

# Wybrane zagadnienia Algebry

## Lista zadań

Jacek Cichoń  
WIT, PWr, 2023/24

## 1 Wstęp

### Lab. 1

Liczbami Gaussa nazywamy pierścień  $\mathbb{Z}[i] = \{a+bi : a, b \in \mathbb{Z}\}$  z dodawaniem i dzieleniem odziedziczonym z liczb zespolonych. Na  $\mathbb{Z}[i]$  określamy funkcję (zwaną normą)  $N(a+bi) = a^2+b^2$ . Dla  $x, y \in \mathbb{Z}[i]$  określamy  $x|y \iff (\exists z \in \mathbb{Z}[i])(y = x \cdot z)$

1. Napisz algorytm dzielenia z resztą w pierścieniu liczb Gaussa  $\mathbb{Z}[i]$ , czyli algorytm, który dla danych  $x, y \in \mathbb{Z}[i]$ ,  $y \neq 0$  wyznaczy  $q, r \in \mathbb{Z}[i]$  takie, że  $x = q \cdot y + r$  oraz  $N(r) < N(y)$ .
2. Największym wspólnym dzielnikiem liczb  $u, v \in \mathbb{Z}[i]$  nazywamy takie  $d \in \mathbb{Z}[i]$ , że  $(d|u) \wedge (d|v)$  oraz

$$(\forall x \in \mathbb{Z}[i])(x|u \wedge x|v \rightarrow x|d) .$$

Oprogramuj algorytm wyznaczania NWD dla  $\mathbb{Z}[i]$ .

3. Oprogramuj funkcję wyznaczającą  $NWW(x, y)$  dla  $x, y \in \mathbb{Z}[i]$ .
4. Ideał generowany przez liczby  $a_1, \dots, a_k$  oznaczamy przez  $(a_1, \dots, a_k)$ . Korzystając z poprzednich dwóch podpunktów znajdź takie  $c$  i  $d$ , że  $(3+4i, 1+3i) = (c)$  oraz  $(3+4i) \cap (1+3i) = (d)$ .

### Lab. 2

Wielomian  $a_0 + a_1 \cdot x + \dots + a_n x^n \in \mathbb{R}[x]$  interpretujemy jako ciąg  $[a_0, \dots, a_n]$ .

1. Napisz algorytm dzielenia z resztą w pierścieniu wielomianów  $\mathbb{R}[x]$ .
2. Oprogramuj algorytm wyznaczania NWD dla  $\mathbb{R}[x]$ .
3. Oprogramuj funkcję wyznaczającą  $NWW(x, y)$  dla  $x, y \in \mathbb{R}[x]$ .
4. Korzystając z poprzednich dwóch podpunktów znajdź takie  $c(x), d(x) \in \mathbb{R}[x]$ , że  $(1+x^2, 1+2x+x^2) = (c)$  oraz  $(1+x^2) \cap (1+2x+x^2) = (d)$ .

### Ćwicz. 1

Rozważ prostą przechodzącą przez punkt  $(-1, 0)$  o współczynniku kierunkowym  $t \in \mathbb{R}$ . Znajdź drugi punkt przecięcia tej prostej z okręgiem  $x^2 + y^2 = 1$ . Wyraż otrzymane rozwiązanie jako funkcję  $p(t) = (x(t), y(t))$  oraz wyznacz obraz  $\{p(t) : t \in \mathbb{R}\}$ .

### Ćwicz. 2

Rozważ prostą przechodzącą przez punkt  $(-1, 0)$  o współczynniku kierunkowym  $t \in \mathbb{R}$ . Znajdź drugi punkt przecięcia tej prostej z hiperbolą  $x^2 - y^2 = 1$ . Wyraż otrzymane rozwiązanie jako funkcję  $p(t) = (x(t), y(t))$  oraz wyznacz obraz  $\{p(t) : t \in \mathbb{R}\}$ .

Niech  $k$  będzie ciałem. Dla wielomianów  $f_1, \dots, f_k \in k[x_1, \dots, x_n]$  przez  $V(f_1, \dots, f_k)$  oznaczamy zbiór

$$V(f_1, \dots, f_k) = \{(a_1, \dots, a_n) \in k^n : (\forall i \in \{1, \dots, k\})(f_i(a_1, \dots, a_n) = 0)\} .$$

Zbiór ten nazywamy **rozmaitością algebraiczną** generowaną przez wielomiany  $f_1, \dots, f_k$  w **przestrzeni afinicznej**  $k^n$ .

