

MÉMOIRE DE RECHERCHE

**Thème : L'introduction des nombres rationnels au
collège**

Rédigé par Léo GABET

Sous la direction de Fabien EMPRIN

Sommaire

Introduction.....	4
Notre recherche.....	6
Questions de recherche.....	7
I/ Éléments théoriques.....	8
I.1) Les différents registres sémiotiques (RS).....	8
I.1.a) Le RS des écritures fractionnaires.....	9
I.1.b) Le RS des écritures décimales.....	10
I.1.c) Le RS des écritures scientifiques.....	10
I.1.d) Le RS spatial, du réel.....	11
I.1.e) Le RS des logiciels informatiques.....	11
I.2) Les sources d'obstacles des élèves.....	12
I.2.a) Obstacle dans la définition et la représentation.....	13
I.2.b) Obstacle dans les calculs et les comparaisons.....	14
I.2.c) Obstacle dans le langage et entre les changements de RS.....	15
I.3) Approches d'apprentissage par les différentes introductions.....	16
I.3.a) Par les fractions avec le spatial.....	16
I.3.b) Par le partage de surface venant du RS spatial avec les fractions.....	17
I.3.c) Par la demi-droite graduée venant du RS spatial avec les fractions et les décimaux.....	18
I.3.d) Par les décimaux en lien avec les fractions et l'écriture scientifique.....	19
I.3.e) Par des logiciels informatiques sur les échanges de RS.....	19
I.3.f) Par d'autres contextes.....	20
I.4) Grille d'analyse des différentes introductions face aux types d'obstacles.....	22
Problématique.....	26
II/ Analyse de divers manuels et progressions.....	27
II.1) Pré-analyse des manuels sur l'introduction des nombres rationnels.....	27
II.1.a) Mission Indigo.....	28
II.1.b) Phare.....	28
II.1.c) Myriade.....	29
II.1.d) Delta.....	30
II.1.e) Dimension.....	30

Section - Sommaire

II.1.f) Transmath.....	30
II.1.g) Sésamath.....	31
II.1.h) Triangle.....	31
II.2) Grille d'analyse des manuels et repère de progressions.....	32
II.3) Expertise des grilles d'analyses.....	34
III/ Expérimentation.....	36
III.1) Présentation de la méthode expérimentale.....	36
III.2) Recueil et analyse des données de l'expérience.....	37
III.2.a) Choix d'introductions.....	37
III.2.b) Hiérarchisation des choix d'introductions.....	39
III.2.c) Type d'obstacle.....	40
III.2.d) Manuels et progressions.....	41
III.2.e) Public touché par ce questionnaire.....	44
III.2.f) Commentaires ajoutés à la fin de ce questionnaire.....	46
III.3) Analyse des données de l'expérience.....	46
III.3.a) Selon la première partie de la recherche.....	46
III.3.b) Selon la seconde partie de la recherche.....	48
III.4) Validation des grilles d'analyses.....	49
Conclusion.....	51
Annexes.....	53
Première partie du questionnaire.....	53
Seconde partie du questionnaire.....	54
Troisième et quatrième partie du questionnaire.....	55
Bibliographie.....	56

Introduction

Durant leur scolarité au primaire, en mathématiques, les élèves rencontrent différents types de nombres notamment les entiers, puis les décimaux et les rationnels, mais sans savoir que ce sont des ensembles de nombres. Au collège de nouveaux nombres sont introduits, les relatifs, tandis que ceux déjà introduits au primaire sont retravaillés de différents points de vue.

Ici, dans ce travail de mémoire de recherche, l'ensemble de nombres que nous abordons plus précisément est celui des nombres rationnels. Un rationnel, c'est un nombre qui peut s'écrire sous forme a / b avec a et b entiers et b non nul et « / » l'opérateur désignant une division. On entend souvent le terme de rationnel par le terme de nombre fractionnaire et il est associé aux nombres décimaux (rationnels particuliers). L'ensemble des nombres rationnels inclut aussi tous les entiers positifs et négatifs, car tout entier peut être divisible par 1. Il s'agit en fait de l'inclusion des ensembles de nombres que les élèves aborderont en classe de seconde.

