Ecuaciones Diferenciales Parciales I
Tema: Transformada de Laplace

Definición: Función escalón unitario

$$H(t-t_0) = \begin{cases} 0, & si \quad t < t_0 \\ \\ 1, & si \quad t \geq t_0 \end{cases}$$

Definición: Delta de Dirac

1. $\delta(t-t_0) = 0$ para todo $t \neq t_0$
2. $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-t_0)dt = 1$

Definición: La transformada de Laplace $\mathcal{L}(f(x))$ de una función $f(x)$ está definida por

$$\mathcal{L}(f(x)) = F(s) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-st}dt$$

Definición: La transformada inversa de Laplace $\mathcal{L}^{-1}(F(s))$ de $F(s)$ está definida por

$$\mathcal{L}^{-1}(F(s)) = f(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} F(s)e^{st}dt$$

Teorema: Propiedades útiles de la transformada de Lapalace para resolver una EDP.

1. $\mathcal{L}$ y $\mathcal{L}^{-1}$ son operadores lineales.
2. Si $u = u(x,t)$ y $\mathcal{L}(u(x,t)) = U(x,s)$ entonces
$$\mathcal{L}(u_t(x,t)) = sU(x,s) - u(x,0)$$
$$\mathcal{L}(u_{tt}(x,t)) = s^2U(x,s) - su(x,0) - u_t(x,0)$$
3. $$\mathcal{L}(u_x(x,t)) = \frac{\partial}{\partial x}\left[\mathcal{L}(u(x,t))\right] = \frac{\partial}{\partial x}\left[U(x,s)\right]$$
4. $$\mathcal{L}(f * g) = \mathcal{L}(f)\mathcal{L}(g)$$
5. Por lo general $\mathcal{L}(fg) \neq \mathcal{L}(f)\mathcal{L}(g)$

Nota: todos los artificios vistos en los cursos de EDO para encontrar la transformada de Laplace y la tranformada inversa de Laplace son también aplicables y útiles para resolver EDP.