle.

*2)* Montrer que $(MN)\perp(EG)$.

*3)* Montrer que $(MN)\perp(EFG)$.

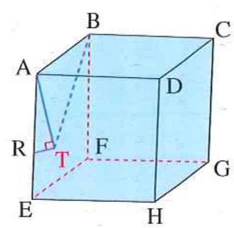
**14** ABCDEFGH est un parallélépipède rectangle.
On donne :
$AE = 8cm$ , $AD = 4cm$ et $DC = 6cm$.




*1)* Calculer $CH^2$, $AH^2$ et $AC^2$

*2)* Le triangle CAH est-il rectangle ? Justifier.

**15** ABCDEFGH un cube.
Soit R un point de [AE]. Sur la face ADHE, on construit un triangle ART rectangle en T .

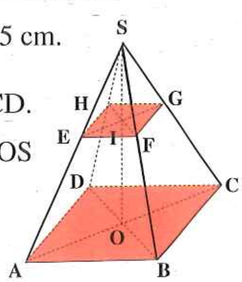



*1)* Montrer que :
$BR^2 = AB^2 + AR^2$ ; $AR^2 = AT^2 + RT^2$ ; $TB^2 = AT^2 + AB^2$

*2)* En déduire que le triangle BRT est rectangle en T.

### SITUATION PROBLÈME DANS L'ESPACE

**16** On considère une pyramide régulière SABCD à base carrée où O est le centre du carré ABCD.
On donne : $OA = 15$ cm et $SA = 25$ cm.




*1)* Calculer AB puis l'aire de ABCD.

*2)* Préciser la nature du triangle AOS et montrer que $SO = 20cm$.

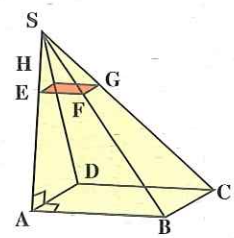
*3)* Calculer le volume exact de la pyramide SABCD.

*4)* On coupe cette pyramide SABCD par un plan parallèle à la base tel que : $SI = 4cm$ où I est le centre de la section EFGH ainsi obtenue.

*a.* Calculer le coefficient de réduction transformant la pyramide SABCD en la pyramide SEFGH.

*b.* En déduire la longueur SI, l'aire de IJKL et le volume de SIJKL.

**17** Sur la figure ci-contre, on considère une pyramide SABCD à base carrée de hauteur [SA].
Le triangle SAB est rectangle en A, $AB = 6$ cm et $SA = 15$ cm.




EFGH est la section de la pyramide SABCD par le plan parallèle à la base et telle que :

$$SE = 5cm.$$

*1)* Donner la liste des segments qui devraient être représentés en pointillés sur la figure.

*2)a.* Calculer SB.

*b.* Démontrer que : $EF = 2cm$

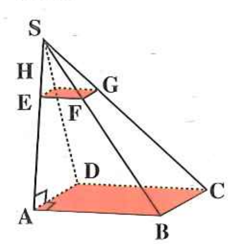
*3)* Calculer le volume du tronc de la pyramide ABCDEFGH.

**18** Sur la figure ci-dessous, SABCD est une pyramide à base carrée, de hauteur [SA] telle que :

$$AB = 8cm \quad \text{et} \quad SA = 18cm.$$

Le triangle SAB est rectangle en A.
Soit E le point de [SA] tel que: $SE = 3cm$.

*1)*Calculer SB .




*2)a.* Calculer le volume de la pyramide SABCD.

*b.* Donner le coefficient de réduction permettant de passer de la pyramide SABCD à la pyramide SEFGH.

*c.* En déduire le volume de SEFGH.

## PROBLEME OUVERT

**19** SABCD est une pyramide à base rectangulaire de hauteur [SO] où O est le centre du rectangle ABCD.

On donne : AD = 3 cm ; DC = 4 cm ; OS = 6cm

*1)a.* Calculer AC.

*b.* En déduire OA.

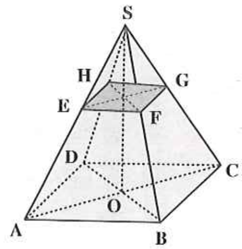
*2)* Calculer V le volume de la pyramide SABCD.

*3)* Montrer que AS = 6,5cm.

*4)* Par E un point de [SA], on mène le plan parallèle au plan ABCD qui coupe [SB] , [SC] et [SD] respectivement en F,G et H.

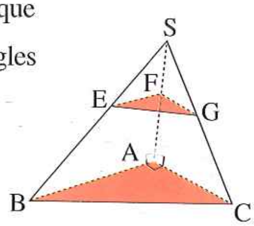
Soit V' le volume de la pyramide SEFGH.

Calculer SE sachant que : $V = \frac{8}{27}V'$




**20** SABC est une pyramide telle que ABC, BAS et SAC sont des triangles rectangles en A.

On donne : AC = 6cm , SC = 10 cm et AB = 4 cm.




*1)* Montrer que SA = 8cm.

*2)* Montrer que V le volume de SABC est 32 $cm^3$.

*3)* La pyramide SEFG est une réduction de la pyramide SABC de rapport de réduction $\frac{2}{3}$ .

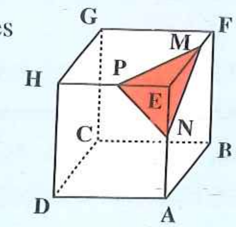
*a.* Calculer V' le volume de la pyramide SEFG.

*b.* Calculer FG.

## CHALLENGES

**21** ABCDEFGH est un cube.

M,N et P sont respectivement des points de [EF] , [EA] et [EH] tels que : EP = EN = EM = a où $0 < a < EF$

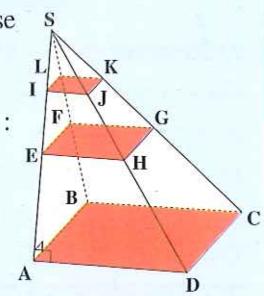



*1)* Montrer que le triangle MNP est équilatéral.

*2)* Calculer Aire (MNP).

*3)* Calculer V le volume de la pyramide EMNP.

**22** SABCD est une pyramide à base carrée de hauteur [SA]. E et I sont deux points de l'arête [SA] tels que : SI = 4 cm , IE = 3 cm et EA = $x$ cm.




On coupe la pyramide SABCD par deux plans parallèles à la base passant par E et I (voir figure) tels que : EH = 5cm et IJ = 2cm .

*1)* Calculer $x$ .

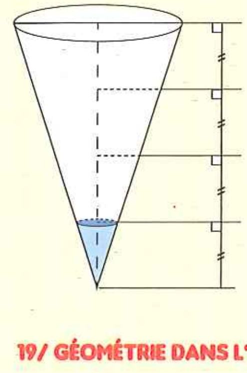
*2)* Calculer le volume du solide EFGHIJKL.

*3)* Calculer le volume de la pyramide SABCD.

## SITUATIONS PROPOSÉES AUX OLYMPIADES

La partie remplie d'eau a pour volume 1litre.

**Quelle est le volume du cône ?**

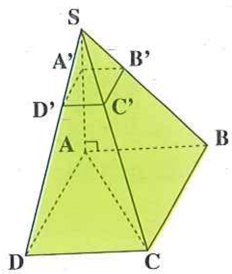


# JE ME PRÉPARE À L'EXAMEN RÉGIONAL

## 23 Exercice résolu

SABCD est une pyramide à base carrée de côté 3 cm et de hauteur [SA] tel que :

SA = 2cm.




*1)* Montrer que les droites (AS) et (AC) sont perpendiculaires.

*2)a.* Montrer que : $AC = 3\sqrt{2}$ cm

*b.* En déduire la longueur SC.

*3)* Calculer V le volume de SABCD.

*4)* Soit SA'B'C'D' la réduction de la pyramide SABCD de rapport $\frac{1}{3}$.

Calculer le volume du solide ABCDA'B'C'D'.

### Correction : 23

***1)* Montrer que : $(AS) \perp (AC)$**

On sait que [SA] est la hauteur de la pyramide SABCD de sommet S.

Donc : $(AS) \perp (ABCD)$.

Or, la droite (AC) est incluse dans le plan (ABCD).

D'où : $(AS) \perp (AC)$.

*2)a.* Montrer que $AC = 3\sqrt{2}$cm.

On a : ABCD est un carré.

Donc : ABC est un triangle isocèle rectangle en B.

D'après le théorème de Pythagore, on obtient :

$AC^2 = AB^2 + BC^2$

$AC^2 = 2AB^2$

$AC^2 = 2(3)^2$. D'où : $AC = 3\sqrt{2}$ cm (car $AC > 0$)

***b.* Calcul de SC .**

On sait que $(AC) \perp (SA)$

Donc SAC est un triangle rectangle en A.

D'après le théorème de Pythagore :

$SC^2 = SA^2 + AC^2$

$AC^2 = 2^2 + (3\sqrt{2})^2 = 4 + 18 = 22$

Donc : $SC = \sqrt{22}$ cm car $SC > 0$.

***3)* Calcul de V.**

On sait que : $V = \frac{1}{3}$ Aire ABCD $\times$ SA.

D'où : $V = \frac{1}{3} \times AB \times AB \times SA$

$V = \frac{1}{3} \times 3 \times 3 \times 2$

D'où : $V = 6cm^3$.

*4)* Calcul de V1 volume du solide ABCDA'B'C'D .

Soit V' le volume de SA'B'C'D'.

La pyramide SA'B'C'D' est une réduction de la pyramide SABCD dans le rapport $\frac{1}{3}$.

Donc : $V' = (\frac{1}{3})^3 \times V$

$V' = \frac{1}{27} \times 6$

$V' = \frac{2}{9} cm^3$

Et comme $V_1 = V - V'$

$V_1 = 6 - \frac{2}{9}$

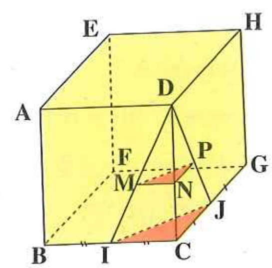
$V_1 = \frac{54}{9} - \frac{2}{9}$

Alors : $V_1 = \frac{52}{9}$ cm³.

## 24 Exercice résolu

ABCDEFGH est un cube tel que AB = 6 cm.

I et J sont les milieux respectifs de [BC] et [CG].




*1)* Calculer DI.

*2)* Calculer le volume du

*3)* La pyramide DMNP est une réduction de la pyramide DICJ dans le rapport $\frac{1}{3}$.

Calculer le volume de la pyramide DMNP.

### Correction : 24

***1)* Calcul de DI.**

I est le milieu de [BC].

Donc : $IC = \frac{BC}{2}$

Or BC = 6 cm,

alors : CI = 3 cm.

On sait que DIC est un triangle rectangle en C

(car ABCD est une face du cube ABCDEFGH) .

D'après le théorème de Pythagore.

