1 极限和连续

概述 极限的概念是微积分有别于代数和三角的诸多概念之一.本章中,我们要说明怎样去定义和计算函数值的极限.计算法则是简单直接的,而且我们需要的大多数极限可以通过替换、图形的考察、数值近似、代数方法或这些方法的某种组合来求得.

当某些函数的输入连续变化时其输出也连续变化——输入的变化愈小,输出的变化也愈小.对于另一些函数,不论我们怎样小心去控制输入,它们的函数值可能会有跳跃或者非常不规则.极限的概念给出了区别这些性态的一种精确的方法.我们还要用极限来定义函数图形的切线.这个几何应用立即导致函数的导数这一重要概念.我们将在第 2 章中透彻地研究导数,它给出一种数值地度量函数值的瞬时变化率的方法.

1.1 变化率和极限

平均和瞬时速度 • 平均变化率和割线 • 函数的极限 • 极限的非正式定义 • 极限的精确定义

CD-ROM WEBsite 本节中我们将引进平均和瞬时变化率.这将导致本节的主要概念——极限的概念.

平均和瞬时速度

CD-ROM
WEBsite
历史传记
Zeno
(490BC — 430BC)

运动物体在一段时间区间上的**平均速度**是通过物体走过的距离除以所用的时间来求得的.度量单位是长度每单位时间:公里每小时,英尺每秒,或就手头的问题来说合适的度量单位.

例 1(求平均速度) 一块岩石突然松动从峭壁顶上掉下来.掉下来的头 2 秒中岩石的平均速度是多少?

解　实验表明一块致密的固体在地球表面附近从静止状态自由落下,下落的头 t 秒中下落的英尺数为

$$y = 16t^2$$

在任何给定时间区间上岩石的平均速度是所走过的距离 Δy 除以时间区间的长度 Δt. 从 $t = 0$ 到 $t = 2$ 的头 2 秒的下落平均速度为

$$\frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{16(2)^2 - 16(0)^2}{2 - 0} = 32 \text{ 英尺 / 秒}.$$

注:自由落体

在地球表面附近,所有物体以同样的常加速度下落. 物体在从静止突然下落走过的距离是下落时间平方的常数倍. 至少,物体在真空中下落是这样的,真空中没有空气来减慢其下降. 对于像岩石、钢珠和钢质工具那样的致密重物在空气中下落的头几秒里,在速度的增加还没有达到空气阻力生效之前,这个时间平方法则仍然成立. 当空气阻力不存在或者不重要而且重力是作用在物体上唯一的力时,我们把这种物体下落的方式称为自由落体.

例 2(求瞬时速度)　求例 1 中岩石在时刻 $t = 2$ 的速度.

数值求解

我们可以计算从 $t = 2$ 到任何稍后一点的时间 $t = 2 + h, h > 0$ 的区间上的平均速度

$$\frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{16(2 + h)^2 - 16(2)^2}{h}. \tag{1}$$

我们不能用该公式来计算在确切时刻 $t = 2$ 的速度,因为这要求取 $h = 0$,而 0/0 是不确定的. 但是我们可以通过计算公式在 h 接近零的值来获得有关 $t = 2$ 时将会发生什么的信息,这是一个很好的想法. 当我们这样做了的时候,我们看到了一个清晰的模式(表 1.1).

表 1.1　从 $t = 2$ 开始的短的时间区间上的平均速度

$$\frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{16(2 + h)^2 - 16(2)^2}{h}$$

时间区间的长度 h(秒)	该时间区间内的平均速度 $\Delta y/\Delta t$(英尺 / 秒)
1	80
0.1	65.6
0.01	64.16
0.001	64.016
0.0001	64.0016
0.00001	64.00016

当 h 趋于 0 时,平均速度趋于极限值 64 英尺 / 秒.

代数地确认

如果我们展开方程(1)的分子并简化之,我们求得

$$\frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{16(2 + h)^2 - 16(2)^2}{h} = \frac{16(4 + 4h + h^2) - 64}{h}$$

$$= \frac{64h + 16h^2}{h} = 64 + 16h.$$

对不为 0 的 h 值,右边和左边的表达式是等价的且平均速度为 $64+16h$ 英尺 / 秒. 现在我们就知道为什么当 h 趋于 0 时平均速度有极限值 $64+16(0)=64$ 英尺 / 秒.

平均变化率和割线

给定任意函数 $y=f(x)$,我们用以下方式来计算 y 关于 x 在区间 $[x_1,x_2]$ 上的平均变化率,即把 y 值的改变量 $\Delta y=f(x_2)-f(x_1)$ 除以函数发生变化的区间的长度 $\Delta x=x_2-x_1=h$.

定义　平均变化率

$y=f(x)$ 关于 x 在区间 $[x_1,x_2]$ 上的平均变化率是

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=\frac{f(x_1+h)-f(x_1)}{h},\quad h\neq 0.$$

注: 几何上,平均变化率就是割线的斜率.

注意到 f 在 $[x_1,x_2]$ 上的变化率就是通过点 $P(x_1,f(x_1))$ 和 $Q(x_2,f(x_2))$ 的直线的斜率(图 1.1). 几何上,连接曲线上两点的直线就是该曲线的**割线**. 因此,f 从 x_1 到 x_2 的平均变化率就是割线 PQ 的斜率.

工程中,常常要知道材料中温度变化的变化率以决定裂纹或其他的破裂是否会发生.

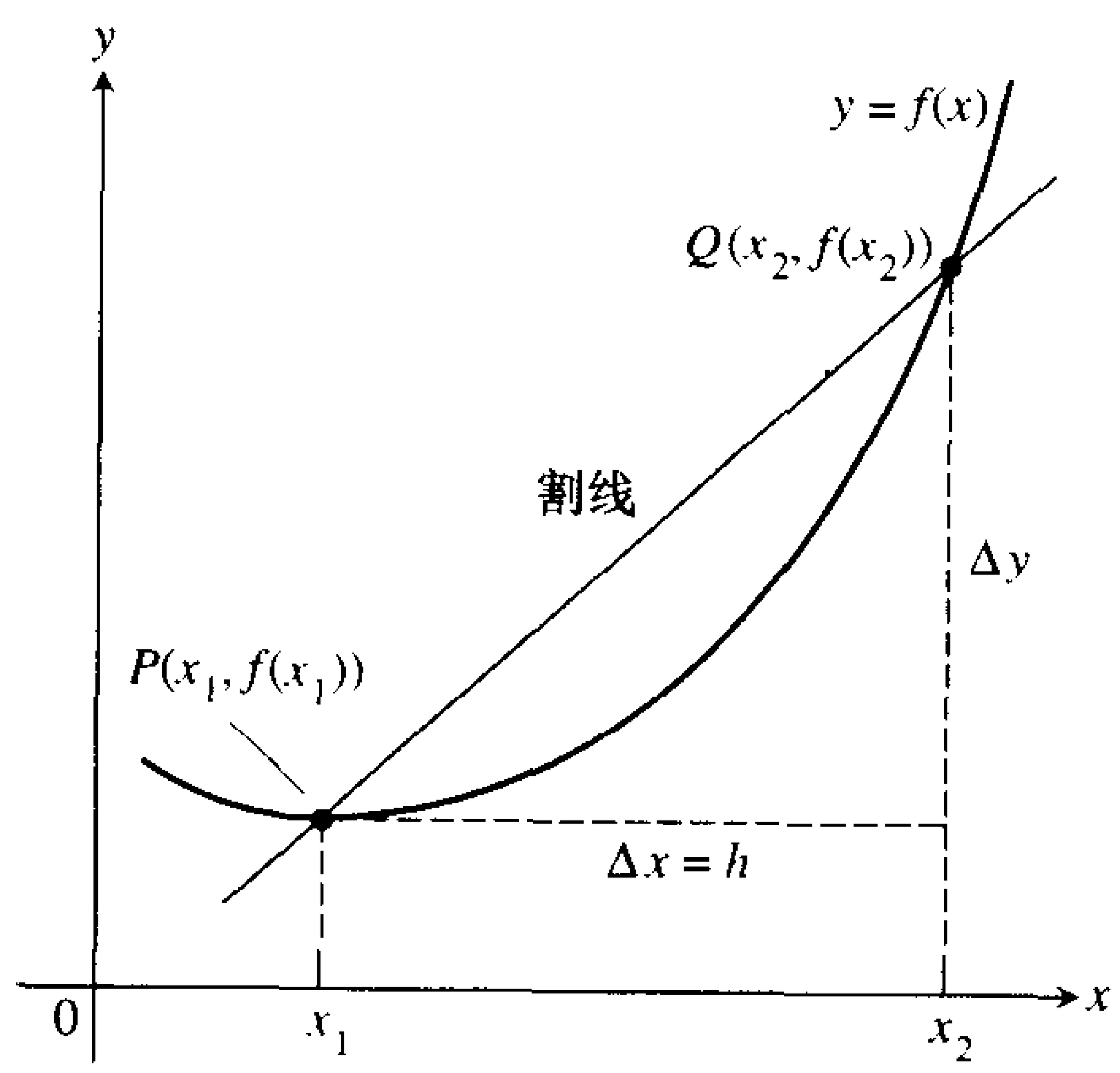


图 1.1　$y=f(x)$ 的图形的割线. 其斜率为函数 f 在区间 $[x_1,x_2]$ 上的平均变化率 $\frac{\Delta y}{\Delta x}$.

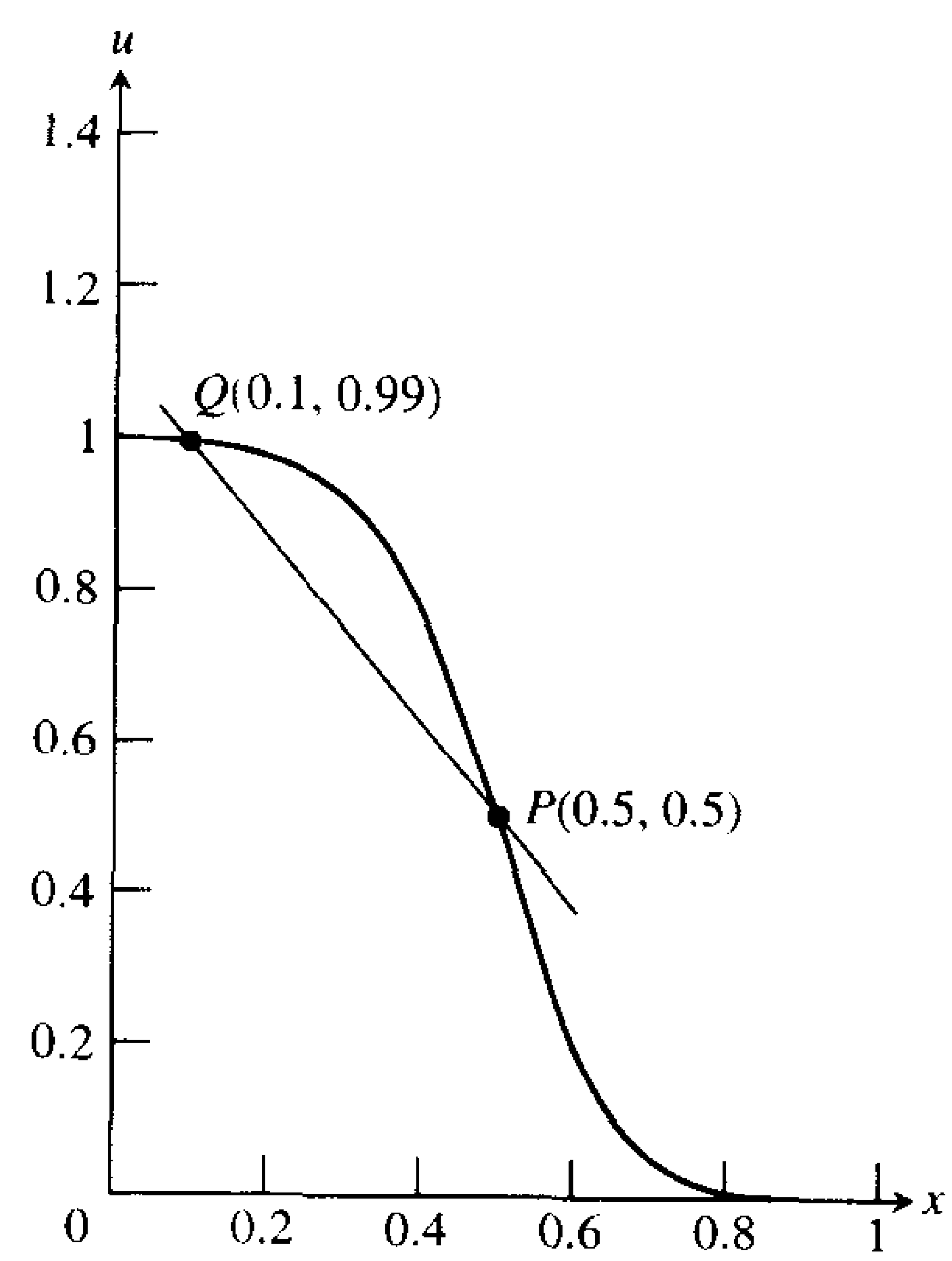


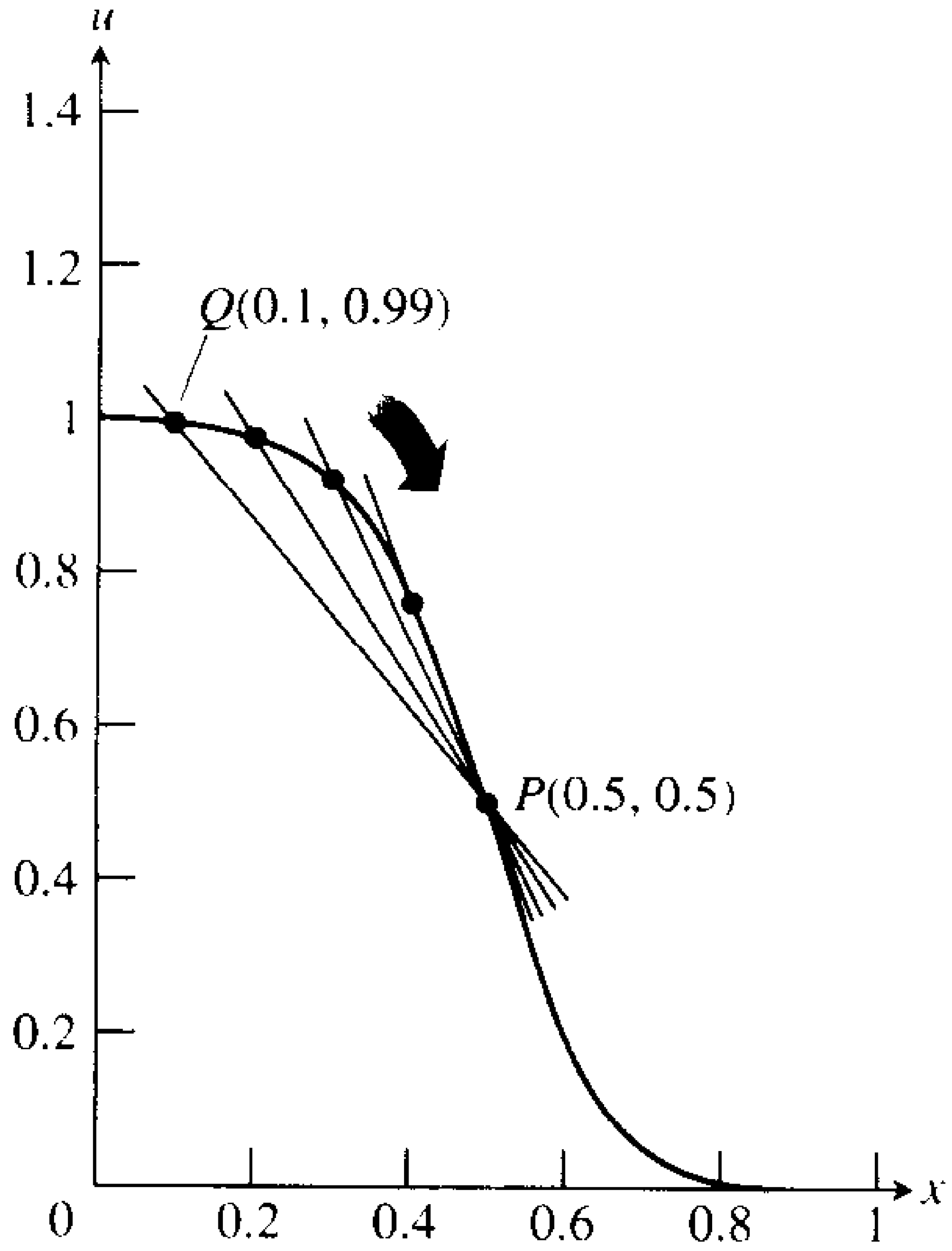
图 1.2　在进入地球大气层后不久,挡热罩的温度作为罩面下深度的函数.

例 3(挡热罩的温度变化)　机械工程师正在为返回式宇宙飞船设计厚 1 英寸的挡热罩. 她已经确定在挡热罩每个深度处的温度应该为多少,如图 1.2 所示(图中温度已经归一化为位于区间 $0\leqslant u\leqslant 1$ 中). 她必须确定材料能承受的每单位长度最大的温度变化.

解　从温度函数的图形(图 1.2),工程师知道在深为 0.5 英寸的点 P 处曲线倾斜最陡. 从深为 0.1 英寸的点 Q 到深为 0.5 英寸的点 P 的温度的平均变化率为

$$\text{平均变化率:}\quad \frac{\Delta u}{\Delta x}=\frac{0.99-0.5}{0.1-0.5}\approx -1.23\ \text{度 / 英寸}.$$

这个平均值就是图 1.2 图形中过点 P 和 Q 的割线的斜率.但这个平均值并没有告诉我们在点 P 温度变化得有多快.为此我们需要考察在不断缩短的在深 $x=0.5$ in 结束(或开始)的区间上的平均变化率.用几何语言来说,对一系列的沿曲线趋于 P 的点 Q(图 1.3),我们通过求从 P 到 Q 的割线的斜率来求这些变化率.



Q	PQ 的斜率 $=\Delta u/\Delta x$
(0.1,0.99)	$\dfrac{0.99-0.5}{0.1-0.5}\approx -1.23$
(0.2,0.98)	$\dfrac{0.98-0.5}{0.2-0.5}\approx -1.60$
(0.3,0.92)	$\dfrac{0.92-0.5}{0.3-0.5}\approx -2.10$
(0.4,0.76)	$\dfrac{0.76-0.5}{0.4-0.5}\approx -2.60$

图 1.3　在挡热罩温度图形上过点 P 的 4 条割线的位置和斜率.

图 1.3 中的值表明当点 Q 的 x 坐标从 0.1 增加到 0.4 时割线的斜率从 -1.23 到 -2.6.几何上,割线关于点 P 顺时针旋转趋近于过点 P 的直线,其斜率和该曲线在点 P 的陡度(斜率)一样.我们将会知道这条直线就称为该曲线在点 P 的切线(图 1.4).因为该直线看来通过点 $A(0.32,1)$ 和 $B(0.68,0)$.于是,在点 P 的斜率为

$$\frac{1.0}{0.32-0.68}\approx -2.78\ \text{度 / 英寸}.$$

点 P 的深度为 0.5 英寸,温度以约为 -2.78 度 / 英寸的变化率变化.

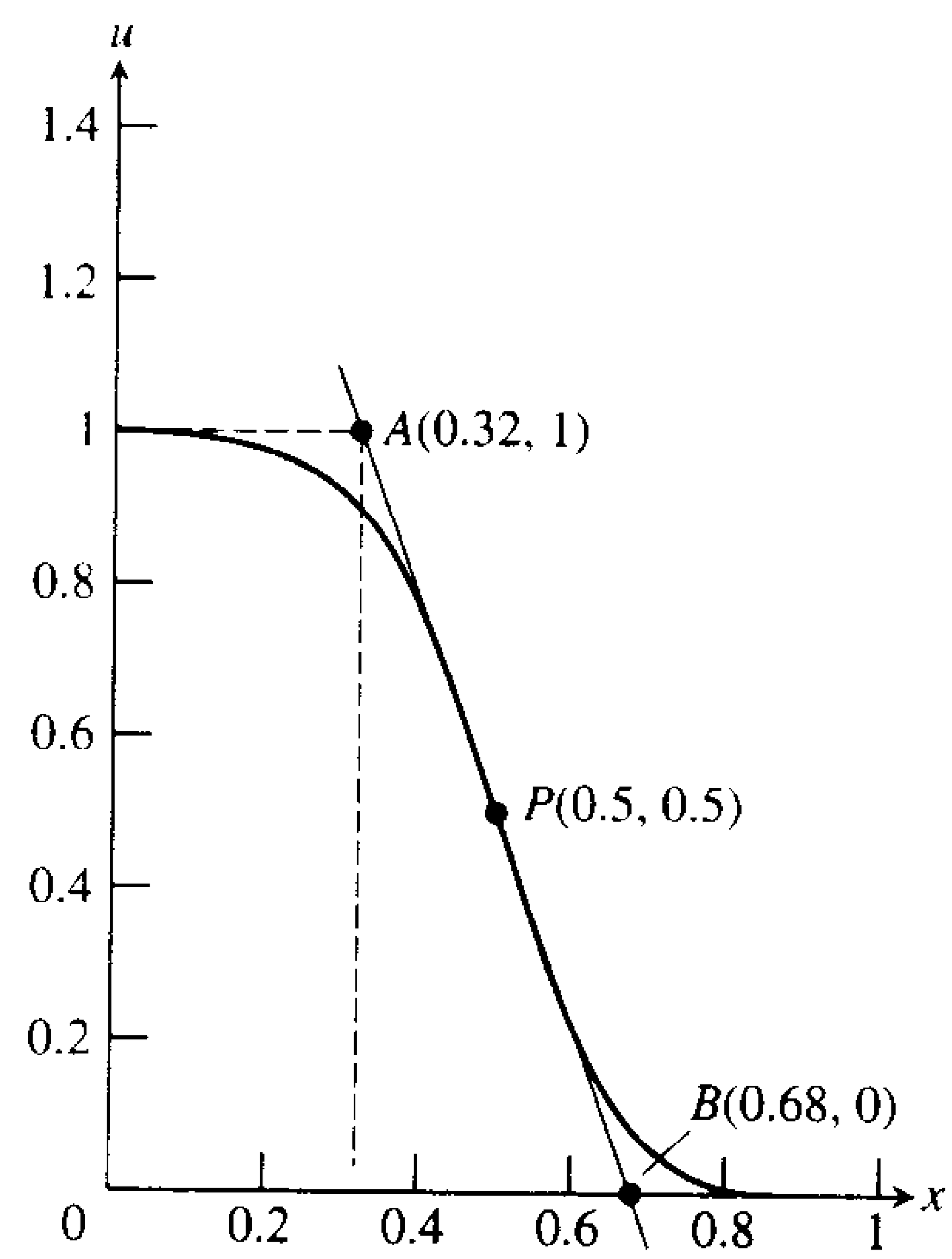


图 1.4　点 P 处的切线有和曲线在点 P 一样的陡度(斜率).

例 2 中岩石下落到瞬时 $t=2$ 的变化率和例 3 中在深度 0.5 英寸处的温度变化率都称为瞬时变化率.正如这些例子表明的,我们把瞬时变化率作为平均变化率的极限.在例 3 中,我们还画出在深 0.5 处温度曲线的切线作为割线的极限.瞬时变化率和与之密切联系着的切线也出现在其他情形中.为建设性地讨论这两者并进一步了解其联系,我们需要研究确定极限值,或者我们很快就会把它们称为求极限的过程.

函数的极限

在给出定义之前,我们再来看一个例子.

CD-ROM WEBsite **例 4(一点附近函数的性态)** 函数

$$f(x)=\frac{x^2-1}{x-1}$$

在 $x=1$ 附近的性态是怎样的?

解 给定公式对除 $x=1$ 外的所有 x 定义了 f(分母不能为 0). 对任何 $x\neq 1$,我们可以通过对分子的因式分解并消去公因子来简化该公式:

$$f(x)=\frac{(x-1)(x+1)}{x-1}=x+1,\quad x\neq 1$$

因此 f 的图形就是挖掉点(1,2)的直线 $y=x+1$. 在图 1.5 中这个挖掉的点用一个"洞"来表示.