Pour mieux cerner la notion de nombre rationnel, il s'agit de comprendre son « invention » et ces premières difficultés dans l'histoire des nombres en mathématiques. Le nombre est un concept abstrait qui permet de désigner tous les ensembles de cardinal équipotent. L'apparition des nombres entiers pour symboliser et mémoriser une quantité peut être datée de la préhistoire et les encoches dans des bois de rennes (Guedj & Truffault, 1996). La notion de nombre fractionnaire est quant-à-elle apparue en Égypte ancienne (2500 av. J.-C.) avec l'œil d'Horus et ses écritures associées que l'on nomme fractions égyptiennes. En Grèce, la notion de fraction est aussi présente, mais sous plusieurs formes et utilisations, notamment par les calculs, mais aussi par une représentation géométrique en termes de longueur attribuée à Pythagore¹. Ce dernier a introduit la notion de nombre irrationnel. Les Babyloniens (627 av. J.-C.) utilisaient des fractions dont le numérateur (qui était à l'époque à la place du dénominateur) était soit égal à 60 ou à 3600 pour diverses mesures. Ce système basé sur une division par 60 est toujours utilisé dans la mesure du temps. Tout comme les Babyloniens, les Romains quant à eux utilisaient un numérateur seulement égal à 12, mais ils avaient également des noms pour chaque subdivision de l'unité, ce qui ne facilitait pas du tout leurs calculs, ni la

1. Pythagore (582 av. J.-C. - 495 av. J.-C.) est un mathématicien grec.

Section - Introduction

manipulation de leur numération (les deux éléments étant naturellement liés). Enfin, nous arrivons aux notations que nous utilisons à l'heure actuelle, celle où le numérateur est au-dessus du dénominateur dans la division. Ces notations apparaissent (mais sans la barre de fraction séparant numérateur et dénominateur) entre le 5^e et le 8^e siècle en Inde et ont été reformulées par le mathématicien Bhaskara². Cependant, ce sont les mathématiciens arabes et les ouvrages d'Al-Hassar³ qui ont ensuite « officialisé » les nombres rationnels par la mise en place du séparateur, qui représente pour nous aujourd'hui, la barre de fraction séparant le numérateur et le dénominateur. Ces nombres seront introduits en Europe par le mathématicien italien Léonard de Pise, connu sous le nom de Fibonacci⁴ lors du 12^{ième} siècle. A cette époque, Il est très rare d'utiliser un ensemble de fractions ayant un dénominateur commun. C'est par l'intermédiaire d'Al-Kashi⁵ que l'on verra le développement de l'utilisation de ce que l'on nomme les fractions décimales, c'est-à-dire les nombres décimaux. Ces nombres ne seront popularisés qu'à partir du 16^{ième} siècle (grâce à un ouvrage de Simon Stevin⁶, *la Disme*).

Les nombres rationnels représentaient déjà une grande avancée dans le domaine des nombres en mathématiques. Il existait de nombreuses notations différentes les unes des autres et beaucoup de pays avaient des visions différentes pour parler des nombres rationnels. D'une part, les rationnels étaient vus comme une façon différente d'écrire les nombres entiers par l'intermédiaire des fractions, qui elles, pouvaient avoir différentes utilités comme la mesure du temps. D'autres parts, l'étude des fractions décimales qui permettait l'approche des écritures décimales, pour approcher la valeur d'une fraction ou par exemple, l'étude des nombres irrationnels avec une approche sur leur partie décimale infini (exemple avec la racine de 2).

2. Bhaskara est un mathématicien indien du VII^e siècle.

3. Al-Hassar est un mathématicien marocain, ayant vécu au XII^e siècle.

4. Leonardo Fibonacci (1175 - 1250) est un mathématicien italien.

5. Al-Kashi (1380 - 1429) est un mathématicien et astronome perse.

6. Simon Stevin (1548 - 1620) est un physicien et mathématicien.

Notre recherche

Dans ce mémoire, nous nous intéressons aux différentes approches des nombres rationnels et de leurs méthodes d'apprentissages. Notre objectif est d'étudier les implications de ces approches, de les comparer, pour analyser les difficultés des élèves dans la compréhension des rationnels.