$DI^2 = IC^2 + DC^2$

$DI^2 = 3^2 + 6^2$

$DI^2 = 9 + 36$

$DI^2 = 45$

$DI = \sqrt{45}$ car $DI > 0$

Donc : $DI = 3\sqrt{5}$ cm

*2)* Calcul de V volume de la pyramide DICJ.

On sait que : (DI) ⊥ (CJ) et (DI) ⊥ (CJ).

Et (IC) et (CJ) sont deux droites du plan (ICJ)

Donc : (DI) ⊥ (ICJ)

D'où [DI] est la hauteur de DICJ.

Par suite : $V = \frac{1}{3}\text{Aire } CIJ \times DI$

$V = \frac{1}{3} \times \frac{3\times 3}{2} \times 3\sqrt{5}$

$V = 4{,}5\sqrt{5}$ cm³.

*3)* Calcul de V' volume de la pyramide DMNP.

On sait que $\frac{1}{3}$ est le rapport de réduction

Donc : $V' = \left(\frac{1}{3}\right)^3 V$

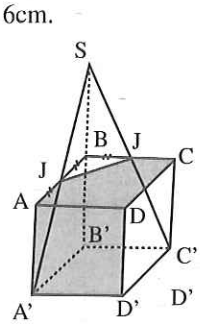
$V' = \left(\frac{1}{3}\right)^3 \times 4{,}5\sqrt{5}$

D'ou : $V' = \frac{\sqrt{5}}{6}$ cm³

**25** ABCDA'B'C'D' est un cube d'arête 6cm.

I et J sont les milieux respectifs de [AB] et [BC].

Soit SA'B'C' la pyramide tel que S est le symétrique de B' par rapport au point B (voir la figure).




***1-a.*** Montrer que SB' = 12cm.

***b.*** Calculer SA'.

***c.*** Montrer que I est le milieu [SA]

***2-a.*** Calculer le volume du cube ABCDA'B'C'D'.

***b.*** Montrer que le volume de la pyramide SA'B'C' est 72 cm³.

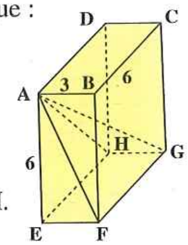
***3)*** On considère que la pyramide SIBJ est une réduction de la pyramide SA'B'C'.

***a.*** Déterminer le rapport de réduction.

***b.*** En déduire le volume de la pyramide de SIBJ.

**26** ABCDEFGH est un pavé droit tels que :

AE = 6 cm ; BC = 6 cm et AB = 3 cm.




***1)a.*** Déterminer la nature du triangle AFG.

***b.*** Montrer que : AG = 9 cm.

***2)*** Soit V le volume de la pyramide AEFGH.

Montrer que : $V = 36$ cm³

***3)*** Soit M un point de [AE].

Le plan passant par M et parallèle au plan (EFG) coupe respectivement [AF], [AG] et [AH] en N, P et Q.

On considère que la pyramide AMNPQ est une réduction de la pyramide AEFGH dans le rapport $\frac{4}{5}$.

Soit V' le volume de la pyramide AMNPQ.

Montrer que : $V' = 18{,}432$m².

**27** SABC est un tétraèdre de sommet S tels que :

BC = 50 cm , AC = 30 cm et AB = 40 cm.

***1)a.*** Montrer que les droites (AB) et AC) sont perpendiculaires.

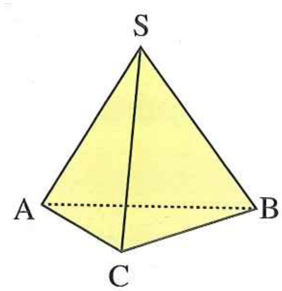
***b.*** Calculer l'aire du triangle ABC.

***c.*** Sachant que (SA) ⊥ (ABC) et SA = 80 cm

Montrer que le volume de la pyramide SABC est 16000 cm³

***2)*** SA'B'C' est la réduction de la pyramide SABC.

Sachant que le volume de SA'B'C' est 16 cm³ , calculer SA'.



# FORMULAIRE

## 1 Identités remarquables : Développement et factorisation

| Développement et factorisation | Identités remarquables |
|---|---|
| $k(a+b) = ka + kb$ | $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ |
| $k(a-b) = ka - kb$ | $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ |
| $(a+b)(c+d) = ac + ad + bc + bd$ | $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$ |

## 2 Puissances

### Définition

a est un réel non nul
n est un entier et $n \geqslant 2$

$$a^0 = 1 \quad \text{et} \quad a^1 = a$$

$$a^n = \underbrace{a \times \ldots\ldots \times a}_{n \text{ fois}}$$

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

### Opérations

a et b sont des réels non nuls
n et m sont des entiers relatifs

$$a^m \times a^n = a^{m+n} \quad \text{et} \quad (a^n)^m = a^{nm}$$

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} \quad \text{et} \quad \left(\frac{1}{a}\right)^n = \frac{1}{a^n}$$

$$(ab)^n = a^n b^n \quad \text{et} \quad \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

### Puissances de 10

$$10^1 = 10 \quad \text{et} \quad 10^0 = 1$$

$$10^n = 1\underbrace{0\ldots\ldots0}_{n \text{ zéros}} \quad (n \geqslant 2)$$

$$10^{-n} = \underbrace{0,0\ldots.0}_{n \text{ zéros}}1$$

### Écriture scientifique

A nombre décimal positif.

Ecriture scientifique de A :

$$A = a \times 10^n$$

où a décimal et $1 \leqslant a < 10$ et n entier relatif

## 3 Racine carrée d'un réel positif

### Définition

a est un réel positif .

$b = \sqrt{a}$ signifie $b \geq 0$ et $b^2 = a$

### Opérations

a et b sont des réels positifs.

$$\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b} \quad ; \quad \sqrt{a^2} = a$$

$$(b \neq 0) \quad \sqrt{\frac{1}{b}} = \frac{1}{\sqrt{b}} \quad ; \quad \sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$$

## 4 Ordre et opérations

### Définition

$a \leq b$ signifie que $b - a$ est positif

ou que $a - b$ est négatif.

### Ordre et addition

- $a \leq b$ équivaut à $a + c \leq b + c$
- Si $\begin{cases} a \leq b \\ c \leq d \end{cases}$, alors $a + c \leq b + d$

### Ordre et multiplication

- Si ($a \leq b$ et $k > 0$), alors : $ka \leq kb$
- Si ($a \leq b$ et $k' < 0$), alors : $k'a \geq k'b$
- Si $\begin{cases} 0 \leq a \leq x \\ 0 \leq b \leq y \end{cases}$, alors: $ab \leq xy$

### Ordre et carré

- Si $0 \leq x \leq y$, alors : $x^2 \leq xy \leq y^2$
- Si $x \leq y \leq 0$, alors : $y^2 \leq xy \leq x^2$

### Ordre et racine carrée

- Si $0 \leq a \leq b$, alors $\sqrt{a} \leq \sqrt{b}$
- $\begin{cases} \sqrt{x^2} = x \text{ si } x \geq 0 \\ \sqrt{x^2} = -x \text{ si } x \leq 0 \end{cases}$

### Ordre et inverse

- Si $0 < a \leq b$, alors: $0 < \frac{1}{b} \leq \frac{1}{a}$
- Si $0 \leq a < b$, alors: $\frac{1}{b} \leq \frac{1}{a} < 0$

## 5 Équations et inéquations du premier degré à une inconnue

### Définition

**Une équation du premier degré à une inconnue** est une équation qui peut s'écrit sous la forme $ax + b = cx + d$ où a, b, c et d sont des nombres tels que $a \neq c$

### Résolution d'une inéquation du 1er degré

Pour résoudre une inéquation du 1er degré à une inconnue, on peut :

- ajouter ou retrancher in même nature aux deux nombres de l'inéquation ;
- multiplier ou diviser les deux nembres de l'inéquation par un même nombre strictement positif sans changer le sens de l'inégalité

### Résolution d'une équation du 1er degré

- Pour résoudre une équation du 1er degré à une inconnue, on peut :
  - * ajouter ou soustraire un même nombre aux deux membres de l'équation ;
  - * on peut multiplier ou diviser les deux membres de l'équation par un même nombre non nul.
- Si $\alpha \neq 0$, l'équation $\alpha x = \beta$ équivaut à $x = \frac{\beta}{\alpha}$.
- Les solutions de l'équation $(ax + b)(cx + d) = 0$ sont les solutions des deux équations :

$$ax + b = 0 \quad \text{et} \quad cx + d = 0.$$

On écrit : $(ax + b)(cx + d) = 0$ équivunt à :

$$ax + b = 0 \quad \text{ou} \quad cx + d = 0$$

## 6 Système de deux équations du premier degré à deux inconnues

### Définition

Un système de deux équations du premier degré à deux inconnues est de la forme

$$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$$

où a, b, c, a' , b' et c' sont des réels donnés.

### Résoudre un système

Résoudre un système $\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$ c'est déterminer tous les couples $(x\ ;\ y)$ pour lesquels, les deux équations sont simultanément vérifiées.

### Résolution par substitution

Dans l'une des deux équations, on exprime l'une des inconnues en fonction de l'autre (on choisit l'équation et l'inconnue qui permettent de faire des calculs simples); puis on substitue dans l'autre équation.

# FORMULAIRE

### Résolution par combinaison linéaire(ou par élimination)

On utilise des équations équivalentes pour que les coefficients de $x$ (ou de y) soient opposés dans les deux équations. Puis on ajoute membre à membre les deux équations.

## 7 Fonctions linéaires - Fonctions affines

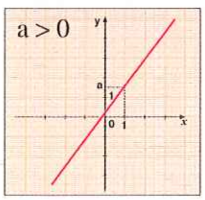
### Fonction linéaire $f : x \longmapsto ax$

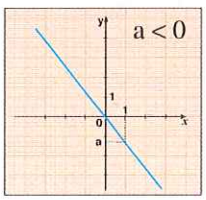
Le nombre a est le coefficient de f.
$ax$ est l'image de $x$ par f
La droite représentative de la fonction linéaire f passe par les deux points :
A(1 ; a) et O(0 ; 0)

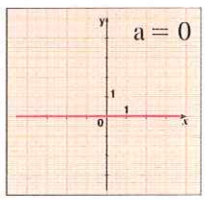
### Fonction affine $g : x \longmapsto ax + b$

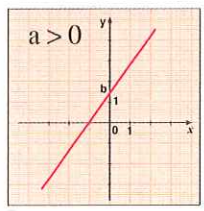
$ax+b$ est l'image de $x$ par g.
La droite représentative de g admet :

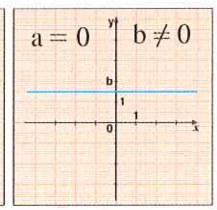
- **a** comme coefficient directeur
- **b** comme ordonnée à l'origine

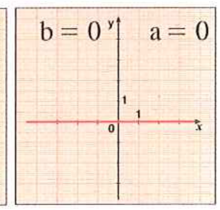


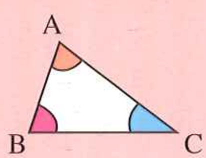




## 8 Angles

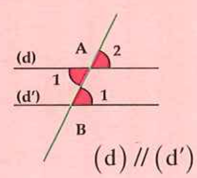
### Angles d'un triangle

La somme des angles d'un triangle est 180°.




