

Lista 4 Zadanie 5

Marcin Zubrzycki

3 lutego 2025

1 Treść Zadania

Należy wykazać, że następujące języki nie są bezkontekstowe

- $L_1 = \{a^i b^j c^k : i < j < k\}$
- $L_2 = \{a^i b^j : i = j^2\}$
- $L_3 = \{a^i : i \text{ jest liczbą pierwszą}\}$

2 Rozwiązanie

2.1 Język Pierwszy

Język składa się ze słów postaci $\underbrace{aa \dots a}_i \underbrace{bb \dots b}_j \underbrace{cc \dots c}_k$, gdzie $i < j < k$.

Słowo $z = a^n b^{n+1} c^{n+2}$ należy do języka. Jeśli język L_1 jest bezkontekstowy, to z może przybrać postać $z = uvwxy$, gdzie $vx \neq \epsilon$ i $|vwx| \geq n$. Ponieważ vwx ma co najwyżej n znaków, nie może zawierać jednocześnie symboli a i c .

- Zawiera a : uv^3wx^3y zawiera co najmniej $n + 2$ symboli a lub b . Wtedy $\#a \geq \#c$, więc słowo nie należy do języka
- Zawiera c : uvw zawiera n symboli a ale nie więcej niż $2n + 2$ symboli b i c . Niemożliwe, żeby w skład uvw wchodziło więcej b niż a i jednocześnie więcej c niż b .

Mamy sprzeczność niezależnie od sposobu rozkładu z na $uvwxy$. L_1 nie jest językiem bezkontekstowym.

2.2 Język Drugi

Język składa się ze słów postaci $\underbrace{aa \dots a}_{j^2} \underbrace{bb \dots b}_j$

Słowo $z = a^{n^2} b^n$ należy do języka. Jeśli język L_2 jest bezkontekstowy, to z może przybrać postać $z = uvwxy$, gdzie $vx \neq \epsilon$ i $|vwx| \geq n$. Ponownie mamy kilka przypadków rozbicia

- vwx składa się tylko z a : uwy ma n^2 symboli b i mniej niż n symboli a . Nie jest częścią języka
- vwx składa się z zarówno a i b : v składa się jedynie z a . Uznajmy, że $v = a^k$ oraz $x = b^m$ składa się tylko z b . $uv^{i+1}wx^{i+1}y$ składa się z $n + ik$ symboli a i $n^2 + im$ symboli b . Te wartości mają inne tempo wzrostu, więc nie jest możliwe żeby zawsze liczba $\#a = \#b^2$
- vwx składa się tylko z b : uwy ma n symboli b i mniej niż n^2 symboli a . Nie jest częścią języka

Mamy sprzeczność niezależnie od sposobu rozkładu z na $uvwxy$. L_2 nie jest językiem bezkontekstowym.

2.3 Język Trzeci

Język składa się ze słów postaci $\underbrace{aa \dots a}_p$, gdzie p jest liczbą pierwszą.

Jeśli język jest bezkontekstowy, to słowo $z \in L_3$ można rozbić na $z = uvwxy$, gdzie $vx \neq \epsilon$ i $|vwx| \geq n$. Jeśli $|z| = p$, to $v = a^q$ i $x = a^t$. Zgodnie z założeniami lematu o pompowaniu, $q+t > 0$. Słowo uwy należy do języka i ma długość $i = p - q - t$. słowo uv^iwx^iy ma długość $r + rq + rt = r(1 + q + t)$ podzielną przez r i $1 + q + t > 1$. Nie jest liczbą pierwszą jeśli $r > 1$.

Dla $r = 0$: $|uw^2xy^2z| = 2p$

Dla $r = 1$: $|uv^{p+1}wx^{p+1}z| = 1 + (p+1)q + (p+1)t = 1 + (p+1)(q+t) = 1 + (p+1)(p-1) = p^2$

W każdym przypadku mamy sprzeczność. L_3 nie jest językiem bezkontekstowym