C'est pour cela que pour commencer cette recherche, nous nous baserons essentiellement sur des expériences et lectures d'articles scientifiques centrés sur les difficultés et les obstacles liés aux rationnels par rapport à leurs diverses introductions. Il s'agit d'analyser les différents registres sémiotiques (Douady, 1984 ; Duval, 2002) des rationnels, puis d'analyser qu'elles sont les différentes sources d'obstacles que peut rencontrer un élève : problèmes de compréhension ou de définition avec les rationnels, en fonction du types d'approches de ces nombres. Le but est de synthétiser nos résultats sous forme d'une grille de synthèse, ce qui nous amène à notre problématique, que nous poserons suite à nos éléments théoriques.

Dans la suite, nous travaillons sur l'élaboration d'autres grilles reliant les différentes approches des programmes des manuels et progressions aux diverses introductions que nous avons identifiées. L'intérêt est d'analyser la manière dont sont organisés les objectifs en termes d'outils mathématiques, pour l'approche dédiée aux rationnels.

Notre objectif final est d'aboutir à une synthèse des résultats de la recherche des différentes approches analysées et sources d'obstacles répertoriées. Une mise en pratique de cette grille par l'intermédiaire d'un questionnaire permet d'en vérifier la pertinence et de dresser un tableau des pratiques des enseignants.

Questions de recherche

Nous allons dorénavant nous questionner sur certains points que nous allons analyser durant notre recherche. Tout d'abord en revenant sur l'histoire des nombres rationnels abordée précédemment. Ces nombres ont été introduits et travaillés de différentes façons, avec des visions épistémologistes différentes, comme nous avons pu le voir. De plus, le terme de rationnel qualifiant à la fois les fractions, les décimaux et les entiers, nous verrons que par la suite que ce sont les fractions que les élèves retiennent le plus souvent pour qualifier les rationnels. De nos jours,

« Les fractions sont un des premiers et principaux terrains où se développe le dégoût des mathématiques et la conviction, à peu près toujours fausse, que l'on est incapable de cette activité "réservée aux plus intelligents" [...]. Celles-ci sont comme des insectes nuisibles qui s'attaquent aux écoliers et dont les piqûres entraînent d'interminables séquelles intellectuelles et morales. » (Rouche, 1998).

Pour nous, cette citation représente bien l'enjeu de l'enseignement des rationnels. C'est pour que cela que dans ce mémoire, nous nous intéressons sur les approches employées pour l'introduction des rationnels. Ce qui nous amènera à étudier les échanges et la dialectique entre les différents types d'introductions construits par les registres sémiotiques des rationnels.

Il s'agira aussi avant tout de cerner les sources d'obstacles de chaque registre sémiotique pour pouvoir y remédier par la suite.

I/ Éléments théoriques

Selon de nombreux chercheurs (Adjage, Brousseau, Douady, Duval, Guedj) et de notre expérience, pour les élèves, un nombre c'est ce qui sert dans les calculs, à mesurer une grandeur et bien d'autres choses. C'est pour cela que nous étudierons diverses approches possibles, dans le cadre des rationnels, par les éléments théoriques employés dans les différents articles et expériences scientifiques choisies. Tout en nous concentrant sur les différents registres sémiotiques de ces nombres que nous allons aborder en premier. Puis, sur les sources d'obstacles et dialogues entre ces registres, pour ensuite traiter différentes approches. Ainsi, nous pourrons faire le lien entre les sources d'obstacles constatées dans tous les registres sémiotiques et entre eux, selon les différents types d'introductions. L'intérêt sera l'élaboration d'une grille d'analyse pour synthétiser nos éléments théoriques.