### Parallèles et sécantes

- $\widehat{A_1}$ et $\widehat{B_1}$ sont deux angles alternes-internes : $\widehat{A_1} = \widehat{B_1}$
- $\widehat{A_2}$ et $\widehat{B_1}$ sont deux angles correspondants : $\widehat{A_2} = \widehat{B_1}$




## 9 Théorème de Pythagore

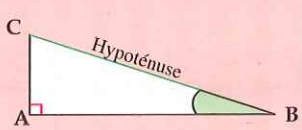
Si ABC est un triangle rectangle en A,
alors : $BC^2 = AB^2 + AC^2$

Si ABC est un triangle tel que : $BC^2 = AB^2 + AC^2$
alors ABC est rectangle en A

## 10 Trigonométrie

ABC est un triangle rectangle en A.

- $\cos \widehat{ABC} = \dfrac{BA}{BC}$
- $\sin \widehat{ABC} = \dfrac{CA}{CB}$
- $\tan \widehat{ABC} = \dfrac{AC}{AB}$




Si $x$ est une mesure d'un angle aigu, alors :

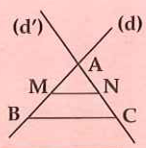
- $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$
- $\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$
- $\cos(90° - x) = \sin x$
- $\sin(90° - x) = \cos x$
- $\tan(90° - x) = \dfrac{1}{\tan x}$

# FORMULAIRE

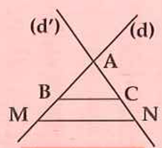
Tableau des lignes trigonométriques des angles usuels :

| $x$ | $0°$ | $30°$ | $45°$ | $60°$ | $90°$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\sin x$ | $0$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $1$ |
| $\cos x$ | $1$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | $0$ |
| $\tan x$ | $0$ | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ | $1$ | $\sqrt{3}$ | non défini |

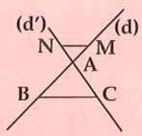
## 11 *Théorème de Thalès*




(MN) // (BC)




(MN) // (BC)




(MN) // (BC)

(d) et (d') sont deux droites sécantes en A.

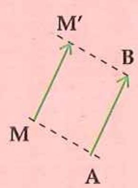
A, B et M sont des points de (d), distincts de A . C et N sont des points de (d'), distincts de A.

- Si $(BC) // (MN)$ , alors : $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$ .
- Si $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$ et si les points A, M, B d'une part et les points A, N, C d'autre part sont rangés dans le même ordre, alors : (MN) // BC)

## 12 *Translation - Vecteurs*

### Translation

M' est l'image de M par la translation qui transforme A en B signifie que ABM'M est un parallélogramme.




### Egalité vectorielle

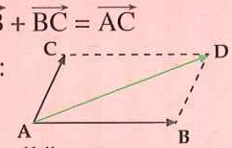
M' est l'image de M par la translation qui transforme A en B signifie que : $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{AB}$

### Propriétés de la translation

- La translation conserve la distance, l'alignement des points, les mesures des angles.
- L'image d'une droite par une translation est une droite parallèle.
- L'image d'un cercle par une translation est un cercle de même rayon

### Vecteurs

- Relation de Chasles : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$
- Somme de deux vecteurs :




$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD}$$

signifie que ABDC est un parallélogramme

- Vecteur nul : $\overrightarrow{AA} = \overrightarrow{BB} = .... = \vec{0}$

$$\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{AB} + \vec{0} = \overrightarrow{AB}$$

# FORMULAIRE

### Milieu et vecteurs

- Si I est le milieu de [AB], alors $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IB}$.
- Si $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IB}$ , alors I est le milieu de [AB].


### Coordonnées

- Dans un repère, on a : $\overrightarrow{AB}\,(x_B - x_A\,;\,y_B - y_A)$

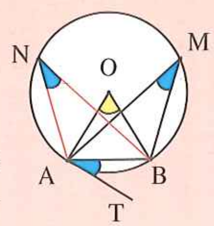
  $I\left(\frac{x_A + x_B}{2}\,,\,\frac{y_A + y_B}{2}\right)$ est le milieu de [AB].
- Dans un repère orthonormal, on a :

  $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$

## 13 Angles au centre et angles inscrits

### Définition

- $\widehat{AOB}$ est l'angle au centre qui intercepte l'arc $\overset{\frown}{AB}$
- $\widehat{AMB}$ et $\widehat{TAB}$ sont deux angles inscrits qui interceptent l'arc $\overset{\frown}{AB}$.




### Propriétés

- La mesure d'un angle inscrit dans un cercle est égale à la moitié de la mesure de l'angle au centre associé : $\widehat{AMB} = \widehat{TAB} = \frac{1}{2}\widehat{AOB}$ (figure)
- Deux angles inscrits qui interceptent le même arc ont même mesure : $\widehat{AMB} = \widehat{ANB}$.

## 14 Triangles isométriques

### Définition

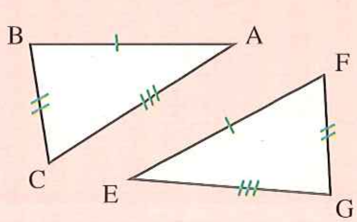
Daux triangles **isométriques** ont des côtés correspondants de même longueur et des angles correspondants de même mesure; ils sont **superposables**.

### Cas d'isométrie

ABC et EFG sont isométriques dans l'un ou l'autre des cas suivants :

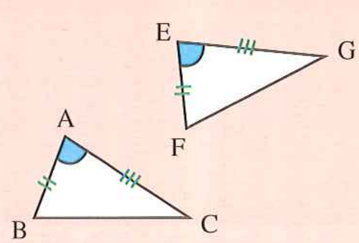
#### 1er cas d'isométrie

AB = EF ; BC = FG ; CA = GE



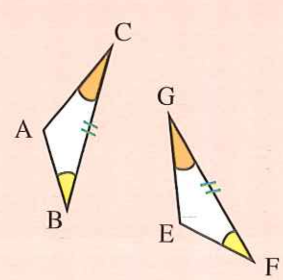

#### 2e cas d'isométrie

AB = EF ; AC = EG ; $\widehat{BAC} = \widehat{FEG}$




#### 3e cas d'isométrie

BC = FG ; $\widehat{ABC} = \widehat{EFG}$ ; $\widehat{ACB} = \widehat{EGF}$



# FORMULAIRE

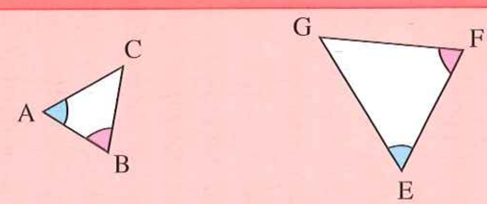
## 15 Triangles semblables

### Définition

- Deux triangles **semblables** sont deux triangles qui ont les **angles** deux à deux de **même mesure**.
- Lorsque deux triangles sont semblables,
  - * les angles de même mesure sont dits homologues ;
  - * les côtés opposés à des angles égaux sont dits homologues ;
  - * les sommets des angles égaux sont dits homologues.

### Cas de similitude

ABC et EFG sont semblables dans l'un ou l'autre des cas suivants :




| 1$^{er}$ cas de similitude | 2$^{e}$ cas de similitude | 3$^{e}$ cas de similitude |
|---|---|---|
| $\widehat{BAC} = \widehat{FEG}$ et $\widehat{ABC} = \widehat{EFG}$ | $\widehat{BAC} = \widehat{FEG}$ et $\dfrac{AB}{EF} = \dfrac{AC}{EG}$ | $\dfrac{AB}{EF} = \dfrac{AC}{EG} = \dfrac{BC}{FG}$ |

## 16 Statistique

### Moyenne pondérée

Pour calculer la **moyenne pondérée** d'une série statistique :

- on multiplie chaque valeur par son effectif;
- on additionne les produits obtenus;
- puis, on divise cette somme par l'effectif total.

| Valeur | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ |
|---|---|---|---|---|---|
| Effectif | $n_1$ | $n_2$ | $n_3$ | $n_4$ | $n_5$ |

La moyenne pondérée est :

$$m = \frac{n_1 x_1 + n_2 x_2 + n_3 x_3 + n_4 x_4 + n_5 x_5}{n_1 + n_2 + n_3 + n_4 + n_5}$$

# FORMULAIRE

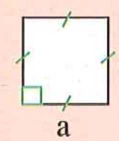
### Médiane - Mode

- La **médiane** d'une série statistique est une valeur M telle que le nombre de valeurs de la série inférieurs à M est égal au nombre de valeurs supérieurs à M.
- Le **mode** d'une série statistique est une valeur du caractère qui a le plus grand effectif.

## 17 Périmètres et aires

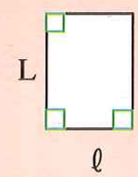
### Carré

L'aire : $\mathcal{A} = a^2$



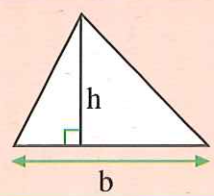

### Rectangle

L'aire : $\mathcal{A} = L \times \ell$




### Triangle

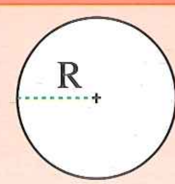
L'aire : $\mathcal{A} = \dfrac{b \times h}{2}$




### Disque

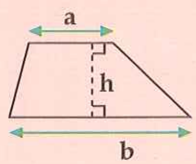
Périmètre : $2\pi R$

L'aire : $\mathcal{A} = \pi R^2$



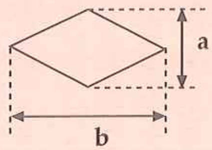
# FORMULAIRE

### Trapèze



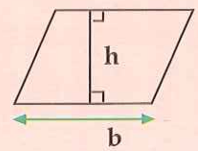

L'aire : $\mathcal{A} = \dfrac{(a+b) \times h}{2}$

### Losange




L'aire : $\mathcal{A} = \dfrac{a \times b}{2}$

### Parallélogramme




L'aire : $\mathcal{A} = b \times h$

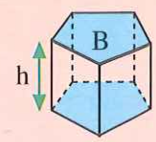
## 18 Volumes et aires latérales

### Prisme droit

Surface latérale : $\mathcal{A} = p \times h$

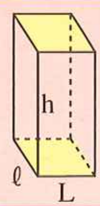
Volume : $\mathcal{V} = B \times h$

B aire de la base et p son périmètre



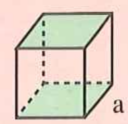

### Parallélépipède

Volume : $\mathcal{V} = L \times \ell \times h$




### Cube

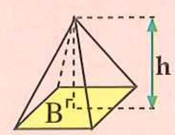
Volume : $\mathcal{V} = a^3$




### Pyramide

Volume : $\mathcal{V} = \dfrac{1}{3} B \times h$

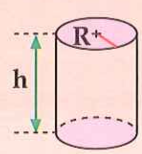
(B aire de la base)