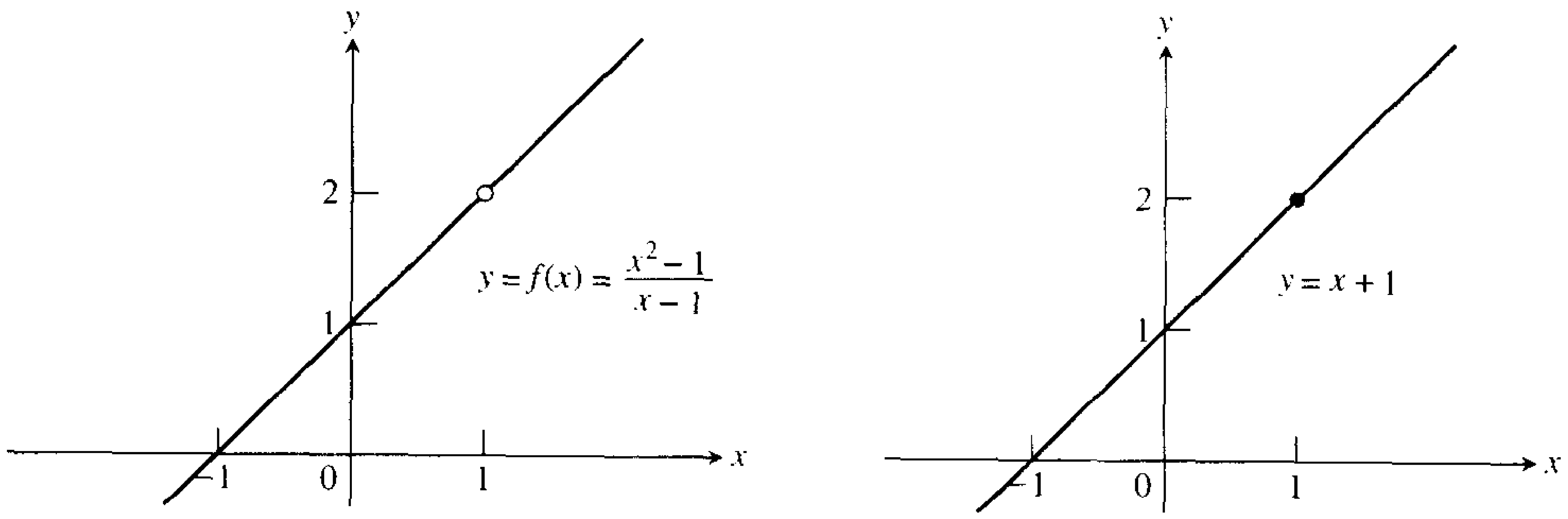


图 1.5 f 的图形除 $x=1$ 外和直线 $y=x+1$ 是一样的,在 $x=1$ 处 f 没有定义.

即使 $f(1)$ 没有定义,我们可以通过选 x 充分靠近 1 使得 $f(x)$ 的值要多靠近 2 就能多靠近 2.

表 1.2 **x 愈靠近 1,$f(x)=\frac{(x^2-1)}{(x-1)}$ 就愈靠近 2**

小于和大于 x 的值	$f(x)=\frac{x^2-1}{x-1}=x+1,x\neq 1$
0.9	1.9
1.1	2.1
0.99	1.99
1.01	2.01
0.999	1.999
1.001	2.001
0.999 999	1.999 999
1.000 001	2.000 001

我们说当 x 趋于 1 时 $f(x)$ 任意趋近 2；或更简单地说，当 x 趋于 1 时 $f(x)$ 趋于极限 2. 我们把这个过程记作

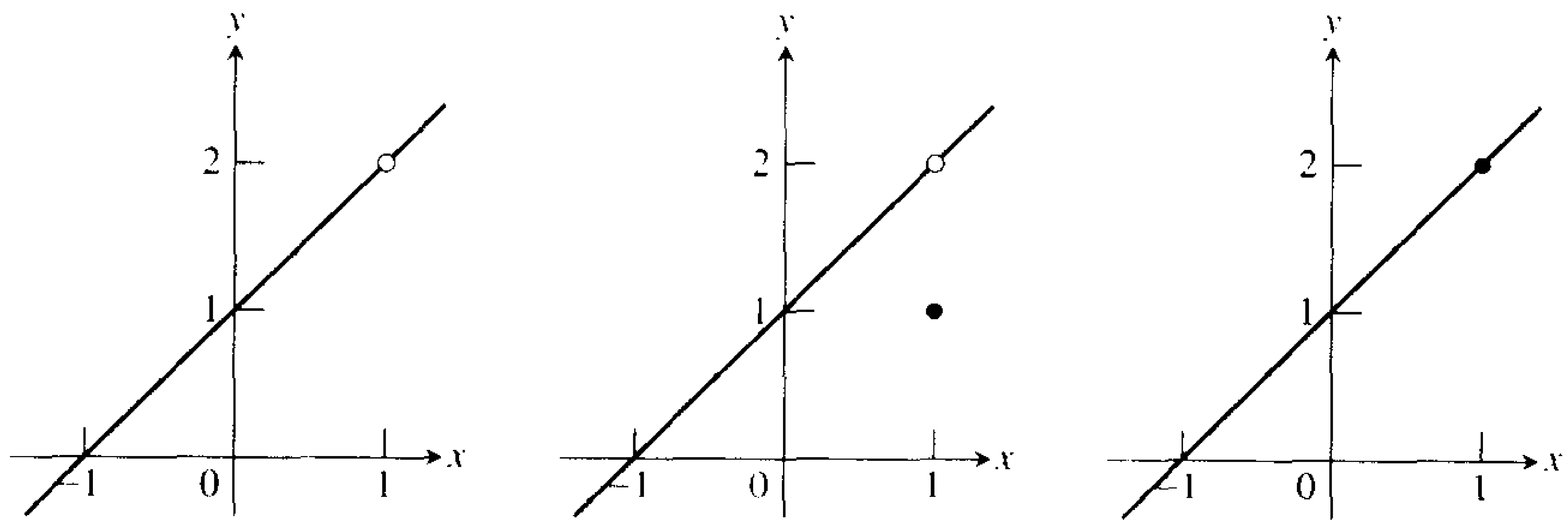
$$\lim_{x \to 1} f(x) = 2, \quad \text{或} \quad \lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = 2.$$

极限的非正式定义

设 $f(x)$ 除了可能在点 x_0 没有定义外，在 x_0 的一个开区间上均有定义. 如果对充分靠近 x_0 的 x，$f(x)$ 能任意靠近 L，那么我们就说当 x 趋于 x_0 时 f 趋于**极限** L，并记作

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L.$$

这个定义是"非正式的"，因为像任意靠近和充分靠近的说法都是不确切的；它们的含义有赖于不同的情况. 对制造活塞的机械师来说，靠近可能意味着在千分之几英寸以内. 对于研究遥远银河系的天文学家来说，靠近可能意味着在几千光年以内. 但是这个定义是足够清楚的，能使我们识别和计算许多特定函数的极限.



(a) $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x-1}$　(b) $g(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-1}{x-1}, & x \neq 1 \\ 1, & x = 1 \end{cases}$　(c) $h(x) = x + 1$

图 1.6　$\lim_{x \to 1} f(x) = \lim_{x \to 1} g(x) = \lim_{x \to 1} h(x) = 2.$

例 5（极限值不依赖于在 x_0 处函数是怎样定义的）　图 1.6 中的函数 f 当 $x \to 1$ 时有极限 2，即使 f 在 $x = 1$ 处没有定义. 函数 g 当 $x \to 1$ 时有极限 2，即使 $2 \neq g(1)$. 函数 h 是仅有的一个当 $x \to 1$ 时其极限等于函数在 $x = 1$ 处的值. 对 h，我们有 $\lim_{x \to 1} h(x) = h(1)$. 极限等于函数值的这个等式是特殊的. 我们将在 1.4 节回到这个话题.

例 6（在每点都有极限的两个函数）

(a) 如果 f 是**恒等函数** $f(x) = x$，则对任何值 x_0（图 1.7a）

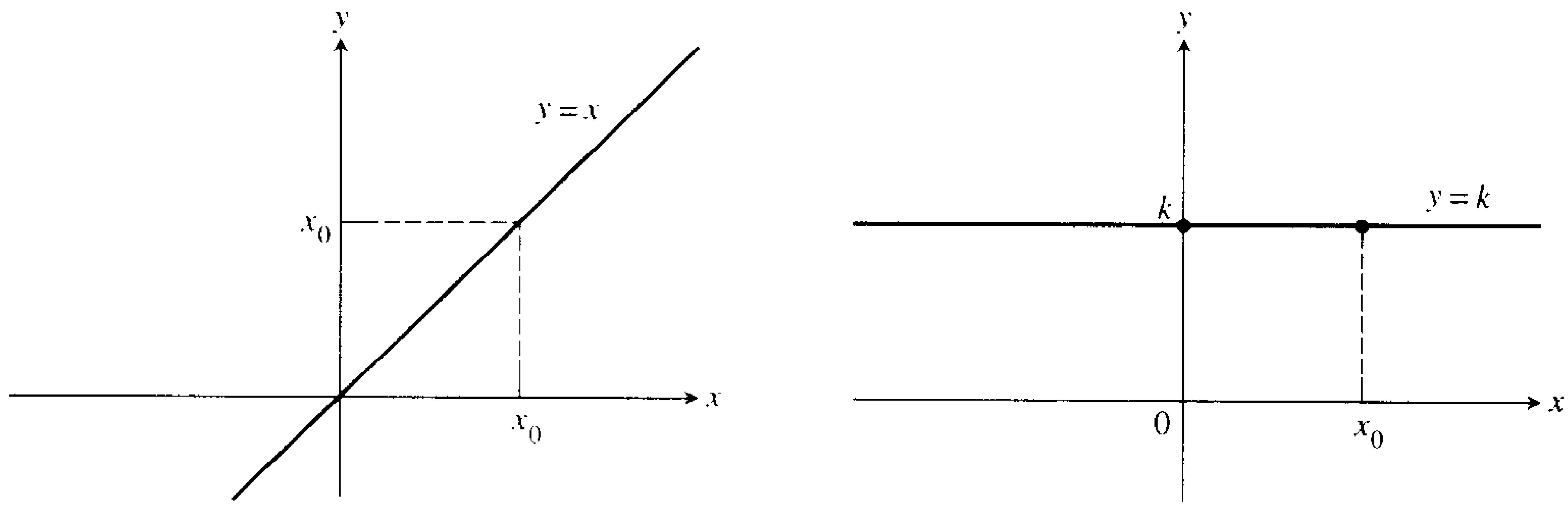
$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} x = x_0.$$

(b) 如果 f 是**常数函数** $f(x) = k$（值为常数 k 的函数），则对任何值 x_0（图 1.7b）

$$\lim_{x \to x_0} f(x_0) = \lim_{x \to x_0} k = k.$$

例如，

$$\lim_{x \to 3} x = 3 \quad \text{和} \quad \lim_{x \to -7} (4) = \lim_{x \to 2} (4) = 4.$$



(a) 恒等函数　　(b) 常数函数

图 1.7　例 6 中的函数.

极限不存在的一些可能性图示在图 1.8 中,并在下面的例子中描述了这些函数.

例 7(极限可能不存在)　讨论下列函数当 $x \to 0$ 时的性态.

(a) $U(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1, & x \geqslant 0 \end{cases}$　(b) $g(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$　(c) $f(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant 0 \\ \sin \dfrac{1}{x}, & x > 0 \end{cases}$

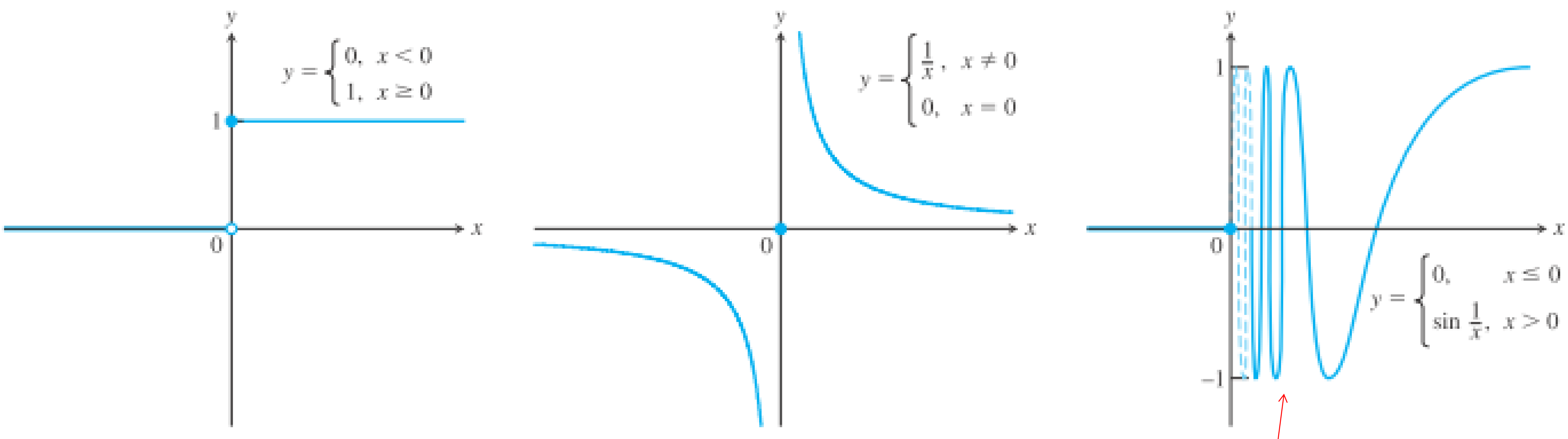
CD-ROM
WEBsite
历史传记

Aristotle
(384BC — 322BC)

解　(a) 函数跳跃:$x \to 0$ 时**单位阶梯函数**没有极限,因为函数值在 $x = 0$ 处有跳跃.对任意靠近 0 的 x 的负值,$U(x) = 0$;对任意靠近 0 的 x 的正值,$U(x) = 1$.不存在单一的值 L,使得当 $x \to 0$ 时 $U(x)$ 趋于 L(图 1.8a).

(b) 函数无限增大:$x \to 0$ 时 $g(x)$ 没有极限,因为 $x \to 0$ 时函数 g 的绝对值任意增大,从而不可能呆在任何某一实数的近傍(图 1.8b).

(c) 函数无限振动:$x \to 0$ 时 $f(x)$ 没有极限,因为在包含 0 的任何开



(a) Unit step function $U(x)$　(b) $g(x)$　(c) $f(x)$

(a) 单位阶梯函数 $U(x)$　(b) $g(x)$　(c) $f(x)$

图 1.8　例 7 中的函数.

(c) It *oscillates too much to have a limit*: $f(x)$ has no limit as $x \to 0$ because the function's values oscillate between $+1$ and -1 in every open interval containing 0. The values do not stay close to any one number as $x \to 0$ (Figure 2.10c). ■

区间中函数值在 -1 和 $+1$ 之间振荡. $x \to 0$ 时函数值不可能呆在任何一个数的近傍(图 1.8c).

极限的精确定义

为说明 $x \to x_0$ 时 $f(x)$ 的极限等于数 L,我们要证明:如果 x"充分接近"x_0,那么就可以使 $f(x)$ 和 L 间的差距"要有多小就有多小". 如果我们规定了 $f(x)$ 和 L 之间的差距,我们来看看对 x 的要求是什么.

例 8(控制线性函数)　为确保输出 $y = 2x - 1$ 位于 $y_0 = 7$ 的 2 个单位的范围内,输入 x 应该靠 $x_0 = 4$ 多近?

解　问我们的是:对什么样的 x 值有 $|y - 7| < 2$? 为求得答案,我们首先用 x 来表示 $|y - 7|$:

$$|y - 7| = |(2x - 1) - 7| = |2x - 8|.$$

于是问题变成:什么样的 x 值满足 $|2x - 8| < 2$? 为求出这些 x,我们解此不等式

$$|2x - 8| < 2$$

$$-2 < 2x - 8 < 2$$

$$6 < 2x < 10$$

$$3 < x < 5$$

$$-1 < x - 4 < 1.$$

使 x 保持在和 $x_0 = 4$ 相距一个单位的距离就能使 y 保持在和 $y_0 = 7$ 相距 2 个单位的距离内(图 1.9).

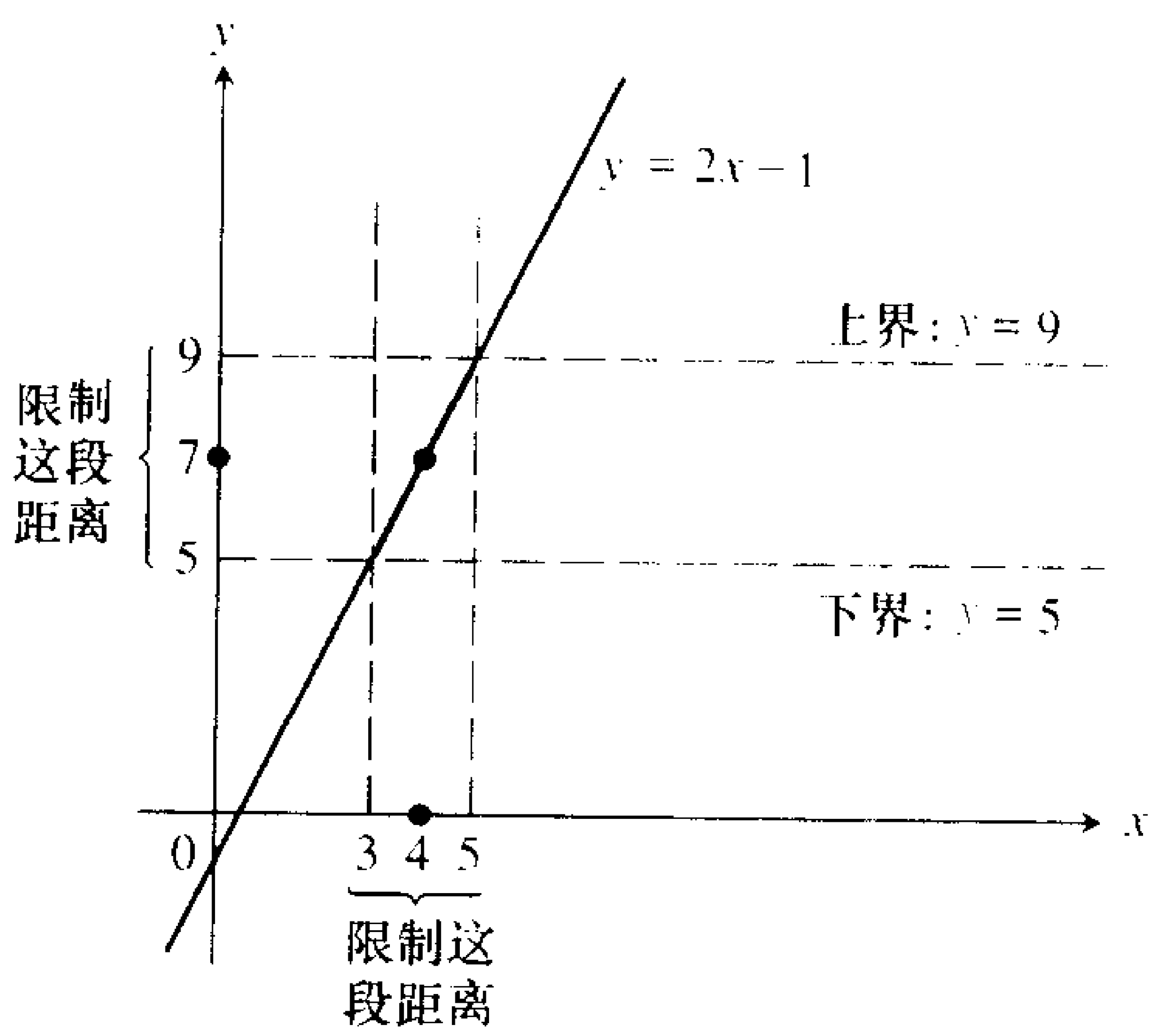


图 1.9　把 x 保持在距 $x_0 = 4$ 一个单位内就能使 y 保持在距 $y_0 = 7$ 两个单位内.

在例 8 中,我们确定了要保持变量 x 距特定值 x_0 多近就能确保输出 $f(x)$ 位于极限 L 的指定区间内. 为证明 $x \to x_0$ 时 $f(x)$ 的极限正好等于 L,我们一定能证明只要保持 x 足够接近 x_0,就能使 $f(x)$ 和 L 间的差距小于任何不管有多小的预先指定的误差.

假设我们正注视着当 x 趋于 x_0(但不取 x_0 值)时函数 $f(x)$ 值的变化. 我们肯定能说,只要

x 在距 x_0 的某个 δ 距离内 $f(x)$ 就能呆在距 L 十分之一单位距离内(图 1.10).但这还是不够的,因为在 x 趋于 x_0 的过程中,有什么能阻止 $f(x)$ 在区间 $L-\frac{1}{10}$ 到 $L+\frac{1}{10}$ 中连续地振动而不趋于 L 呢?我们可以通过如下方式证明 $f(x)$ 趋于 L:不管我们怎样缩小 $f(x)$ 和 L 之间的差距范围,只要使 x 足够接近 x_0 就能使 $f(x)$ 保持在 L 的容许范围内.这样的说法就是用数学的方式来说 x 愈接近 x_0,$y=f(x)$ 就愈接近 L.

定义　极限的正式定义

设 $f(x)$ 定义在 x_0 的一个可能不包括 x_0 的开区间上,我们说当 x 趋于 x_0 时 $f(x)$ 趋于极限 L,并记为

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=L,$$

如果,对任何数 $\varepsilon>0$,存在相应的数 $\delta>0$ 使得对所有满足 $0<|x-x_0|<\delta$ 的 x,有

$$|f(x)-L|<\varepsilon.$$

DEFINITION　Let $f(x)$ be defined on an open interval about c, except possibly at c itself. We say that the **limit of $f(x)$ as x approaches c is the number L**, and write

$$\lim_{x\to c} f(x)=L,$$

if, for every number $\epsilon>0$, there exists a corresponding number $\delta>0$ such that for all x,

$$0<|x-c|<\delta \quad\Rightarrow\quad |f(x)-L|<\epsilon.$$

在图 1.11 中极限定义用图形加以了说明.

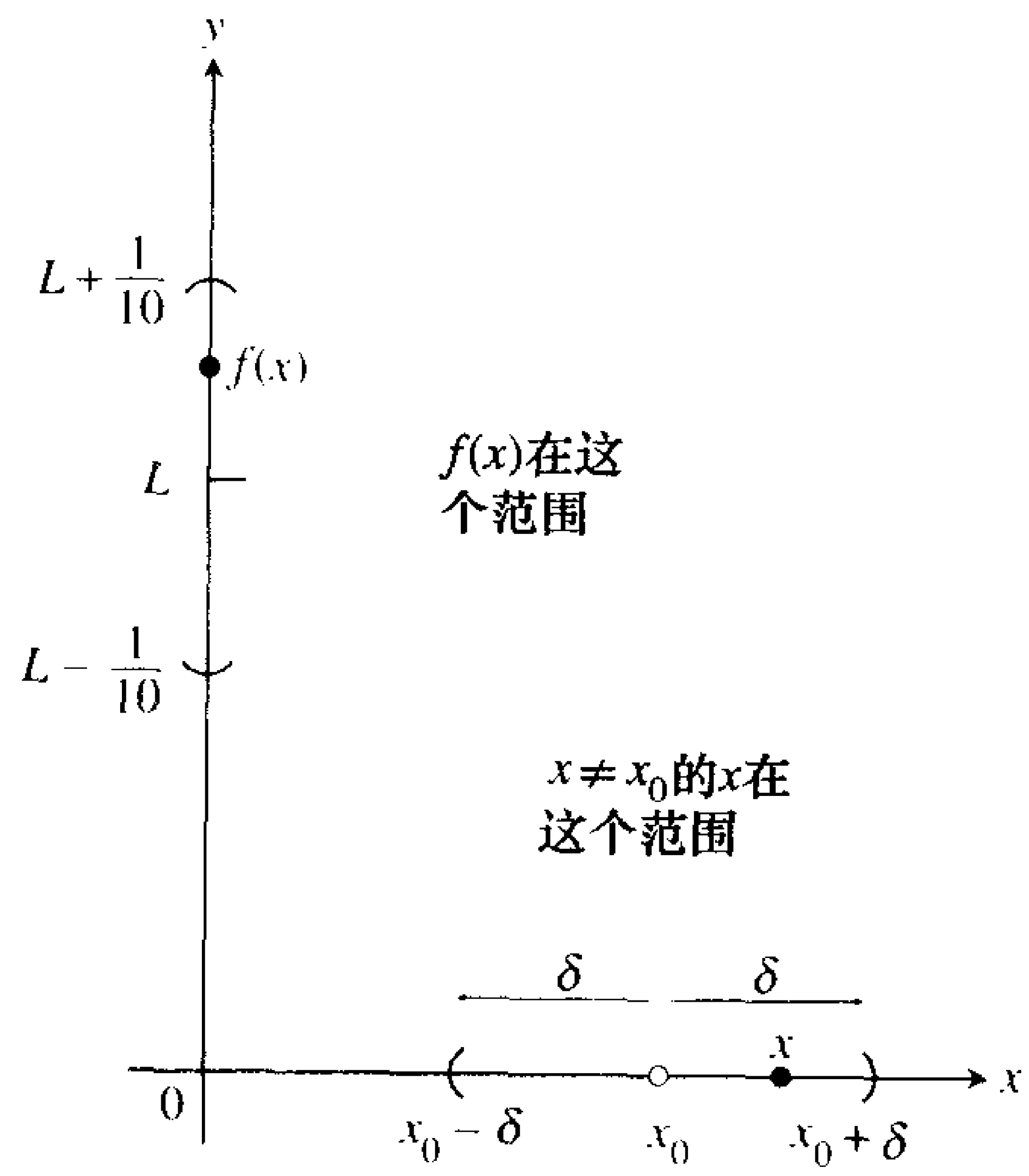


图 1.10　极限定义发展中的初级阶段.

