

Résolution numérique du problème de la chaînette

En mathématiques, le mot *chaînette* désigne une courbe plane qui correspond à la forme que prend un fil pesant (une chaîne par exemple) lorsqu'il est suspendu par ses extrémités et soumis à une force gravitationnelle uniforme (son propre poids). On se propose dans ce travail de déterminer numériquement cette courbe.

1 Un peu d'histoire

Le problème de la chaînette, c'est-à-dire de la détermination de la forme prise, sous l'action d'un champ de pesanteur uniforme, par un fil pesant flexible, homogène, inextensible et suspendu entre deux points, intervient de manière récurrente en génie civil (caténaires) ainsi que dans la conception d'ouvrages d'art (construction d'arcs et de voûtes); il a pour cette raison intéressé bon nombre de mathématiciens célèbres. Galileo Galilei pensait initialement que cette forme était un arc de parabole, mais ceci fut réfuté, en 1669 et de manière posthume, par Joachim Jungius. En 1690, Jakob Bernoulli publia dans le journal scientifique *Acta Eruditorum* le problème : « trouver la courbe adoptée par un fil lâche et suspendu librement entre deux points », lequel fut résolu de façon indépendante et pratiquement simultanée par Gottfried Wilhelm von Leibniz, Christiaan Huygens et Johann Bernoulli, le frère de Jakob. Leurs solutions respectives parurent de manière succincte en juin 1691 dans *Acta Eruditorum*, le mot latin *catenaria*, introduit par Huygens dans une lettre adressée à Leibniz, étant alors retenu pour qualifier la courbe obtenue. Il apparut ainsi que l'équation cartésienne de la chaînette fait intervenir la fonction *cosinus hyperbolique* $\cosh(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$ et qu'elle s'écrit

$$y = \alpha \cosh\left(\frac{x - \beta}{\alpha}\right) + \gamma, \quad (1)$$

où les constantes α , β et γ peuvent, par exemple, être déterminées en utilisant le fait que le fil est attaché en ses deux extrémités¹ et de longueur fixe.

Tâche 1. Mettre en équations les conditions aux limites et la contrainte sur la longueur du fil énoncées ci-dessus et en déduire l'équation transcendante² vérifiée par le coefficient α . Écrire alors une fonction calculant α , β et γ à partir de la donnée des coordonnées cartésiennes des points d'attache du fil et de sa longueur. Cette fonction devra inclure une procédure vérifiant qu'une telle chaînette existe et en produire un tracé le cas échéant.

Dans la suite, on suppose qu'on ne connaît pas l'équation (1) et on cherche par conséquent à déterminer la chaînette de manière approchée.

2 Modélisation

On munit le plan d'un repère orthonormé et on considère un fil pesant de longueur ℓ , suspendu aux points $a = (x_a, y_a)$ et $b = (x_b, y_b)$ tels que $\ell > \sqrt{(x_b - x_a)^2 + (y_b - y_a)^2}$. Une formulation mathématique possible du problème de la chaînette est alors celle du problème de minimisation suivant :

$$\min_{\substack{y(x_a)=y_a, y(x_b)=y_b \\ \int_{x_a}^{x_b} \sqrt{1+y'(x)^2} dx = \ell}} \int_{x_a}^{x_b} y(x) \sqrt{1+y'(x)^2} dx, \quad (2)$$

1. On appellera ces deux conditions les *conditions aux limites* du problème.

2. Une équation *transcendante* est (pour simplifier) une équation du type $f(x) = 0$ non algébrique, c'est-à-dire que la fonction f n'est pas polynomiale.

où l'application y est une fonction dérivable sur l'intervalle $[x_a, x_b]$ représentant l'élévation du fil. La fonctionnelle que l'on cherche à minimiser est reliée à l'énergie potentielle associée à la configuration prise par le fil soumis à l'action de la pesanteur.