### Cylindre

Aire latérale : $\mathcal{A} = 2\pi Rh$

Volume : $\mathcal{V} = \pi R^2 h$



# TEST DIAGNOSTIQUE
## Réponses

Vérifiers si les réponses sont justes.
S'évaluer, c'est une autre façon d'apprendre
Les questions seront désignées par $Q_1$ , $Q_2$...... / Les réponses seront notées,dans l'ordre : A,B et C

| | |
|---|---|
| CHAPITRE 1 | $Q_1$ : C \| $Q_2$ : B \| $Q_3$ : C \| $Q_4$ : B \| $Q_5$ : C \| $Q_6$ : C \| $Q_7$ : A |
| CHAPITRE 2 | $Q_1$ : C \| $Q_2$ : B \| $Q_3$ : B \| $Q_4$ : C \| $Q_5$ : C \| $Q_6$ : A \| $Q_7$ : C \| $Q_8$ : C \| $Q_9$ : B \| $Q_{10}$ : C |
| CHAPITRE 3 | $Q_1$ : B \| $Q_2$ : B \| $Q_3$ : C \| $Q_4$ : B \| $Q_5$ : C \| $Q_6$ : B \| $Q_7$ : C |
| CHAPITRE 4 | $Q_1$ : B \| $Q_2$ : B \| $Q_3$ : B \| $Q_4$ : C \| $Q_5$ : A et C \| $Q_6$ : C \| $Q_7$ : B \| $Q_8$ : B \| $Q_9$ : A |
| CHAPITRE 5 | $Q_1$ : C \| $Q_2$ : C \| $Q_3$ : C \| $Q_4$ : B \| $Q_5$ : C \| $Q_6$ : B \| $Q_7$ : B |
| CHAPITRE 6 | $Q_1$ : B \| $Q_2$ : A \| $Q_3$ : B \| $Q_4$ : A \| $Q_5$ : C \| $Q_6$ : B \| $Q_7$ : A \| $Q_8$ : A |
| CHAPITRE 7 | $Q_1$ : B \| $Q_2$ : A \| $Q_3$ : C \| $Q_4$ : A \| $Q_5$ : C \| $Q_6$ : B \| $Q_7$ : B \| $Q_8$ : C |
| CHAPITRE 8 | $Q_1$ : C \| $Q_2$ : C \| $Q_3$ : B \| $Q_4$ : A \| $Q_5$ : A \| $Q_6$ : C \| $Q_7$ : C \| $Q_8$ : C |
| CHAPITRE 9 | $Q_1$ : B \| $Q_2$ : C \| $Q_3$ : A \| $Q_4$ : B \| $Q_5$ : A |
| CHAPITRE 10 | $Q_1$ : B \| $Q_2$ : B \| $Q_3$ : C \| $Q_4$ : B \| $Q_5$ : A |
| CHAPITRE 11 | $Q_1$ : C \| $Q_2$ : B \| $Q_3$ : A \| $Q_4$ : B \| $Q_5$ : B \| $Q_6$ : B \| $Q_7$ : B \| $Q_8$ : B \| $Q_9$ : B et C |
| CHAPITRE 12 | $Q_1$ : C \| $Q_2$ : B \| $Q_3$ : C \| $Q_4$ : A \| $Q_5$ : B \| $Q_6$ : B \| $Q_7$ : B |
| CHAPITRE 13 | $Q_1$ : C \| $Q_2$ : C \| $Q_3$ : A \| $Q_4$ : C \| $Q_5$ : B \| $Q_6$ : C \| $Q_7$ : B \| $Q_8$ : B \| $Q_9$ : B |
| CHAPITRE 14 | $Q_1$ : C \| $Q_2$ : B \| $Q_3$ : A \| $Q_4$ : B \| $Q_5$ : B \| $Q_6$ : B \| $Q_7$ : C |
| CHAPITRE 15 | $Q_1$ : B \| $Q_2$ : C \| $Q_3$ : C \| $Q_4$ : B \| $Q_5$ : A et C \| $Q_6$ : C \| $Q_7$ : B \| $Q_8$ : A |
| CHAPITRE 16 | $Q_1$ : B \| $Q_2$ : B \| $Q_3$ : C \| $Q_4$ : A \| $Q_5$ : C \| $Q_6$ : A |
| CHAPITRE 17 | $Q_1$ : B \| $Q_2$ : B \| $Q_3$ : C \| $Q_4$ : B \| $Q_5$ : A \| $Q_6$ : B \| $Q_7$ : B |
| CHAPITRE 18 | $Q_1$ : C \| $Q_2$ : A \| $Q_3$ : C \| $Q_4$ : B \| $Q_5$ : A |
| CHAPITRE 19 | $Q_1$ : B \| $Q_2$ : B \| $Q_3$ : B \| $Q_4$ : A \| $Q_5$ : B \| $Q_6$ : C |

Vérifiers si les réponses sont justes.
S'évaluer, c'est une autre façon d'apprendre
Les exercices seront désignées par $E_1$ , $E_2$...... / Les réponses seront notées,dans l'ordre : A,B et C

| EXERCICES | Ex1 | Ex 2 | Ex 3 | Ex 4 | Ex 5 | Ex 6 | Ex 7 | Ex 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| CHAPITRE 1 | C | B | C | C | A | A | B | B |
| CHAPITRE 2 | B | A | B | C | B | A | C | B |
| CHAPITRE 3 | B | A | C | A | B | C | A | A |
| CHAPITRE 4 | B | A | C | A | B | | | |
| CHAPITRE 5 | B | C | C | A | B | C | A | |
| CHAPITRE 6 | C | A | B | C | B | A | C | |
| CHAPITRE 7 | C | A | C | C | A | B | B | B |
| CHAPITRE 8 | C | C | A | C | | | | |
| CHAPITRE 9 | B | A | B | B | C | | | |
| CHAPITRE 10 | B | C | B | A | B | | | |
| CHAPITRE 11 | B | C | C | A | B | C | A | |
| CHAPITRE 12 | B | C | A | B | B | B | | |
| CHAPITRE 13 | A | C | A | B | B | | | |
| CHAPITRE 14 | C | B | C | A | B | | | |
| CHAPITRE 15 | C | A | B | B | C | | | |
| CHAPITRE 16 | C | B | A | B | B | A | | |
| CHAPITRE 17 | B | C | C | B | | | | |
| CHAPITRE 18 | B | C | C | A | B | C | A | |
| CHAPITRE 19 | B | B | B | A | C | A | | |

# CATÉGORISATION DES DIFFICULTÉS

## R1 — CALCUL LITTERAL ET IDENTITES REMARQUABLES

**1** On considère l'expression suivante :

$$G = \left(\frac{1}{2}x - 3\right)\left(\frac{3}{2}x + 1\right)$$

*a.* Calculer la valeur de G lorsque $x = 2$.

*b.* Développer G; tester la response pour $x = 2$.

**2** Factoriser chacunes de ces expressions :

$E = (3x+1)^2 - (3x+1)(x-6)$ ; $F = (x+5)^2 - 16$

## R2 — PUISSANCES

**1** Soit a et b deux nombres réels non nuls.

On pose : $A = \dfrac{(ab^2)^3 a^4 . b^2}{(ab)^5}$

**1)** simplifier le nombre A.

**2)** Ecrire le nombre sous forme d'une puissance de 10 sachant que : $a = \dfrac{1}{10}$ et $b = 100$.

**2** Donner l'écriture scientifique du nombre

$B = 153 \times 10^{-4} + 32 \times 10^{-3} - 16 \times 10^{-5}$

## R3 — RACINES CARREE

**1** Développer et réduire l'expression A.

$A = (3\sqrt{3} - \sqrt{2})(2\sqrt{3} + \sqrt{2})$

**2** Résoudre les équations suivants :

**1)** $x^2 = 10$ **2)** $x^2 = -5$

**3)** $x^2 = \dfrac{9}{4}$ **4)** $x^2 = \sqrt{9}$ .

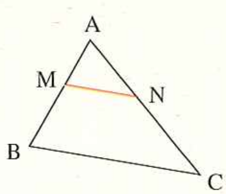
## R4 — THEOREME DE THALES

Sur la figure ci-dessous, les points A, M, B sont alignés, ainssi que les points A, N, C

AB = 35 ; AM = 11,9

AN = 18,2 ; AC = 52

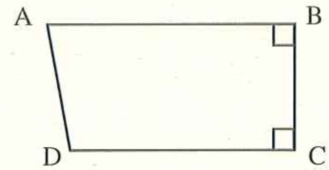
Montrer que les droites (MN) et (BC) ne sont pas parallèles.




## R5 — THEOREME DE PYTHAGORE

Soit ABCD un trapèze rectangle (voir la figure) tel que : A = 4 , DC = 5,5 et CB = 2,9

Calculer une valeur approchée du l'aire du trapèze ABC



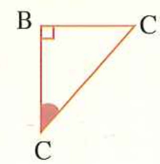

## R6 — TRIGONOMETRIE

**1** ABC est un triangle rectangle en B.

Calculer CB à 0,1 cm près.

**2** Soit $x$ une mesure en degré d'un angle aigu tel que : $\sin x = 0,6$ .

Calculer les valeurs exactes de $\cos x$ et $\tan x$.




## R7 — ORDRE ET OPERATIONS

Soit $x$ et y deux nombres réels tels que :

$$-\frac{1}{2} \leq x \leq 0 \quad \text{et} \quad 2 \leq y \leq 3$$

Donner un encadrement de chacun des nombres suivants :

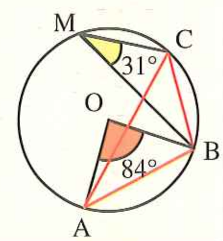
$2x - 3y$ ; $2x - 3y$ ; $xy$ ; $x^2 + y^2$ ; $\dfrac{1}{2y+1}$ ; $\dfrac{-2x}{2y+1}$

## R8 — ANGLES AU CERCLE ET ANGLES INSCRITS

Les points A, B, C et M appartiennent à un cercle de centre O tels que :

$\widehat{AOB} = 84°$ et $\widehat{BMC} = 31°$

Calculer les mesures des angles du triangle ABC.




## R9 — TRIANGLES ISOMETRIQUES

ABCD est un parallélogramme de centre O.

Une droite (d) passant par a coupe [AB] en K et [CD] en L.