I.1) Les différents registres sémiotiques (RS)

En mathématiques, d'après Douady (1984), on peut affirmer qu'un élève n'a compris que lorsqu'il est capable de changer de registre de la notion qu'il vient d'apprendre. Par exemple, les études de fonction peuvent se faire dans les registres sémiotiques algébriques et graphiques (Duval, 2002). Les nombres rationnels possèdent eux aussi plusieurs registres sémiotiques, que nous pourrons nommer aussi, écritures de type fractionnaire, décimal pour le domaine de l'algèbre et géométrique pour le domaine spatial. Un autre domaine est en marche depuis plusieurs années, celui de l'informatique. De plus, selon Duval (1993), nous pouvons voir que les différentes représentations sémiotiques d'un objet mathématique sont absolument nécessaires pour sa compréhension. Dans sa suite d'ouvrages, en 1995, Duval nous montre que des systèmes sémiotiques servant à la représentation de connaissances permettent d'accomplir trois activités cognitives appartenant à toute représentation :

« Tout d'abord, constituer une trace ou un assemblage de traces perceptibles, qui soient identifiables comme une "représentation de quelque chose" dans un système déterminé. Ensuite, transformer les représentations par les seules règles propres au système de façon à obtenir d'autres représentations pouvant constituer un apport de connaissance par rapport aux représentations initiales. Enfin, convertir les représentations produites dans un système en représentation d'un autre système de

telle façon que ces dernières permettent d'expliciter d'autres significations relatives à ce qui est représenté. » (Duval, 1999).

Ainsi, tout système sémiotique permettant ces trois activités cognitives est appelé « registre de représentation sémiotique » ou plus simplement registre sémiotique comme nous l'avons déjà évoqué au-dessus.

Commençons par analyser ces différents registres sémiotiques (que nous abrègerons par RS), ainsi que les dialogues et liens entre eux, pour que nous puissions aboutir aux premières sources d'obstacles avant d'étudier diverses approches d'apprentissages dans le cadre des différentes introductions que nous verrons.

I.1.a) Le RS des écritures fractionnaires

Notre premier registre d'étude sera porté sur le RS des écritures fractionnaires. En effet, nous pouvons voir que la première approche que les élèves retiennent sur la notion de rationnel est celle de nombre fractionnaire (Adjage, 1999). Il s'agit d'une écriture qui révèle de nombreux problèmes chez les élèves. Le recours en simultané à deux nombres entiers qui composent la fraction par le numérateur et le dénominateur sont un obstacle avéré à l'acceptation d'une fraction (quotient) comme signifiant un seul nombre (Adjage, 1999). Cependant, le RS des écritures fractionnaires était comme nous l'avons vu lors de notre introduction concernant l'histoire des nombres rationnels, le premier RS d'écriture des rationnels qui étaient alors connu par les « fractions égyptiennes ». Il est très difficile de se séparer de ce RS lors de l'introduction de ces nombres, même un enseignement de type verbal (exemple : « trois cinquième » au lieu d'écrire « $\frac{3}{5}$ ») entraînera des problèmes de formation dans la suite du cursus des élèves (Adjage, 1999). C'est pour cela que de nombreuses méthodologies sont mises en place dans le cadre des écritures fractionnaires. Ce RS représente un atout essentiel dans la manière d'écrire les rationnels et c'est l'écriture la plus « réputée » pour qualifier ces nombres. Il s'agira aussi de savoir faire la distinction entre les fractions et les écritures fractionnaires. En effet, les fractions sont composées de numérateurs et de dénominateurs entier, tandis que les écritures fractionnaires ne sont pas forcément composées de numérateurs et de dénominateurs entier, par exemple, par des nombres décimaux.