La contrainte de longueur étant difficile à imposer dans une méthode de résolution numérique du problème (2), on a recours à une approche dite de *pénalisation*, qui consiste à considérer le problème *pénalisé* suivant

$$\min_{y_\varepsilon(x_a)=y_a, y_\varepsilon(x_b)=y_b} \int_{x_a}^{x_b} y_\varepsilon(x) \sqrt{1 + y_\varepsilon'(x)^2} dx + \frac{1}{\varepsilon} \left(\int_{x_a}^{x_b} \sqrt{1 + y_\varepsilon'(x)^2} dx - \ell \right)^2, \quad (3)$$

dans lequel le réel $\varepsilon > 0$ est un paramètre dont la valeur est destinée à tendre vers 0. La contrainte non linéaire d'égalité apparaît alors explicitement dans cette nouvelle fonctionnelle, que l'on notera $J(y_\varepsilon)$. Ce faisant, on a en quelque sorte « étendu » le problème initial en un problème de minimisation posé sur l'ensemble des fonctions dérivables sur l'intervalle $[x_a, x_b]$ ne satisfaisant que les conditions aux limites du problème de départ. L'idée sous-jacente est que la partie de la fonctionnelle multipliée par le coefficient $\frac{1}{\varepsilon}$ tendra vers 0 avec ε , la contrainte « oubliée » étant par conséquent satisfaite à la limite.

3 Discrétisation

La résolution numérique du problème, de dimension infinie, (3) passe par une étape de discrétisation, qui consiste à se ramener à un problème approché posé dans \mathbb{R}^N .

On introduit pour cela un ensemble de points, appelés *nœuds de discrétisation*, de l'intervalle $[x_a, x_b]$, encore appelé *grille*, $(x_i)_{i=1, \dots, N}$, avec $x_i = x_a + (i-1)h$ et $h = \frac{x_b - x_a}{N-1}$, le réel h étant le *pas de discrétisation*, et on approche la solution y_ε par une fonction affine par morceaux par rapport à cette grille. Plus précisément, on considère une fonction y_h de la forme

$$y_h(x) = y_i + \frac{x - x_i}{h} (y_{i+1} - y_i), \quad \forall x \in [x_i, x_{i+1}], \quad \forall i \in \{1, \dots, N-1\}, \quad (4)$$

et telle que $y_1 = y_a$ et $y_N = y_b$. Il découle de cette approximation que la suite finie des valeurs $(y_i)_{i=1, \dots, N}$ est une approximation de la suite $(y_\varepsilon(x_i))_{i=1, \dots, N}$ des valeurs de la solution de (3) aux nœuds de la grille. Dans toute la suite, on notera \mathbf{Y} le vecteur de \mathbb{R}^N de composantes $y_i, i = 1, \dots, N$.

Pour obtenir une fonctionnelle J_h définissant un problème de minimisation dont \mathbf{Y} est solution, on utilise la *formule de quadrature du point milieu (ou du rectangle) composite*, qui consiste à approcher l'intégrale d'une fonction entre x_a et x_b par une somme pondérée de valeurs de cette fonction en un nombre fini de points de l'intervalle $[x_a, x_b]$. Cette formule de quadrature étant exacte pour toute fonction affine par morceaux relativement à la grille précédemment introduite, on aura, pour toute fonction f de ce type,

$$\int_{x_a}^{x_b} f(x) dx = h \sum_{j=1}^{N-1} f\left(\frac{x_j + x_{j+1}}{2}\right). \quad (5)$$

Tâche 2. Utiliser (4) et (5) pour obtenir l'expression de la fonctionnelle J_h du problème discrétisé

$$\min_{y_1=y_a, y_N=y_b} J_h(\mathbf{Y}), \quad (6)$$

associé à (3). Qu'elle est la longueur effective du fil pour ce problème discrétisé ?

Tâche 3. Écrire une fonction J_h prenant comme arguments d'entrée la longueur ℓ du fil pesant, le paramètre de pénalisation ε , le pas de discrétisation h et le vecteur à N composantes \mathbf{Y} et renvoyant la valeur associée du *critère* du problème de minimisation (6), c'est-à-dire la valeur de $J_h(\mathbf{Y})$.

4 Résolution numérique du problème

4.1 Méthodes à directions de descente de type gradient

On propose d'obtenir une solution numérique du problème de minimisation (6) par une *méthode de gradient* (ou de la *plus profonde descente*). Celle-ci fait partie d'une classe plus large de méthodes numériques dites à *direction de descente*, dont le principe général est de construire, à partir d'une initialisation

arbitraire $Y^{(0)}$, une suite d'itérés $(Y^{(k)})_{k \in \mathbb{N}}$ se rapprochant du minimum recherché. On demande que cette suite vérifie $J_h(Y^{(k+1)}) < J_h(Y^{(k)})$ et on cherche alors $Y^{(k+1)}$ sous la forme $Y^{(k+1)} = Y^{(k)} + \rho^{(k)} d^{(k)}$, où $\rho^{(k)} > 0$ est appelé le *pas de descente* dans la *direction de descente* $d^{(k)}$.