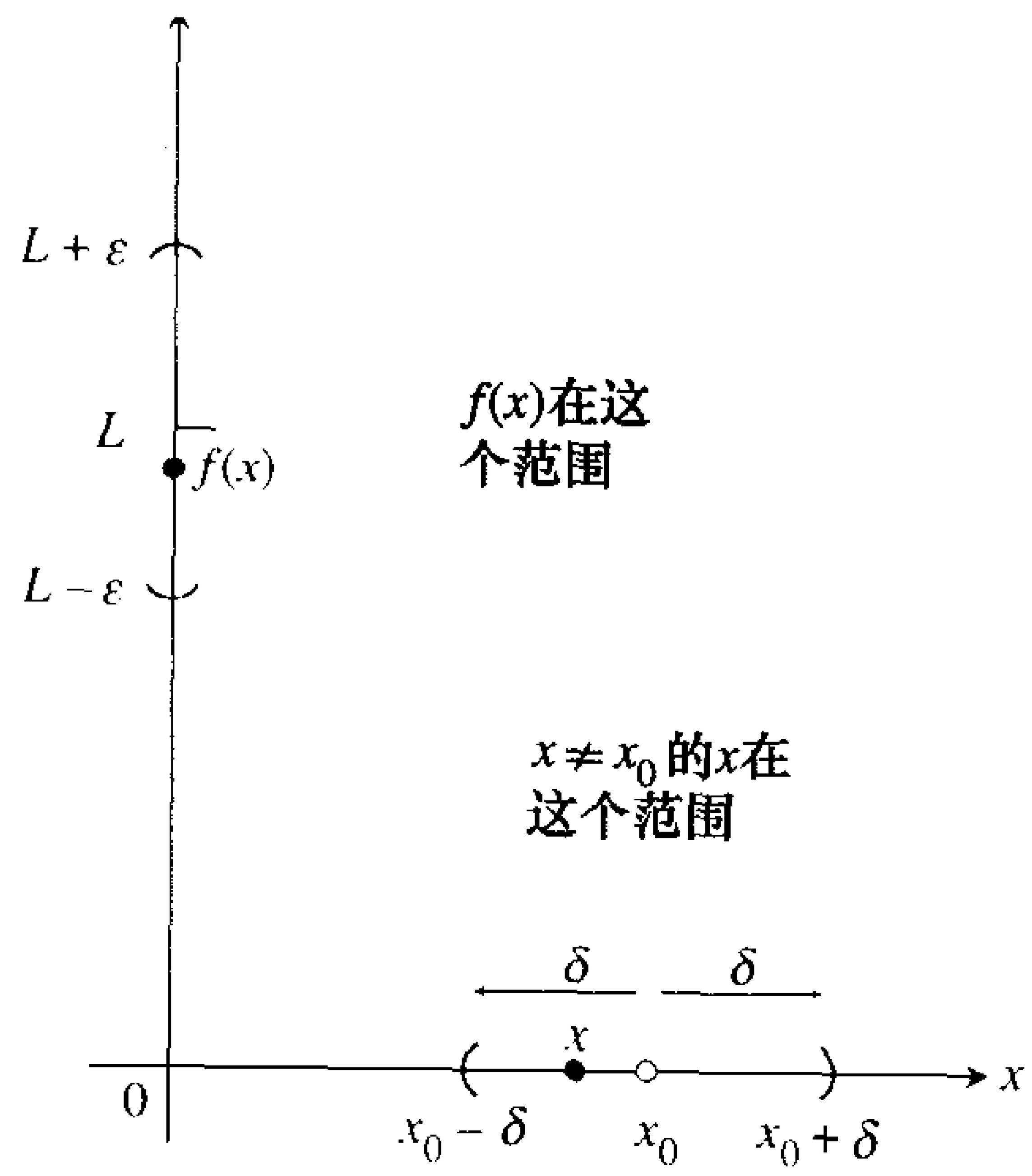


图 1.11　极限定义中 δ 和 ε 的关系.

译注: 如果用"$\forall$ 任意的"和"$\exists$ 存在","$\in$ 属于"的量词来表示"$x\to x_0$ 时 $f(x)$ 有极限 L"的话,可表达如下

$\exists L\in\mathbf{R}$($\mathbf{R}$ 表示实数集)	存在实数 L
$\forall\varepsilon>0$	对任意的正数 ε
$\exists\delta>0$	存在正数 δ
$x\in\{x \mid 0<|x-x_0|<\delta\}$	当 x 满足 $0<|x-x_0|<\delta$ 时
$|f(x)-L|<\varepsilon$	就有 $|f(x)-L|<\varepsilon$ 成立

必须掌握

例 9(检验定义) 证明:$\lim_{x\to 1}(5x-3)=2$.

解 令 $x_0=1, f(x)=5x-3$,以及极限定义中的 $L=2$.对任何给定的 $\varepsilon>0$,我们必须求出一个合适的 $\delta>0$ 以致如果 $x\neq 1$ 而且 x 在距 $x_0=1$ 的 δ 距离内,即,如果

$$0<|x-1|<\delta,$$

则 $f(x)$ 在 $L=2$ 的 ε 距离内,即

$$|f(x)-2|<\varepsilon.$$

我们从 ε - 不等式往回求解来求得 δ:

$$|(5x-3)-2|=|5x-5|<\varepsilon$$
$$5|x-1|<\varepsilon$$
$$|x-1|<\frac{\varepsilon}{5}.$$

因此我们可以取 $\delta=\frac{\varepsilon}{5}$(图 1.12).如果 $0<|x-1|<\delta=\frac{\varepsilon}{5}$,则

$$|(5x-3)-2|=|5x-5|=5|x-1|<5\left(\frac{\varepsilon}{5}\right)=\varepsilon,$$

这就证明了 $\lim_{x\to 1}(5x-3)=2$.

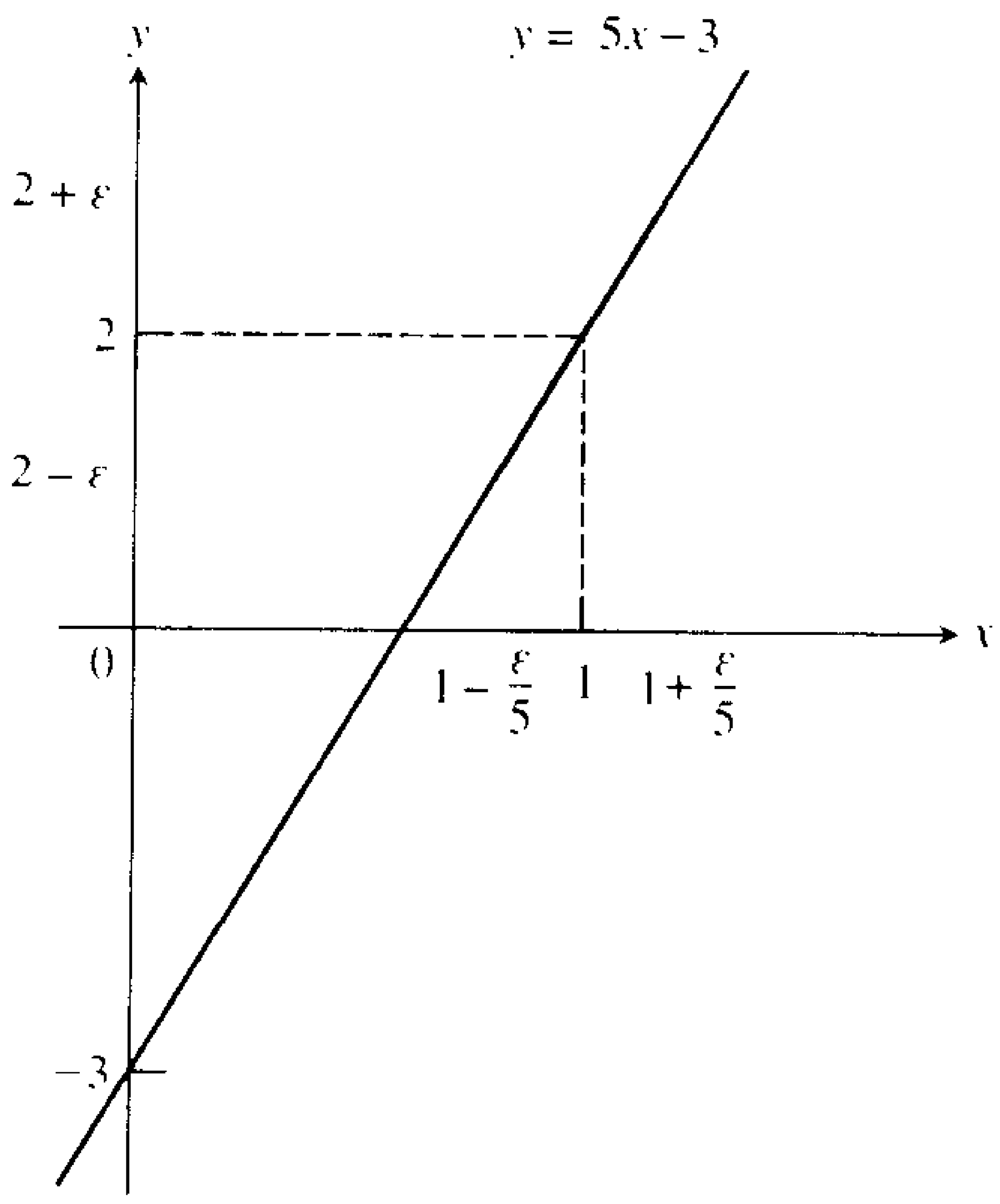


图 11.2 如果 $f(x)=5x-3$,则 $0<|x-1|<\frac{\varepsilon}{5}$ 保证了 $|f(x)-2|<\varepsilon$.(例 9)

值 $\delta=\frac{\varepsilon}{5}$ 不是能从 $0<|x-1|<\delta$ 推出 $|5x-5|<\varepsilon$ 的唯一的值.任何更小的正数 δ 也能做到这点.定义并不要求"最佳"正数 δ,而只是要求能确保从 $0<|x-1|<\delta$ 推出 $|f(x)-2|<\varepsilon$ 的某一个 δ 就可以了.

在例 9 中使 $|f(x)-L|$ 小于 ε 的 x_0 的区间关于 x_0 是对称的,从而我们可以取区间长度的一半.当没有这种对称性时,通常我们取 δ 为从 x_0 到最近的区间边界点的距离.这样的 δ 的选取在下一个例子中加以了说明.

例 10(从给定的 ε 代数地求 δ) 对极限 $\lim_{x\to 5}\sqrt{x-1}=2$,求相应于 $\varepsilon=1$ 的 $\delta>0$.即,求 $\delta>0$ 使得对所有满足 $0<|x-5|<\delta$ 的 x,$|\sqrt{x-1}-2|<1$ 成立.

解 我们分两步来找 δ. 首先,解不等式 $\left|\sqrt{x-1}-2\right|<1$,求包含 $x_0=5$ 的一个区间 (a,b),使得对该区间上的一切 $x\neq x_0$,不等式 $\left|\sqrt{x-1}-2\right|<1$ 成立. 然后我们求 $\delta>0$ 使得区间 $5-\delta<x<5+\delta$(中心在 $x_0=5$ 的对称区间)在区间 (a,b) 的内部.

第 1 步:解不等式 $\left|\sqrt{x-1}-2\right|<1$ 求包含 $x_0=5$ 的一个区间使得在该区间上的一切 $x\neq x_0$,下面的不等式成立.

$$\left|\sqrt{x-1}-2\right|<1$$
$$-1<\sqrt{x-1}-2<1$$
$$1<\sqrt{x-1}<3$$
$$1<x-1<9$$
$$2<x<10$$

这个不等式对开区间(2,10)中的一切 x 成立,所以它也对该区间中一切 $x\neq 5$ 成立.

第 2 步:求 $\delta>0$ 使得中心区间 $5-\delta<x<5+\delta$ 在区间(2,10)的内部. 从 5 到(2,10)较近的端点的距离为 3(图 1.13). 如果我们取 $\delta=3$ 或更小的正整数,那么不等式 $0<|x-5|<\delta$ 就自然会使 x 在 2 和 10 之间,从而使 $\left|\sqrt{x-1}-2\right|<1$ 成立(图 1.14):

$$0<|x-5|<3\Rightarrow\left|\sqrt{x-1}-2\right|<1.$$

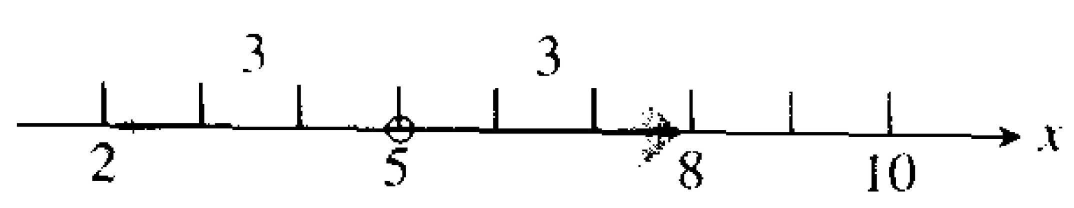


图 1.13 关于 $x_0=5$ 半径为 3 的开区间位于开区间(2,10)的内部.

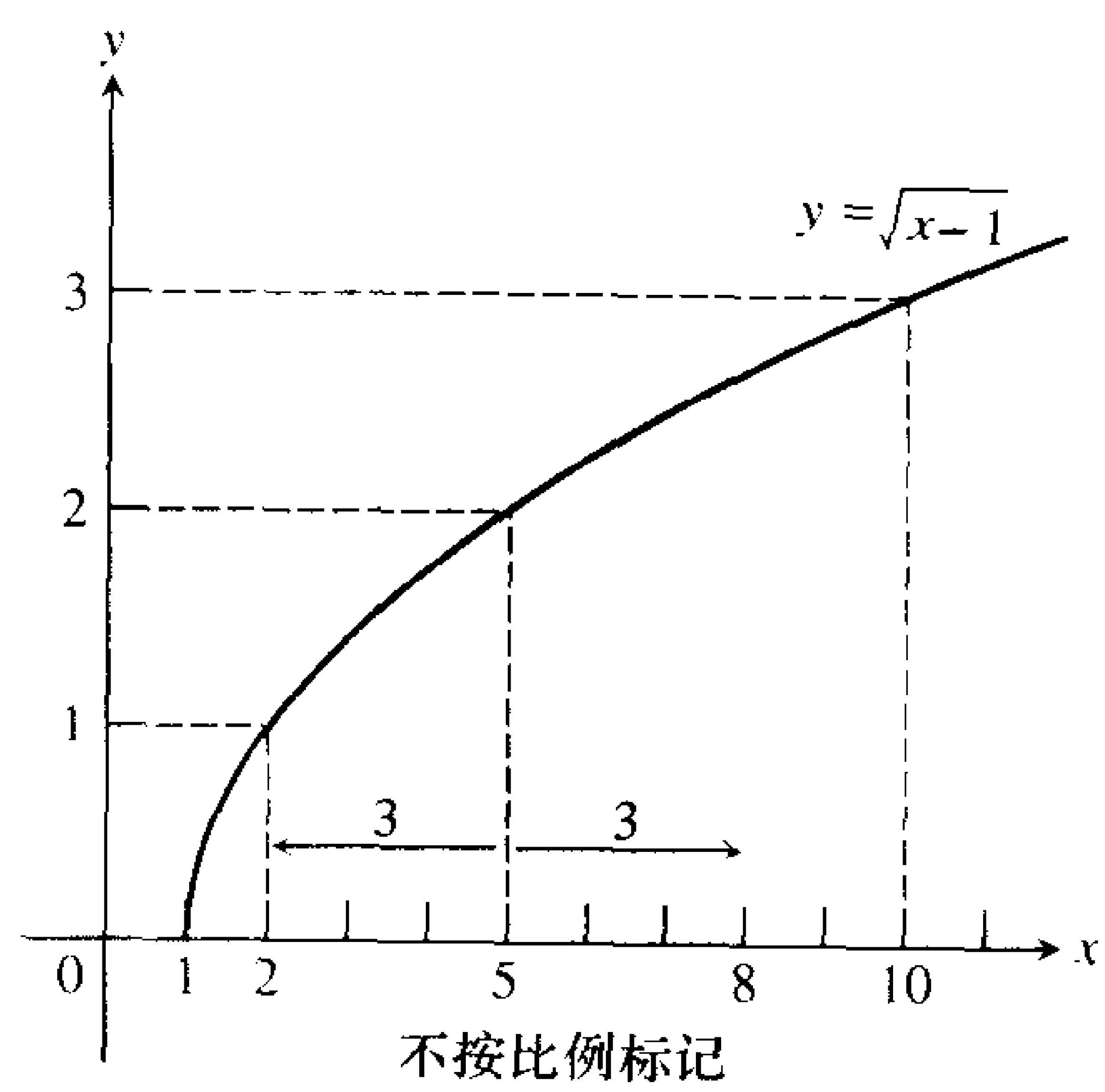


图 1.14 例 10 中的函数和区间.

习题 1.1

平均变化率

在题 1 – 4 中,求给定区间上函数的平均变化率.

1. $f(x)=x^3+1$, (**a**)[2,3] (**b**)[−1,1]

2. $R(\theta)=\sqrt{4\theta+1}$, [0,2]

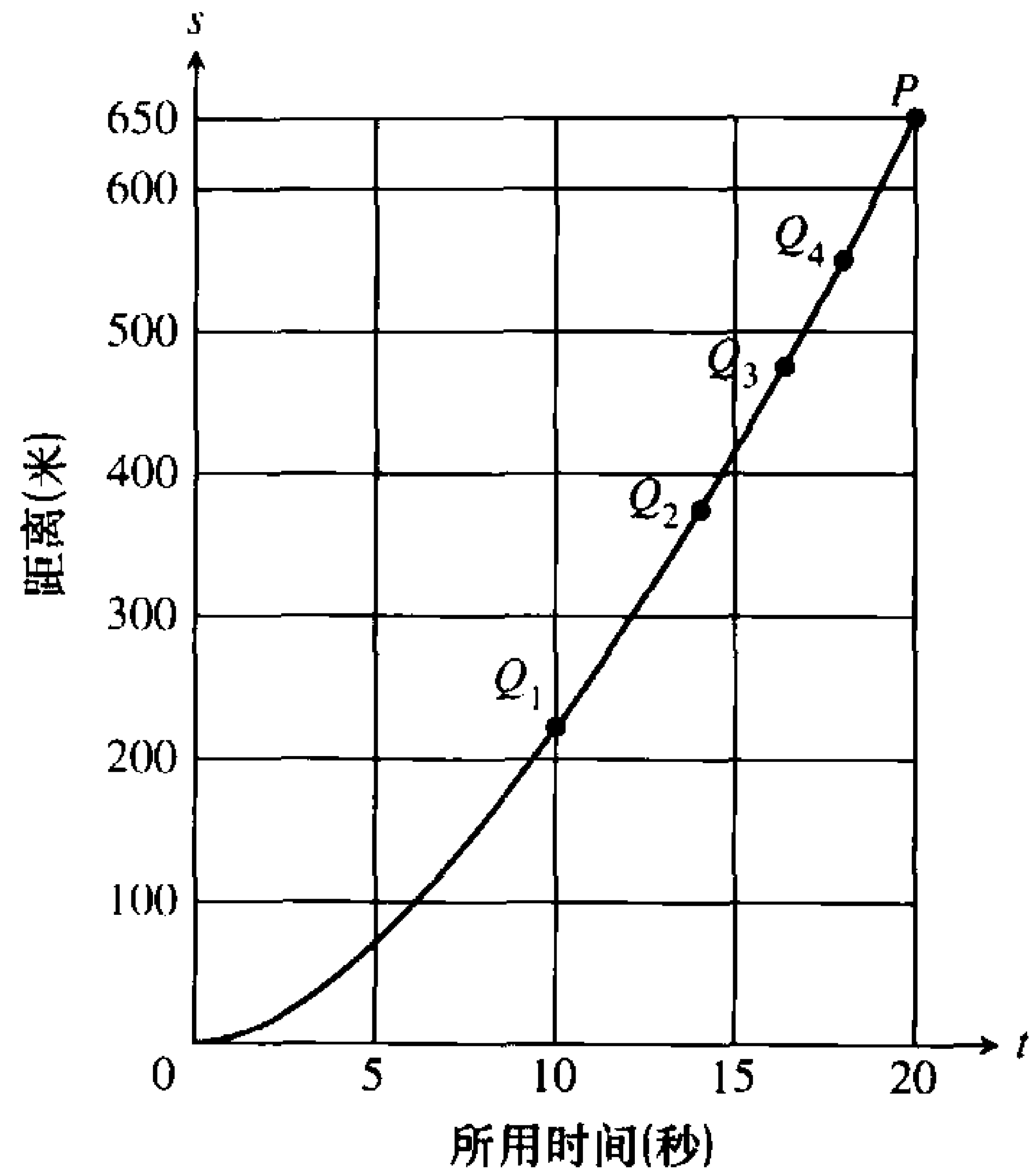
3. $h(t) = \cot t$, (a) $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right]$ (b) $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right]$

4. $g(t) = 2 + \cos t$, (a) $[0,\pi]$ (b) $[-\pi,\pi]$

5. **福特野马眼镜蛇汽车的速度** 右图展示了 1994 福特野马眼镜蛇型号汽车从静止开始加速后的时间对距离的图形.

(a) 估算割线 PQ_1, PQ_2, PQ_3, 和 PQ_4 的斜率,按次序把它们列一个表.什么是这些斜率的合适的单位?

(b) 估算该眼镜蛇型号汽车在 $t = 20$ 秒时的速度.

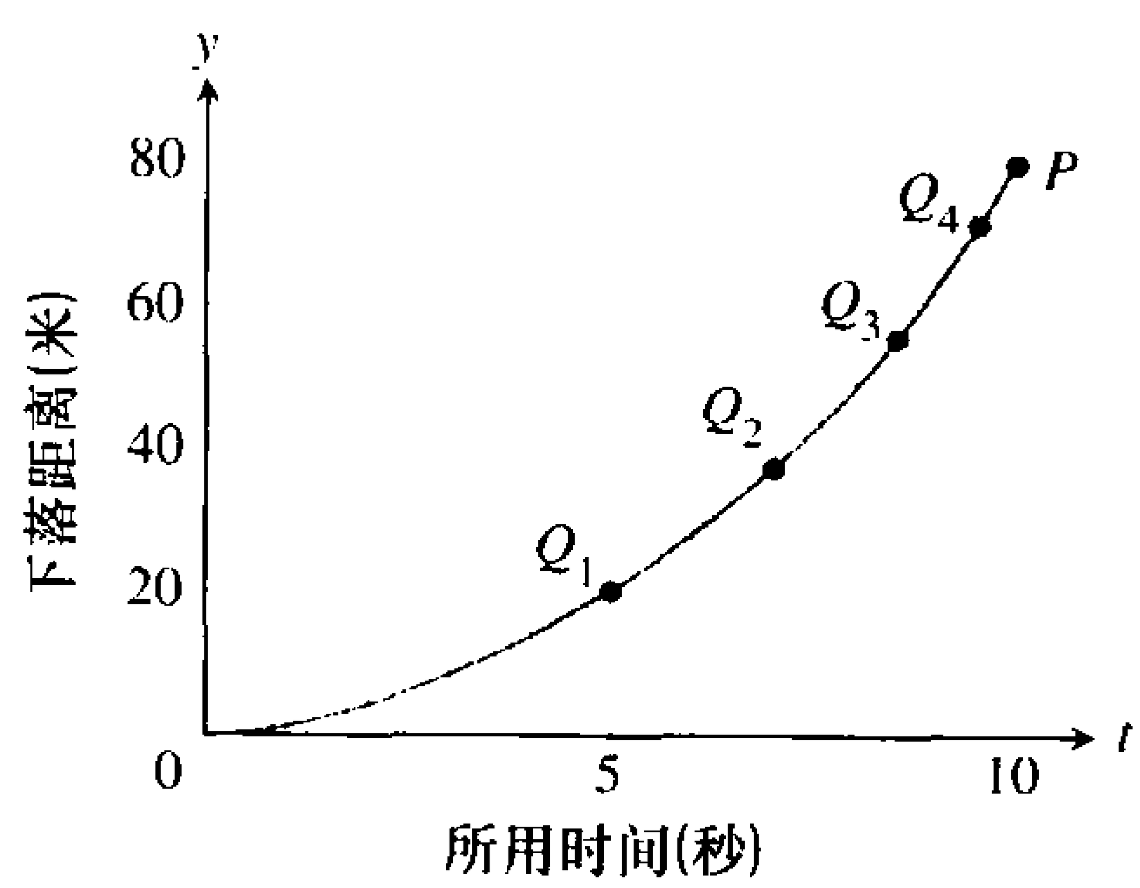


第 5 题图

6. **下落扳钳的速度** 一个扳钳从月球的通信天线杆的顶部向 80 米下的通信站顶部下落,下图展示了下落距离对时间的图形.

(a) 估算割线 PQ_1, PQ_2, PQ_3 和 PQ_4 的斜率,按次序把它们列在一个像图 1.3 那样的表中.

(b) 当扳钳击到站顶时它的下落有多快?



7. **球的速度** 附表的数据给出了从斜面上滚下的球的距离.试通过找速度的上、下界并求其平均来估算 $t = 1$ 时的瞬时速度.即,求 $a \leqslant v(1) \leqslant b$ 然后估算 $v(1)$ 为 $\frac{(a+b)}{2}$.

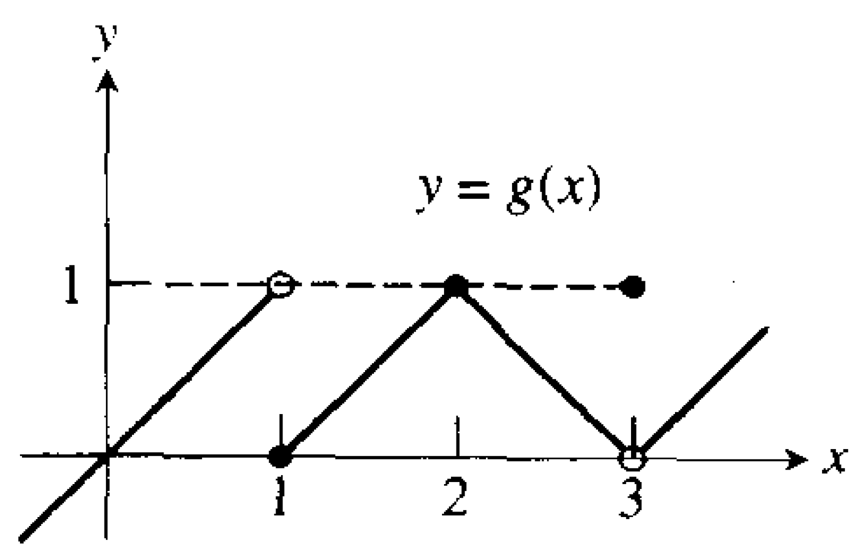
时间 t(秒)	走过的距离(英尺)
0	0
0.2	0.52
0.4	2.10
0.6	4.72
0.8	8.39
1.0	13.10
1.2	18.87
1.4	25.68

8. **火车行进的距离** 一辆火车从静止加速到的最大缓慢巡行速度,然后以某个常速度行经一个城镇.经过该城镇后又加速到它缓慢巡行速度.最后,火车平稳地减速直到到达目的地时停下来.试画一个火车的行进距离作为时间的函数的可能的图形.