I.1.b) Le RS des écritures décimales

Notre second registre d'étude sera porté sur le RS des écritures décimales. Comme nous l'avons vu, les nombres décimaux ont été introduits après la découverte des fractions décimales par Al-Kashi (fractions dont le dénominateur qui est égal à des puissances de 10). Un nombre décimal, c'est un nombre qui peut s'écrire comme quotient d'un entier relatif par une puissance d'exposant positif de 10 (exemple : $1/10 = 0,1$). Tout nombre décimal est un rationnel, d'où l'importance de ce RS, mais attention, il existe des rationnels qui ont une écriture décimale avec un nombre fini de décimal (par exemple $1/2 = 0,5$) et un nombre infini de décimal qui se répète indéfiniment (comme $9/7 = 1,28571428571428\dots$). Ainsi, un rationnel n'est pas forcément comme nous venons de le voir un nombre décimal. De plus, on peut avoir des nombres que l'on nomme irrationnels dont leur partie décimale est une suite de nombre infini (comme $\sqrt{2} = 1,41421\dots$). Il est en effet plus simple d'utiliser des fractions décimales pour simplifier des calculs de fractions formelles comme nous le verrons par la suite. Tout comme le fait de privilégier l'expression décimale de certains rationnels sur leur expression fractionnaire. D'après les recherches menées par Bolon (1992) sur l'enseignement des nombres décimaux, on peut en tirer beaucoup d'information. Ceci nous permet d'examiner les cahiers d'évaluation proposés à la rentrée de septembre 1991, concernant les calculs et comparaisons de nombres décimaux. Ainsi, de nombreuses difficultés dans l'enseignement de ces nombres sont mises en avant, notamment un dilemme depuis plusieurs décennies concernant l'ordre d'arrivée des notions en mathématiques, ici entre les fractions et les décimaux. On constate que les décimaux sont plus un outil dans les activités de mesure et une façon intermédiaire d'écrire les fractions d'une autre manière.

I.1.c) Le RS des écritures scientifiques

Ce RS est un cas particulier dans les écritures des nombres décimaux. En effet c'est une écriture sous forme de produit d'un nombre décimal par une puissance de 10 dont l'exposant est un entier relatif (par exemple $133 = 1,33 \times 10^2$ ou $0,0552 = 5,52 \times 10^{-2}$). Cette écriture est très utilisée dans le domaine scientifique comme la physique, pour montrer différentes formes d'un rationnel dans le cadre des écritures scientifiques pour les élèves (fondamental lors des exercices en science nécessitant d'être écrit de cette

manière). Ce registre permet aussi de montrer le déplacement de la virgule vers la droite pour des puissances de 10 positives et vers la gauche pour des puissances de 10 négatives (on peut faire le lien avec les conversions vues en classe de 6ème). Tout comme pour les calculs de nombre décimal, ce registre se révèle très intéressant. De même, c'est un système d'approximation permettant de stocker en mémoire plus facilement des nombres sans perdre leur précision dans un ordinateur. Dans ce mémoire, ce RS ne sera pas exploité à cent pour cent, car c'est lors de la classe de 3ème que les élèves utiliseront énormément cette façon d'écrire.

I.1.d) Le RS spatial, du réel

Ce RS d'étude portant sur la réalité et le spatial sera sur celui qui est l'un des plus utilisés lors du primaire pour la représentation des fractions. Notamment par l'expérience faite par Brousseau et Brousseau (1987), où nous pouvons analyser dans la première partie une introduction aux nombres rationnels, par le biais du registre spatial sur les différentes épaisseurs d'une feuille de papier. Cette première partie de thèse nous permet de voir une approche des rationnels pour les élèves. Dans le choix du RS spatial, il reste néanmoins la possibilité de choisir entre la dimension 1, soit les droites graduées, ou dimension 2, soit les surfaces fractionnées (par exemple : "les parts de tartes"). D'après l'étude faite par Adjage (1999), c'est un échec pour les droites graduées. Tandis que pour les surfaces fractionnées, la dimension 2 en soi, est bien meilleur, mais elle nécessite un temps d'explication plus long. Cependant, les surfaces fractionnées engendreront un obstacle majeur pour les élèves, c'est de définir toutes les fractions comme des nombres plus petits que la valeur 1. Il s'agira de choisir l'environnement de travail le plus optimal, selon la situation. C'est par ce RS que l'on introduit aussi les connaissances en termes d'agrandissements ou de réductions de diverses figures dans le domaine de la géométrie, fusionnant ainsi les nombres rationnels et les figures géométriques par les notions de rapport (Théorème de Thalès par exemple pour la suite du cursus mathématiques).

