Ecuaciones Diferenciales Parciales I
Tema: Transformada de Fourier

Definición: Una función $f(x)$ es absolutamente integrable en I si

$$\int_I |f(x)|dx < \infty$$

Definición: Sea f continua a pedazos en $\mathbf{R}$ y absolutamente integrable en $\mathbf{R}$, la transformada completa de Fourier $F(\omega)$ de la función $f(x)$ está dada por

$$\mathscr{F}(f(x)) = F(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{i\omega x}dx$$

Definición: La transformada inversa de Fourier $f(x)$ de $F(\omega)$ está dada por

$$\mathscr{F}^{-1}(F(\omega)) = f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega)e^{-i\omega x}d\omega$$

Definición: Sea f y g absolutamente integrables en $\mathbf{R}$, la convolución $f*g$ está definida por

$$(f*g)(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-w)g(w)dw$$

Con $-\infty < x < \infty$.

Teorema: Propiedades útiles de la transformada de Fourier para resolver una EDP.

1. $\mathscr{F}$ y $\mathscr{F}^{-1}$ son operadores lineales.
2. Si $u = u(x,t)$, $u(x,t) \to 0$ cuando $x \to \pm\infty$ y $\mathscr{F}(u(x,t)) = U(\omega,t)$ entonces

   $$\mathscr{F}(u_x(x,t)) = -i\omega U(\omega,t)$$

   Si además $u_x(x,t) \to 0$ cuando $x \to \pm\infty$ entonces

   $$\mathscr{F}(u_{xx}(x,t)) = -\omega^2 U(\omega,t)$$

3. $$\mathscr{F}(u_t(x,t)) = \frac{\partial}{\partial t}\left[\mathscr{F}(u(x,t))\right] = \frac{\partial}{\partial t}\left[U(\omega,t)\right]$$

4. $$\mathscr{F}(f*g) = \mathscr{F}(f)\mathscr{F}(g)$$

5. Por lo general $\mathscr{F}(fg) \neq \mathscr{F}(f)\mathscr{F}(g)$

Definición: Sea f continua a pedazos en $(0,+\infty)$ y absolutamente integrable en $(0,+\infty)$, entonces la transformada de Fourier seno y coseno están respectivamente definidas por

$$\mathscr{F}_S(f(x)) = F(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} f(x)\sin(\omega x)dx$$

$$\mathscr{F}_C(f(x)) = F(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} f(x)\cos(\omega x)dx$$

La transformada inersa de Fourier seno y coseno están respectivamente definidas por

$$\mathscr{F}_S^{-1}(F(\omega)) = f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} F(\omega)\sin(\omega x)dx$$

$$\mathscr{F}_C^{-1}(F(\omega)) = f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} F(\omega)\cos(\omega x)dx$$

Teorema: Propiedades útiles de la transformada de Fourier seno y coseno para resolver una EDP.

1. $\mathscr{F}_S$, $\mathscr{F}_S^{-1}$, $\mathscr{F}_C$ y $\mathscr{F}_C^{-1}$ son operadores lineales.
2. Si $u = u(x,t)$, $u(x,t) \to 0$ cuando $x \to +\infty$ entonces

$$\mathscr{F}_S(u_x(x,t)) = -\omega\mathscr{F}_C(u(x,t))$$

$$\mathscr{F}_C(u_x(x,t)) = -\sqrt{\frac{2}{\pi}}u(0,t) + \omega\mathscr{F}_S(u(x,t))$$

   Si además $u_x(x,t) \to 0$ cuando $x \to +\infty$ entonces

$$\mathscr{F}_S(u_{xx}(x,t)) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\omega u(0,t) - \omega^2\mathscr{F}_S(u(x,t))$$

$$\mathscr{F}_C(u_{xx}(x,t)) = -\sqrt{\frac{2}{\pi}}u_x(0,t) - \omega^2\mathscr{F}_C(u(x,t))$$

3.

$$\mathscr{F}_S(u_t(x,t)) = \frac{\partial}{\partial t}\left[\mathscr{F}_S(u(x,t))\right]$$

$$\mathscr{F}_C(u_t(x,t)) = \frac{\partial}{\partial t}\left[\mathscr{F}_C(u(x,t))\right]$$