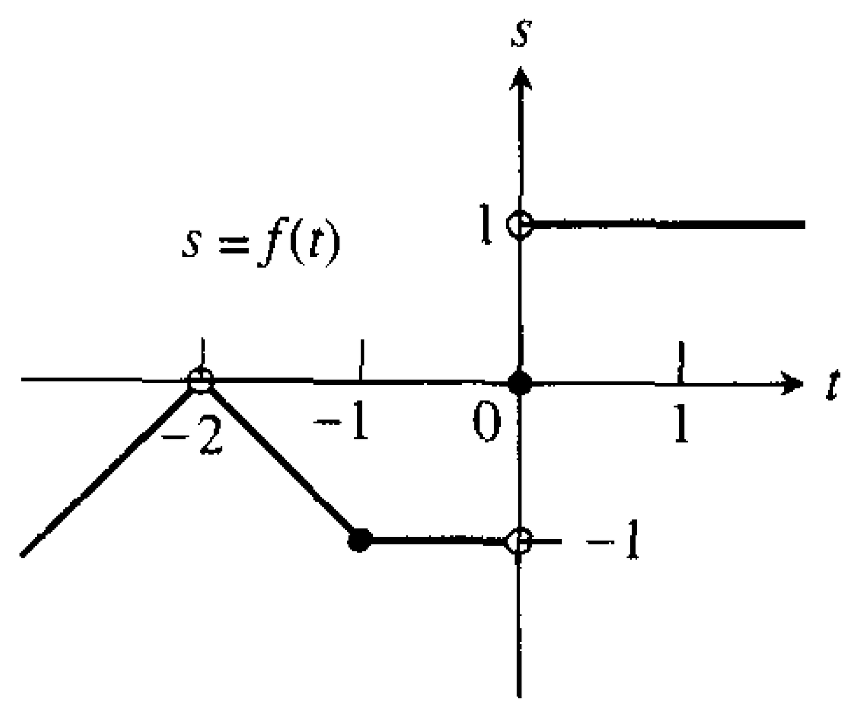
从图形求极限

9. 对左下图的函数 $g(x)$,求下列极限,或解释为什么没有极限. 如果是间断点，那是第几类间断点？

(a) $\lim_{x\to1} g(x)$ (b) $\lim_{x\to2} g(x)$ (c) $\lim_{x\to3} g(x)$



第 9 题图



第 10 题图

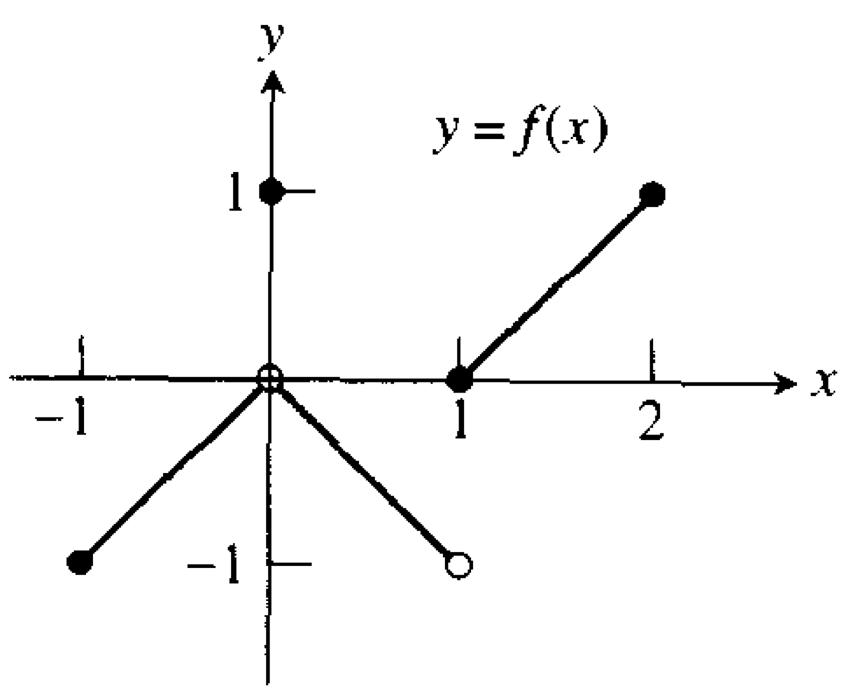
10. 对右上图的函数 $f(t)$,求下列极限,或解释为什么没有极限. 如果是间断点，那是第几类间断点？

(a) $\lim_{t\to-2} f(t)$ (b) $\lim_{t\to-1} f(t)$ (c) $\lim_{t\to0} f(t)$

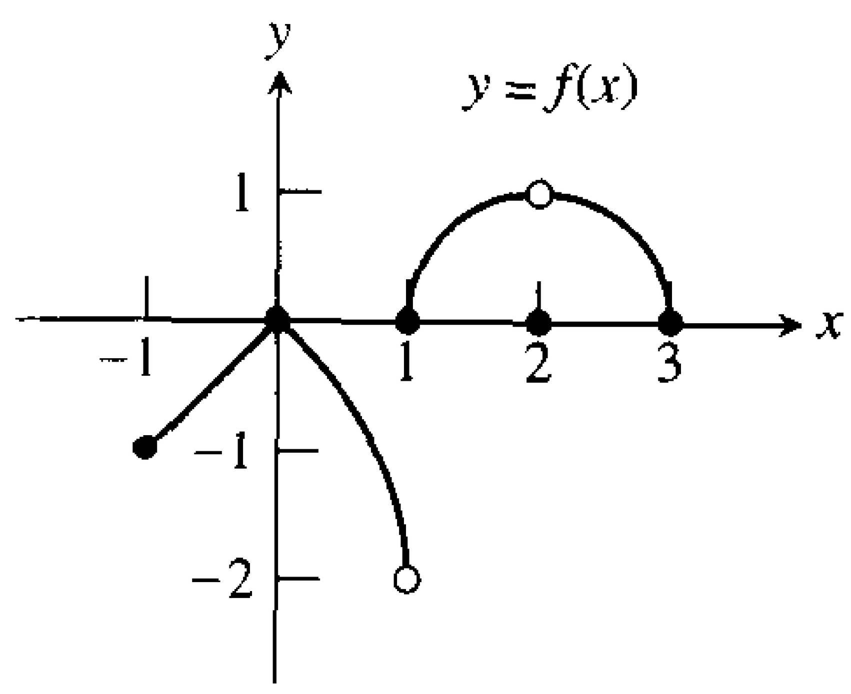
11. 关于左下图的函数 $y = f(x)$,下列命题中哪些是对的,哪些是不对的?

(a) $\lim_{x\to0} f(x)$ 存在. (b) $\lim_{x\to0} f(x) = 0$. (c) $\lim_{x\to0} f(x) = 1$.

(d) $\lim_{x\to1} f(x) = 1$. (e) $\lim_{x\to1} f(x) = 0$. (f) 在 $(-1,1)$ 中每一点 x_0 处 $\lim_{x\to x_0} f(x)$ 存在.



第 11 题图



第 12 题图

12. 关于右上图的函数 $y = f(x)$,下列命题中哪些是对的,哪些是不对的?

(a) $\lim_{x\to2} f(x)$ 不存在. (b) $\lim_{x\to2} f(x) = 2$. (c) $\lim_{x\to1} f(x)$ 不存在.

(d) 在 $(-1,1)$ 中每一点 x_0 处 $\lim_{x\to x_0} f(x)$ 存在. (e) 在 $(1,3)$ 中每一点 x_0 处 $\lim_{x\to x_0} f(x)$ 存在.

极限的存在性

在题 13 和 14 中,解释为什么极限不存在.

13. $\lim_{x\to0} \dfrac{x}{|x|}$ 14. $\lim_{x\to1} \dfrac{1}{x-1}$

15. **为学而写** 假设函数 $f(x)$ 对除 $x = x_0$ 外的所有实值 x 有定义.关于极限 $\lim_{x\to x_0} f(x)$ 的存在性可以说些什么?对你的回答给出理由. 比如，极限是否存在，及其原因

16. **为学而写** 假设函数 $f(x)$ 对 $[-1,1]$ 的所有 x 有定义.关于极限 $\lim_{x\to0} f(x)$ 的存在性可以说些什么?对你的回答给出理由.

17. 为学而写 如果$\lim\limits_{x\to1}f(x)=5$,$f$在$x=1$是否一定有定义?如果是的话,是否一定有$f(1)=5$?对$f$在$x=1$处的值能得到什么结论?试解释之.

18. 为学而写 如果$f(1)=5$,$\lim\limits_{x\to1}f(x)$一定存在吗?如果极限存在,一定有$\lim\limits_{x\to1}f(x)=5$吗?关于$\lim\limits_{x\to1}f(x)$能得出什么结论?试解释之.

估算极限

T 对题 19 – 26 而言,你会发现图形计算器是很有用的.

19. 设 $f(x)=\dfrac{x^2-9}{x+3}$.

(**a**) 对点 $x=-3.1,-3.01,-3.001$ 等处 f 的值列表,只要你的计算器还能算.然后估算 $\lim\limits_{x\to-3}f(x)$.如果代之以 f 在 $x=-2.9,-2.99,-2.999,\cdots$ 的值,你得到的估算是什么?

(**b**) 用在 $x_0=-3$ 附近画图来支持你在(a)中的结论,再用(计算器上的)Zoom(推近、拉远功能键)和Trace(跟踪功能键)来估算 $x\to-3$ 时图形的 y 值.

(**c**) 代数地求 $\lim\limits_{x\to-3}f(x)$.

20. 设 $g(x)=\dfrac{x^2-2}{x-\sqrt{2}}$.

(**a**) 对点 $x=1.4,1.41,1.414$ 以及$\sqrt{2}$的逐次小数近似值处函数 g 的值列表.估算 $\lim\limits_{x\to\sqrt{2}}g(x)$.

(**b**) 用在 $x_0=\sqrt{2}$ 附近画图来支持你在(a)中的结论,并用 Zoom 和 Trace 来估算 $x\to\sqrt{2}$ 时图形的 y 值.

(**c**) 代数地求 $\lim\limits_{x\to\sqrt{2}}g(x)$.

21. 设 $G(x)=\dfrac{x+6}{x^2+4x-12}$.

(**a**) 对 $x=-5.9,-5.99,-5.999$ 等处 G 的值列表.然后估算 $\lim\limits_{x\to-6}G(x)$.如果代之以 G 在 $x=-6.1,-6.01,-6.001,\cdots$ 的值,你得到的估算是什么?

(**b**) 用画 G 的图形来支持你在(a)中的结论,并用 Zoom 和 Trace 来估算 $x\to-6$ 时图形的 y 值.

(**c**) 代数地求 $\lim\limits_{x\to-6}G(x)$.

22. 设 $h(x)=\dfrac{x^2-2x-3}{x^2-4x+3}$.

(**a**) 对 $x=2.9,2.99,2.999$ 等处 h 的值列表.然后估算$\lim\limits_{x\to3}h(x)$.如果代之以 h 在 $x=3.1,3.01,3.001,\cdots$ 的值,你得到的估算是什么?

(**b**) 用画 h 在 $x_0=3$ 附近的图形来支持你在(a)中的结论,并用 Zoom 和 Trace 来估算 $x\to3$ 时图形的 y 值.

(**c**) 代数地求$\lim\limits_{x\to3}h(x)$.

23. 设 $g(\theta)=\dfrac{\sin\theta}{\theta}$.

(**a**) 对从 $\theta_0=0$ 上方和下方趋于 0 的 θ 值处的 g 值列表.然后估算$\lim\limits_{\theta\to0}g(\theta)$.

(**b**) 用画 g 在 $\theta_0=0$ 附近的图形来支持你在(a)中的结论.

24. 设 $G(t)=\dfrac{1-\cos t}{t^2}$.

(**a**) 对从 $t_0=0$ 上方和下方趋于 0 的 t 值处的 G 值列表,然后估算$\lim\limits_{t\to0}G(t)$.

(**b**) 用画 G 在 $t_0=0$ 附近的图形来支持你在(a)中的结论.

25. 设 $f(x)=x^{1/(1-x)}$.

(**a**) 对从 $x_0=1$ 上方和下方趋于 1 的 t 值处f的值列表.$x\to1$ 时 f 看似有极限吗?如果有极限,极限值是什么?如果没有极限,为什么没有?

(b) 用画 f 在 $x_0=1$ 附近的图形支持你在(a)中的结论.

26. 设 $f(x)=\dfrac{3^x-1}{x}$.

(a) 对从 $x_0=0$ 上方和下方趋于 0 的 x 值处的 f 值列表. $x\to0$ 时 f 看似有极限吗?如果有极限,极限值是什么?如果没有极限,为什么没有?

(b) 用画 f 在 $x_0=0$ 附近的图形来支持你在(a)中的结论.

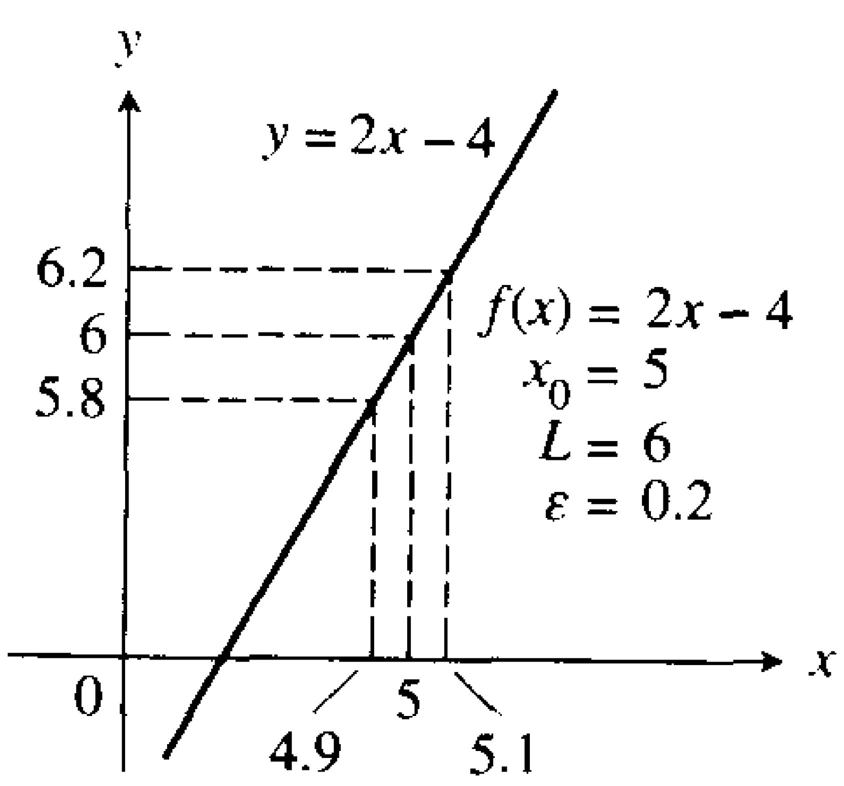
CD-ROM WEBsite

从图形求 δ

在题 27 – 30 中,利用图形求 $\delta>0$,使得所有满足 $0<|x-x_0|<\delta$ 的 x,有

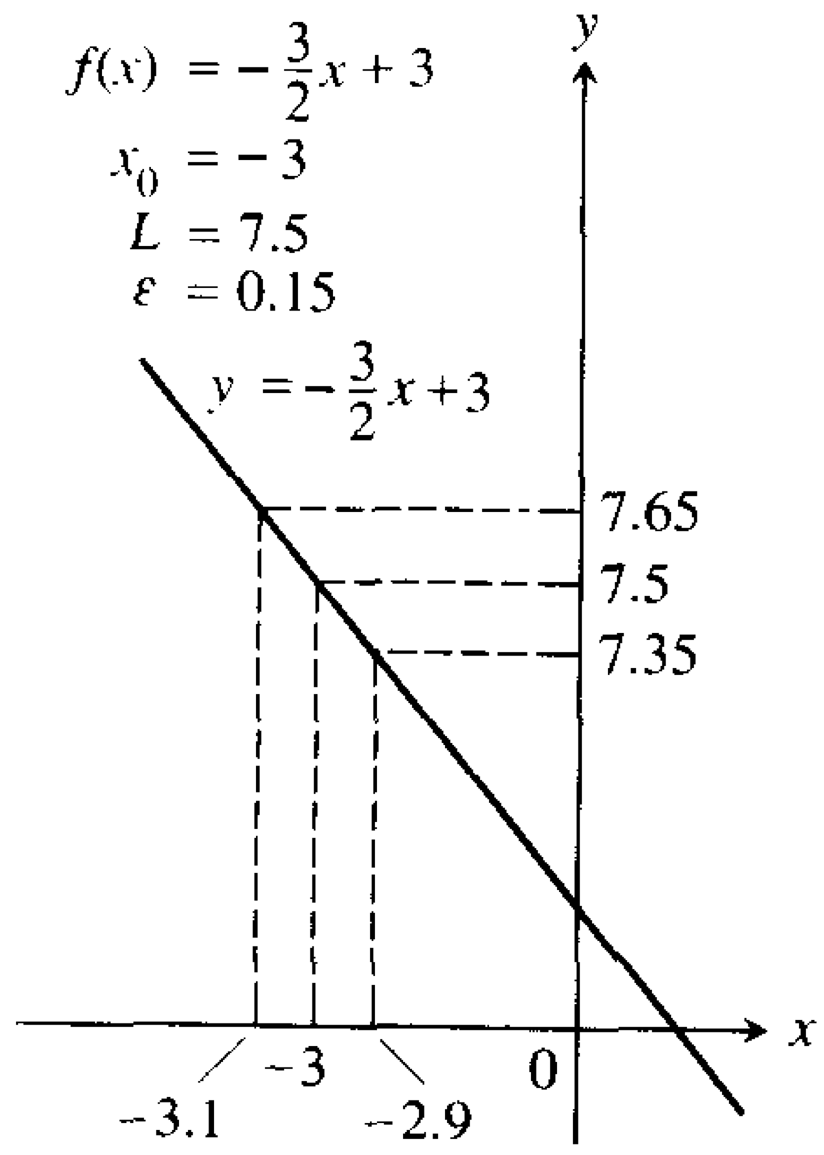
$$|f(x)-L|<\varepsilon.$$

27.



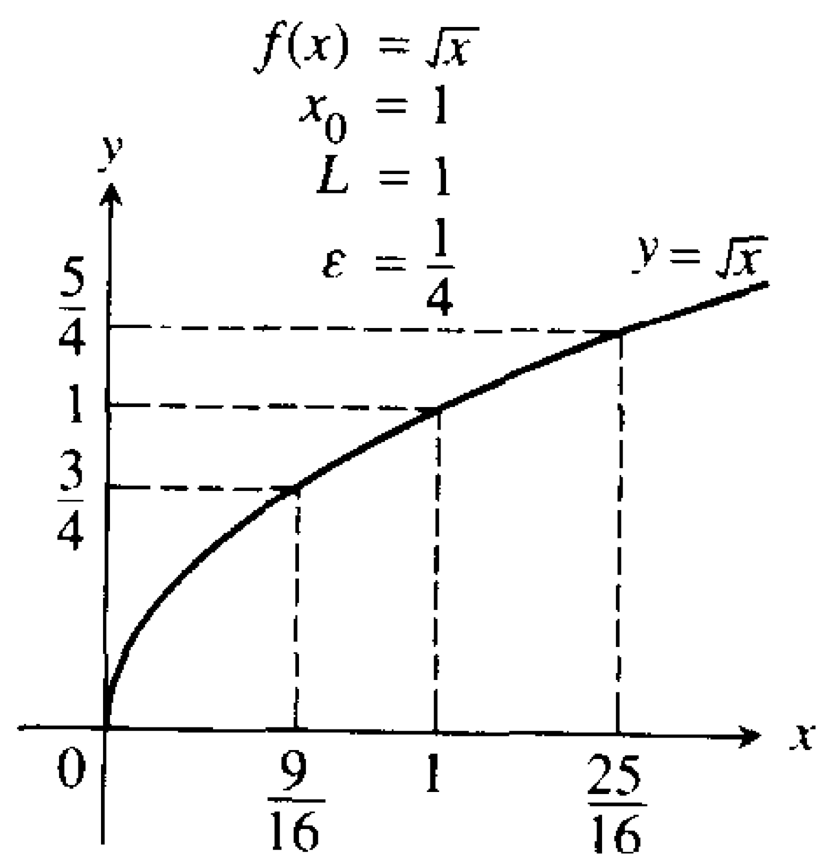
不按比例标记

28.

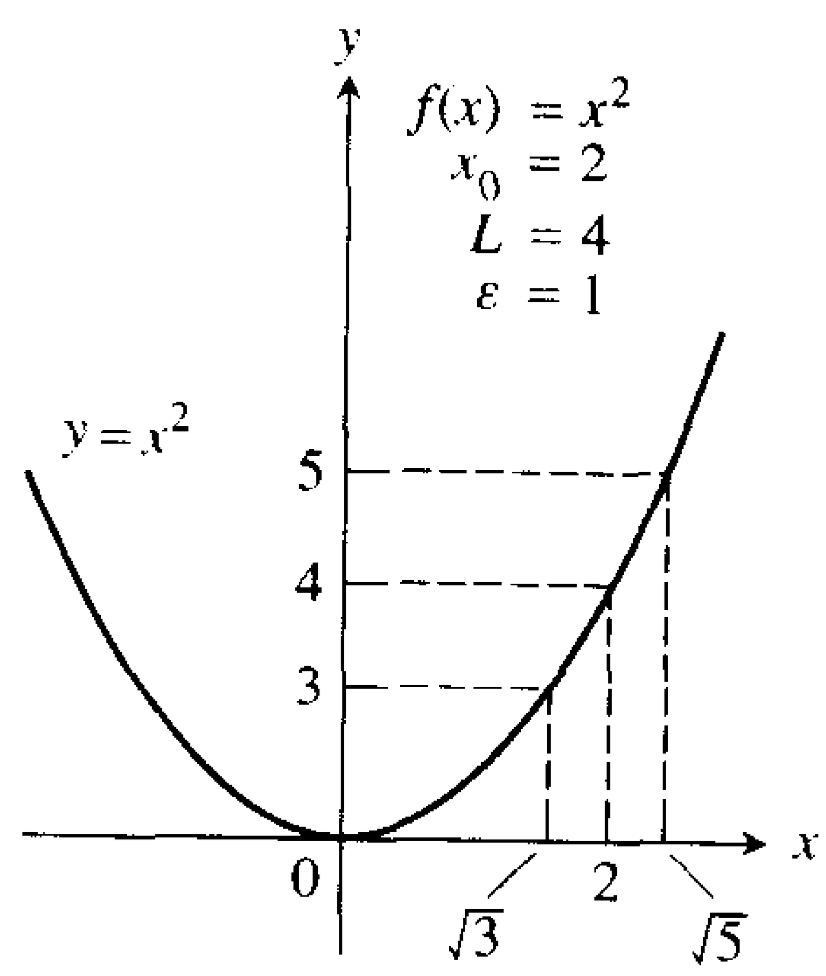


不按比例标记

29.



30.



不按比例标记

代数地求 δ

此外，需要总结出计算方法

题 31 – 36 中的每道题给出了函数 f 以及数 L, x_0 和 $\varepsilon>0$. 对每道题求 x_0 的一个开区间,在该区间上不等式 $|f(x)-L|<\varepsilon$ 成立. 然后给出 $\delta>0$ 的值使得对满足 $0<|x-x_0|<\delta$ 的所有 x,不等式 $|f(x)-L|<\varepsilon$ 成立.