### Lab. 3

Skorzystaj z jakiejś biblioteki (np. `mplot3d` z `Matplotlib`) do wyświetlenia następujących rozmaitości algebraicznych w  $\mathbb{R}^3$ :

1.  $V(z - x^2 - y^2)$
2.  $V(z^2 - x^2 - y^2)$
3.  $V(z - x^2 + y^2)$
4.  $V(xz, yz)$

### Lab. 4

Krzywą czterolistną nazywaną krzywą zadaną następującym równaniem

$$r(\theta) = \sin(2\theta)$$

we współrzędnych biegunowych.

1. Narysuj wykres tej krzywej na płaszczyźnie.
2. Spróbuj znaleźć wielomian  $w(x, y)$  taki, że  $r[\mathbb{R}] = V(w)$ .

### Lab. 5

Zapoznaj się poleceniami systemu Wolfram Alpha służącymi go działaniom na wielomianach (np. `PolynomialQuotientRemainder`) oraz generowania krzywych i powierzchni zadawanych równaniami parametrycznymi.

## 2 Wielomiany i rozmaitości

### Ćwicz. 3

Które z następujących podzbiorów  $\mathbb{R}^2$  są rozmaitościami algebraicznymi:

1. skończony podzbiór  $\mathbb{R}^2$
2.  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$
3.  $\mathbb{R} \times [0, \infty)$ ?

### Ćwicz. 4

Ustalmy ciało  $k$  liczbę  $n \geq 1$ . Pokaż, że rodzina rozmaitości algebraicznych w  $k^n$  jest domknięta na skończone sumy oraz skończone przekroje. Czy jest ona domknięta na operację dopełnienia?

### Lab. 6

Zaproponuj algorytm który wyznacza punkty minimalne dla skończonych podzbiorów  $A \subseteq \mathbb{N}^k$  dla porządku

$$(x_1, \dots, x_k) \leq (y_1, \dots, y_k) \iff \bigwedge_{i=1}^k (x_i \leq y_i)$$

1. Ile jest punktów minimalnych w zbiorze  $\{n, k\} \in \mathbb{N}^2 : n \cdot k \geq 11\}$ ?
2. Ile jest punktów minimalnych w zbiorze  $\{n, k\} \in \mathbb{N}^2 : (n - 10)^2 + (k - 10)^2 \leq 25\}$ ?

### Ćwicz. 5

Założmy, że  $k$  jest ciałem oraz  $A \subseteq k^n$ . Niech

$$I(A) = \{f \in k[x_1, \dots, x_n] : (\forall a \in A)(f(a) = 0)\}.$$

Pokaż, że  $I(A)$  jest ideałem.

### Ćwicz. 6

Pokaż, że  $I(V(x^n, x^m)) = \langle x, y \rangle$  dla dowolnych  $n, m \geq 1$ .

### Ćwicz. 7

Ideał  $I$  nazywamy radykalnym, jeśli z tego, że  $x^n \in I$  wynika, że  $x \in I$ .

1. Pokaż, że ideały postaci  $I(A)$  są radykalne.
2. Pokaż, że ideał  $\langle X^2, y^2 \rangle$  nie jest radykalny.

### Ćwicz. 8

Niech  $k$  będzie dowolnym nieskończonym ciałem.

1. Pokaż, że dowolny wielomian  $f \in k[x, y]$  można zapisać w postaci

$$f = g(x) + (x - y)h(x, y)$$

dla pewnego wielomianu  $g \in k[x]$  oraz  $h \in k[x, y]$ .

2. Pokaż, że  $I(V(x - y)) = \langle x - y \rangle$ .

### Ćwicz. 9

Pokaż, że  $I(V(x^n, x^m)) = \langle x, y \rangle$  dla dowolnych  $n, m \geq 1$ .