Dans les méthodes de gradient, l'idée naturelle suivie pour trouver une direction de descente est de faire un développement de Taylor (formel) à l'ordre un entre deux termes successifs de la suite des itérés, $Y^{(k)}$ et $Y^{(k+1)} = Y^{(k)} + \rho^{(k)} d^{(k)}$, c'est-à-dire

$$J_h(Y^{(k)} + \rho^{(k)} d^{(k)}) = J_h(Y^{(k)}) + \rho^{(k)} (\nabla J_h(Y^{(k)}), d^{(k)}) + o(\rho^{(k)} d^{(k)}),$$

où (\cdot, \cdot) désigne un produit scalaire sur \mathbb{R}^N . Puisque l'on veut que $J_h(Y^{(k)} + \rho^{(k)} d^{(k)}) < J_h(Y^{(k)})$, on fait en première approximation le choix $d^{(k)} = -\nabla J_h(Y^{(k)})$.

Cette méthode peut se résumer dans l'algorithme suivant :

$$\begin{cases} Y^{(0)} \in \mathbb{R}^N \text{ donné, } \rho^{(0)} > 0 \text{ donné,} \\ Y^{(k+1)} = Y^{(k)} - \rho^{(k)} \nabla J_h(Y^{(k)}), \quad k \geq 0, \end{cases}$$

le pas de descente $\rho^{(k)}$ pouvant être choisi constant (on parle alors de *méthode de gradient à pas fixe*) ou variable à chaque itération. Dans ce dernier cas, la *méthode de gradient à pas optimal* propose un choix du pas rendant le critère minimal le long de la direction de descente choisie, i.e.,

$$\rho^{(k)} = \underset{\rho \in \mathbb{R}}{\operatorname{arginf}} J_h(Y^{(k)} - \rho \nabla J_h(Y^{(k)})).$$

Cependant, on ne cherche pas le minimum de la fonction $\phi(\rho) = J_h(Y^{(k)} - \rho \nabla J_h(Y^{(k)}))$ en pratique (cette opération pouvant s'avérer coûteuse en temps de calcul), mais on détermine un pas soit par une étape de *recherche linéaire*, soit par une technique d'encadrement comme la *méthode de la section dorée* lorsque l'on sait que ϕ est unimodale³ sur un intervalle connu.

4.2 Méthode de la section dorée

La méthode de la section dorée (*golden section search* en anglais) pour la recherche d'un extremum local d'une fonction de \mathbb{R} dans \mathbb{R} , s'apparente à une méthode de dichotomie. Elle repose en effet sur un algorithme de construction d'une suite décroissante (au sens de l'inclusion) d'intervalles contenant tous l'extremum en question.

La méthode s'applique en pratique à la minimisation d'une fonction f unimodale sur un intervalle $[a, b]$. On suppose que la fonction f a déjà été évaluée en trois points x_1, x_2 et x_3 de $[a, b]$ tels que $x_1 < x_2 < x_3$, $f(x_2) < f(x_1)$, $f(x_2) < f(x_3)$ et $f(x_3) < f(x_1)$, le minimum de la fonction appartenant donc à l'intervalle $[x_1, x_3]$. Pour construire un nouvel intervalle contenant ce minimum, on place un nouveau point, noté x_4 , dans le plus grand des intervalles $[x_1, x_2]$ et $[x_2, x_3]$ et on évalue $f(x_4)$. Si $f(x_2) < f(x_4)$ (respectivement $f(x_4) < f(x_2)$), les trois points à conserver pour l'étape suivante seront x_1, x_2 et x_4 (resp. x_2, x_4 et x_3). On réitère le procédé jusqu'à ce que l'encadrement du minimum soit de taille inférieure à une tolérance fixée⁵.

La méthode de la section dorée garantit une réduction de la taille de l'intervalle entre deux itérations de l'algorithme avec un facteur constant en choisissant le point x_4 de manière à ce que

$$\frac{x_4 - x_2}{x_2 - x_1} = \frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_2} \text{ et } \frac{x_4 - x_2}{x_3 - x_4} = \frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_2},$$

d'où, après quelques calculs,

$$\frac{x_2 - x_1}{x_4 - x_2} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2},$$

ce rapport étant le fameux *nombre d'or*, d'où l'appellation de la méthode.

Tâche 4. Écrire une fonction *goldensearch* implémentant la méthode de la section dorée pour une fonction générique d'une variable réelle.

3. Une fonction f , définie en tout point d'un intervalle $[a, b]$, est dite *unimodale* sur $[a, b]$ s'il existe $x^* \in]a, b[$ tel que f est strictement décroissante sur $]a, x^*[$ et strictement croissante sur $]x^*, b[$.