31. $f(x)=x+1,\quad L=5, x_0=4, \varepsilon=0.01$

32. $f(x)=2x-2,\quad L=-6, x_0=-2, \varepsilon=0.02$

33. $f(x)=\sqrt{x+1},\quad L=1, x_0=0, \varepsilon=0.1$

34. $f(x)=\sqrt{19-x},\quad L=3, x_0=10, \varepsilon=1$

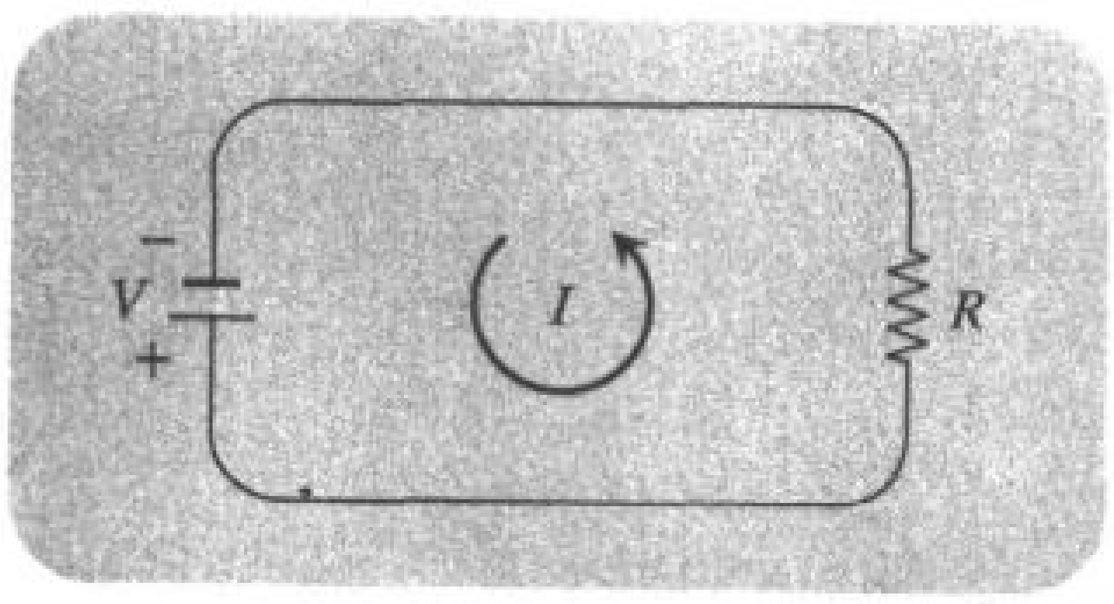
35. $f(x)=\frac{1}{x},\quad L=\frac{1}{4}, x_0=4, \varepsilon=0.05$

36. $f(x)=x^2,\quad L=3, x_0=\sqrt{3}, \varepsilon=0.1$

理论和例子

37. **磨光发动机气缸**　在磨光发动机气缸使之变窄到横截面积为 9 平方英寸之前,你们需要知道它和标准的气缸直径 $x_0=3.385$ 英寸的偏差有多少.容许所要求的 9 平方英寸面积有 0.01 平方英寸以内的误差.为求容许偏差,设 $A=\pi\left(\frac{x}{2}\right)^2$ 并求区间,在该区间内所有的 x 都有 $|A-9|\leqslant 0.01$.你找到的区间是什么?

38. **制造电阻**　如附图所示的电流的欧姆定律为 $V=RI$.在这个方程中,V 是常电压,I 是以安培计的电流,而 R 是以欧姆计的电阻.你们的公司被要求提供某电路中的电阻,其中 $V=120$ 伏特而 I 为 5 ± 0.1 安培.R 应在什么区间能使电流在其目标值 $I_0=5$ 的 0.1 安培的误差范围内?



39. **控制输出**　设 $f(x)=\sqrt{3x-2}$.

(a) 证明 $\lim\limits_{x\to2}f(x)=2=f(2)$.

(b) 利用图形来估计 a 和 b,使得只要 $a<x<b$,就有 $1.8<f(x)<2.2$.

(c) 利用图形来估计 a 和 b,使得只要 $a<x<b$,就有 $1.99<f(x)<2.01$.

40. **控制输出**　设 $f(x)=\sin x$.

(a) 求 $f\left(\frac{\pi}{6}\right)$.

(b) 利用图形估计关于 $x=\frac{\pi}{6}$ 的区间 (a,b),使得只要 $a<x<b$,就有 $0.3<x<0.7$.

(c) 利用图形估计关于 $x=\frac{\pi}{6}$ 的区间 (a,b),使得只要 $a<x<b$,就有 $0.49<f(x)<0.51$.

41. **自由落体**　一个水气球从高出地面很多的窗口掉下,t 秒后的下落距离为 $y=4.9t^2$.求气球的

(a) 下落头 3 秒的平均速度.　　(b) 瞬间 $t=3$ 的速度.

42. **在空气稀薄的小行星上的自由落体**　在空气稀薄的小行星上的一块岩石从静止突然下落,t 秒后的下落距离为 $y=gt^2$,g 是一常数.假设下落到离落点为 20 米深的裂隙的底部并在 4 秒后击到底部.

(a) 求 g 的值.　　(b) 求落体的平均速度.

(c) 岩石以多大的速度击到底部?

在题 43 – 46 中,填完下表并说明你认为 $\lim\limits_{x\to0}f(x)$ 等于什么?

(a)

x	-0.1	-0.01	-0.001	-0.0001	…
$f(x)$	?	?	?	?	

(b)

x	0.1	0.01	0.001	0.0001	…
$f(x)$	?	?	?	?	

43. $f(x) = x\sin\dfrac{1}{x}$　　44. $f(x) = \sin\dfrac{1}{x}$　　45. $f(x) = \dfrac{10^x - 1}{x}$　　46. $f(x) = x\sin(\ln|x|)$

计算机探究

极限的图形估计

在题 47 – 50 中，利用 CAS 来完成以下各步：

(a) 画 x_0 附近函数的图形.　　(b) 从你的作图中猜测极限值.

(c) 符号地计算极限值. 该值和你的猜测值有多接近？

47. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^4 - 16}{x - 2}$　　48. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x\sin x}$　　49. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^3 - x^2 - 5x - 3}{(x+1)^2}$　　50. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2 - 9}{\sqrt{x^2+7} - 4}$

从图形求 δ

在题 51 – 54 中，你将进一步探究怎样图形地求 δ. 利用 CAS 来完成以下各步：

(a) 画 x_0 附近函数 $y = f(x)$ 的图形.

(b) 猜测极限值 L 并符号地计算该极限值，看看你的猜测是否正确.

(c) 用值 $\varepsilon = 0.2$，把边界线 $y_1 = L - \varepsilon$ 和 $y_2 = L + \varepsilon$ 以及 x_0 附近函数 f 的图形画在一起.

(d) 从(c)的图估算一个 $\delta > 0$ 使得对满足 $0 < |x - x_0| < \delta$ 的所有 x，有 $|f(x) - L| < \varepsilon$. 把 f, y_1 和 y_2 在区间 $0 < |x - x_0| < \delta$ 上画出来以检验你的估算. 就你的视窗，采用

$$x_0 - 2\delta \leqslant x \leqslant x_0 + 2\delta \quad 和 \quad L - 2\varepsilon \leqslant y \leqslant L + 2\varepsilon.$$

如果有函数值位于 $[L-\varepsilon, L+\varepsilon]$ 之外，那么你选的 δ 就太大了. 用小一点的 δ 估值再试一遍.

(e) 逐次对 $\varepsilon = 0.1, 0.05$ 和 0.001 重复(c)和(d).

51. $f(x) = \dfrac{x^4 - 81}{x - 3}, x_0 = 3$　　52. $f(x) = \dfrac{\sin 2x}{3x}, x_0 = 0$

53. $f(x) = \dfrac{5x^3 + 9x^2}{2x^5 + 3x^2}, x_0 = 0$　　CD-ROM WEBsite　54. $f(x) = \dfrac{x(1-\cos x)}{x - \sin x}, x_0 = 0$

1.2 求极限和单侧极限

极限性质 • 代数地消去零分母 • 三明治(夹逼)定理 • 单侧极限 • 与$(\sin\theta)/\theta$有关的极限

CD-ROM WEBsite 历史短文 极限

在前一节中，我们通过考察图形和数值模式来求极限. 本节中，我们将看到利用算术运算和一些基本法则可以代数地计算许多极限.

极限性质

下一个定理告诉我们怎样去计算已知极限的函数的算术组合而成的函数的极限. 这些法则将在附录 2 中加以证明.

定理 1　极限法则　熟练掌握　需要细看

如果 L, M, c 和 k 都是实数，且

$$\lim_{x \to c} f(x) = L \quad \text{和} \quad \lim_{x \to c} g(x) = M, \text{那么}$$

1. 和法则：
$$\lim_{x \to c}(f(x) + g(x)) = L + M$$
两个函数之和的极限等于它们的极限之和.

2. 差法则：
$$\lim_{x \to c}(f(x) - g(x)) = L - M$$
两个函数之差的极限等于它们的极限之差.

3. 积法则：
$$\lim_{x \to c}(f(x) \cdot g(x)) = L \cdot M$$
两个函数之积的极限等于它们的极限之积.

4. 乘常数法则：
$$\lim_{x \to c}(k \cdot f(x)) = k \cdot L$$
常数乘一个函数后的极限等于该常数乘该函数的极限.

5. 商法则：
$$\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L}{M}, \quad M \neq 0$$
两个函数之商的极限等于它们的极限之商，如果分母的极限不为零.

6. 幂法则：如果 r 和 s 都是整数，$s \neq 0$，那么
$$\lim_{x \to c}(f(x))^{\frac{r}{s}} = L^{\frac{r}{s}}$$
只要 $L^{\frac{r}{s}}$ 是实数.

函数的有理幂的极限等于该函数极限的同样的幂，如果后者是实数.

以下是怎样用定理 1 来求多项式和有理函数的极限的一些例子.

例 1（运用极限法则）　利用 $\lim\limits_{x \to c} k = k$ 和 $\lim\limits_{x \to c} x = c$ 以及极限性质求下列极限.

(a) $\lim\limits_{x \to c}(x^3 + 4x^2 - 3)$　　(b) $\lim\limits_{x \to c} \dfrac{x^4 + x^2 - 1}{x^2 + 5}$　　(c) $\lim\limits_{x \to -2} \sqrt{4x^2 - 3}$

解

(a)
$$\begin{aligned}\lim_{x \to c}(x^3 + 4x^2 - 3) &= \lim_{x \to c} x^3 + \lim_{x \to c} 4x^2 - \lim_{x \to c} 3 && \text{和、差法则}\\ &= c^3 + 4c^2 - 3 && \text{积法则和乘常数法则}\end{aligned}$$

(b)
$$\begin{aligned}\lim_{x \to c} \frac{x^4 + x^2 - 1}{x^2 + 5} &= \frac{\lim\limits_{x \to c}(x^4 + x^2 - 1)}{\lim\limits_{x \to c}(x^2 + 5)} && \text{商法则}\\ &= \frac{\lim\limits_{x \to c} x^4 + \lim\limits_{x \to c} x^2 - \lim\limits_{x \to c} 1}{\lim\limits_{x \to c} x^2 + \lim\limits_{x \to c} 5} && \text{和、差法则}\\ &= \frac{c^4 + c^2 - 1}{c^2 + 5} && \text{幂或积法则}\end{aligned}$$

(c)
$$\lim_{x \to -2} \sqrt{4x^2 - 3} = \sqrt{\lim_{x \to -2}(4x^2 - 3)} \qquad \text{幂法则}, n = \frac{1}{2}$$

$$= \sqrt{\lim_{x \to -2} 4x^2 - \lim_{x \to -2} 3} \qquad \text{和、差法则}$$

$$= \sqrt{4(-2)^2 - 3} \qquad \text{积法则和乘常数法则}$$

$$= \sqrt{16 - 3}$$

$$= \sqrt{13}$$

正如例 1 所表明的，定理 1 中的公式使我们得出结论：可用代入法来求多项式函数的极限．对于有理函数也可以这样求极限，如果有理函数的分母在计算极限的点处不等于零．

定理 2　可用代入法求多项式的极限

如果 $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0$，那么

$$\lim_{x \to c} P(x) = P(c) = a_n c^n + a_{n-1}c^{n-1} + \cdots + a_0.$$

定理 3　可用代入法求有理函数的极限，如果分母的极限不等于零

如果 $P(x)$ 和 $Q(x)$ 都是多项式且 $Q(c) \neq 0$，那么

$$\lim_{x \to c} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(c)}{Q(c)}.$$

例 2（有理函数的极限）

$$\lim_{x \to -1} \frac{x^3 + 4x^2 - 3}{x^2 + 5} = \frac{(-1)^3 + 4(-1)^2 - 3}{(-1)^2 + 5} = \frac{0}{6} = 0$$

这个结果类似于例 1 中的第二个极限，$c = -1$，现在是一步完成．

代数地消去零分母

仅当有理函数的分母在极限点 c 处不为零时才能应用定理 3．如果分母为零，消去分子和分母的公因子可能会把公式化为分母在 c 处不再为零的分式．如果能这样做的话，我们就可以对简化后的分式用代入法求得极限．

注：识别公因子　可以证明，如果 $Q(x)$ 是一个多项式且 $Q(c) = 0$，那么 $(x - c)$ 是 $Q(x)$ 的一个因子．因此，如果有理函数的分子和分母在 $x = c$ 处都为零的话，那么它们就有公因子 $(x - c)$．

例 3（消去公因子）　计算

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 + x - 2}{x^2 - x}.$$

因式分解，消去公因子

解　我们不能代入 $x = 1$，因为这时分母为零．我们测试一下分子，看看它是否也在 $x = 1$ 处等于零．确实如此，所以分子和分母有公因子 $(x - 1)$．消去 $(x - 1)$ 后给出了 $x \neq 1$ 时和原分式取同样值的更为简单的分式：

$$\frac{x^2 + x - 2}{x^2 - x} = \frac{(x-1)(x+2)}{x(x-1)} = \frac{x+2}{x}, \qquad \text{如果 } x \neq 1.$$

利用这个更简单的分式，我们用代入法求得 $x \to 1$ 时的极限：

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2+x-2}{x^2-x}=\lim_{x\to 1}\frac{x+2}{x}=\frac{1+2}{1}=3.$$

参见图 1.15.

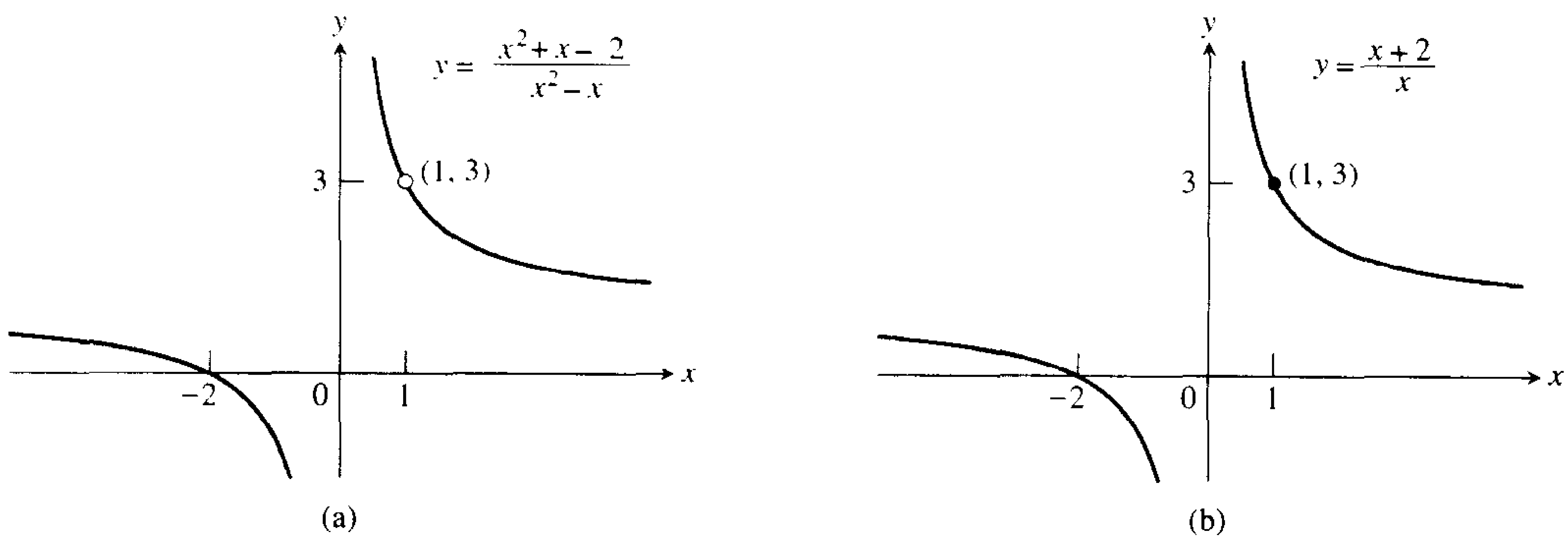


图 1.15　除去 $x=1$ 外,(a) 中 $f(x)=\dfrac{x^2+x-2}{x^2-x}$ 的图形和(b) 中 $g(x)=\dfrac{x+2}{x}$ 的图形是一样的.在 $x=1$ 处 f 没有定义.当 $x\to 1$ 时两个函数有同样的极限.

例 4(创建并消去公因子)　计算

$$\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{2+h}-\sqrt{2}}{h}.$$

解　我们不能代入 $h=0$,而且分子和分母又没有明显可见的公因子.但我们可对分子和分母同乘以$(\sqrt{2+h}-\sqrt{2})$的共轭表达式$\sqrt{2+h}+\sqrt{2}$来创建一个公因子:

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{2+h}-\sqrt{2}}{h}&=\frac{\sqrt{2+h}-\sqrt{2}}{h}\cdot\frac{\sqrt{2+h}+\sqrt{2}}{\sqrt{2+h}+\sqrt{2}}\\&=\frac{2+h-2}{h(\sqrt{2+h}+\sqrt{2})}\\&=\frac{h}{h(\sqrt{2+h}+\sqrt{2})}&&\text{有公因子 } h\\&=\frac{1}{\sqrt{2+h}+\sqrt{2}}.&&h\neq 0\text{,消去 } h.\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{2+h}-\sqrt{2}}{h}&=\lim_{h\to 0}\frac{1}{\sqrt{2+h}+\sqrt{2}}\\&=\frac{1}{\sqrt{2+0}+\sqrt{2}}&&\text{在 } h=0 \text{ 处分母不为零,代入}\\&=\frac{1}{2\sqrt{2}}.\end{aligned}$$

注意$\dfrac{\sqrt{2+h}-2}{h}$是曲线 $y=\sqrt{x}$ 上过点 $P(2,\sqrt{2})$ 和 $Q(2+h,\sqrt{2+h})$ 的割线斜率的极限.

图 1.16 展示了 $h>0$ 时的割线. 我们的计算表明 $\frac{1}{2\sqrt{2}}$ 是点 Q 沿曲线从两边趋于点 P 时割线斜率的极限.

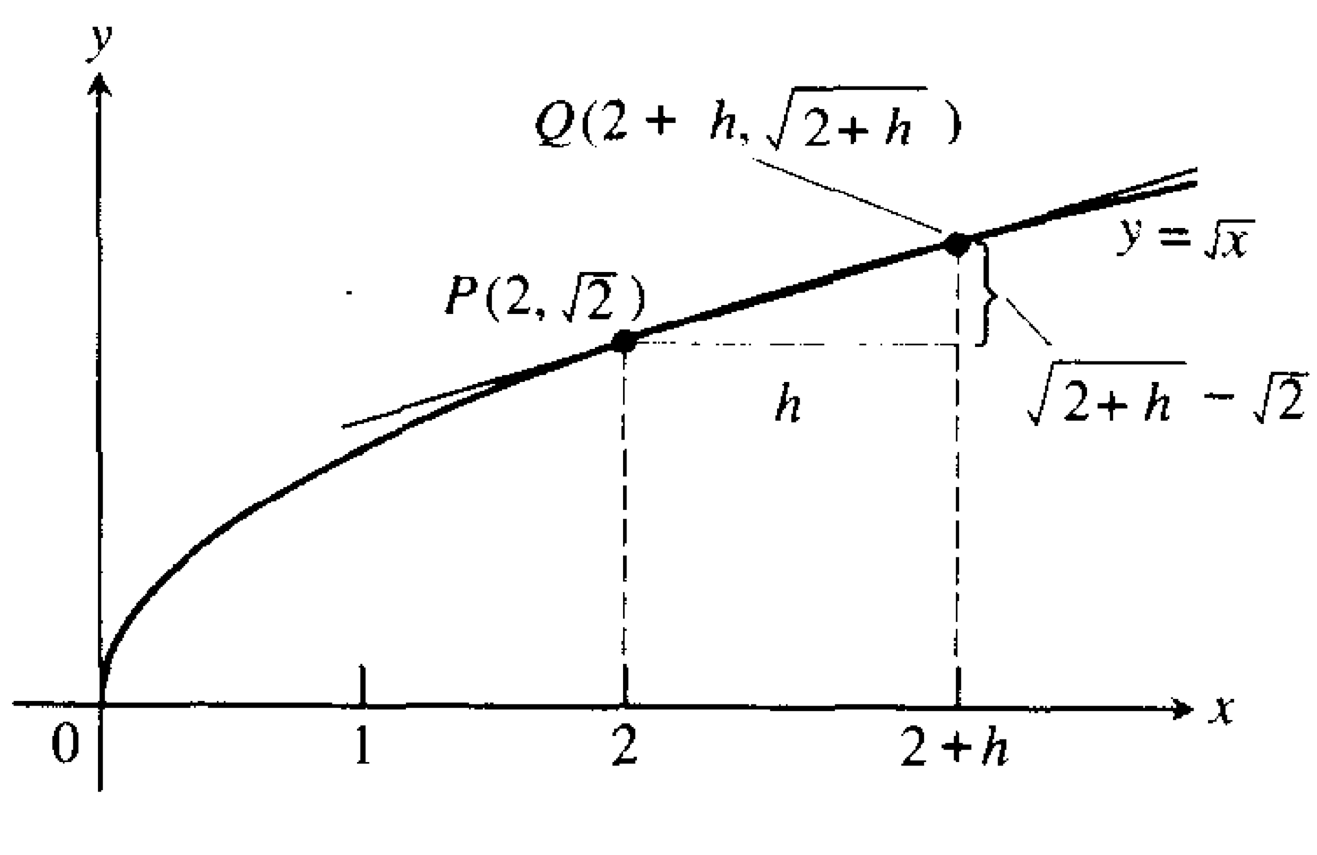


图 1.16　当 Q 沿曲线趋近 P 时割线 PQ 的斜率 $\frac{\sqrt{2+h}-\sqrt{2}}{h}$ 的极限为 $\frac{1}{2\sqrt{2}}$.(例 4)

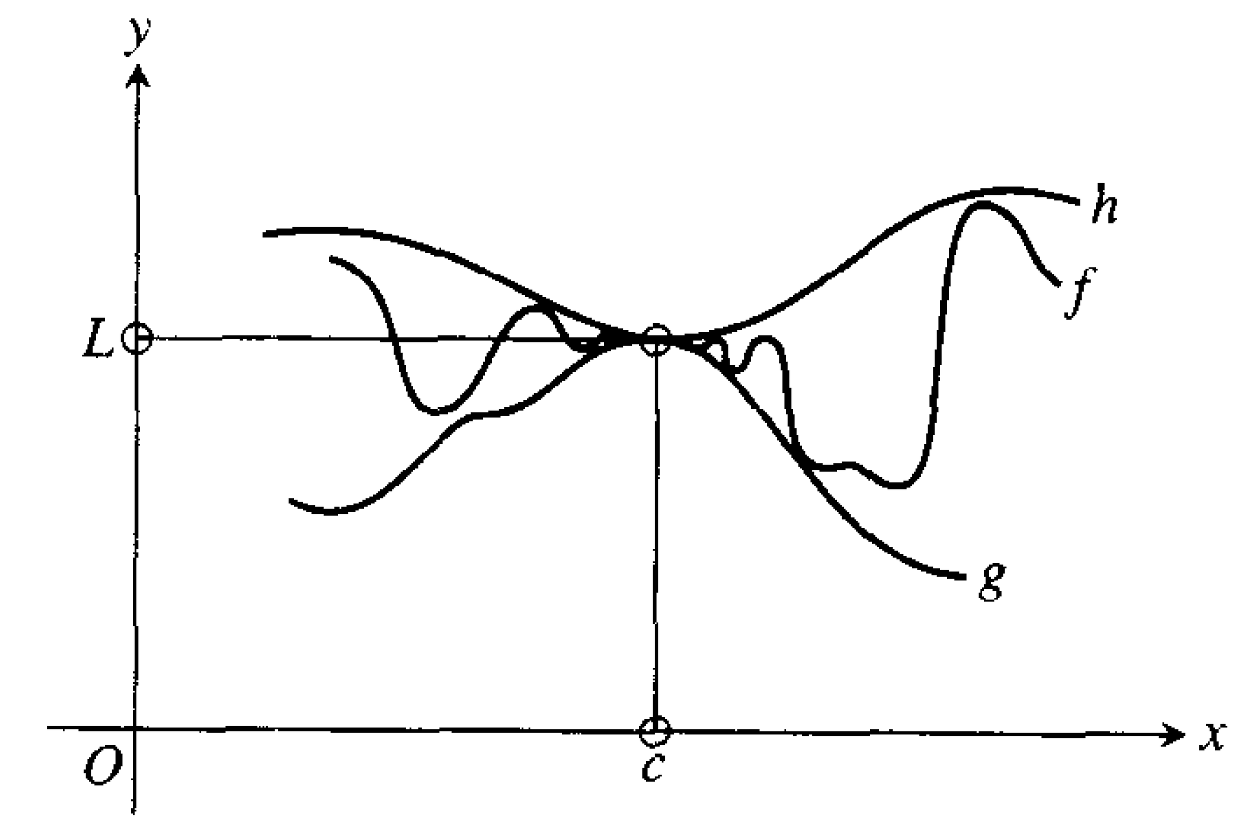


图 1.17　f 的图形夹在 g 和 h 的图形之间.

THEOREM 4—The Sandwich Theorem Suppose that $g(x) \le f(x) \le h(x)$ for all x in some open interval containing c, except possibly at $x=c$ itself. Suppose also that

$$\lim_{x\to c} g(x) = \lim_{x\to c} h(x) = L.$$

Then $\lim_{x\to c} f(x) = L$.

三明治(夹逼)定理

如果我们不能直接求极限,我们可以用三明治(夹逼)定理间接地求极限. 该定理适用于函数 f 的值夹在另外两个函数 g 和 h 之间. 如果 $x\to c$ 时 g 和 h 有相同的极限,那么 f 也有同样的极限(图 1.17).

