Resumen Física Moderna

1. Radiación Térmica y Postulado de Planck

1.1. Deducción de la Fórmula de Rayleigh-Jeans (enfoque clásico)

Objetivo: Relacionar la geometría de la cavidad con las frecuencias permitidas. Para una cavidad cúbica de lado a, las ondas estacionarias deben tener nodos (amplitud cero) en las paredes $x = 0$, $x = a$, $y = 0$, $y = a$, $z = 0$, $z = a$.

Para una onda propagándose en una dirección arbitraria, se tienen los cosenos directores $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$:

$$\lambda_x = \frac{\lambda}{\cos\alpha}, \quad \lambda_y = \frac{\lambda}{\cos\beta}, \quad \lambda_z = \frac{\lambda}{\cos\gamma} \tag{1}$$

La proyección de la longitud de onda total λ en cada eje define la distancia entre nodos en esa dirección.

Como en $x = a$ debe haber un nodo:

$$\frac{a}{\lambda_x/2} = n_x \Rightarrow \frac{2a}{\lambda_x} = n_x \quad (n_x \in \mathbb{N}^+) \tag{2}$$

Sustituyendo λ_x:

$$\frac{2a}{c}\nu\cos\alpha = n_x \tag{3}$$

Similar para y y z. Los enteros n_x, n_y, n_z determinan el número de nodos en cada dirección.

Elevando al cuadrado y sumando:

$$\left(\frac{2a}{c}\nu\right)^2 (\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma) = n_x^2 + n_y^2 + n_z^2 \tag{4}$$

Usando $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$:

$$\nu = \frac{c}{2a}\sqrt{n_x^2 + n_y^2 + n_z^2} \tag{5}$$

Cada trío (n_x, n_y, n_z) define un modo de oscilación único.

Por tanto, el número de modos:

$$N(\nu)d\nu = \frac{1}{8}(4\pi r^2 dr) \times 2 = \frac{8\pi a^3}{c^3}\nu^2 d\nu \tag{6}$$

Donde:

- $r = \frac{2a}{c}\nu$: Radio de la esfera definida por $n_x^2 + n_y^2 + n_z^2$
- Factor $\frac{1}{8}$: Solo primer octante ($n_x, n_y, n_z > 0$)
- Factor 2: Dos polarizaciones posibles

$$\rho_T(\nu)d\nu = \underbrace{\frac{8\pi\nu^2}{c^3}}_{\substack{\text{Densidad de}\\ \text{modos}}} \times \underbrace{kT}_{\substack{\text{Energía por}\\ \text{modo (equipartición)}}} d\nu \tag{7}$$

1.2. Deducción de la Fórmula de Planck usando el Ejemplo 1.4

Postulado de Energías Discretas

Fuente: Ecuación 1-26 del libro (p. 35).
Planck propone que la energía de los osciladores en la cavidad solo puede tomar valores discretos:

$$\mathcal{E}_n = nh\nu \quad \text{con } n = 0, 1, 2, \ldots \tag{8}$$

donde:

- $h = 6{,}63 \times 10^{-34}$ J·s (Constante de Planck)
- ν: Frecuencia de oscilación

Distribución de Boltzmann Modificada

Fuente: Ecuación 1-20 del libro (p. 32).
La probabilidad de ocupar el estado n viene dada por:

$$P(n) = \frac{e^{-\mathcal{E}_n/kT}}{Z} \tag{9}$$

donde:

- $Z = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\mathcal{E}_n/kT}$ (Función de partición)
- $k = 1{,}38 \times 10^{-23}$ J/K (Constante de Boltzmann)
- T: Temperatura absoluta

Cálculo de la Función de Partición

Sustituyendo $\mathcal{E}_n = nh\nu$:

$$\begin{aligned} Z &= \sum_{n=0}^{\infty} e^{-nh\nu/kT} \\ &= 1 + e^{-h\nu/kT} + e^{-2h\nu/kT} + \cdots \\ &= \frac{1}{1 - e^{-h\nu/kT}} \quad \text{(Serie geométrica con razón } x = e^{-h\nu/kT} < 1\text{)} \end{aligned} \tag{10}$$

Cálculo de la Energía Promedio

Fuente: Ecuación 1-21 del libro (p. 33).
La energía promedio es:

$$\begin{aligned}\langle \mathcal{E} \rangle &= \frac{1}{Z}\sum_{n=0}^{\infty} nh\nu e^{-nh\nu/kT} \\ &= h\nu \frac{\sum_{n=0}^{\infty} ne^{-nh\nu/kT}}{\sum_{n=0}^{\infty} e^{-nh\nu/kT}} \end{aligned} \tag{11}$$

Evaluación de las Series

Usando la identidad para series:

$$\sum_{n=0}^{\infty} nx^n = \frac{x}{(1-x)^2} \quad \text{con } x = e^{-h\nu/kT} \tag{12}$$

Sustituyendo en (5):

$$\begin{aligned}\langle \mathcal{E} \rangle &= h\nu \frac{e^{-h\nu/kT}/(1-e^{-h\nu/kT})^2}{1/(1-e^{-h\nu/kT})} \\ &= h\nu \frac{e^{-h\nu/kT}}{1-e^{-h\nu/kT}} \\ &= \frac{h\nu}{e^{h\nu/kT}-1} \quad \text{(Ecuación clave de Planck)} \end{aligned} \tag{13}$$

