



Rapport de Projet Modélisation géométrique

Badr Eddine OUHADDA - ZOUICHA Mohammed

Département Sciences du Numérique - Deuxième année
2023-2024

1 Introduction

Les surfaces paramétriques sont largement utilisées dans la modélisation et la conception assistée par ordinateur (CAO) pour représenter des formes complexes en trois dimensions. Parmi les différents types de surfaces paramétriques, les surfaces de Bézier triangulaires constituent un modèle polyvalent pour représenter des surfaces lisses et continues.

Surface Bézier triangulaire :

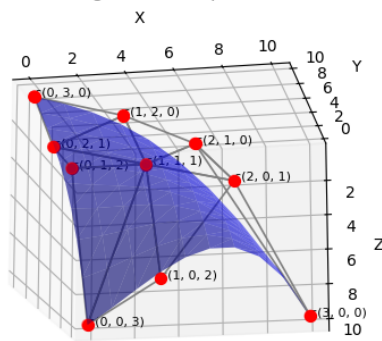
Les surfaces de Bézier triangulaires sont définies par un ensemble de points de contrôle disposés dans un réseau triangulaire. Chaque point de contrôle influence une région triangulaire de la surface finale. Ces surfaces peuvent être de degré arbitraire, ce qui signifie qu'elles peuvent représenter une grande variété de formes, des surfaces simples aux formes plus complexes.

2 Choix du modèle

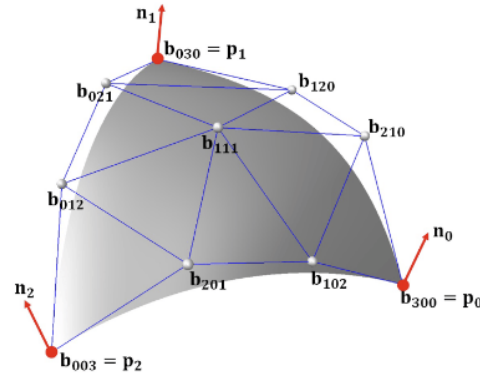
2.1 Les points de contrôle

Nous avons opté pour une notation spécifique pour les points de contrôle dans le but de rendre les calculs plus simples, ainsi que pour assurer les conditions de continuité $C0$ et $C1$, on doit savoir l'indice de chaque ainsi le sens d'orientation des patches triangulaires. Ce choix est illustré dans la figure suivante.

One triangular bezier patch : cubic



(a) Une facette triangulaire de bezier



(b)

(b) Une facette triangulaire de bezier

3 Algorithme de Casteljau

L'algorithme de Casteljau est une méthode couramment utilisée pour évaluer les surfaces de Bézier. Il permet de calculer les points de la surface en subdivisant itérativement le réseau triangulaire en triangles plus petits jusqu'à ce que chaque triangle soit suffisamment petit pour être approximé par une surface lisse.

3.1 Notations

Dans cette section, nous rappelons les définitions et quelques propriétés des lacettes triangulaires de Bézier définies sur un domaine triangulaire.

Soit Δ un triangle de \mathbb{R}^2 de sommets \mathbf{a}_i ou $i=1,2,3$. Les coordonnées barycentriques d'un point $u \in \Delta$ sont définies par les trois nombres réels λ_i , $i = 1, 2, 3$, avec λ_i la distance perpendiculaire de u à l'arête opposée au sommet \mathbf{a}_i . Nous avons donc

$$\begin{cases} u = \lambda_1 \mathbf{a}_1 + \lambda_2 \mathbf{a}_2 + \lambda_3 \mathbf{a}_3. \\ 1 = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3. \end{cases}$$

Une facette de Bézier triangulaire M est définie sur Δ par

$$M(u) = \sum_{i \in 0_0} b_i B_i^n(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3), \quad u = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \Delta,$$

où $i = (i, j, k)$ est un triple-indice parcourant l'ensemble

$$c_n = \{(i, j, k) \in \mathbb{N}^3 : i + j + k = n\},$$

contenant $\frac{1}{2}(n+1)(n+2)$ triplets et B_i^n sont les polynômes de Bernstein généralisés, définies par

$$B_i^n(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = \frac{n!}{i!j!k!} \lambda_1^i \lambda_2^j \lambda_3^k.$$

Les points b_i sont les points de contrôle d'une facette de Bézier.