注: 三明治(夹逼)定理有时也称为挤压定理或夹挤定理.

定理 4　三明治(夹逼)定理
假设在包含 c 在内的某个开区间中除 $x=c$ 外所有的 x,有 $g(x)\le f(x)\le h(x)$. 又假设

$$\lim_{x\to c} g(x) = \lim_{x\to c} h(x) = L,$$

那么 $\lim_{x\to c} f(x) = L$.

你们在附录 2 可找到定理 4 的证明.

例 5(运用三明治(夹逼)定理)　给定

$$1-\frac{x^2}{4} \le u(x) \le 1+\frac{x^2}{2} \quad 对所有\ x\ne 0,$$

求 $\lim_{x\to 0} u(x)$.

解

$$\lim_{x\to 0}\left(1-\frac{x^2}{4}\right)=1 \quad 以及 \quad \lim_{x\to 0}\left(1+\frac{x^2}{2}\right)=1,$$

三明治(夹逼)定理蕴涵着

$$\lim_{x\to 0} u(x) = 1 \quad (图\ 1.18).$$

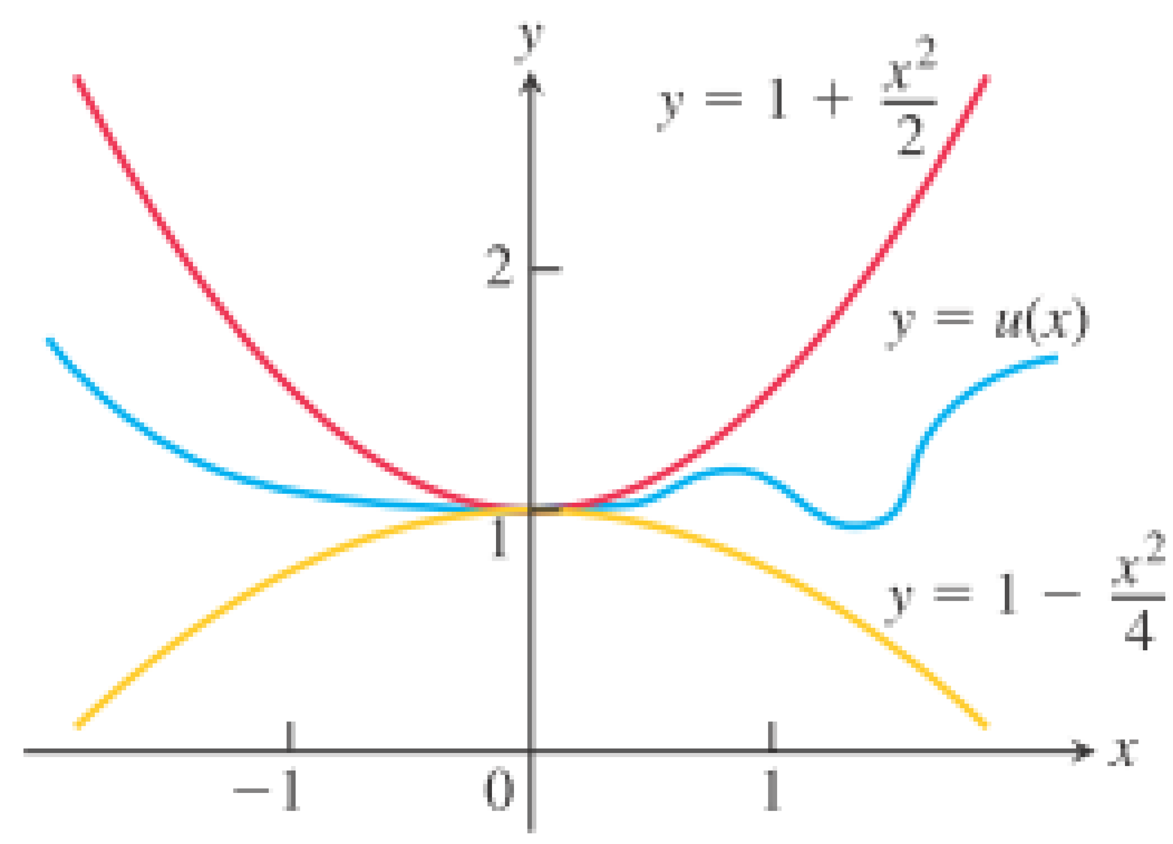


图 1.18　其图形位于 $y=1+x^2/2$ 和 $y=1-x^2/4$ 之间的区域的任何函数 $u(x)$ 当 $x\to 0$ 时有极限 1.

CD-ROM
WEBsite
历史传记

Euclid
(Ca.365BC)

例 6(三明治(夹逼)定理的另一个应用)　(**a**)(图 1.19a) 因为 $-|\theta| \leqslant \sin\theta \leqslant |\theta|$ 对一切 θ 成立,而 $\lim\limits_{\theta\to 0}(-|\theta|) = \lim\limits_{\theta\to 0}|\theta| = 0$,我们有

$$\lim_{\theta\to 0}\sin\theta = 0.$$

(**b**)(图 1.19b) 因为 $0 \leqslant 1-\cos\theta \leqslant |\theta|$ 对一切 θ 成立,我们有 $\lim\limits_{\theta\to 0}(1-\cos\theta) = 0$,或

$$\lim_{\theta\to 0}\cos\theta = 1.$$

(**c**) 对任何函数 $f(x)$,如果 $\lim\limits_{x\to c}|f(x)| = 0$,则 $\lim\limits_{x\to c}f(x) = 0$. 论证: $-|f(x)| \leqslant f(x) \leqslant |f(x)|$ 以及 $-|f(x)|$ 和 $|f(x)|$ 当 $x\to c$ 时有极限 0.

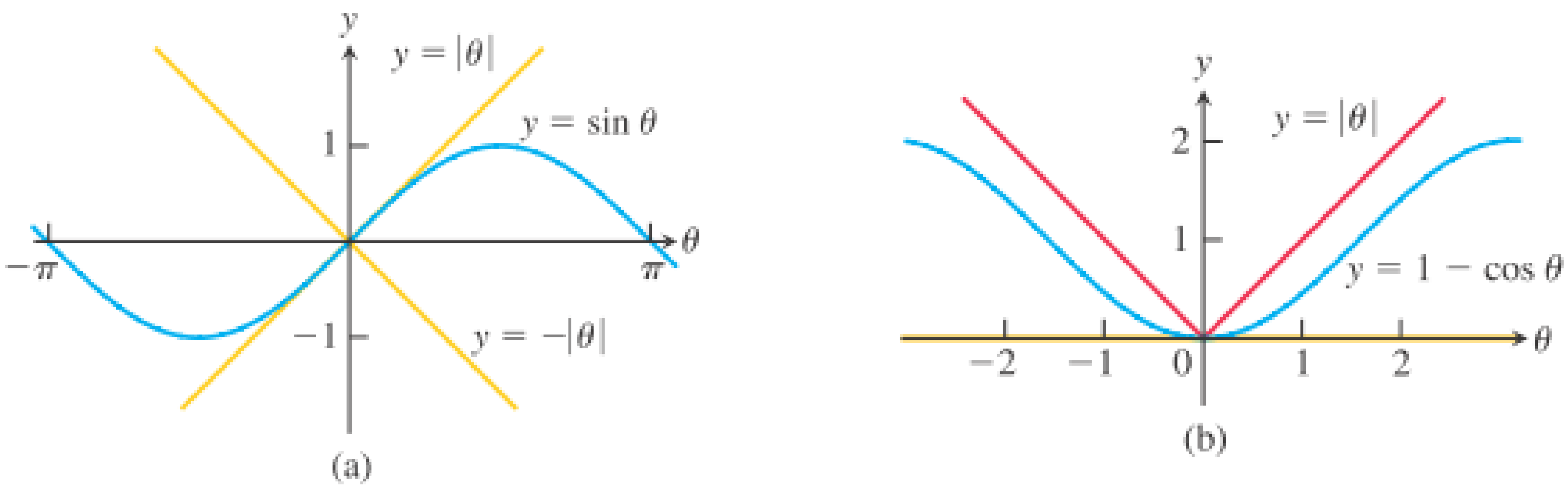


图 1.19　三明治(夹逼)定理确认(a) $\lim\limits_{\theta\to 0}\sin\theta = 0$ 和(b) $\lim\limits_{\theta\to 0}(1-\cos\theta) = 0$.

CD-ROM
WEBsite

单侧极限

为使 $x\to a$ 时有极限 L,函数 f 必须在 a 的双侧有定义,而且当 x 从 a 的双侧趋于 a 时函数值 $f(x)$ 必须趋于 L. 因为这点,通常的极限都是**双侧**极限.

如果在 a 双侧极限不存在,仍有可能存在单侧极限,即只是从单侧趋向的极限. 如果是从右侧趋向,该极限就是**右侧**极限;如果是从左侧趋向,该极限就是**左侧**极限.

函数 $f(x) = x/|x|$(图 1.20) 当 x 从右边趋于零时有极限 1,当 x 从左侧趋于零时有极限 -1.

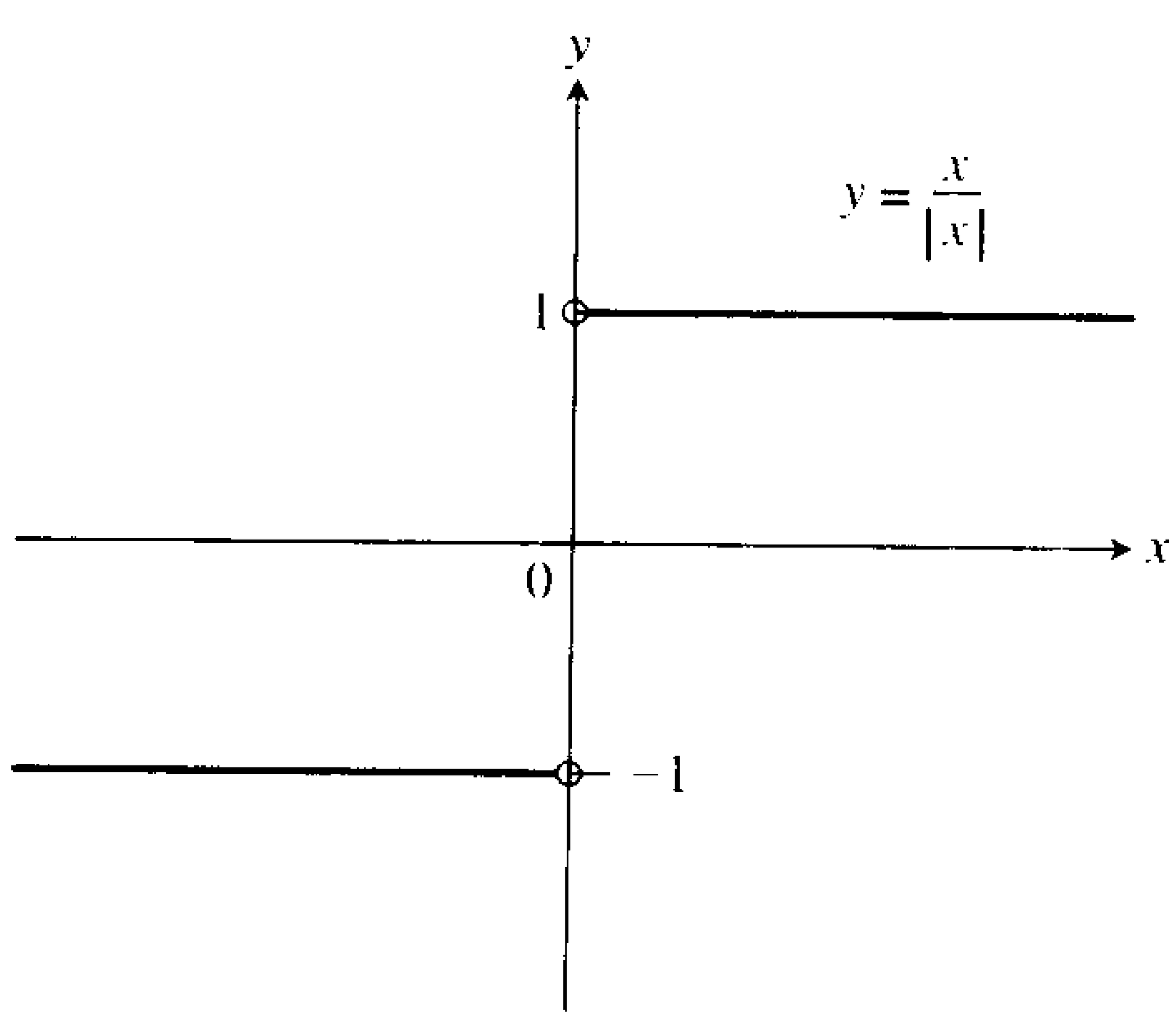
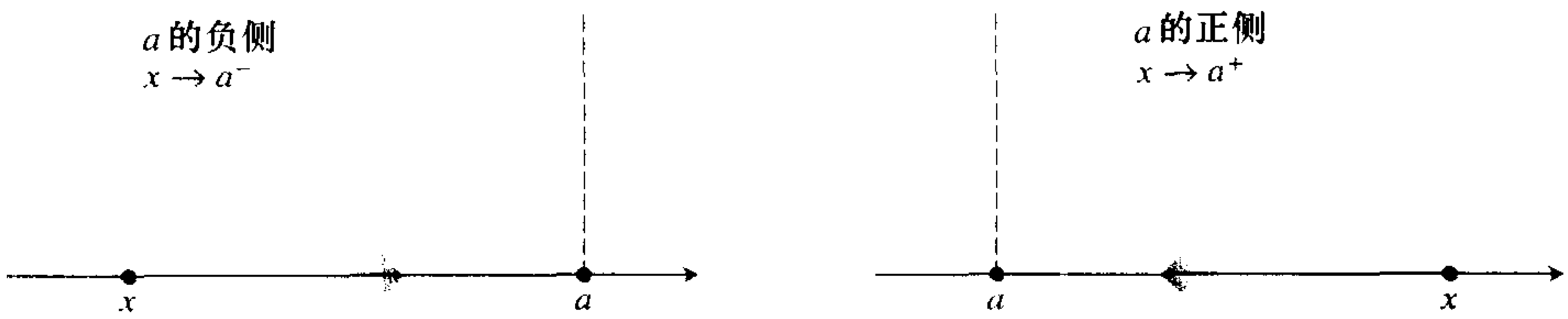


图 1.20　在原点不同的右侧和左侧极限.



注:关于"+"和"−" 在单侧极限中正负号的含义为:

$x\to a^-$ 意即 x 从小于 a 的方向,即从 a 的负侧趋于 a.

$x\to a^+$ 意即 x 从大于 a 的方向,即从 a 的正侧趋于 a.

定义　右侧极限和左侧极限

设 $f(x)$ 定义在(a,b)上,$a<b$.如果当 x 在区间(a,b)内趋于 a 时 $f(x)$ 任意接近地趋于 L,那么我们就说 f 在 a 有右侧极限,并记作:

$$\lim_{x\to a^+} f(x)=L.$$

设 $f(x)$ 定义在(c,a)上,$c<a$.如果当 x 在区间(c,a)内趋于 a 时 $f(x)$ 任意接近地趋于 M,那么我们就说 f 在 a 有左侧极限,并记作:

$$\lim_{x\to a^-} f(x)=M.$$

对图 1.20 中的函数 $f(x)=x/|x|$,我们有

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=1 \quad 以及 \quad \lim_{x\to 0^-} f(x)=-1.$$

例 7(半圆的单侧极限)　$f(x)=\sqrt{4-x^2}$ 的定义域是$[-2,2]$;它的图形是图 1.21 中的半圆.我们有

$$\lim_{x\to -2^+}\sqrt{4-x^2}=0 \quad 以及 \quad \lim_{x\to 2^-}\sqrt{4-x^2}=0.$$

该函数在 $x=-2$ 处没有左侧极限或在 $x=2$ 处没有右侧极限.该函数在 $x=-2$ 或 $x=2$ 处没有通常的双侧极限.

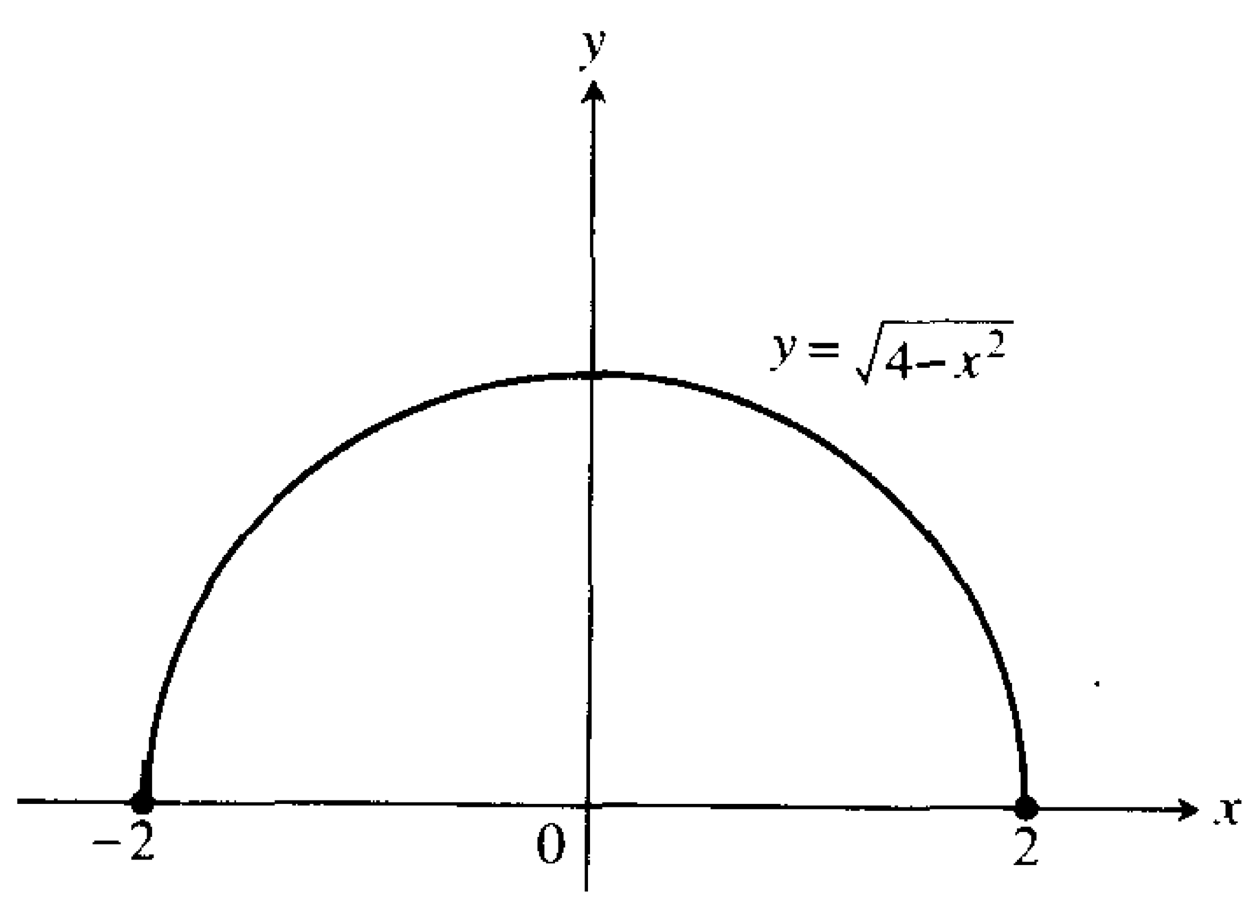


图 1.21　$\lim\limits_{x\to 2^-}\sqrt{4-x^2}=0$ 以及 $\lim\limits_{x\to -2^+}\sqrt{4-x^2}=0$.

单侧极限具有定理 1 列出的所有性质.两个函数之和的右侧极限等于它们的右侧极限之

和，等等. 多项式和有理函数的极限定理对单侧极限成立，三明治（夹逼）定理对单侧极限同样是成立的.

单侧和双侧极限以下列方式相关联：

定理 5　单侧极限和双侧极限之间的关系　函数存在极限的条件

当 $x \to c$ 时函数 $f(x)$ 有极限当且仅当 f 的左侧极限和右侧极限存在且相等：

$$\lim_{x\to c} f(x) = L \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{x\to c^-} f(x) = L \quad 且 \quad \lim_{x\to c^+} f(x) = L.$$

注：符号 $\Leftrightarrow$　符号 $\Leftrightarrow$ 念作"当且仅当". 这是符号 $\Rightarrow$（蕴涵、推出）和 $\Leftarrow$（由…推出）的组合.

例 8　图 1.22 中图示的函数的极限

在 $x = 0$：$\lim_{x\to 0^+} f(x) = 1$，

$\lim_{x\to 0^-} f(x)$ 和 $\lim_{x\to 0} f(x)$ 不存在. 函数在 $x = 0$ 的左侧没有定义.

在 $x = 1$：$\lim_{x\to 1^-} f(x) = 0$ 尽管 $f(1) = 1$，

$\lim_{x\to 1^+} f(x) = 1$，

$\lim_{x\to 1} f(x)$ 不存在，因左、右侧极限不相等.

在 $x = 2$：$\lim_{x\to 2^-} f(x) = 1$，$\lim_{x\to 2^+} f(x) = 1$，

$\lim_{x\to 2} f(x) = 1$ 尽管 $f(2) = 2$.

在 $x = 3$：$\lim_{x\to 3^-} f(x) = \lim_{x\to 3^+} f(x) = \lim_{x\to 3} f(x) = f(3) = 2$.

在 $x = 4$：$\lim_{x\to 4^-} f(x) = 1$ 尽管 $f(4) \neq 1$，

$\lim_{x\to 4^+} f(x)$ 和 $\lim_{x\to 4} f(x)$ 不存在. 函数在 $x = 4$ 的右侧没有定义.

在 $[0,4]$ 中任何其他点 a，$f(x)$ 有极限 $f(a)$.

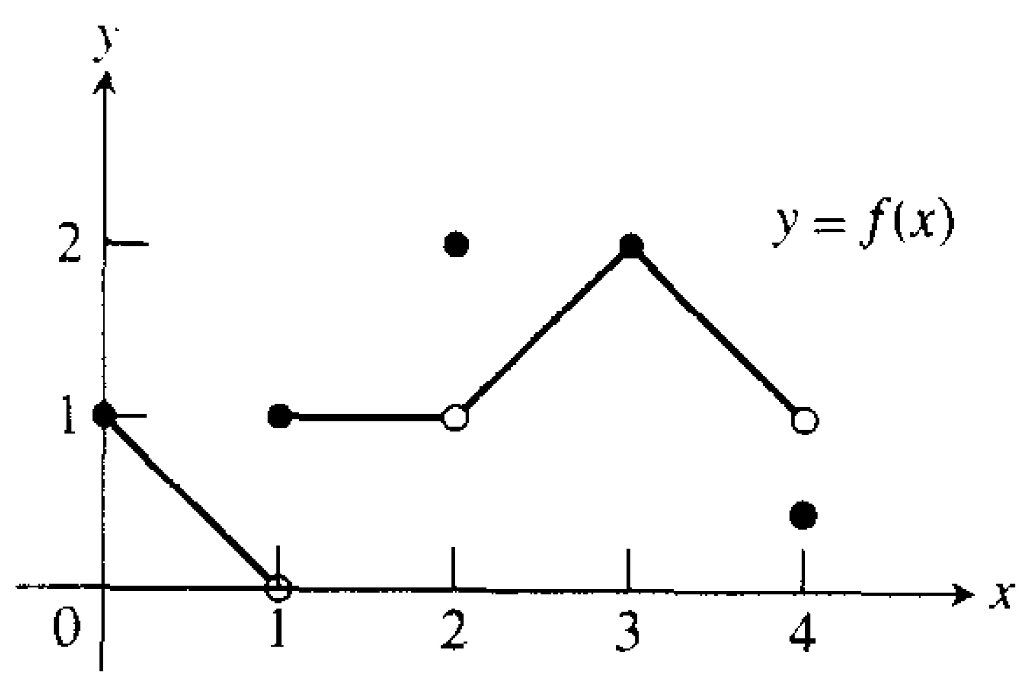


图 1.22　例 8 中函数的图形.

迄今为止考察过的函数在感兴趣的每一点处都有某种类型的极限. 一般情况不是这样的.

例 9（振荡太厉害的函数）　证明 $y = \sin(1/x)$ 当 x 无论从哪一侧趋于零时都没有极限（图 1.23）.