4. Le diagramme représente le premier cas de figure.

5. On pourra utiliser le critère d'arrêt suivant : $|x_4 - x_1| < \tau(|x_2| + |x_3|)$, où τ désigne la tolérance fixée.

4.3 Application et implémentation

Pour prendre en compte les conditions aux limites $y_1 = y_a$ et $y_N = y_b$, il suffira d'initialiser la méthode de gradient avec un vecteur $\mathbf{Y}^{(0)}$ vérifiant $\mathbf{Y}_1^{(0)} = y_a$ et $\mathbf{Y}_N^{(0)} = y_b$, et de calculer ensuite les directions de descente successives $\mathbf{d}^{(k)}$, $k > 0$, à partir des valeurs du gradient de J_h aux points $\mathbf{Y}^{(k)}$, $k > 0$, en imposant que $d_1^{(k)} = d_N^{(k)} = 0$. Ainsi, les vecteurs obtenus vérifieront par construction les contraintes d'égalité voulues (on utilise de fait une *méthode de gradient réduit*).

Tâche 5. Déterminer l'expression des $N - 2$ composantes $\frac{\partial J_h}{\partial y_j}(\mathbf{Y})$, $j \in \{2, \dots, N - 1\}$, du gradient de la fonction J_h au point \mathbf{Y} .

Tâche 6. Écrire ensuite une fonction DJh renvoyant la valeur en \mathbf{Y} du gradient du critère du problème (6).

Tâche 7. Implémenter alors les méthodes de gradient à pas fixe et variable⁶ pour la résolution du problème (6). Il conviendra de définir un critère d'arrêt pour les algorithmes. Il faudra aussi s'assurer⁷ que le pas est suffisamment petit à chaque itération pour que l'on ait bien $J_h(\mathbf{Y}^{(k+1)}) < J_h(\mathbf{Y}^{(k)})$, $\forall k > 0$.

5 Étude numérique

On est à présent en mesure de déterminer numériquement une chaînette dont on connaît les coordonnées des extrémités et la longueur.

Tâche 8. Écrire un programme qui, à partir des données du problème (les points d'attache a et b , la longueur ℓ du fil, le paramètre de pénalisation ε) et des paramètres de la méthode de résolution numérique (le nombre N de points de discrétisation, le nombre maximum d'itérations et la tolérance pour le critère d'arrêt des méthodes de gradient, le pas de descente ρ pour la méthode de gradient à pas fixe), tente de résoudre de manière approchée le problème de minimisation (3), représente graphiquement et donne la longueur effective de la chaînette obtenue. Réaliser quelques essais sur un cas choisi⁸. Que dire de la méthode de gradient à pas fixe ?

En plus de la détermination approchée d'une chaînette, le programme produit à la tâche 8 permet de réaliser des études paramétriques pour mesurer l'influence des variations de certaines données du problème sur sa solution.

Tâche 9. Sur un cas choisi, résoudre le problème en faisant progressivement diminuer la valeur du paramètre ε . Qu'observe-t-on ? Réaliser d'autres tests (en faisant varier l'entier N par exemple) et essayer de fournir des explications aux résultats obtenus.

Quelques remarques

Lors de l'écriture d'un algorithme, utiliser autant que possible des formulations vectorielles à la place des structures de contrôles habituelles (boucles par exemple) pour pouvoir pleinement tirer parti de la vectorisation des calculs dans MATLAB et GNU OCTAVE. Ne pas hésiter à largement commenter les fonctions et programmes produits lors de la réalisation du projet, afin qu'ils soient facilement compréhensibles et utilisables par d'autres personnes que leurs auteurs.

6. On utilisera pour le calcul du pas la méthode de la section dorée, présentée dans la sous-section 4.2, avec une tolérance égale à 10^{-4} . Sous MATLAB ou GNU OCTAVE, on fera appel à la fonction @, dite « poignée » (*"handle"* en anglais), pour appeler indirectement une fonction de plusieurs arguments via une fonction d'un seul (ou plus) de ses arguments (les valeurs respectives des arguments restants étant fixées lors de l'appel à la fonction @). Pour plus de précisions, voir l'aide en ligne obtenue en tapant `help function_handle`.

7. Ceci est particulièrement important pour la méthode de gradient à pas fixe.

8. Essayer par exemple $a = (0, 2)$, $b = (1, 3)$, $\ell = 2$ et $\varepsilon = \frac{1}{4}$.