**1** Montrer que les triangles OAK et OCL sont isométriques.

**2** Qu'en déduit-on pour les segments [AK] et [CL]?

## R10 — TRIANGLES SEMBLABLES

Soit ABC un triangle. E un point de [BC] et F un point de [AB] tels que : BC = 7 ; BF = 6

**1** Montrer que les triangles sont semblables.

**2** Calculer EF.

# CATÉGORISATION DES DIFFICULTÉS

## R11 EQUATIONS ET INEQUATIONS

**1** On considère les expressions :

$E = (4x + 5)(xx - 2) - x(x + 4)$ et $F = (3x - 10)(x + 1)$

***a.*** En développant et réduisant E et F, vérifier que : $E = F$.

***b.*** En déduire les solutions de l'équation : $E = 0$.

**2** Résoudre l'inéquation suivnate : $\frac{1}{4}(3x+1) < \frac{1}{6}(5x+1)$

## R12 TRANSLATION ET VECTEURS

($\mathscr{C}$) et ($\mathscr{C}$') sont deux cercles de même centre O.

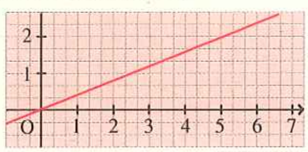
MN est un diamètre de ($\mathscr{C}$), P est un point de ($\mathscr{C}$').

Q est le point tel que : $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{NQ}$.

Montrer que le point Q est sur le cercle ($\mathscr{C}$').

## R13 FONCTIONS LINEAIRES

La droite (d) représente une fonction linéaire f.




**1** Lire l'image de 5 par f.

**2** Lire le nombre dont l'image est 1,4 par f.

**3** Donner l'expression de l'image de c par f.

## R14 FONCTIONS AFFINES

F est une fonction affine définie par : $f(x) = -3 + 5$

**1** Calculer l'image de – 4 par f.

**2** Calculer l'an técédent de 2 par f.

**3** Tracer la droite (d) qui représente la fonction affine f dans un repère.

## R15 REPERE DANS LE PLAN

**1** Placer les points suivants : A(–2 ; 1) ; B(–1 ; –2) ; C(3 ; 0) et D(2 ; 3).

**2** ***a.*** Déterminer les coordonnées du milieu M de [AC].

***b.*** Déterminer les coordonnées du milieu P de [BD].

**3** ***a.*** Que constate-t-on? .

***b.*** Que peut-on en déduire pour de quadrilatère ABCD?.

## R16 EQUATION D'UNE DROITE

Le plan est rapporté à un repère orthonormé (O , I , J).

On considère les poits A(1 ; 2) , B(3 ; 4) , (–2 ; 3) et la droite (D) d'équation $y = -x + 3$.

**1** ***a.*** Déterminer l'équation de la droite (AB).

***b.*** Le point appartient-il ) la droite (AB)?

**2** Déterminet l'équation de la droite (Δ) passant par le point C et parallèle à la droite (CD).

## R17 SYSTEME DE DEUX EQUATIONS DU PREMIERE DEGRÉ A DEUX INCONNUES

**1** Résoudre le système $\begin{cases} 2x + 3y = 27 \\ 4x + y = 24 \end{cases}$

**2** On considère un parallélépipéde rectangle

- Si l(on prend le double de sa largeur et que l'on ajoute le triple de sa longueur, on trouve 27cm.
- Si l'on prend le quadruple de sa largeur et que l'on ajoute sa longueur, on trouve 24cm.

Déterminer la longueur et la largeur de ce parallélépipéde.

## R18 STATISTIQUE

un professeur rend un devoir aux 23 élèves de sa classe. la liste des notes est la suivantes : 18 - 15 - 7 - 6 - 18 - 14 - 8 - 7 - 9 - 12 - 16 - 9 - 16 - 18 - 10 - 16 - 20 - 8 - 9 - 15 - 9 - 11 - 8.

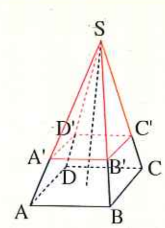
**1** Calculer l'étendue de cette série de notes.

**2** Calcula moyenne de la classe.

**3** Déterminer la médiane de la classe , que signifie cette médiane ?

## R19 GEOMETRIE DANS L'ESPACE

SABCD est un pyramide régulière de sommet S dont la base est un carré de côté 6cm.




Sa hauteur SO a pour longueur 12cm.

O' est le point de OS tel que : SO' = 9cm.

Le plan paralléle à la base qui passe par le carré A'B'C'D'.

Calculer le volume, en cm3, de la pyramide SA'B'C'D'.

# Logiciel GEOGEBRA

GeoGebra

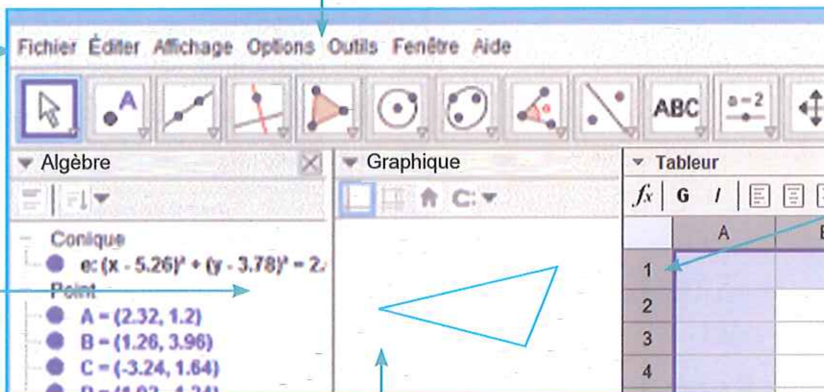
Geogebra est un logiciel de mathématiques et géométrie dynamique téléchargeable librement sut internet : http://www.geogebra.org.

Aide à l'utilisation des menus graphiques

Une aide à l'utilisation du menu s'affiche lors de la sélection d'une icône.

Menu graphique

Chaque icône correspond à un **menu graphique**




Tableur

On peut utiliser des valeurs correspondant aux objets géométriques dans **le tableur**.

Fenêtre algèbre

La **fenêtre algèbre** affiche une représentation algébrique des objets géométriques créés.

Fenêtre graphique (avec ou sans repères, avec ou sans grille)

Les constructions géométriques sont réalisées dans la **fenêtre graphique** .

## 1 Menu principal

Pour effectuer une action, cliquer sur le menu, puis sur le sous-menu correspondant.

### Fichier — Créer , ouvrir , enregistrer un fichier


**Ouvrir** un fichier Geogebra déja enregistré

**Afficher** une nouvelle fenêtre Geogebra

**Enregistrer** La page en cours

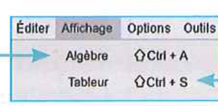
### Affichage — Afficher / cacher les repères, la grille, la fenêtre algèbre, le tableur


Affciher ou cacher les axes

Affciher ou cacher la grille

**Afficher** ou **cacher** le quadrillage de la fenêtre graphique.

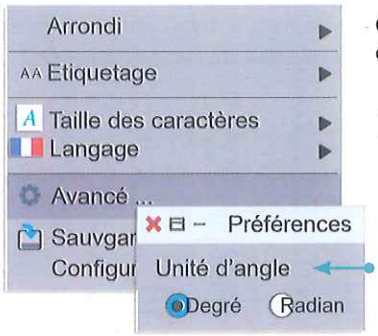
**Afficher** ou **cacher** les axes du repère de la fenêtre graphique.




**Afficher** ou **cacher** la fenêtre algèbre.

**Afficher** ou **cacher** le tableur

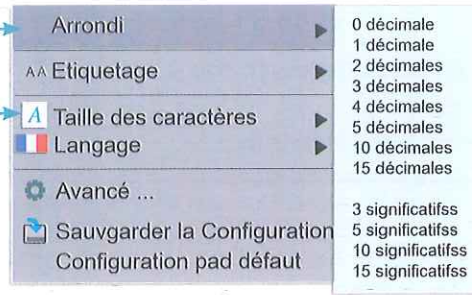
## Option Choisir l'unité d'angle, l'arrondi, le style des points, la taille des caractères




Choisir **le nombre** de **décimales affichées**

Choisir **la taille** des **caractères**

Choisir l'**unité d'angle** (degré, radian)



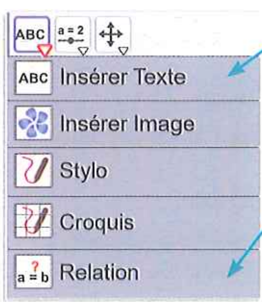

## 2 Menu graphique

Pour sélectionner un menu , cliquer sur l'icône correspondante. Chaque menu graphique se déroule en cliquant sur le coin en bas à droite de l'icône.

### Déplacer un objet


Cliquer sur l'objet puis le déplacer.

### a = 2 Insérer un texte, une image, connaitre la relation entre deux objets



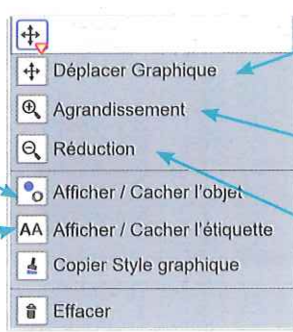

**Insérer** un **texte** :
Cliquer à l'endroit où le texte doit apparaitre.
Taper le texte dans la fenêtre prévue à cet effet.
Cliquer sur OK.


Connaitre **la relation** entre **deux objets** (savoir si deux objets sont égaux, si un point appartient à une droite, si deux droites sont parallèles ou sécantes).
Cliquer successivement sur les deux objets à comparer.
La réponse est donnée dans une fenêtre au milieu de l'écran.

### Déplacer, agrandir, réduire un graphique. Afficher, cacher, effacer un objet

**Afficher** ou **cacher** une étiquette.
Cliquer sur l'objet pour afficher ou cacher son étiquette.

**Afficher** ou **cacher** un objet. Cliquer sur l'objet à effacer.



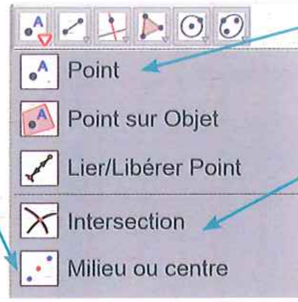

**Déplacer** un **graphique** Cliquer n'importe où sur le graphique et le déplacer en maintenant appuyé le bouton gauche de la souris.

**Agrandir** une image. Cliquer n'import où sur le graphique.

**Réduire** une image. Cliquer n'import où sur le graphique.

# Logiciel GEOGEBRA

## Créer un point

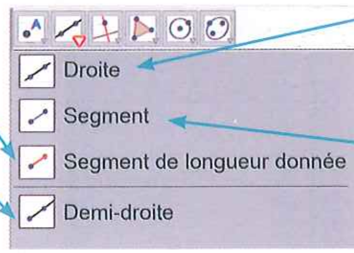



Crée un **nouveau** point.
Déplacer le pointeur puis cliquer avec la souris à l'endroit où l'on souhaite placer le point.

Créer un point **appartenant à deux objets** déja crées.
Cliquer successivement sur les objets ou cliquer sur leur intersection.

Créer le **milieu** d'un segment.
Cliquer sur deux points déja crées ou sur un segment déja crée.

