# Esercizi Laboratorio di calcolo III anno

October 14, 2022

## 1 Esercizio

Calcolare la seguente somma

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} = \lim_{N\to\infty} S(N) \qquad \text{essendo} \qquad S(N) = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^2} \tag{1.1}$$

- Effettuare la somma diretta in singola precisione: $1 \to N$
- Effettuare la somma inversa in singola precisione: $N \to 1$

Plottare $\Delta(N) = |S(N) - \pi^2/6|$ in funzione di $N$. Effettuare poi le somme precedenti in doppia precisione e plottare $\Delta(N)$.

## 2 Esercizio

Sia $\phi_1 = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$. Vogliamo calcolare $\phi_1^n$. Per $\phi_1$ vale la relazione di ricorrenza

$$\phi^{n+1} = \phi^{n-1} - \phi^n \tag{2.1}$$

Infatti $\phi^{n-1}(\phi^2 + \phi - 1) = 0$ oltre ad avere soluzione $\phi = 0$, ha soluzioni

$$\phi = \phi_1 \qquad \phi = \phi_2 = -\frac{\sqrt{5}+1}{2} \tag{2.2}$$

Così se partiamo da

$$\chi_0 = 1 \qquad\qquad \chi_1 = \phi_1 \tag{2.3}$$

e calcoliamo $\chi_{n+1} = \chi_{n-1} - \chi_n$, avremo che $\chi_{n+1} = \phi_1^{n+1}$. Ora, però, anche $\phi_2$ soddisfa la relazione di ricorrenza (2.1). Per effetto del troncamento, avremo in pratica

$$\chi_0 = 1 \qquad\qquad \chi_1 = \phi_1 + \epsilon\phi_2 \qquad\qquad \epsilon \sim \text{precisione} \tag{2.4}$$

Dunque

$$\chi_2 = \chi_0 - \chi_1 = 1 - \phi_1 - \epsilon\phi_2 = \phi_1^2 + \epsilon\phi_2^2 - \epsilon \tag{2.5}$$
$$\chi_3 = \chi_1 - \chi_2 = \phi_1 + \epsilon\phi_2 - \phi_1^2 - \epsilon\phi_2^2 + \epsilon = \phi_1^3 + \epsilon\phi_2^3 + \epsilon \tag{2.6}$$
$$\chi_n \sim \phi_1^n + \epsilon\phi_2^n \tag{2.7}$$

Poiché $|\phi_1| < 1$ segue $|\phi_1^n| = \mathrm{e}^{n\log(|\phi_1|)} \longrightarrow$ esponenzialmente decrescente con $n$
mentre $|\phi_2| > 1$ segue $|\phi_2^n| = \mathrm{e}^{n\log(|\phi_2|)} \longrightarrow$ esponenzialmente crescente con $n$

Dunque la discrepanza $\Delta_n = |\chi_n - \phi_1^n| \sim \epsilon|\phi_2|^n = \epsilon\mathrm{e}^{n\log(|\phi_2|)}$ cresce esponenzialmente.

Eseguire il calcolo di $\Delta_n$ in precisione singola, doppia, quadrupla. Plottare $\Delta_n$ in funzione di $n$ e verificare l'andamento esponenziale.

Lavorando in precisione quadrupla, partire da

$$\chi_0 = 1 \qquad\qquad \chi_1 = \phi_1 + \epsilon\phi_2 \qquad\qquad \epsilon = 10^{-8} \tag{2.8}$$

e confrontare con i risultati in singola precisione.

Nota
Per gli esercizi 3-7, scrivere un codice generico con opzioni di input il metodo di integrazione e il numero di punti.

# 3 Esercizio

(A=trapezio; B= Simpson; C=Romberg; D=Gauss)

Calcolare usando A, B, e C

$$\int_0^5 x^7 \mathrm{e}^{-x}\, dx \tag{3.1}$$

Per A e B, plottare le deviazioni in funzione di $1/N$, essendo $N$ il numero di punti. Calcolare l'integrale usando D: Legendre (2, 4, 8 punti) e Laguerre (2, 4, 8 punti, $\alpha = 0$).

# 4 Esercizio

(A=trapezio; B= Simpson; C=Romberg; D=Gauss)

Calcolare usando A, B, e C

$$\int_3^8 \mathrm{Ch}(x)\ dx \tag{4.1}$$

Per A e B, plottare le deviazioni in funzione di $1/N$, essendo $N$ il numero di punti. Calcolare l'integrale usando D: Legendre (2, 4, 8 punti) e Laguerre (2, 4 punti, $\alpha = 0$).

## 5 Esercizio

(A=trapezio; B= Simpson; C=Romberg; D=Gauss)

Calcolare usando A, B, e C

$$\int_{-1}^8 (x^2 + x\sin(4x))\ dx \tag{5.1}$$

Per A e B, plottare le deviazioni in funzione di $1/N$, essendo $N$ il numero di punti. Calcolare l'integrale usando D: Legendre (2, 4, 8, 16, 48 punti).

