Ecole Nationale d'Ingénieurs de Carthage 2021/2022

Phénomène de Runge - Points de Chebyshev

Classes : $1^{\text{ère}}$ année ING-INFO TP Analyse numérique 2

Compte rendu à rédiger par binôme, à rendre avant le mardi 26 avril 2022

Rappels :

Soient f une fonction définie sur $[a, b]$ et $x_0, \ldots, x_n \quad n+1$ points distincts de $[a, b]$. On rappelle qu'il existe un unique polynôme P_n de degré inférieur ou égal à n qui interpole la fonction f en ces points. Ce polynôme s'écrit respectivement dans la base de Lagrange et la base de Newton :

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i) L_i(x) \quad \text{et} \quad P_n(x) = f(x_0) + \sum_{k=1}^{n} f[x_0, \ldots, x_k] \omega_k(x)$$

où $L_i(x) = \prod_{j=0, j\neq i}^{n} (\frac{x - x_j}{x_i - x_j})$, $w_k(x) = \prod_{j=0}^{k-1} (x - x_j)$ et $f[x_0, \ldots, x_k]$ étant la différence divisée d'ordre k de f aux points $x_0, \ldots, x_k$. On rappelle également les relations de récurrence suivantes :

$$\begin{cases} f[x_i] = f(x_i) \ , \ i = 0 \ldots n \\ \\ f[x_i, \ldots, x_{i+k}] = \dfrac{f[x_{i+1}, \ldots, x_{i+k}] - f[x_i, \ldots, x_{i+k-1}]}{x_{i+k} - x_i} \ , \quad k = 1..n \ , \ i = 0..n - k \end{cases} \tag{1}$$

Travail demandé :

1. **Polynôme d'interpolation dans la base Lagrange**

   (a) Écrire une fonction MATLAB de prototype `function[l]=evalPolyL(i,x,a)` qui renvoie la valeur de $L_i(a)$: i un entier entre 0 et n, a est un réel et x désigne un vecteur de taille $n+1$ contenant les réels distincts $x_0, \ldots, x_n$.

   (b) Écrire une fonction MATLAB de prototype `function[p]=evaLagrange(x,y,a)` qui renvoie la valeur de $P_n(a)$: x et y désignent deux vecteurs de taille $n+1$ contenant respectivement les réels x_i et les $y_i = f(x_i)$. Cette fonction fera appel à la fonction `evalPolyL`.

   (c) Tracer sur la même figure les courbes de la fonction $f(x) = \sin(x)$ sur $[0, 2]$ et son polynôme d'interpolation relatif aux points $x_0 = 0$, $x_1 = 0.5$, $x_2 = 1$, $x_3 = 1.5$ et $x_4 = 2$.

2. **Différences divisées de Newton**

   (a) Écrire une fonction MATLAB de prototype `function[d]=diffDiv(x,y)` qui renvoie les différences divisées aux points (x_i, y_i) : x et y désignent deux vecteurs de taille $n+1$ contenant respectivement les réels x_i et les $y_i = f(x_i)$. d est le vecteur de taille $n+1$ contenant les différences divisées $d[k] = f[x_0, x_1, \ldots, x_k]$, $k = 0, .., n$

   (b) Tester cette fonction en calculant les différences divisées de $f(x) = \sin(x)$ aux points $x_0 = 0$, $x_1 = 0.5$, $x_2 = 1$, $x_3 = 1.5$ et $x_4 = 2$.

3. **Polynôme d'interpolation dans la base de Newton**

Pour calculer la valeur du polynôme d'interpolation P_n en un point a à partir des différences divisées, on utilise la méthode de Hörner :

$$P_n(a) = f(x_0) + (a - x_0)(f[x_0, x_1] + \cdots + (a - x_{n-2})(f[x_0, .., x_{n-1}] + (a - x_{n-1})f[x_0, .., x_n]) \dots)$$

   (a) Écrire une fonction MATLAB de prototype `function[p]=evalNewton(x,d,a)` qui renvoie la valeur $P_n(a)$: x et d désignent deux vecteurs de taille $n+1$ contenant respectivement les réels x_i et les différences divisées.

   (b) Tracer sur la même figure les courbes de la fonction $f(x) = \sin(x)$ sur $[0, 2]$ et son polynôme d'interpolation relatif aux points $x_0 = 0$, $x_1 = 0.5$, $x_2 = 1$, $x_3 = 1.5$ et $x_4 = 2$.

4. **Points équirépartis - Phénomène de Runge**

On considère $[a, b] = [-5, 5]$, $f(x) = \dfrac{1}{1 + x^2}$ et les points x_i équirépartis sur $[a, b]$:

$$x_i = a + i\frac{b - a}{n} \ ; \ i = 0 \dots n$$

   (a) Tracer sur la même figure les courbes de f et P_n pour $n = 5$ et $n = 10$.

   (b) Tracer la valeur absolue de l'erreur $|f(x) - P_n(x)|, \quad x \in [-5, 5], \quad$ pour $n = 10$.

   (c) Reprendre les questions (a) et (b) pour $n = 20$ et $n = 30$.

   (d) Commenter les résultats.

5. **Points d'interpolation de Chebyshev**

La répartition des points de Chebyshev sur l'intervalle [a,b] est donnée par :

$$x_i = \frac{a + b}{2} + \frac{b - a}{2} \cos\left(\frac{2i + 1}{2(n + 1)}\pi\right) \ ; \ i = 0 \dots n$$

   (a) Reprendre pour les points d'interpolation de Chebyshev toutes les questions de la partie 4.

   (b) Comparer les résultats obtenus avec ceux de la partie 4.