4 Jonction de deux patchs

La jonction de deux patchs dans les courbes de Bézier triangulaires est cruciale pour garantir une transition douce entre les surfaces adjacentes. Ce processus repose sur la construction des points de contrôle, situés à proximité immédiate de la courbe partagée, par une combinaison linéaire barycentrique de trois points de contrôle provenant du triangle adjacent. Cela signifie que chaque paire de triangles (comme illustré ci-dessous) représente une carte affine entre les deux triangles.

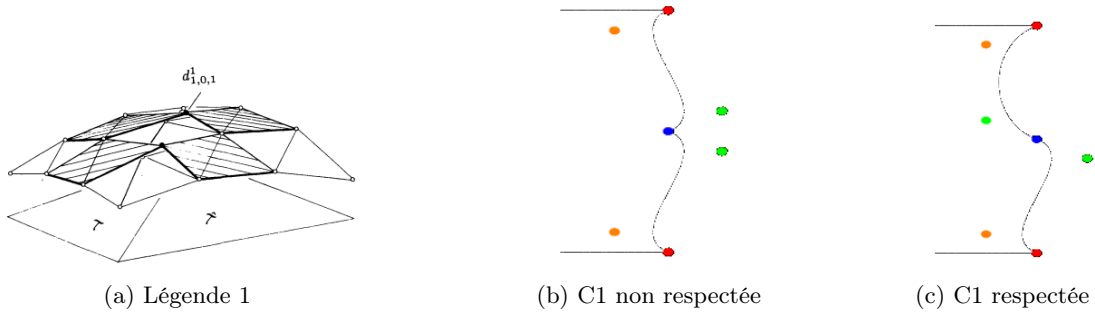
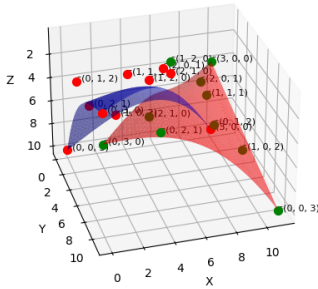


Figure 2: Jonction de deux patchs

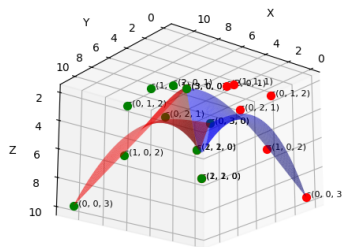
Les figures ci-dessous illustrent la jonction entre deux patchs dans différents scénarios : lorsque aucune condition de continuité n'est respectée, lorsque seulement la continuité $C0$ est assurée, et lorsque les deux conditions, $C0$ et $C1$, sont respectées.

Two Stitched Bézier Surfaces (no continuity)



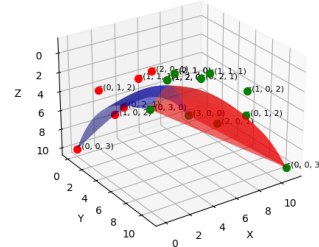
(a) Pas de continuité

Two Stitched Bézier Surfaces (with continuity)



(b) C0 respectée

Two Stitched Bézier Surfaces



(c) C1 respectée

Figure 3: Jonction de deux patchs

5 Jonction de N patches

En appliquant le même principe d'assemblage (stitching) pour deux patches, nous avons développé un programme capable d'ajuster certains points de contrôle en se basant sur les points présents le long du bord commun et l'orientation du triangle. Cet ajustement vise à garantir la continuité $C1$ entre les patches.