### Ćwicz. 10

Niech  $\mathcal{R} = (R, +, \cdot)$  będzie pierścieniem. Załóżmy, że  $a, b, c, q \in R$  oraz  $a = q \cdot b + c$ . Pokaż, że

$$\langle a, b \rangle = \langle b, c \rangle .$$

### Lab. 7

Wyznacz za pomocą dowolnego systemu obliczeń algebraicznych

1.  $\text{GCD}(x^4 + x^2 + 1, x^4 - x^2 - 2x - 1, x^3 - 1)$
2.  $\text{GCD}(x^3 + x^2 - 4x - 4, x^3 - x^2 - 4x + 4, x^3 - 2x^2 - x + 2)$

### Ćwicz. 11

Czy wielomian  $x^2 - 2$  należy do następującego ideału

$$\langle x^3 + x^2 - 4x - 4, x^3 - x^2 - 4x + 4, x^3 - 2x^2 - x + 2 \rangle ?$$

### Lab. 8

Napisz pseudokod procedury, która dla danych wielomianów  $f, g \in k[x]$  znajduje takie  $A, B \in k[x]$ , że  $\text{nwd}(f, g) = A \cdot f = B \cdot g$ .

Wskazówka: Wzoruj się na algorytmie wyznaczania największego wspólnego dzielnika dla liczb całkowitych

### Ćwicz. 12

W zadaniu tym zajmujemy wielomianami z pierścienia  $\mathbb{C}[x]$ .

1. Niech  $f \in \mathbb{C}[x]$  będzie niezerowym wielomianem. Pokaż, że  $V(f) = \emptyset$  wtedy i tylko wtedy, gdy  $f$  jest wielomianem stałym.
2. Załóżmy, że  $f, \dots, f_k \in \mathbb{C}[x]$ . Pokaż, że  $V(f_1, \dots, f_k) = \emptyset$  wtedy i tylko wtedy, gdy  $1 \in \langle f_1, \dots, f_k \rangle$
3. Opisz procedurę rozstrzygającą, czy dla danych wielomianów  $f, \dots, f_k \in \mathbb{C}[x]$  rozmaitość  $V(f_1, \dots, f_k)$  jest niepusta.

### Ćwicz. 13

Założmy, że  $f \in \mathbb{C}[x]$  jest wielomianem postaci

$$f = c(x - a_1)^{r_1}(x - a_2)^{r_2} \cdots (x - a_k)^{r_k} ,$$

gdzie  $a_1, \dots, a_k$  są parami różne oraz  $c \neq 0$ . Niech

$$f_{red} = (x - a_1)(x - a_2) \cdots (x - a_k) .$$

1. Pokaż, że  $V(f) = \{a_1, \dots, a_k\}$ .
2. Pokaż, że  $I$  jest ideałem oraz, że  $I(V(f)) = \langle f_{red} \rangle$ .
3. Pokaż, że

$$f_{red} = \frac{f}{\gcd(f, f')} ,$$

gdzie  $f'$  oznacza formalną pochodną wielomianu  $f$ .

## 3 Porządki jednomianowe i dzielenie wielomianów

### Ćwicz. 14

Niech  $\prec$  będzie porządkiem jednomianowym. Pokaż, że jeśli  $\alpha \prec \beta$  oraz  $\gamma \prec \delta$  to

$$\alpha + \gamma \prec \beta + \delta .$$

### Ćwicz. 15

Niech  $\preceq$  będzie porządkiem jednomianowym na  $\mathbb{N}^k$ . Niech

$$\alpha \sqsubseteq \beta \longleftrightarrow (\forall i)(\alpha_i \leq \beta_i) .$$

Pokaż, że jeśli  $\alpha \sqsubseteq \beta$  to  $\alpha \preceq \beta$  (czyli, że  $\sqsubseteq \subseteq \preceq$ ).

### Ćwicz. 16

Dla  $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^k$  określamy

$$\text{lcm}(\alpha, \beta) = (\max(\alpha_1, \beta_1), \max(\alpha_2, \beta_2), \dots, \max(\alpha_k, \beta_k)) .$$

1. Pokaż, że  $\text{lcm}(\alpha, \text{lcm}(\beta, \gamma)) = \text{lcm}(\text{lcm}(\alpha, \beta), \gamma)$ .
2. Pokaż, że jeśli  $\alpha \sqsubseteq \gamma$  i  $\beta \sqsubseteq \gamma$  to  $\text{lcm}(\alpha, \beta) \sqsubseteq \gamma$ .