## Créer des droites, des segments, des demi-droites.



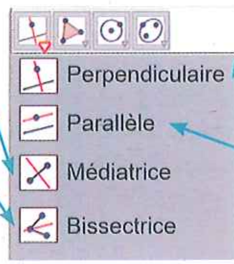

Créer un **segment** à partir d'**un point**.
Créer un point ou cliquer sur un point déja créé puis saisir la longueur au clavier.

Créer une **demi-droite d'origine** donnée et passant par**un point**.
Cliquer sur le point origine puis sur un point de la demi-droite ou sur un point déjà créé.

Crée une **droite** passant par deux **points**.
Créer deux points, ou cliquer successivement sur deux points déja crées.

Créer un **segment** entre deux **points**.
Créer deux points, ou cliquer successivement sur les deux objets ou cliquer sur leur intersection.

## Créer des droites particulières




Créer la **médiatrice** d'un segment.
Créer deux points ou cliquer successivement sur les deux points (ou sur un segment) créés.

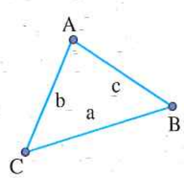
Créer la **bissectrice** d'un angle.
Créer trois points ou cliquer successivement sur trois points (ou sur deux droites. deux demi-droites, deux segments) déja créés.

Créer une **droite** passant par un point et **perpendiculaire** à une droite tracée
(ou à un segment ou une demi-droite).
Créer un point (ou cliquer sur un point déja créé) puis cliquer sur une droite tracée.
(ou sur une demi-droite ou un segment).

Créer une **droite** passant par un point et **parallèle** à une droite tracée (ou à un segment ou une demi-droite).
Créer un point (ou cliquer sur un point déja créé) puis cliquer sur une droite tracée. (ou sur une demi-droite ou un segment).

## Créer des droites particulières


Créer un **polygone**
Créer ou cliquer sur les sommets consécutifs du polygone, puis cliquer à nouveau sur le premier sommet.

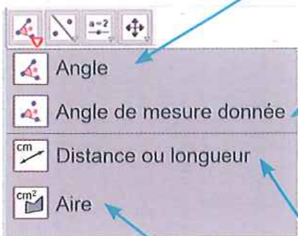



## Créer des cercles

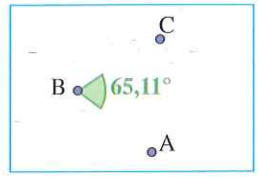

Créer un **cercle** à partir de son centre et d'**un** de ses points.
Créer deux points ou cliquer successivement sur deux points déja créés.

Créer un **cercle** à partir de son **centre** et de son **rayon.**
Créer un point ou cliquer sur un point déja créé puis saisir le rayon dans la fenêtre.

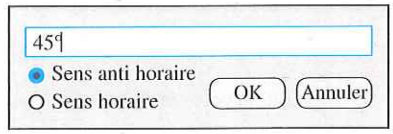
## Créer un angle, afficher une mesure



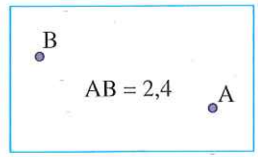

- Crée un **angle** à partir de **3 points**.
  Créer trois points (ou cliquer successivement sur trois points déja créés) dans l'ordre A, B, C pour créer l'angle
  Pour faire apparaitre la mesure d'un angle, il faut afficher son étiquette.




- Crée **un angle** à partir de **deux points** . et de sa **mesure**
  Créer deux points (ou cliquer successivement sur deux points déja crées) dans l'ordre point.
  d'un coté, puis sommet. Saisir la mesure de l'angle dans la fenêtre en précisant le sens de l'angle.

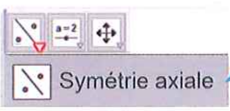



- Afficher la **distance** entre **deux points** ou **un périmètre**
  Cliquer successivement sur deux points déjà créés ou sur un segment, un polygone ou un cercle.

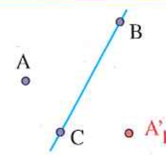



- Afficher **l'aire** d'une figure. Cliquer sur l'objet dont on cherche l'aire.

## Créer le symétrique d'un point ou d'une figure



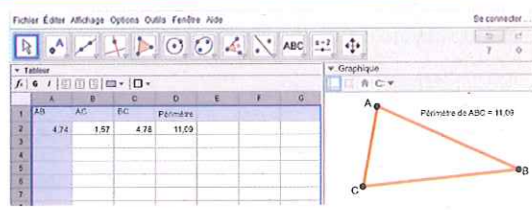

- Crée le **symétrique** d'un objet **par rapport** à une **droite**.
  Cliquer sur un objet dont on veut créer le symétrique, puis sur l'axe de la symétrie.




## 3 Tableur

- Une cellule du tableur peut contenir :
- Un **commentaire :** taper le texte puis valider avec le «retour» du clavier ;
- Une **valeur numérique :** taper la valeur numérique puis valider avec le «retour» du clavier ;
- La **valeur** d'une **cariable** géométrique **définie :** taper le nom de la variable puis valider avec le «retour» du clavier ;
- Le **résultat** d'un **calcul :** taper l'expression à cakcuker puis avec le «retour» du clavier.

### Exemple : Calculer le périmètre d'un triangle




- Séléctionne l'affichage Tableur et Graphique sans les axes.
- Construire un triangle ABC dans la partie Graphique .
- Dans la partie Tableur .
- Affiche les titres AB, AC et BC en entrant dans les cellules A1 , B1 , C1 et D1 : «AB» , «AC» , «BC» et «Périmètre».
- Affiche les longueurs des côtés [AB], [AC] et [BC] en entrant dans les cellules A2 , B2 et C2 : AB, AC, BC ;
- Calculer le périmètre du triangle ABC en entrant dans la cellule D2 la formule : = A2 + B2 + C2 .

- Tu peux déplacer les points A, B et C dans le graphique. Observe les modifications correspondantes dans les cellules du tableur.
- Pour vérifier les résultats obtenus, tu peux afficher le périmètre du triangle ABC dans le graphique en cliquant sur l'icône, puis en sélectionnant Distance ou longueur .

# Tableur (Logiciel Excel)

Microsoft Excel est un logiciel tableur de la suite bureautique Microsoft Office développé et distribué par l'éditeur Microsoft. La version la plus récente est Excel 2019. Il est destiné à fonctionner sur les plates-formes Microsoft Windows, Mac OS X, Android ou Linux.

## *Qu'est-ce qu'un tableur ?*

Un tableur est un chiffrier électronique qui permet :

La création, la mise en forme des feuilles de calcul, l'analyse et le partage des informations.

Le stockage, la manipulation et la mise en forme des données nécessaires aux calculs.

Le triage et le filtrage des données afin de les analyser.

L'utilisation de la mise en forme conditionnelle pour visualiser rapidement certaines informations.

L'utilisation d'une large panoplie de fonctions pour élaborer des formules complexes.

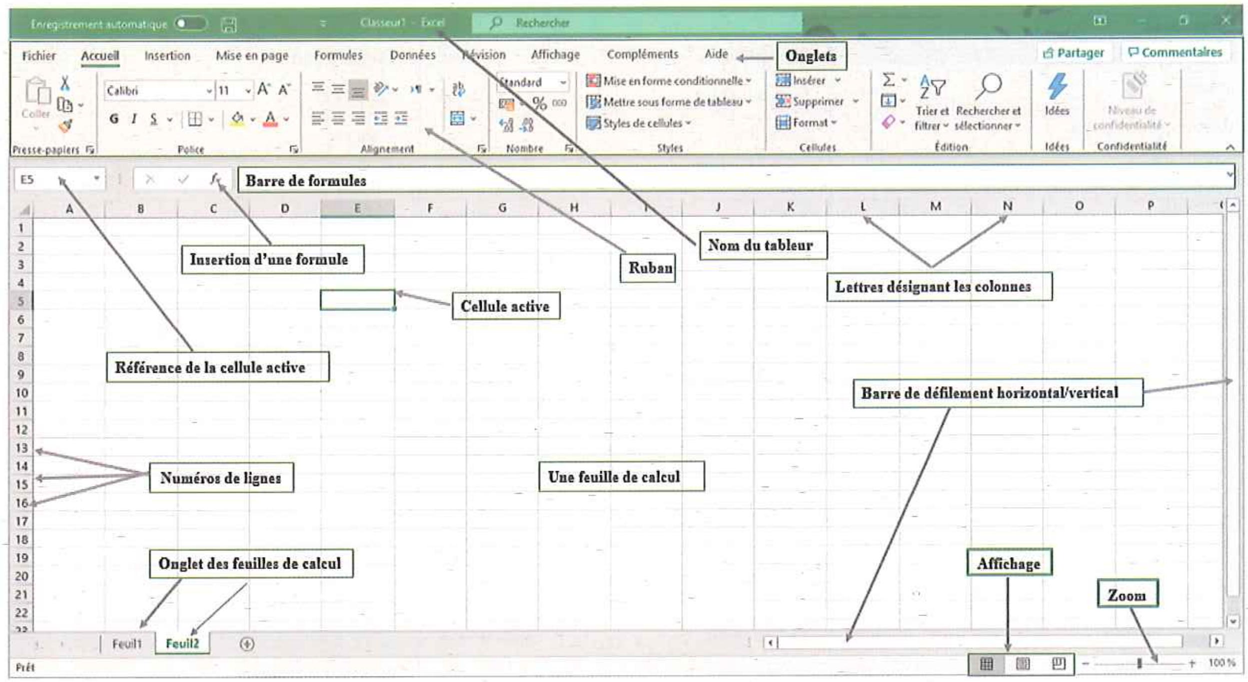
La création des tableaux et des graphiques.