## 6 Esercizio

(A=trapezio; B= Simpson; C=Romberg; D=Gauss)

Calcolare usando A, B, e C. Si sfrutti il cambio di variabile $z = \mathrm{e}^{-x^2}$.

$$\int_3^\infty x^5 \mathrm{e}^{-x^2}\ dx \tag{6.1}$$

Calcolare l'integrale usando D: Hermite (2, 4, 8, 100 punti) e con Laguerre (2, 4, 8 punti, $\alpha = 0$).

## 7 Esercizio

(A=trapezio; B= Simpson; C=Romberg; D=Gauss)

Calcolare

$$\int_0^\infty x^{14} \mathrm{e}^{-x^2}\ dx \tag{7.1}$$

usando D: Hermite (2, 4, 8 punti) e con Laguerre (2, 4, 8, 24, 64 punti, $\alpha = 0$).

# 8 Esercizio

Calcolare il volume $S_M$ della sfera unitaria in $M$ dimensioni. Analiticamente vale

$$S_M = \frac{\pi^{M/2}}{\Gamma(\frac{M}{2})} = \begin{cases} \frac{\pi^{M/2}}{\frac{M}{2}!} & M \text{pari} \\ \\ \frac{2^{\frac{M+1}{2}}\pi^{\frac{M-1}{2}}}{M!!} & M \text{dispari} \end{cases} \tag{8.1}$$

Calcolare in funzione di $M$ con 20 punti di integrazione per direzione coordinata, l'integrale deterministico (usare la formula del midpoint) e l'integrale Monte Carlo usando $10^5$ punti. Monitorare anche i tempi di calcolo.

| | *deterministico* | | *MonteCarlo* | | *esatto* |
|---|---|---|---|---|---|
| $M$ | *tempo* | *stima* | *tempo* | *stima* | *valore* |
| ... | ... | ... | ... | ... | ... |
| ... | ... | ... | ... | ... | ... |
| ... | ... | ... | ... | ... | ... |

(8.2)

# 9 Esercizio

Usando la distribuzione uniforme in $(-1, 1)$ e la distribuzione che dá uguale probabilitá a $\pm 1$, verificare che la distribuzione si approssima a quella gaussiana. Monitorare il valore dei momenti $\langle x \rangle$, $\langle x^2 \rangle$, $\langle x^3 \rangle, \ldots$ al variare dell'intervallo su cui si effettua la media. Plottare $\langle x^4 \rangle / \langle x^2 \rangle$ e $\langle x^6 \rangle / \langle x^4 \rangle$ in funzione della dimensione del pacchetto e confrontarlo con il valore per una gaussiana.

# 10 Esercizio

Ricalcolare gli integrali degli esercizi 3, 4 e 5 con il Monte Carlo sampling e il metodo di hit&miss. Studiare la deviazione all'aumentare dei punti.

# 11 Esercizio

Generare esattamente numeri random con le seguenti distribuzioni

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{e}^{-x} & \text{in} & (0, 2) \\ \mathrm{e}^{-x} & \text{in} & (1, \infty) \\ x\mathrm{e}^{-x^2} & \text{in} & (0, \infty) \end{array} \tag{11.1}$$

# 12 Esercizio

Generare numeri random con distribuzione gaussiana

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \mathrm{e}^{-x^2} \qquad \text{in} \qquad (-\infty, \infty) \tag{12.1}$$

Usare il metodo esatto e quello di accept/reject con la funzione

$$g(x) = \begin{cases} A & x \in (0,1) \\ Ax\mathrm{e}^{1-x^2} & x \in (1,\infty) \end{cases} \tag{12.2}$$

essendo $A = \frac{1}{\sqrt{\pi}}$. Verificare che la distribuzione sia la medesima.

# 13 Esercizio

Calcolare con l'importance sampling

$$\int_0^{\pi/2} x\cos(x)\ dx \qquad \int_0^{\pi} x\sin(x)\ dx \tag{13.1}$$

usando le distribuzioni $\cos(x)$ e $\sin(x)$ rispettivamente.

# 14 Esercizio

Risolvere con il metodo di Eulero, Runge-Kutta2 e Runge-Kutta4 l'equazione differenziale della molla (o pendolo)

$$\frac{d^2\theta(t)}{dt^2} = -\theta \tag{14.1}$$

con valori iniziali $\theta(0) = 0$ e $\theta'(0) = 1$. Confrontarsi con la soluzione analitica variando il passo di integrazione.