### Ćwicz. 17

Pokaż, że

$$1 \prec x \prec x^2 \prec x^3 \prec x^4 \prec \dots$$

jest jedynym porządkiem monomialnym na  $\mathbb{N}$ .

### Ćwicz. 18

Ciąg liczb  $(u_1, \dots, u_k)$  jest liniowo niezależny nad ciałem liczb wymiernych  $\mathbb{Q}$  jeśli dla dowolnych  $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{Q}$  mamy

$$\left( \sum_{i=1}^k \lambda_i u_i = 0 \right) \rightarrow (\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_k = 0) .$$

1. Pokaż, że ciąg  $(1, \sqrt{2}, \sqrt{3})$  jest niezależny nad  $\mathbb{Q}$ .

2. Załóżmy, że  $(u_1, \dots, u_k)$  jest niezależnym nad  $\mathbb{Q}$  ciągiem liczb dodatnich. Na  $\mathbb{N}^k$  definiujemy porządek

$$(\alpha \prec \beta) \iff \left( \sum_{i=1}^k \alpha_i u_i < \sum_{i=1}^k \beta_i u_i \right)$$

Pokaż, że  $\prec$  jest porządkiem monomialnym na  $\mathbb{N}$ .

### Ćwicz. 19

Rozstrzygnij, czy podane wielomiany należą w podanym ideale  $I \subseteq \mathbb{R}[x]$ :

1.  $f(x) = x^2 - 2x + 1$ ,  $I = \langle x - 1 \rangle$
2.  $f(x) = x^3 - 1$ ,  $I = \langle x^9 - 1, x^5 + x^3 - x^2 - 1 \rangle$
3.  $f(x) = x^3 + 1$ ,  $I = \langle x^2 - 1, x^2 - 3x + 2 \rangle$ .

### Ćwicz. 20

Rozważmy GradedLex porządek. Niech  $f = x^3 - x^2y - x^2z$  oraz  $g_1 = x^2y - z$  oraz  $g_2 = xy - 1$ .

1. Podziel  $f$  przez  $(g_1, g_2)$  i oznacz resztę przez  $r_1$
2. Podziel  $f$  przez  $(g_2, g_1)$  i oznacz resztę przez  $r_2$

Obliczenia te, niestety, wykonaj ręcznie.

3. Sprawdź, czy  $r_1 - r_2 \in \langle g_1, g_2 \rangle$ .

### Ćwicz. 21

Znajdź parametryzację rozmaitości algebraicznych wyznaczonych przez następujące układy równań:

1. W przestrzeni  $\mathbb{R}^3$  lub  $\mathbb{C}^3$ :

$$\begin{aligned} 2x + 3y + z &= 3 \\ x + 2y &= 2 \\ -x + y + z &= 1 \end{aligned}$$

2. W przestrzeni  $\mathbb{R}^4$  lub  $\mathbb{C}^4$ :

$$\begin{aligned} x + y + u + z &= 1 \\ x - y + u &= 2 \end{aligned}$$

3. W przestrzeni  $\mathbb{R}^3$  lub  $\mathbb{C}^3$ :

$$\begin{aligned} y &= x^2 \\ z &= x^4 \end{aligned}$$

### Ćwicz. 22

Wyznacz reprezentację niejawną rozmaitości algebraicznych sparametryzowanych w następujący sposób:

1. W przestrzeniach  $\mathbb{R}^3$  lub  $\mathbb{C}^3$ :

$$\begin{aligned} x &= t + 1 \\ y &= 2t + 1 \\ z &= -t + 1 \end{aligned}$$

2. W przestrzeni  $\mathbb{R}^4$  lub  $\mathbb{C}^4$ :

$$x_1 = t + u$$

$$x_2 = t - u$$

$$x_3 = 2t + u$$

$$x_4 = t - 3u$$

3. W przestrzeni  $\mathbb{R}^3$  lub w  $\mathbb{C}^3$ :

$$x_1 = t^2, \quad x_2 = t^3, \quad x_3 = t^6$$

c.d.n.

Powodzenia,

Jacek Cichoń