## *Exemples de tableurs :*

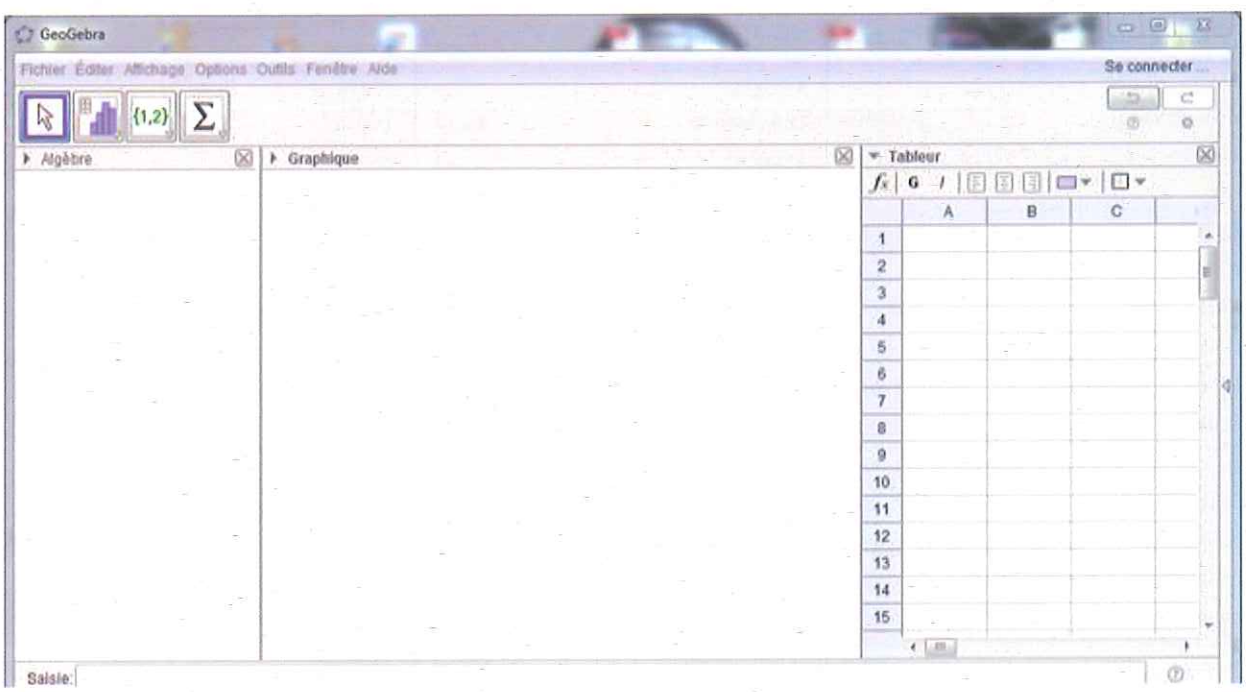
Excel qui fait partie de la suite Office de Microsoft ; OpenOffice.org Calc ; Tableurs Internet tels que Google Feuilles de calcul Tableurs intégrés à des logiciels de géométrie dynamique tels que Geogebra. Éléments d'interfaces de certains tableurs : Pour avoir un aperçu sur l'environnement de travail d'un tableur, on donne deux exemples : le premier est celui de l'interface d'Excel 2016 et le deuxième est celui intégré au logiciel Geogebra. Pour l'Excel 2016, les principaux composants de son interface sont les suivants :

1. La barre du titre affiche le nom du document et de l'application
2. Le ruban : constitue le menu général du tableur. Il est composé d'onglets tels que : Les onglets affichés par défaut sont les onglets Fichier, Accueil, Insertion, Mise en page, Formules, Données, Révision, Affichage, Compléments et Aide. Chaque onglet affiche des boutons de commandes regroupés en groupes. Les groupes pour
3. L'onglet Accueil par exemple sont : Presse-papiers, Police, Alignement, Nombre, Styles, Cellules, Édition, Idées et confidentialité.
4. Chaque fichier Excel est appelé un classeur. Un classeur est constitué d'une ou plusieurs feuilles de calcul.
5. Une cellule est l'intersection d'une colonne et une ligne. Une feuille de calcul contient 1 048 576 lignes et 16 384 colonnes.
6. La référence de position affiche l'adresse de la cellule active.
7. La barre de formule affiche le contenu de la cellule active.
8. L'insertion d'une formule : Excel offre un large éventail de fonctions prédéfinies. Pour en insérer une dans une cellule, on doit toujours commencer par taper le signe = .
9. Les barres de défilement horizontale et vertical.
10. Les icones d'affichage et le zoom permettent de passer d'un mode d'affichage et/ou d'un grossissement à un autre.
11. La zone de saisie affiche le document, le point d'insertion, la barre de sélection

# Logiciel GEOGEBRA




Pour le tableur disponible sur GeoGebra, on peut y accéder dans le sous-menu relatif à l'outil Affichage. Une zone contenant un tableur s'ouvre à droite. On peut y saisir du texte, des nombres et des formules. En déplaçant un point dans la fenêtre Graphique, la feuille de calcul se met à jour automatiquement.



# LEXIQUE

## FRANÇAIS - ARABE

### A

| | |
|---|---|
| Abscisse | أفصول |
| Addition; additionner | جمع |
| adjacent (côté) | محادي (ضلع) |
| Aigu (angle) | حادة (زاوية) |
| Agrandissement | تكبير |
| Aire | مساحة |
| Alignement | استقامية |
| Alignés | مستقيمية |
| Angle | زاوية |
| Année - lumière | سنة ضوئية |
| Approchée (valeur) | مقربة (قيمة) |
| Arête | حرف |
| Arrondi | تقريب |
| Axe | محور |
| Axe des abscisses | محور الأفاصيل |
| Axe des ordonnées | محور الأراتيب |
| Axe de symétrie | محور تماثل |

### B

| | |
|---|---|
| Base | قاعدة |
| Batôns (digramme en) | (مبيان) بالعصي |
| Bissectrice | منصف |

### C

| | |
|---|---|
| Calculatrice | آلة حاسبة |
| Calculer | حسب |
| Calcul mental | حساب ذهني |
| Caractère | ميزة |
| Carré | مربع |
| Centrale (symétrie) | مركزي (تماثل) |
| Centre | مركز |
| Centre de gravité | مركز ثقل |
| Cercle | دائرة |
| Circonscrit (cercle) | محيطة (دائرة) |
| Circulaire (diagramme) | دائري (مبيان) |
| Classe | صنف |
| Codage | ترميز |
| Coefficient | معامل |
| Combinaison | تأليفة |
| Commun | مشترك |
| Compas | بركار |
| Comparaison | مقارنة |
| Compléter | أتم |
| Concentriques | متراكزة |
| Condition | شرط |
| Conservation | حفاظ |
| Cône | مخروط |
| Corde | وتر |
| Cosinus | جيب تمام |
| Côté | ضلع |
| Couple | زوج |
| Cylindre | أسطوانة |

### D

| | |
|---|---|
| Décimal | عشري |
| Défaut (par) | تفريط (ب) |
| Degré | درجة |
| Demi-droite | نصف مستقيم |
| Dénominateur | مقام |
| Développement | نشر |
| Diagonale | قطر |
| Diagramme | مبيان |
| Diamètre | قطر |
| Différence | فرق |
| Direction | اتجاه |
| Disque | قرص |
| Distance | مسافة |
| Distributivité | توزيعية |
| Diviser | قسم |
| Division | قسمة |
| Droite | مستقيم |
| Double | ضعف |
| Durée | مدة |

### E

| | |
|---|---|
| Écriture | كتابة |
| Effectif | حصيص |
| Effectif cumulé | حصيص متراكم |
| Égalité | متساوية |
| Encadrement | تأطير |
| Engendré | مولد |
| Entier | صحيح |
| Entier naturel | صحيح طبيعي |
| Entier relatif | صحيح نسبي |
| Équation | معادلة |
| Équerre | كوس |
| Équilatéral (triangle) | متساوي الأضلاع (مثلث) |
| Excès (par) | إفراط (ب) |
| Exposant | أس |
| Expression | تعبير |
| Extrémité | طرف |

### F

| | |
|---|---|
| Facteur | عامل |
| Factorisation | تعميل |
| Figure | رسم - شكل |
| Forme | شكل |
| Fraction | كسر |
| Fractionnaire | كسري |

### G

| | |
|---|---|
| Graduée(droite) | مدرج(مستقيم) |
| Graphique | مبيان |

### H

| | |
|---|---|
| Hauteur | ارتفاع |
| Histogramme | مدراج |
| Hypoténuse | وتر |

### I

| | |
|---|---|
| Identité | متطابقة |
| Image | صورة |
| Impair | فردي |
| Inclus | ضمن |
| Inconnue | مجهول |
| Inégalité | متفاوتة |
| Inéquation | متراجحة |
| Inférieur(ou égal) | أصغر(أو يساوي) |
| Inscriptible | دائري |
| Inscrit(angle) | (زاوية) محيطية |
| Inscrit dans | محاط |
| Inverse | مقلوب |
| Isocèle(triangle) | (مثلث) متساوي الساقين |
| Isométriques | متقايسان، متقايسة |

### J

| | |
|---|---|
| Justifier | علل |

# LEXIQUE

## FRANÇAIS - ARABE

### L

| | |
|---|---|
| Largeur | عرض |
| Latérale (aire) | (مساحة)جانبية |
| Ligne | سطر ، خط |
| Linéaire (combinaison) | (تأليفة)خطية |
| Littéral | حرفي |
| Longueur | طول |
| Losange | معين |

### M

| | |
|---|---|
| Médiane | متوسط |
| Médiatrice | واسط |
| Membre (d'une équation) | طرف(معادلة) |
| Mesure | قياس |
| Milieu | منتصف |
| Mode | منوال |
| Moyenne | معدل |
| Moyenne(vitesse) | (سرعة)متوسطة |
| Multiple | مضاعف |
| Multiplication | ضرب |

### N

| | |
|---|---|
| Naturel | طبيعي |
| Négatif | سالب |
| Nombre | عدد |
| Norme | منظم |
| Notation | كتابة - ترميز |
| Nul | منعدم |
| Numérateur | بسط |

### O

| | |
|---|---|
| Obtus(angle) | (زاوية)منفرجة |
| Opération | عملية |
| Opposé | مقابل |
| Ordre | ترتيب |
| Ordre croissant | ترتيب تزايدي |
| Ordre décroissant | ترتيب تناقصي |
| Ordre de grandeur | رتبة كبر |
| Origine | أصل |
| Orthocentre | مركز تعامد |
| Orthogonal (repère) | متعامد |
| Orthonormal (repère) | متعامد ممنظم |

### P

| | |
|---|---|
| Pair | زوجي |
| Parallèle à | يوازي |
| Parallélépipède | متوازي المستطيلات |
| Parallèles | متوازيان، متوازية |
| Parallélogramme | متوازي الأضلاع |
| Parenthèses | أقواس |
| Patron | نشر |
| Périmètre | محيط |
| Perpendiculaires | متعامدان |
| Perspective (cavalière) | منظور متساوي |
| Point | نقطة |
| Polygone | مضلع |
| Pondérée (moyenne) | (معدل) متزن |
| Positif | موجب |
| Priorité | أسبقية |
| Prisme | موشور |
| Produit | جداء |
| Proportionnalité | تناسبية |
| Propriété | خاصية |
| Prouver | أثبت |
| Puissance | قوة |
| Pyramide | هرم |
| Pythagore (théorème de ) | (مبرهنة) فيثاغورس |

### Q

| | |
|---|---|
| Quadrilatère | رباعي |
| Qualitatif | نوعي |
| Quantitatif | كمي |
| Quotient | خارج |

### R

| | |
|---|---|
| Racine carrée | جذر مربع |
| Rapport | نسبة |
| Rationnel | جذري |
| Rayon | شعاع |
| Rectangle | مستطيل |
| Réduction | اختزال - تصغير |
| Réduire | اختصر |
| Règle | قاعدة، مسطرة |
| Relatif | نسبي |
| Relation (de Chasles) | علاقة (شال) |
| Représentation | تمثيل |
| Révolution | دوران |