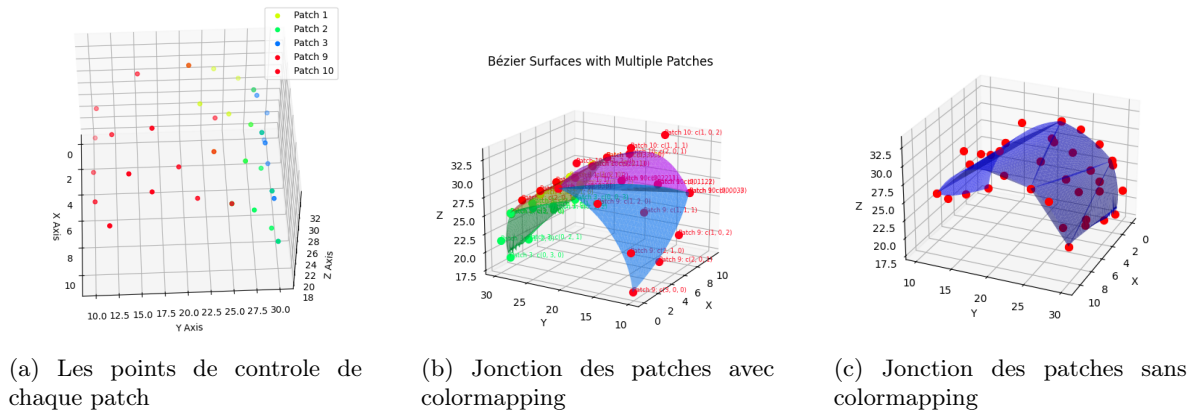


Figure 4: Jonction de N patches

6 Limitations

Les surfaces de Bézier triangulaires présentent plusieurs contraintes qui doivent être prises en compte dans leur utilisation. Leur topologie est limitée aux triangles, ce qui peut se révéler insuffisant pour modéliser des formes plus complexes nécessitant des topologies différentes. De plus, la manipulation des points de contrôle peut devenir complexe, en particulier pour des surfaces de degré élevé. Pour ces raisons, nous avons choisi de limiter notre projet aux surfaces triangulaires cubiques, même si le code a été conçu pour être compatible avec des surfaces de n'importe quel degré. Il est important de noter que les surfaces de Bézier triangulaires peuvent présenter des singularités et éprouver des difficultés à gérer les discontinuités, comme les bords vifs ou les variations brusques de courbure.

Le plus grand défi rencontré a été de trouver les points de contrôle appropriés pour plusieurs patches cubiques, en raison du manque de données disponibles. Pour les conceptions sur un demi-cylindre, nous avons utilisé GeoGebra 3D, une approche Ultérieurement, nous avons envisagé l'utilisation de la triangulation de Delaunay pour les triangles de toute forme 3D, puis affiné le processus avec l'algorithme de Sierpiński pour créer 10 points de contrôle par triangle.

Annexe

Condition de raccordement C1 entre deux facettes triangulaires de Bézier

Soient $X(r, s)$ et $Y(s, t)$ deux facettes triangulaires de Bézier de degré n , adjacentes et C^0 continues, c'est-à-dire

$$X(0, s) = Y(s, 0), \forall s \in [0, 1].$$

$X(r, s)$ est définie sur le triangle $\Delta_1 = abc$ et $Y(s, t)$ sur le triangle adjacent $\Delta_2 = abd$. Considérons maintenant la surface Z définie sur le quadrilatère $acbd$ composé des deux facettes X et Y . La surface Z est C^∞ sur le quadrilatère $acbd$ sauf à travers l'arête $[ab]$, où elle est seulement C^0 .

Quelles sont les conditions sur les points de contrôle de X et Y pour que la facette composite Z soit C^1 ?

Considérons les nombres $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ comme les distances signées entre le point d et les droites (bc) , (ca) et (ab) respectivement.

On dit que $X(r, s)$ et $Y(s, t)$ se raccordent en C^1 à travers leur courbe commune si la surface Z est C^1 sur $acbd$, et ceci est vérifié si et seulement si :

$$y(n-1-j, j, 1) = \lambda_1 x(n-j, j, 0) + \lambda_2 x(n-j-1, j+1, 0) + \lambda_3 x(n-1-j, j, 1), \quad j = 0, \dots, n-1,$$

où $x(i, j, k)$ et $y(i, j, k)$ sont respectivement les points de contrôle de X et Y .

Dans cette configuration, il est très difficile de trouver une condition explicite si et seulement si pour la continuité G^1 , seules des conditions suffisantes sont utilisées dans le traçage pratique.

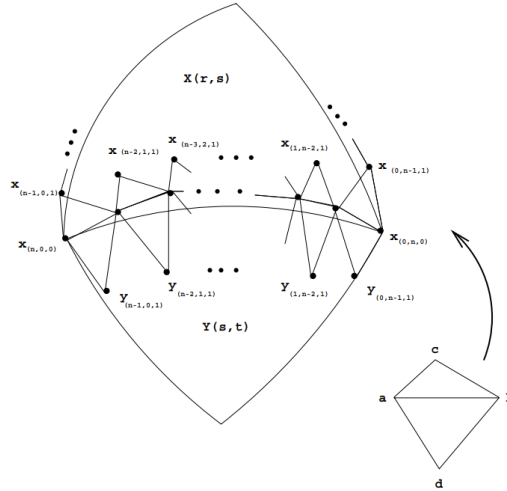


FIG. 1.6 – Conditions de raccordement C^1 entre deux facettes triangulaires de Bézier.

Figure 5