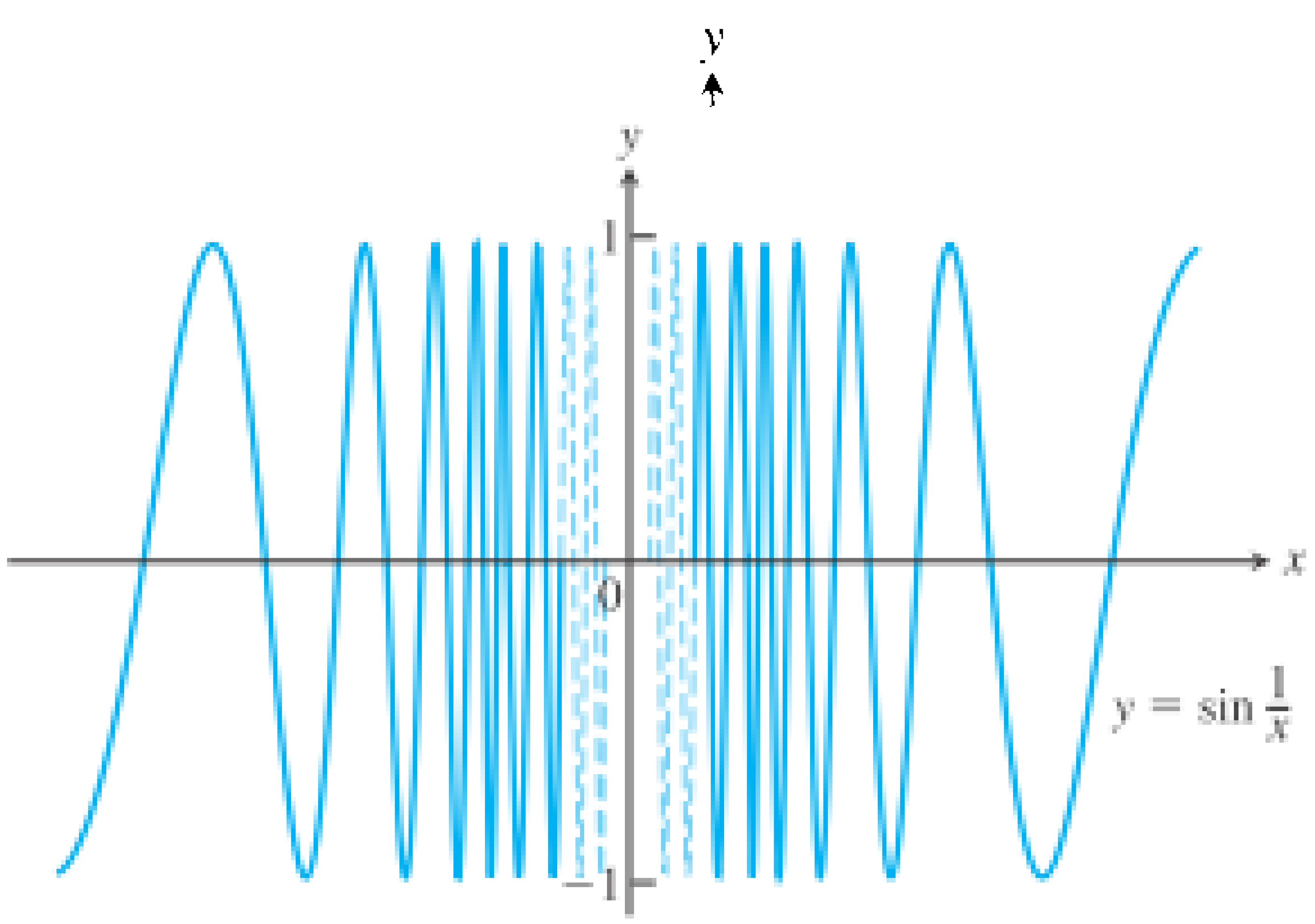
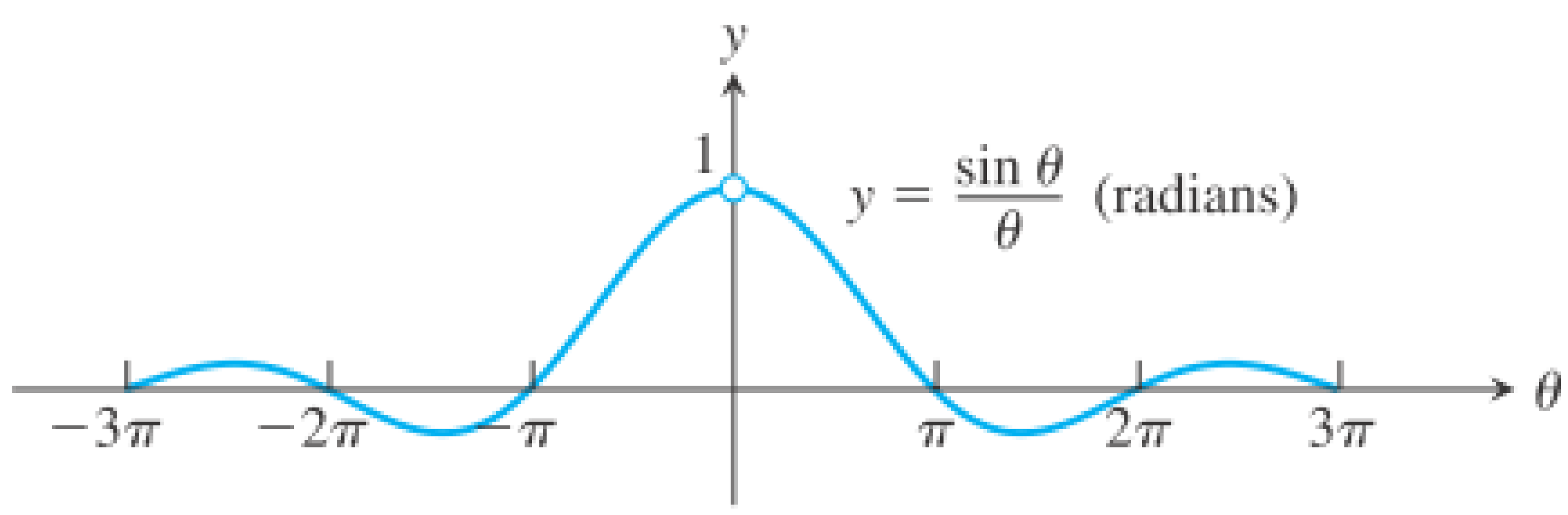


图 1.23　当 $x \to 0$ 时函数 $\sin(1/x)$ 既没有右侧极限也没有左侧极限.（例 9）

解 当 x 趋于零时，其倒数 $1/x$ 无限增大而 $\sin(1/x)$ 的值在 -1 和 1 之间重复循环取值．不存在数 L，使得 x 趋于零时 $f(x)$ 越来越接近 L，甚至把 x 限制为正值或负值时情况也是这样．函数在 $x=0$ 处既没有右侧极限也没有左侧极限． $\lrcorner$

有关 $(\sin\theta)/\theta$ 的极限

有关 $(\sin\theta)/\theta$ 的最重要的事实是在弧度度量下当 $x\to 0$ 时其极限为 1．我们可以从图 1.24 看出这个事实并且用三明治（夹逼）定理代数地确认这一结果．



不按比例标记

图 1.24 $f(\theta)=(\sin\theta)/\theta$ 的图形．

定理 6

$$\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin\theta}{\theta}=1 \quad (\theta \text{ 为弧度}) \tag{1}$$

证明 证明的方法是证明右侧极限和左侧极限都为 1．于是我们就知道双侧极限也是 1．为证右侧极限为 1，从小于 $\pi/2$ 的正值 θ 开始（图 1.25）．注意到

$$\Delta OAP \text{ 的面积} < \text{扇形 } OAP \text{ 的面积} < \Delta OAT \text{ 的面积}.$$

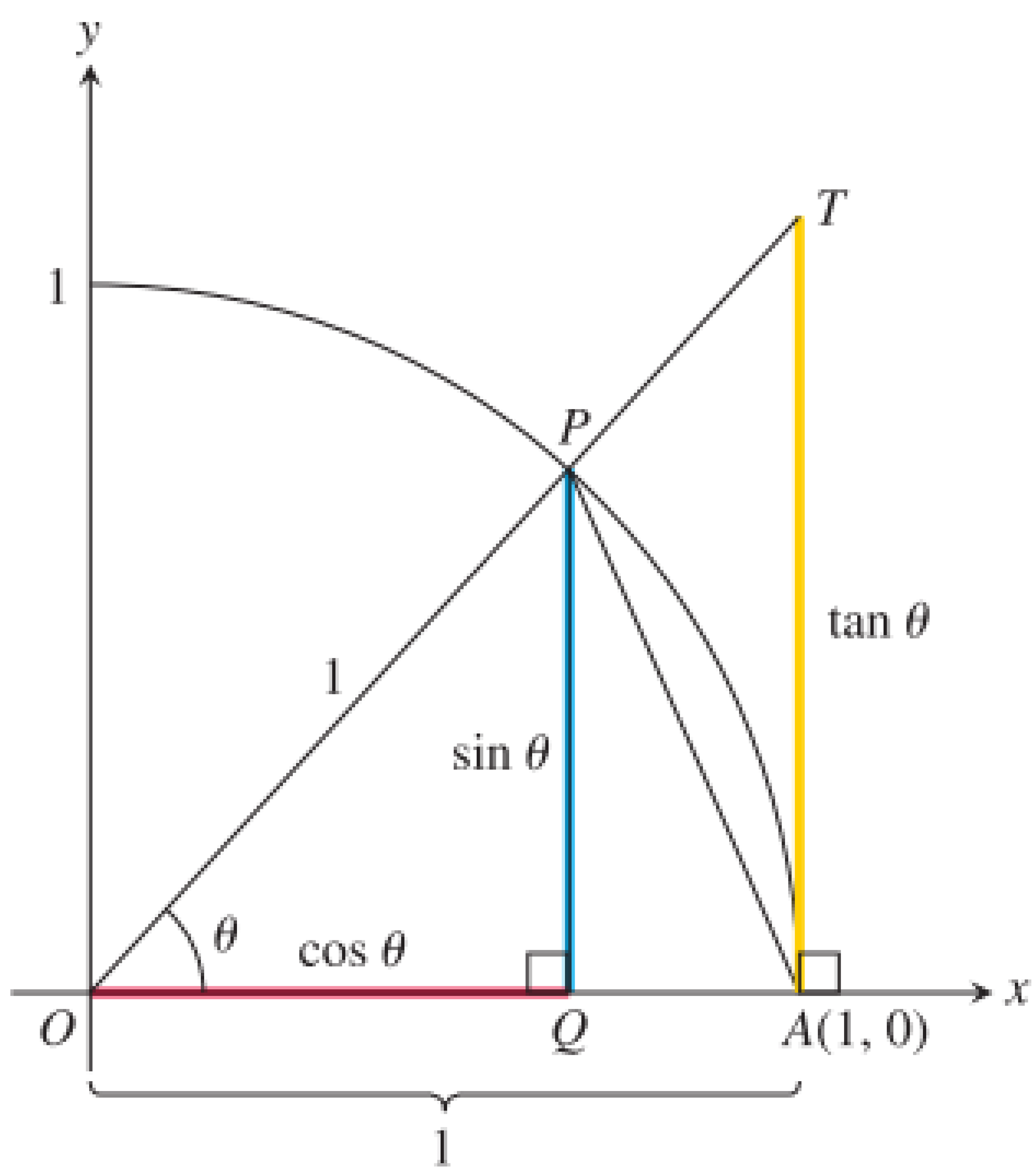


图 1.25 定理 6 证明的图解．$\frac{TA}{OA}=\tan\theta$，但 $OA=1$，所以 $TA=\tan\theta$．

我们可以用 θ 把这些面积表示如下：

$$\Delta OAP \text{ 的面积} = \frac{1}{2}\text{底}\times\text{高} = \frac{1}{2}(1)(\sin\theta) = \frac{1}{2}\sin\theta$$

$$\text{扇形 } OAP \text{ 的面积} = \frac{1}{2}r^2\theta = \frac{1}{2}(1)^2\theta = \frac{\theta}{2} \qquad (2)$$

$$\Delta OAT \text{ 的面积} = \frac{1}{2}\text{底} \times \text{高} = \frac{1}{2}(1)\tan\theta = \frac{1}{2}\tan\theta.$$

注:方程(2)要采用弧度度量:仅当 θ 用弧度度量时,扇形 OAP 的面积才是 $\theta/2$.

因此

$$\frac{1}{2}\sin\theta < \frac{1}{2}\theta < \frac{1}{2}\tan\theta.$$

用正数 $(1/2)\sin\theta$ 除这个不等式中的三项(译注:因为 $\theta \to 0$ 可使 $0 < \theta < \pi/2$),不等式仍成立:

$$1 < \frac{\theta}{\sin\theta} < \frac{1}{\cos\theta}.$$

不等式中各项取倒数:

$$1 > \frac{\sin\theta}{\theta} > \cos\theta.$$

因为 $\lim\limits_{\theta \to 0^+}\cos\theta = 1$,由三明治(夹逼)定理给出

$$\lim_{\theta \to 0^+}\frac{\sin\theta}{\theta} = 1.$$

回想起 $\sin\theta$ 和 θ 都是奇函数(预备知识章第 3 节).所以 $f(\theta) = (\sin\theta)/\theta$ 是偶函数,其图形关于 y 轴对称(图 1.24).这个对称性蕴涵着在 $x = 0$ 处的左侧极限存在且和右侧极限相等:

$$\lim_{\theta \to 0^-}\frac{\sin\theta}{\theta} = 1 = \lim_{\theta \to 0^+}\frac{\sin\theta}{\theta},$$

所以由定理 4 知 $\lim\limits_{\theta \to 0}(\sin\theta)/\theta = 1$. □

CD-ROM WEBsite **例 10　运用 $\lim\limits_{\theta \to 0}(\sin\theta/\theta) = 1$**

证明:(**a**) $\lim\limits_{h \to 0}\dfrac{\cos h - 1}{h} = 0$ 以及(**b**) $\lim\limits_{x \to 0}\dfrac{\sin 2x}{5x} = \dfrac{2}{5}$.

解　(**a**) 利用半角公式 $\cos h = 1 - 2\sin^2(h/2)$,计算

$$\begin{aligned}\lim_{h \to 0}\frac{\cos h - 1}{h} &= \lim_{h \to 0} - \frac{2\sin^2(h/2)}{h}\\ &= -\lim_{\theta \to 0}\frac{\sin\theta}{\theta}\sin\theta \qquad \text{令 } \theta = h/2\\ &= -(1)(0) = 0.\end{aligned}$$

(**b**) 公式(1)不能直接用于题中的分式.我们在分母上需$(2x)$而不是$(5x)$.我们同乘分子、分母以 2/5:

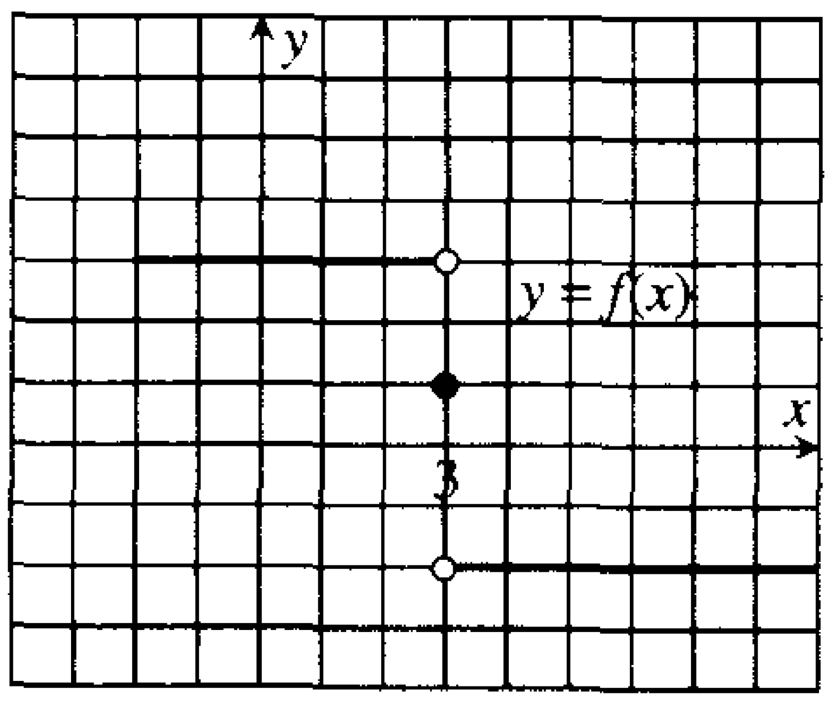
$$\begin{aligned}\lim_{x \to 0}\frac{\sin 2x}{5x} &= \lim_{x \to 0}\frac{(2/5)\cdot\sin 2x}{(2/5)\cdot 5x}\\ &= \frac{2}{5}\lim_{x \to 0}\frac{\sin 2x}{2x} \qquad \text{现在对 } \theta = 2x \text{ 可用式(1)}\\ &= \frac{2}{5}(1) = \frac{2}{5}.\end{aligned}$$

习题 1.2

从图形估计极限

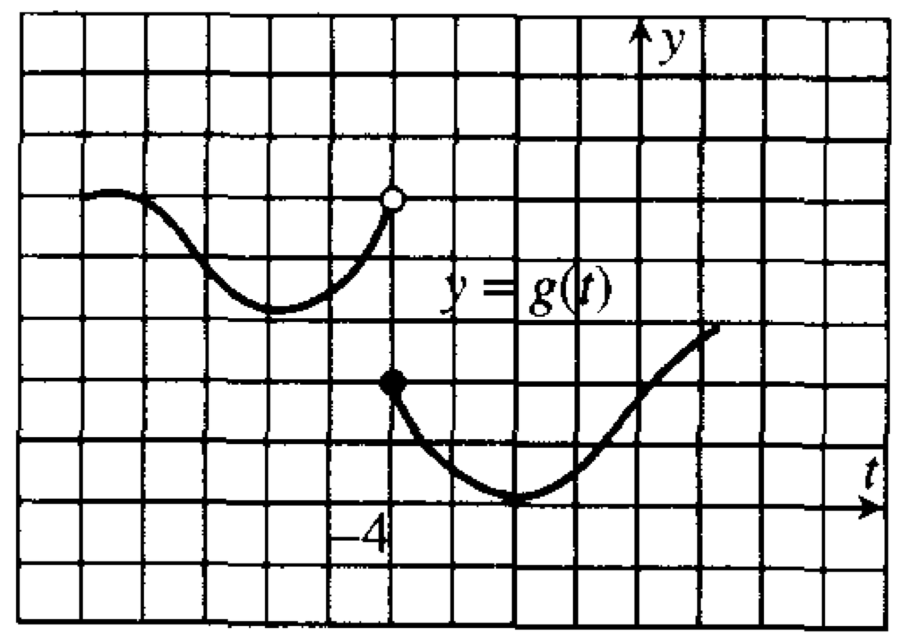
在题 1 – 6 中，利用图形来估算函数的极限，或解释为什么极限不存在.

1.



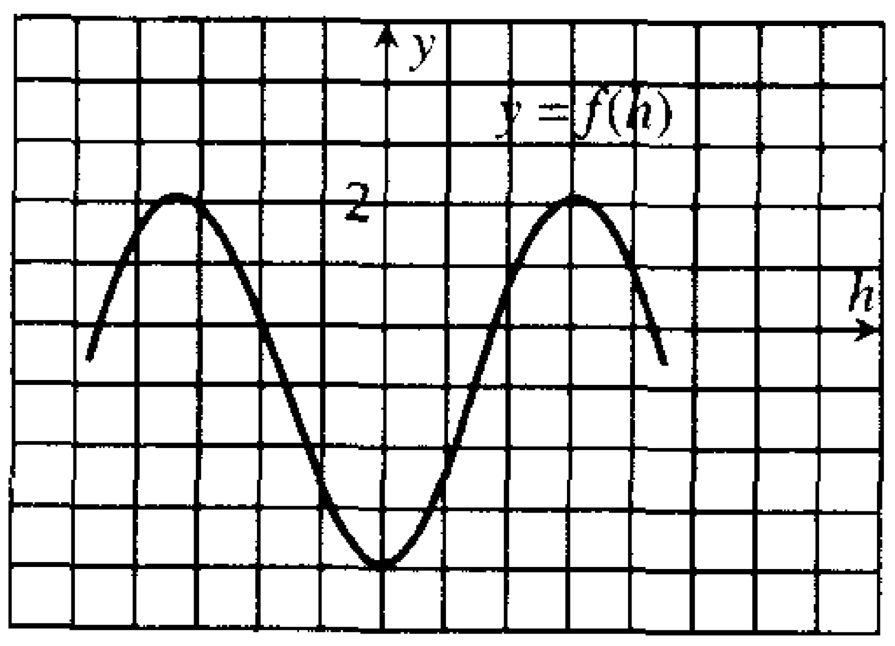
(a) $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)$ (b) $\lim\limits_{x\to 3^+} f(x)$ (c) $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$ (d) $f(3)$

2.



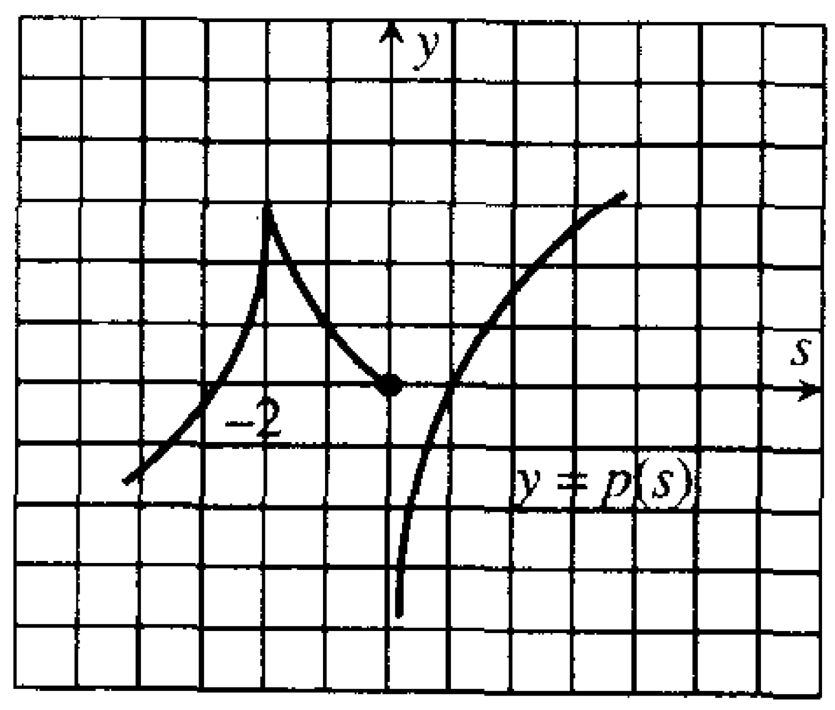
(a) $\lim\limits_{t\to -4^-} g(t)$ (b) $\lim\limits_{t\to -4^+} g(t)$ (c) $\lim\limits_{t\to -4} g(t)$ (d) $g(-4)$

3.



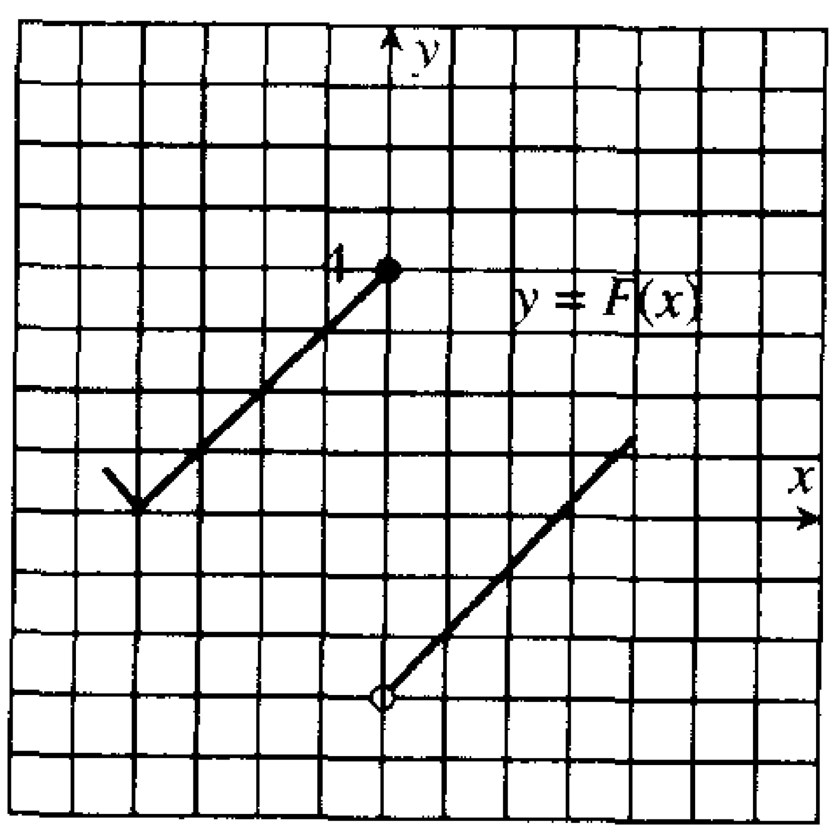
(a) $\lim\limits_{h\to 0^-} f(h)$ (b) $\lim\limits_{h\to 0^+} f(h)$ (c) $\lim\limits_{h\to 0} f(h)$ (d) $f(0)$

4.



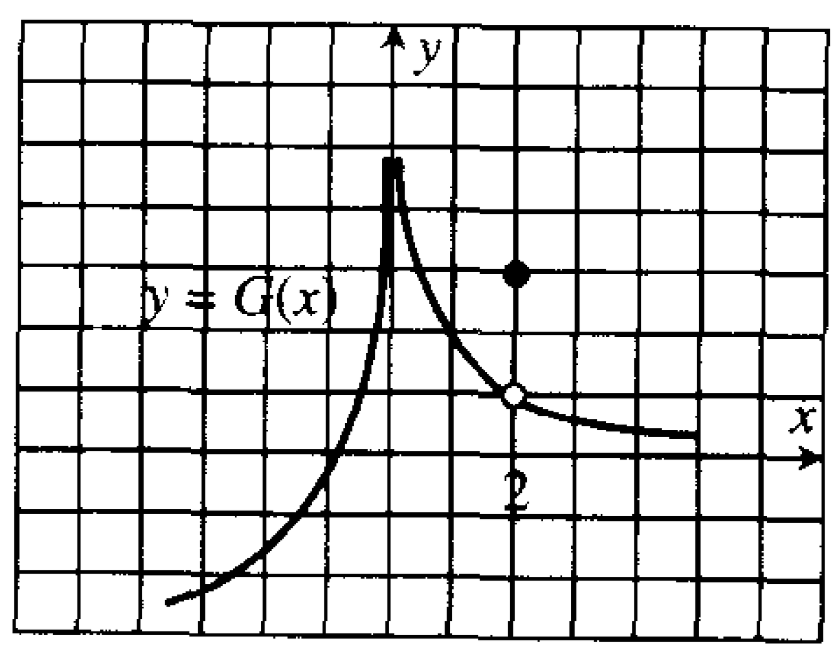
(a) $\lim\limits_{s\to -2^-} p(s)$ (b) $\lim\limits_{s\to -2^+} p(s)$ (c) $\lim\limits_{s\to -2} p(s)$ (d) $p(-2)$

5.