# 15 Esercizio

Risolvere con il metodo di Eulero, Runge-Kutta2 e Runge-Kutta4 l'equazione differenziale del pendolo senza l'approssimazione delle piccole oscillazioni

$$\frac{d^2\theta(t)}{dt^2} = -\sin(\theta) \tag{15.1}$$

con valori iniziali $\theta(0) = 0$ e $\theta'(0) = 1$. Aggiungere l'attrito

$$\frac{d^2\theta(t)}{dt^2} = -\sin(\theta) - \gamma\frac{d\theta(t)}{dt} \qquad \gamma \in (0,2) \tag{15.2}$$

Aggiungere poi anche una forzante

$$\frac{d^2\theta(t)}{dt^2} = -\sin(\theta) - \gamma\frac{d\theta(t)}{dt} + A\sin(\frac{2}{3}t) \qquad A, \gamma \in (0,2) \tag{15.3}$$

Plottare $\theta(t)$, $\theta'(t)$ e $\theta'(\theta)$.

# 16 Esercizio

Risolvere con il metodo di Eulero, Runge-Kutta2 e Runge-Kutta4 l'equazione differenziale

$$\frac{d^2\theta(t)}{dt^2} + \gamma\frac{d\theta(t)}{dt} + (\alpha - \beta\cos(t))\sin(\theta) = 0 \tag{16.1}$$

con valori iniziali $\theta(0) = 0$ e $\theta'(0) = 0.1$. Studiare gli andamenti di $\theta(t)$, $\theta'(t)$ e $\theta'(\theta)$ per i seguenti valori

- $\alpha = 0.5$; $\beta = 0.50$; $\gamma = 0.03$
- $\alpha = 0.5$; $\beta = 0.63$; $\gamma = 0.03$
- $\alpha = 0.5$; $\beta = 0.70$; $\gamma = 0.03$

# 17 Esercizio

Usando i metodi di Eulero, Runge-Kutta2 e Runge-Kutta4 studiare il seguente sistema

$$\begin{cases} \frac{dx(t)}{dt} &= -10(x-y) \\ \frac{dy(t)}{dt} &= -xz + 28x - y \\ \frac{dz(t)}{dt} &= xy - \frac{8}{3}z \end{cases} \tag{17.1}$$

Plottare $(x, y)$, $(x, z)$ e $(y, z)$.

# 18 Esercizio

Usando il metodo di Runge-Kutta4, studiare il seguente sistema gravitazionale a 3 corpi

$$\frac{d^2\vec{r}_i(t)}{dt^2} = -\sum_{i\neq j} m_j \frac{\vec{r}_i - \vec{r}_j}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|^3} \qquad i = 1, 2, 3 \tag{18.1}$$

Considerare i seguenti dati iniziali

- $m_1 = m_2 = m_3 = 0.3$
- $\vec{v}_1$ = (1,0,0) ; $\vec{v}_1$ = (0,0.15,-0.15);
- $\vec{v}_1$ = (-1,0,0); $\vec{v}_2$ = (0,-0.15,0.15);
- $\vec{v}_1$ = (0,0,0) ; $\vec{v}_3$ = (0,0,0);

- $m_1 = 1.6; m_2 = m_3 = 0.4$
- $\vec{v}_1$ = (1,0,0) ; $\vec{v}_1$ = (0,0.4,0);
- $\vec{v}_1$ = (-1,0,0); $\vec{v}_2$ = (0,-0.8,0.7);
- $\vec{v}_1$ = (0,0,0) ; $\vec{v}_3$ = (0,-0.8,-0.7);

Plottare infine l'energia totale in funzione del tempo.

# 19 Esercizio

Calcolare con il metodo del bracketing+bisezione e con il metodo di Newton-Raphson gli zeri di

$$f(x) = 2x^2 - 3x + 1 \tag{19.1}$$

Scrivere il codice il modo che si chieda se si vogliono trovare gli intervalli in cui sono presenti zeri all'interno di un certo range oppure se si vuole trovare lo zero all'interno di un certo intervallo.

Trovare poi gli zeri del polinomio di Legendre di ordine 10:

$$p(x) = (46189\ x^{10} - 109395\ x^8 + 90090\ x^6 - 30030\ x^4 + 3465\ x^2 - 63)/256 \tag{19.2}$$

# 20 Esercizio

Consideriamo l'equazione

$$z^3 - 1 = 0 \qquad \text{zeri:} \qquad 1, \mathrm{e}^{\pm i2\pi/3} \tag{20.1}$$

Il metodo di Newton-Raphson usa la seguente equazione iterativa per individuare gli zeri

$$z_{j+1} = z_j - \frac{z_j^3 - 1}{3z_j^2} \tag{20.2}$$

Definire in $[-2, 2] \times [-2, 2]$ (estremi inclusi) una griglia regolare di $N^2$ punti e, usando la formula di ricorrenza, considerare un numero massimo K di iterazioni. Fermare l'itezione quando $|z_{j+1} - z_j| < \epsilon$ ed associare il valore $j + 1$ al punto iniziale considerato. Plottare poi la griglia regolare di punti usando un colore diverso a seconda del valore dell'iterazione di arresto per quel dato punto.