The development of the world reflected in the history of mathematics

Algebra

1:Abel transformation

$A_k=\sum_{i=1}^{k}a_i \quad B_k=\sum_{i=1}^{k}b_i$

$a_k=A_k-A_{k-1} \quad b_k=B_k-B_{k-1}$

$$\begin{aligned}\Rightarrow \sum_{i=1}^{k}a_ib_i &= a_1b_1+a_2b_2+\ldots+a_kb_k\\ &= a_1(B_1)+a_2(B_2-B_1)+\ldots a_k(B_k-B_{k-1})\\ &= B_1(a_1-a_2)+\ldots B_{k-1}(a_{k-1}-a_k)+B_ka_k\\ &= -\sum_{i=1}^{k-1}B_i(a_{i+1}-a_i)+a_kB_k\end{aligned}$$

Similarly: $\sum_{i=1}^{k}a_ib_i=a_1b_1+a_2b_2+\ldots+a_kb_k=-\sum_{i=1}^{k-1}A_i(b_{i+1}-b_i)+b_kA_k$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{k-1}[A_i(b_{i+1}-b_i)-B_i(a_{i+1}-a_i)]=A_kb_k-B_ka_k$$

$$\sum_{i=1}^{k-1}[A_ib_{i+1}-B_ia_{i+1}-(A_ib_i-B_ia_i)]=A_kb_k-B_ka_k$$

$$\sum_{i=1}^{k-1}\begin{vmatrix}A_i & B_i\\ a_{i+1} & b_{i+1}\end{vmatrix}-\sum_{i=1}^{k-1}\begin{vmatrix}A_i & B_i\\ a_i & b_i\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}A_k & B_k\\ a_k & b_k\end{vmatrix}$$

$def:\Delta(a_{i+1})=a_{i+1}-a_i \qquad \Delta(b_{i+1})=b_{i+1}-b_i$

$\Rightarrow \Delta(A_i)=A_i-A_{i-1}=a_i \qquad \Delta(B_i)=B_i-B_{i-1}=b_i$

$\sum_{i=1}^{k}a_i\Delta(B_i)=b_kA_k-\sum_{i=1}^{k-1}A_i\Delta(b_{i+1})$

$Let\ \ u=\Delta(B_i)=b_i\ ,v=A_i$,then $\Delta(v)=a_i$,$\Delta(b_{i+1})=\Delta(u)$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{k}u\Delta(v)=uv-\sum_{i=1}^{k-1}v\Delta(u)$$
$$\simeq \int \mathrm{udv}=uv-\int \mathrm{vdu}$$

2: Abstract algebra

Group

Ring

Field

3:Boolean algebra

- Grey code

Analysis

Peano's axioms

学/数学分析/实分析/陶哲轩实分析%20(Analysis)%20by%20陶哲轩%20(Terence%20Tao)%20(z-lib.org).pdf

$0, 0++, (0++)++, ((0++)++)++,$

等所组成. 如果我们着手写出关于自然数这意味着什么, 那么我们看到, 应该有下述的涉及 0 和增长运算 ++ 的公理:

公理 2.1 *0 是一个自然数.*

公理 2.2 *若 n 是自然数, 则 $n++$ 也是自然数.*

于是, 作为例子, 从公理 2.1 和公理 2.2 的两次使用, 我们看到 $(0++)++$ 是一个自然数. 当然, 这个记号开始变得不好使了, 所以我们约定用更熟悉的记号来写这些数:

定义 2.1.3 定义 1 是数 $0++$, 2 是数 $(0++)++$, 3 是数 $((0++)++)++$, 等等. (换言之, $1 := 0++$, $2 := 1++$, $3 := 2++$, 等等. 本书中我们用 "$x := y$"

① 严格地说, 对于这个非正式的定义还有另一个问题: 我们尚不曾定义 "集合" 是什么, 也不曾定义 "集合的元素" 是什么. 因此, 在本章的其他部分, 我们将尽可能避免提及集合及其元素, 除了是在非正式的讨论中.

cantor set

Geometry

- Topology
- Analytic geometry