### S

| | |
|---|---|
| Sécantes | متقاطعان |
| Segment | قطعة |
| Semblables | متشابهان |
| Sens | منحى |
| Série(statistique) | متسلسلة (إحصائية) |
| Signe | إشارة، رمز |
| Similitude | تشابه |
| Simplification | تبسيط |
| Sinus | جيب |
| Situation | وضعية |
| Solide | مجسم |
| Solution | حل |
| Somme | مجموع |
| Sommet | رأس |
| Soustraction | طرح |
| Statistique | إحصاء |
| Strictement négatif | سالب قطعاً |
| Strictement positif | موجب قطعاً |
| Substitution | تعويض |
| Supérieur(ou égal) | أكبر(أو يساوي) |
| Surface | سطح |
| Symétrie axiale | تماثل محوري |
| Symétrie centrale | تماثل مركزي |

### T

| | |
|---|---|
| Tableau | جدول |
| Tangente | مماس |
| Tangente | ظل |
| Temps | زمن |
| Terme | حد |
| Tétraèdre | رباعي أوجه |
| Théorème | مبرهنة |
| Translation | إزاحة |
| Trapèze | شبه منحرف |
| Triangle | مثلث |
| Triangle équilatéral | مثلث متساوي الأضلاع |
| Triangle isocèle | مثلث متساوي الساقين |
| Triangle rectangle | مثلث قائم الزاوية |

### V

| | |
|---|---|
| Valeur approchée | قيمة مقربة |
| Variable | متغير |
| Vecteur | متجهة |
| Vitesse | سرعة |
| Volume | حجم |

# En français

* BOUVIER, A et GEORGE, M • *Dictionnaire des mathématiques.* PUF . 2013

* BOUVIER, B • *Didactique des Mathématiques : le livre et le faire.* CEDIC . 1986

* BRAULT, R. et les autres • *Mathématiques 5$^e$ . Collection Phare* - Edition Hachette Education, 2006

* BROUSSEAU, G • *La résolution de problèmes - Math Ecole,* 163, Neuchâtel . 1994

* CASSOU - NOGUES . *Hilbert* . ED . les belles lettres 2001.

* CHAPIRON, G et les autres • *Mathématiques 3$^e$* . Collection Triangle . Edition Hatier, 2003

* CHAPIRON, G et les autres • *Mathématiques 4$^e$* . Collection Triangle . Edition Hatier, 2002

* CIEP • *Intégrer langue et discipline* . 2018

* DAHAN - DALMEDICO, A et PEIFFER, J. • "*Une histoire des mathématiques : Routes et Dédales*" Edition Points ; 1986.

* DELORD, R et VINRICH, G et les autres. • *Maths 5$^e$*. Collection Cinq sur cinq. Edition Hachette Education, 2000

* DJABBAR, A • " *L'âge d'or des sciences arabes*", Edition le Pommier Cité des sciences et de l'industrie. Collection " Le Collège" N° 15, 2013.

* ERMEL • *Apprentissages numériques et résolutions de problèmes.* HATIER, Paris de 1991 à 1999.

* LEPINE, L • *Tout problème ouvert n'engage pas nécessairement une bonne recherche* • Grand N, 60,57 - 62 (1996)

* MALAVAL, J. et les autres • *Transmath 3$^e$* . Edition Nathan 2008

* MALAVAL, J. et les autres • *Transmath 4$^e$* . Edition Nathan 2007

* MALAVAL, J. et les autres • *Transmath 5$^e$* . Edition Nathan 2014

* RASHED . R • " *D'Al-Khawarizmy à Descartes", Etude sur l'histoire des mathématiques classiques,* Hermann, 2011

* SCHNEIDER, M • *Trois compétences transversales conceptualisées au sein de l'enseignement des mathématiques.*

Repères - IREM, 55,51 - 70 .2004.

* SZPIRO, G • *La conjecture de Poincaré* . Edition du Seuil . 2009

## بالعربية

وزارة التربية الوطنية، مديرية المناهج ، **التوجيهات التربوية والبرامج الخاصة بتدريس الرياضيات بسلك التعليم الثانوي الإعدادي 2007.**

* **المفيد في الرياضيات** - السنة الأولى من التعليم الإعدادي دار الثقافة للنشر والتوزيع *2015.*

* **المفيد في الرياضيات** - السنة الثالثة من التعليم الإعدادي دار الثقافة للنشر والتوزيع *2015.*

## WEBOGRAPHIE

• https://afb31.free.fr/ bezier motivations (2019)

• https://le-castillon.etab.ac.caen.fr (2018)

• https://www.babelio.com

• https://www.bibmath.net (2018)

• https://www.drgoulu.com

• https://www.cons-dev.org (2018)

• https://www.franceinter.fr (2018)

• https://www.fr.wikipedia.org.fr (2016)

• https://www.history.mes.st-andreus.ac.uk(2018)

بوابة مشروع GENIE
لإدماج تكنولوجيا المعلومات والاتصالات في التعليم

Ressources numériques des Mathématiques – Niveau collège
Présentes sur le portail
: www.taalimtice.ma

Voir en dessous des liens la description de plus de 90 ressources.

Les liens :

http://www.taalimtice.ma/rn?field_rn_niveaux_tid=47&field_rn_matieres_tid=61&field_rn_nature_tid=All&field_rn_source_tid=All

http://www.taalimtice.ma/rn?field_rn_niveaux_tid=47&field_rn_matieres_tid=61&field_rn_nature_tid=All&field_rn_source_tid=All&page=1

http://www.taalimtice.ma/rn?field_rn_niveaux_tid=47&field_rn_matieres_tid=61&field_rn_nature_tid=All&field_rn_source_tid=All&page=2

http://www.taalimtice.ma/rn?field_rn_niveaux_tid=47&field_rn_matieres_tid=61&field_rn_nature_tid=All&field_rn_source_tid=All&page=3

http://www.taalimtice.ma/rn?field_rn_niveaux_tid=47&field_rn_matieres_tid=61&field_rn_nature_tid=All&field_rn_source_tid=All&page=4

http://www.taalimtice.ma/rn?field_rn_niveaux_tid=47&field_rn_matieres_tid=61&field_rn_nature_tid=All&field_rn_source_tid=All&page=5

http://www.taalimtice.ma/rn?field_rn_niveaux_tid=47&field_rn_matieres_tid=61&field_rn_nature_tid=All&field_rn_source_tid=All&page=6

http://www.taalimtice.ma/rn?field_rn_niveaux_tid=47&field_rn_matieres_tid=61&field_rn_nature_tid=All&field_rn_source_tid=All&page=7

http://www.taalimtice.ma/rn?field_rn_niveaux_tid=47&field_rn_matieres_tid=61&field_rn_nature_tid=All&field_rn_source_tid=All&page=8

http://www.taalimtice.ma/rn?field_rn_niveaux_tid=47&field_rn_matieres_tid=61&field_rn_nature_tid=All&field_rn_source_tid=All&page=9

**Dépôt Légal : 2017MO3585**

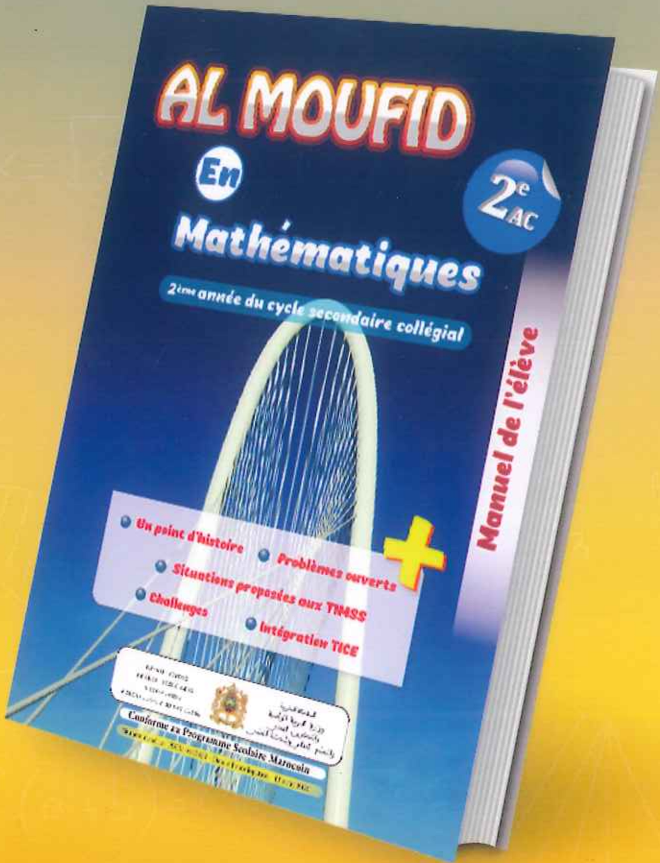
**ISBN : 978-9954-613-47-4**

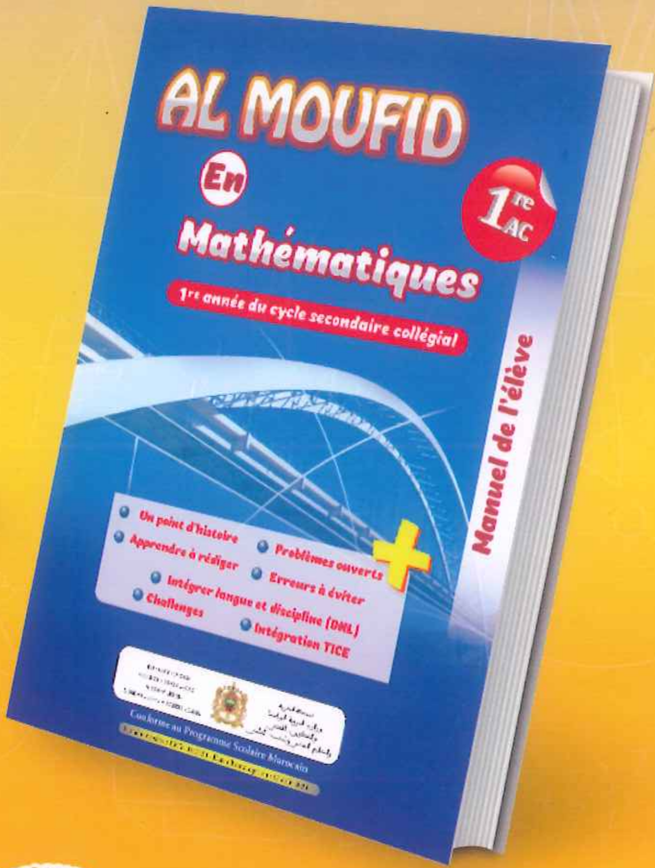
Impression : Les imprimeries du Matin

Collection

# AL MOUFID

En Mathématiques




DAR ATTAKAFA
Edition Diffusion

32/34 Bd Victor Hugo - Casablanca
Tél (0522) 30 23 75 / 30 25 14 - Fax (0522) 30 65 11
darattakafa@gmail.com
www.darattakafa.com

Prix 49 dh