(a) $\lim\limits_{x\to 0^-} F(x)$ (b) $\lim\limits_{x\to 0^+} F(x)$ (c) $\lim\limits_{x\to 0} F(x)$ (d) $F(0)$

6.



(a) $\lim\limits_{x\to 2^-} G(x)$ (b) $\lim\limits_{x\to 2^+} G(x)$ (c) $\lim\limits_{x\to 2} G(x)$ (d) $G(2)$

运用极限法则

7. 假设$\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 1$和$\lim\limits_{x\to 0} g(x) = -5$. 写出下面计算中步骤(a),(b) 和(c) 中用到的定理 1 中法则的名称.

$$\lim_{x\to 0}\frac{2f(x)-g(x)}{(f(x)+7)^{2/3}}=\frac{\lim\limits_{x\to 0}(2f(x)-g(x))}{\lim\limits_{x\to 0}(f(x)+7)^{2/3}} \tag{a}$$

$$=\frac{\lim\limits_{x\to 0}2f(x)-\lim\limits_{x\to 0}g(x)}{\left(\lim\limits_{x\to 0}(f(x)+7)\right)^{2/3}} \tag{b}$$

$$=\frac{2\lim\limits_{x\to 0}f(x)-\lim\limits_{x\to 0}g(x)}{\left(\lim\limits_{x\to 0}f(x)+\lim\limits_{x\to 0}7\right)^{2/3}} \tag{c}$$

$$=\frac{(2)(1)-(-5)}{(1+7)^{2/3}}=\frac{7}{4}$$

8. 设$\lim\limits_{x\to 1}h(x)=5$，$\lim\limits_{x\to 1}p(x)=1$，以及$\lim\limits_{x\to 1}r(x)=-2$。写出下面计算中步骤(a)，(b)和(c)中用到的定理1中法则的名称.

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{5h(x)}}{p(x)(4-r(x))}=\frac{\lim\limits_{x\to 1}\sqrt{5h(x)}}{\lim\limits_{x\to 1}(p(x)(4-r(x)))} \tag{a}$$

$$=\frac{\sqrt{\lim\limits_{x\to 1}5h(x)}}{\left(\lim\limits_{x\to 1}p(x)\right)\left(\lim\limits_{x\to 1}(4-r(x))\right)} \tag{b}$$

$$=\frac{\sqrt{5\lim\limits_{x\to 1}h(x)}}{\left(\lim\limits_{x\to 1}p(x)\right)\left(\lim\limits_{x\to 1}4-\lim\limits_{x\to 1}r(x)\right)} \tag{c}$$

$$=\frac{\sqrt{(5)(5)}}{(1)(4-2)}=\frac{5}{2}$$

9. 假设$\lim\limits_{x\to c}f(x)=5$以及$\lim\limits_{x\to c}g(x)=-2$。求 并写出所用法则名称

(a) $\lim\limits_{x\to c}f(x)g(x)$ (b) $\lim\limits_{x\to c}2f(x)g(x)$ (c) $\lim\limits_{x\to c}(f(x)+3g(x))$ (d) $\lim\limits_{x\to c}\frac{f(x)}{f(x)-g(x)}$

10. 假设$\lim\limits_{x\to 4}f(x)=0$以及$\lim\limits_{x\to 4}g(x)=-3$。求

(a) $\lim\limits_{x\to 4}(g(x)+3)$ (b) $\lim\limits_{x\to 4}xf(x)$ (c) $\lim\limits_{x\to 4}(g(x))^2$ (d) $\lim\limits_{x\to 4}\frac{g(x)}{f(x)-1}$

极限计算

求题 11 – 14 中的极限.

11. (a) $\lim\limits_{x\to -7}(2x+5)$ (b) $\lim\limits_{t\to 6}8(t-5)(t-7)$ (c) $\lim\limits_{y\to 2}\frac{y+2}{y^2+5y+6}$ (d) $\lim\limits_{h\to 0}\frac{3}{\sqrt{3h+1}+1}$

12. (a) $\lim\limits_{r\to -2}(r^3-2r^2+4r+8)$ (b) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x+3}{x+6}$ (c) $\lim\limits_{y\to -3}(5-y)^{4/3}$ (d) $\lim\limits_{\theta\to 5}\frac{\theta-5}{\theta^2-25}$

13. (a) $\lim\limits_{t\to -5}\frac{t^2+3t-10}{t+5}$ (b) $\lim\limits_{x\to -2}\frac{-2x-4}{x^3+2x^2}$ (c) $\lim\limits_{y\to 1}\frac{y-1}{\sqrt{y+3}-2}$ (d) $\lim\limits_{x\to 3}\sin\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{2}\right)$

14. (a) $\lim\limits_{x\to -1}\frac{\sqrt{x^2+8}-3}{x+1}$ (b) $\lim\limits_{\theta\to 1}\frac{\theta^4-1}{\theta^3-1}$ (c) $\lim\limits_{t\to 9}\frac{3-\sqrt{t}}{9-t}$ (d) $\lim\limits_{s\to \pi}s\cos\left(\frac{\pi-s}{2}\right)$

运用三明治(夹逼)定理

15. 为学而写 (a) 可以证明不等式

$$1-\frac{x^2}{6}<\frac{x\sin x}{2-2\cos x}<1$$

对所有接近 0 的 x 成立. 对

$$\lim_{x\to 0}\frac{x\sin x}{2-2\cos x}$$

有什么可说的?对你的回答给出理由.

T (b) 对 $-2 \leqslant x \leqslant 2$ 把 $y = 1 - \frac{x^2}{6}$, $y = \frac{x \sin x}{2 - 2\cos x}$ 和 $y = 1$ 的图形画在一起.说明当 $x \to 0$ 时各个图形的性态. 备注·届时演示

16. 为学而写　(a) 不等式

$$\frac{1}{2} - \frac{x^2}{24} < \frac{1 - \cos x}{x^2} < \frac{1}{2}$$

对接近零的 x 值成立.对

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$$

有什么可说的?对你的回答给出理由.

T (b) 对 $-2 \leqslant x < 2$ 把 $y = \frac{1}{2} - \frac{x^2}{24}$, $y = \frac{1 - \cos x}{x^2}$ 和 $y = \frac{1}{2}$ 的图形画在一起.说明当 $x \to 0$ 时各图形的性态.

平均变化率的极限

因为和割线、切线以及瞬时变化率的密切联系,形为

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

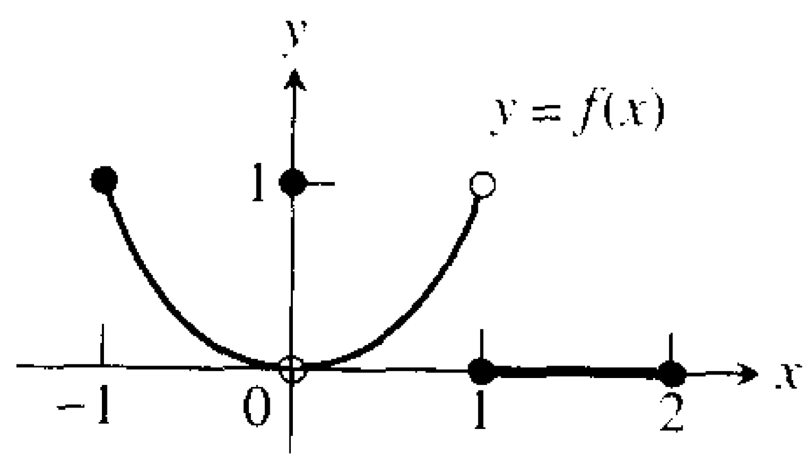
的极限经常出现在微积分中.在题 17 – 20 中对给定的 x_0 和函数 f 计算极限.

17. $f(x) = x^2$,　$x_0 = 1$　　**18.** $f(x) = 3x - 4$,　$x_0 = 2$

19. $f(x) = \frac{1}{x}$,　$x_0 = -2$　　**20.** $f(x) = \sqrt{x}$,　$x_0 = 7$

从图形求极限

21. 对如下图示的函数,下列陈述中哪些是对的哪些是不对的?对你的回答给出理由.



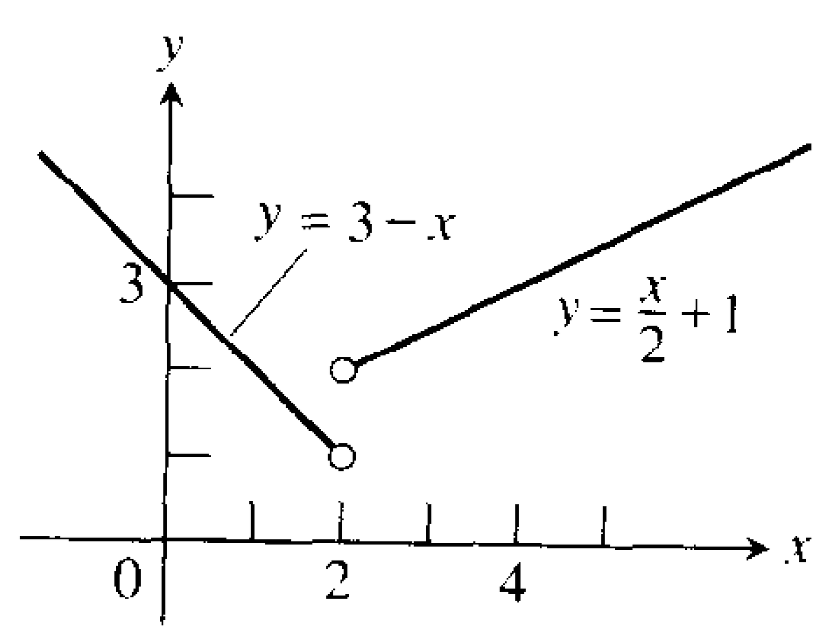
(a) $\lim_{x \to -1^+} f(x) = 1$.　(b) $\lim_{x \to 0^-} f(x) = 0$.　(c) $\lim_{x \to 0^-} f(x) = 1$.

(d) $\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^+} f(x)$.　(e) $\lim_{x \to 0} f(x)$ 存在.　(f) $\lim_{x \to 0} f(x) = 0$.

(g) $\lim_{x \to 0} f(x) = 1$.　(h) $\lim_{x \to 1} f(x) = 1$.　(i) $\lim_{x \to 1} f(x) = 0$.

(j) $\lim_{x \to 2^-} f(x) = 2$.　(k) $\lim_{x \to -1^-} f(x)$ 不存在.　(l) $\lim_{x \to 2^+} f(x) = 0$.

22. 设 $f(x) = \begin{cases} 3 - x, & x < 2 \\ \frac{x}{2} + 1, & x > 2, \end{cases}$ 如右图所示.



(a) 求 $\lim_{x \to 2^+} f(x)$ 和 $\lim_{x \to 2^-} f(x)$.

(b) $\lim_{x \to 2} f(x)$ 存在吗?如果存在,极限值等于什么?如果不存在,为什么?

(c) 求 $\lim_{x \to 4^-} f(x)$ 和 $\lim_{x \to 4^+} f(x)$.

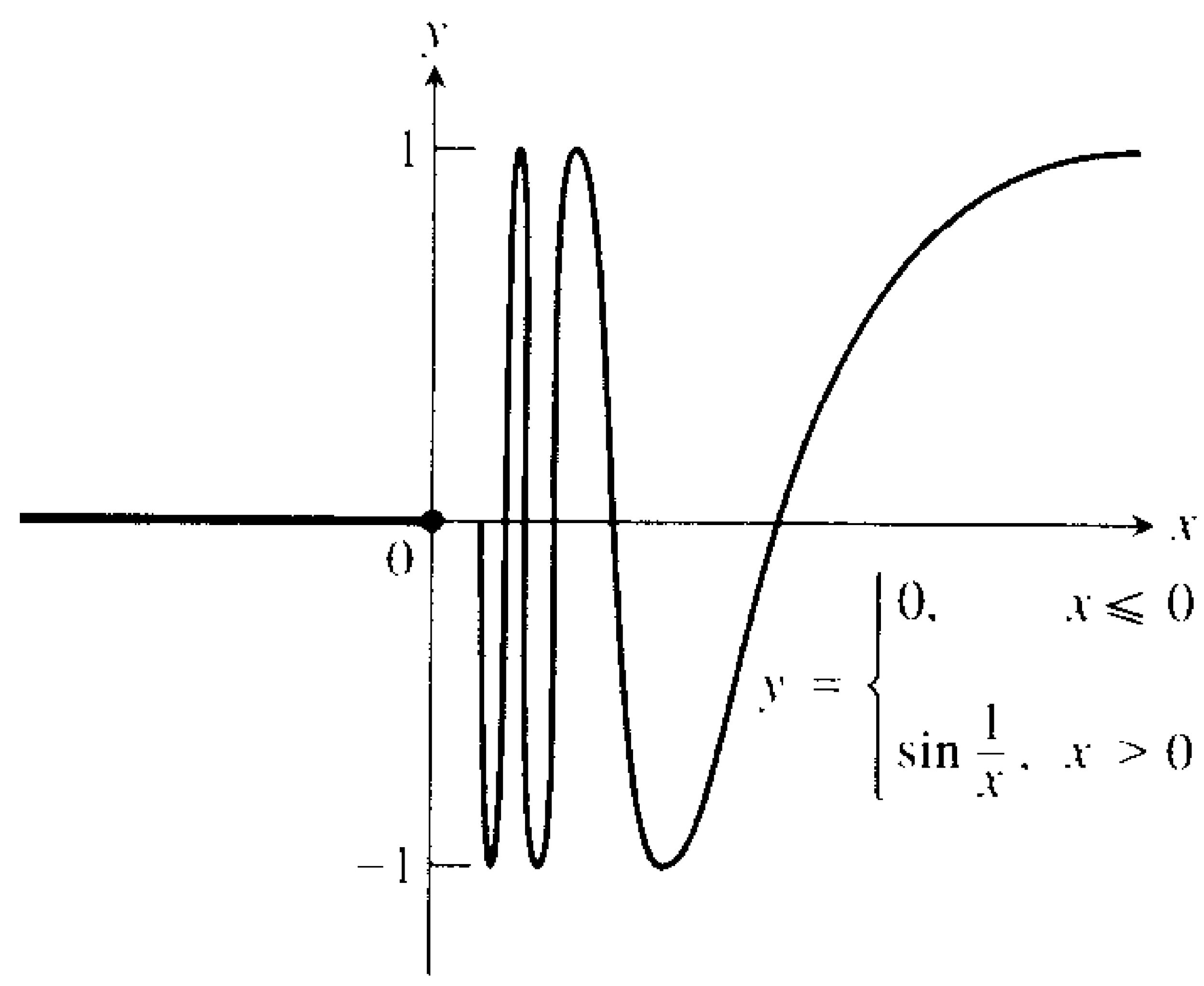
(d) $\lim\limits_{x \to 4} f(x)$ 存在吗?如果存在,极限值等于什么?如果不存在,为什么?

23. 设 $f(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant 0 \\ \sin \dfrac{1}{x}, & x > 0. \end{cases}$

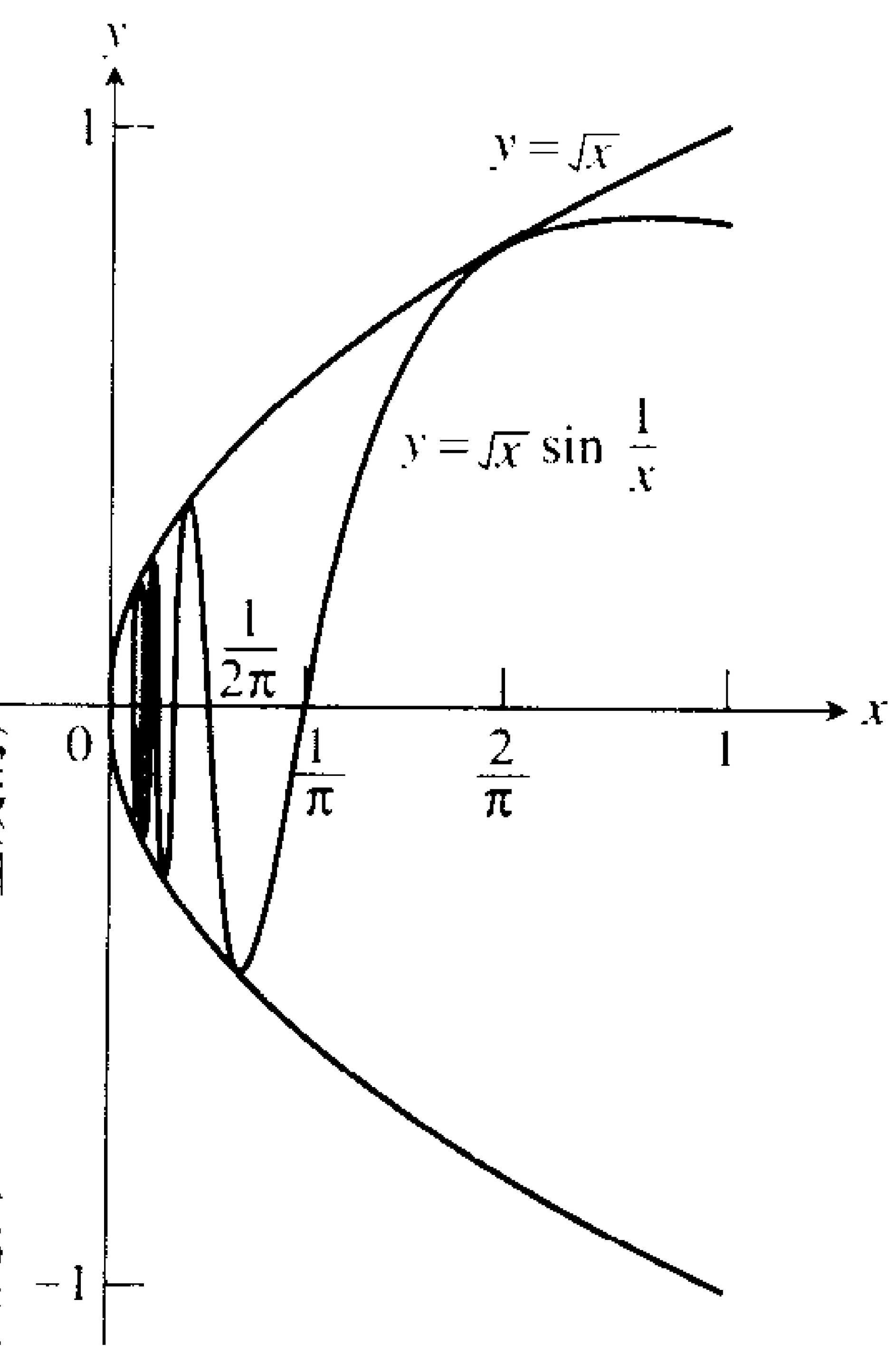
(a) $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$ 存在吗?如果存在,极限值等于什么?如果不存在,为什么?

(b) $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x)$ 存在吗?如果存在,极限值等于什么?如果不存在,为什么?

(c) $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ 存在吗?如果存在,极限值等于什么?如果不存在,为什么?



第 23 题图



(图是由Mathematica生成的)

第 24 题图

24. 设 $g(x) = \sqrt{x}\,\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

(a) $\lim\limits_{x \to 0^+} g(x)$ 存在吗?如果存在,极限值等于什么?如果不存在,为什么?

(b) $\lim\limits_{x \to 0^-} g(x)$ 存在吗?如果存在,极限值等于什么?如果不存在,为什么?

(c) $\lim\limits_{x \to 0} g(x)$ 存在吗?如果存在,极限值等于什么?如果不存在,为什么?

图示题 25 和 26 中函数的图形,然后回答以下问题.

(a) 什么是 f 的定义域和值域?　　(b) 在哪点 c, $\lim\limits_{x \to c} f(x)$ 存在?如果存在这样的点的话.

(c) 在什么点只存在左极限?　　(d) 在什么点只存在右极限?

25. $f(x) = \begin{cases} \sqrt{1 - x^2} & 若\ 0 \leqslant x < 1 \\ 1 & 若\ 1 \leqslant x < 2 \\ 2 & 若\ x = 2 \end{cases}$

26. $f(x) = \begin{cases} x & 若\ -1 \leqslant x < 0\ 或\ 0 < x \leqslant 1 \\ 1 & 若\ x = 0 \\ 0 & 若\ x < -1\ 或\ x > 1 \end{cases}$

代数地求单侧极限

求题 27 – 32 中的极限.

27. $\lim\limits_{x \to -0.5^-} \sqrt{\dfrac{x+2}{x+1}}$

28. $\lim\limits_{x \to -2^+} \left(\dfrac{x}{x+1}\right)\left(\dfrac{2x+5}{x^2+x}\right)$

29. $\lim\limits_{h \to 0^+} \dfrac{\sqrt{h^2+4h+5} - \sqrt{5}}{h}$

30. $\lim\limits_{h \to 0^-} \dfrac{\sqrt{6} - \sqrt{5h^2+11h+6}}{h}$

31. (**a**) $\lim\limits_{x\to -2^+}(x+3)\dfrac{|x+2|}{x+2}$　　(**b**) $\lim\limits_{x\to -2^-}(x+3)\dfrac{|x+2|}{x+2}$

CD-ROM WEBsite **32.** (**a**) $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{\sqrt{2x}(x-1)}{|x-1|}$　　(**b**) $\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{\sqrt{2x}(x-1)}{|x-1|}$

理论和例子

33. 为学而写　若对$[-1,1]$上的 x 有 $x^4 \leqslant f(x) \leqslant x^2$ 而对 $x<-1$ 和 $x>1$ 的 x 有 $x^2 \leqslant f(x) \leqslant x^4$,哪些点 c 你不加思索地就知道 $\lim\limits_{x\to c} f(x)$ 存在?关于在这些点处的极限值你能说些什么?

34. 为学而写　假设对一切 $x, x\neq 2$ 有 $g(x)\leqslant f(x)\leqslant h(x)$,又假设

$$\lim_{x\to 2} g(x) = \lim_{x\to 2} h(x) = -5.$$

关于 f,g 和 h 在 $x=2$ 处的值能得到什么结论? $f(2)=0$ 可能吗? $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=0$ 可能吗?对你的回答给出理由.

35. 推断极限值　如果 $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{f(x)}{x^2}=1$,求

(**a**) $\lim\limits_{x\to -2} f(x)$　　(**b**) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{f(x)}{x}$

36. 推断极限值

(**a**) 如果 $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)-5}{x-2}=3$,求 $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$.　　(**b**) 如果 $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)-5}{x-2}=4$,求 $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$.

37. 为学而写　一旦你知道在 f 的定义域的内点 a 处有 $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$ 和 $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)$,你能知道 $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ 吗?对你的回答给出理由.

38. 为学而写　如果你知道 $\lim\limits_{x\to c} f(x)$ 存在,你能从计算 $\lim\limits_{x\to c^+} f(x)$ 的值来求 $\lim\limits_{x\to c} f(x)$ 吗?对你的回答给出理由.

39. 求 δ　给定 $\epsilon>0$,求区间 $I=(5,5+\delta),\delta>0$,使得如果 x 在 I 中,就有 $\sqrt{x-5}<\epsilon$.正在验证的是什么极限,以及极限值是什么?

40. 求 δ　给定 $\epsilon>0$,求区间 $I=(4-\delta,4),\delta>0$,使得如果 x 在 I 中,就有 $\sqrt{4-x}<\epsilon$.正在验证的是什么极限,以及极限值是什么?

偶函数和奇函数

回忆一下,在定义域 D 上关于原点对称的函数 $y=f(x)$,如果对 D 中一切 x 有 $f(-x)=f(x)$,f 就是偶函数;如果对 D 中一切 x 有 $f(-x)=-f(x)$,f 就是奇函数.

41. 为学而写　假设 f 是 x 的奇函数,知道了 $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=3$,关于 $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$ 能告诉你什么呢?对你的回答给出理由.

42. 为学而写　假设 f 是 x 的偶函数,知道了 $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=7$,关于 $\lim\limits_{x\to -2^-} f(x)$ 或 $\lim\limits_{x\to -2^+} f(x)$ 能告诉你什么呢?对你的回答给出理由.

计算机探究

43. (**a**) 画 $g(x)=x\sin(1/x)$ 的图形来估算 $\lim\limits_{x\to 0} g(x)$,必要时放大在原点附近的图形.

(**b**) **为学而写**　现在画 $k(x)=\sin(1/x)$ 的图形.在原点附近比较 g 和 k 的性态,什么是相同的?什么是不同的?

44. (**a**) 画 $h(x)=x^2\cos(1/x)$ 的图形来估算 $\lim\limits_{x\to 0} h(x)$,必要时放大在原点附近的图形.

(**b**) **为学而写**　现在画 $k(x)=\cos(1/x)$ 的图形.在原点附近比较 h 和 k 的性态,什么是相同的?什么是不同的?