Densidad de Energía Espectral

Fuente: Combinación con densidad de modos de Rayleigh-Jeans (p. 30).
La densidad de energía total se obtiene multiplicando por el número de modos:

$$\rho_T(\nu)d\nu = \underbrace{\frac{8\pi\nu^2}{c^3}}_{\substack{\text{Densidad de} \\ \text{modos de R-J}}} \times \underbrace{\frac{h\nu}{e^{h\nu/kT}-1}}_{\substack{\text{Energía promedio} \\ \text{de Planck}}} \times d\nu \tag{14}$$

Relación con Leyes Empíricas

- **Ley de Wien** ($\nu \to \infty$):

$$e^{h\nu/kT} \gg 1 \Rightarrow \rho_T(\nu) \approx \frac{8\pi h\nu^3}{c^3} e^{-h\nu/kT} \tag{15}$$

- **Ley de Stefan-Boltzmann**:

$$\begin{aligned} R_T &= \int_0^\infty \frac{c}{4}\rho_T(\nu)d\nu \\ &= \frac{2\pi h}{c^2}\int_0^\infty \frac{\nu^3}{e^{h\nu/kT}-1}d\nu \\ &= \sigma T^4 \quad \text{con } \sigma = \frac{2\pi^5 k^4}{15c^2h^3} \end{aligned} \tag{16}$$

Tabla de Factos

Paso	**Justificación Matemática**	**Base Física**
Cuantización	$\mathcal{E}_n = nh\nu$	Postulado de Planck (evitar catástrofe UV)
Distribución	$P(n) \propto e^{-\mathcal{E}_n/kT}$	Estadística de Boltzmann
Serie geométrica	$\sum_{n=0}^\infty x^n = 1/(1-x)$	$x = e^{-h\nu/kT} < 1$ garantiza convergencia
Energía promedio	$\sum nx^n = x/(1-x)^2$	Desarrollo matemático de series
Límite Wien	$e^{h\nu/kT} \gg 1$	Comportamiento a altas frecuencias
Integral Stefan	$\int_0^\infty \frac{x^3}{e^x-1}dx = \pi^4/15$	Solución de integral estándar

Glosario de Términos

Símbolo	**Definición Conceptual**	**Unidades**
$\mathcal{E}_n$	Energía del estado cuántico n	J
Z	Función de partición (suma de estados)	Adimensional
$\langle\mathcal{E}\rangle$	Energía promedio por modo	J
$\rho_T(\nu)$	Densidad espectral de energía	J/m³Hz
h	Cuanto elemental de acción	J·s
k	Constante de Boltzmann	J/K
c	Velocidad de la luz	m/s

1.3. Tabla Comparativa Detallada

Aspecto	Rayleigh-Jeans	Planck
Tratamiento energético	Continuo	Cuantizado ($\Delta E = h\nu$)
Distribución de energía	Equipartición (kT)	$\frac{h\nu}{e^{h\nu/kT}-1}$
Comportamiento a altas ν	$\rho_T \propto \nu^2$ (Catástrofe)	$\rho_T \propto \nu^3 e^{-h\nu/kT}$
Relación con paredes	Nodos fijos (cond. frontera)	Mismo + cuantización energética
Base matemática	Ondas estacionarias clásicas	Estadística cuántica de Bose

1.4. Resumen de Fórmulas y Glosario

Cuadro 1: Glosario de Variables y Fórmulas Clave

Símbolo	Definición Conceptual	Unidades	Ecuación
$\rho_T(\nu)$	Energía almacenada por unidad de volumen y frecuencia	J/m³Hz	$\frac{8\pi h\nu^3}{c^3}\frac{1}{e^{h\nu/kT}-1}$
R_T	Potencia total emitida por unidad de área	W/m²	σT^4
$\lambda_{\max}$	Longitud de onda de máxima emisión	m	$\frac{hc}{4{,}965kT}$
σ	Constante de proporcionalidad en ley de Stefan	W/m^2K^4	$\frac{2\pi^5k^4}{15c^2h^3}$
h	Cuanto elemental de acción	J·s	$6{,}63\times10^{-34}$
k	Constante de proporcionalidad energética	J/K	$1{,}38\times10^{-23}$
c	Velocidad de propagación luminosa	m/s	3×10^{8}

- **Ley de Stefan-Boltzmann**:

$$R_T = \sigma T^4 \quad \left[\sigma = 5{,}67\times10^{-8}\,\mathrm{W/m^2K^4}\right]$$

- **Ley del desplazamiento de Wien**:

$$\lambda_{\max}T = 2{,}898\times10^{-3}\,\mathrm{mK}$$

- **Número de modos**

$$N(\nu)d\nu = \frac{8\pi a^3}{c^3}\nu^2 d\nu \qquad (17)$$

- **Fórmula de Rayleigh-Jeans**:

$$\rho_T(\nu)d\nu = \frac{8\pi\nu^2}{c^3}kT d\nu \quad \left[\mathrm{J/m^3Hz}\right] \qquad (18)$$

- **Densidad de energía (Planck)**:

$$\rho_T(\nu) = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3}\frac{1}{e^{h\nu/kT}-1} \quad \left[\mathrm{J/m^3Hz}\right]$$

- **Relación radiancia-densidad**:

$$R_T(\nu)d\nu = \frac{c}{4}\rho_T(\nu)d\nu \tag{19}$$

- **Constantes**:

$$\begin{aligned} h &= 6{,}63 \times 10^{-34}\,\mathrm{J{\cdot}s} \quad \text{(Planck)} \\ k &= 1{,}38 \times 10^{-23}\,\mathrm{J/K} \quad \text{(Boltzmann)} \\ c &= 3 \times 10^{8}\,\mathrm{m/s} \quad \text{(Velocidad luz)} \end{aligned}$$