I.1.e) Le RS des logiciels informatiques

Notre dernier RS d'étude sera sur les logiciels informatiques qui peuvent être utilisés pour palier de nombreux soucis dans l'introduction et l'enseignement des

rationnels. Par les recherches d'Adjage (2007), nous pouvons voir par exemple, l'utilisation des logiciels ORATIO et NovOra dont l'objectif est de construire « l'objectivation » de la notion de rationnel. En effet, dans ces recherches, il a été constaté que les élèves prennent plus confiance en eux dans le cadre de recherche de solution dans une situation de problème sur ordinateur. Les élèves peuvent plus facilement « tester » leurs idées et peuvent recommencer autant de fois qu'ils le voudront. Pour permettre de pallier les difficultés de la technique traditionnelle du « papier/crayon » où de nombreux élèves avaient peur d'écrire leurs réponses, ou qui limitait parfois leurs décisions entre ratures, continuer, arrêter, etc. Ces logiciels informatiques sont donc une nouvelle avancée pédagogique, dans les conséquences sont de donner confiance aux élèves. Pour les amener à les faire davantage réfléchir et comprendre différentes notions mathématiques plus facilement tel que les rationnels avec par exemple, les calculs de fraction (Adjage, 2007). Ce qui permet de mettre en avant le rôle des "mécanismes intuitifs" (Mack, 1990 ; Streefland, 1991) dans le but de permettre aux élèves de mieux comprendre une notion en mathématiques, par l'intermédiaire de rappel qu'ils pourront se faire intuitivement. Par exemple, les élèves peuvent directement savoir par intuition après de nombreux exercices qu'ils auront faits, que $\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$, ce qui pourra leur permettre de mieux simplifier des calculs plus rapidement.

I.2) Les sources d'obstacles des élèves

Le but de ces différents RS que nous avons vu est de définir et de représenter les nombres rationnels, mais aussi d'effectuer des calculs et des comparaisons entre des nombres. Malheureusement, comme dans toutes les notions que nous pouvons avoir en mathématiques, ils existent des sources d'obstacles qui peuvent déclencher des erreurs pour les élèves et qui viennent des choix des RS, ainsi que les échanges entre eux. Maintenant, nous allons étudier chaque source d'obstacle que nous avons identifiée par nos articles scientifiques.

I.2.a) Obstacle dans la définition et la représentation

De ce que nous avons pu voir dans les différents RS, est qu'il existe pour chacun des obstacles potentiellement engendrés par leur utilisation, c'est-à-dire par la définition et la représentation. Le premier obstacle que nous pouvons constater par Adjage (1999), c'est le choix du RS d'introduction. En effet, nous savons que le premier RS ainsi que l'enchaînement avec d'autres RS des rationnels dans lesquels les élèves travailleront influera sur leur compréhension (Adjage, 1999).

Tout d'abord, les rationnels ont une infinité d'écritures comme nous avons pu le voir, ce qui n'arrange pas du tout les élèves, qui eux, auront du mal à caractériser ce qu'est un nombre rationnel.

Le plus « abstrait » et le plus complexe semble être le RS des écritures fractionnaires, car cela représente un premier « dégoût » des mathématiques (Rouche, 1998). Il serait donc très dangereux d'aborder les rationnels par le RS fractionnaire, tout comme le fait de commencer par le RS des écritures décimales. Il ne reste donc plus qu'un seul choix que nous allons mettre en œuvre ici, c'est le RS spatial. Effectivement, c'est par ce RS spatial que les élèves de primaire entendent pour la première fois parler de nombres rationnels, sans pour autant évoquer le terme de rationnel. À ce moment-là de leur scolarité, les élèves qualifient seulement les rationnels par les nombres fractionnaires. Il est conseillé de reprendre le RS spatial dans le cadre de l'introduction des rationnels lors du cycle 4 (Kieren, 1988) pour permettre aux élèves de procéder à une étape dans leur enseignement que nous qualifions de phase de « récupération » des connaissances. L'intérêt sera de faire appel aux connaissances des élèves qu'ils possèdent déjà par le biais du RS spatial vu lors de l'introduction des rationnels au primaire. Attention, car il reste encore à choisir entre la droite graduée (dimension 1) et la surface (dimension 2). Selon Adjage (1999), dans le cadre d'une première approche pour les rationnels, il est primordial de commencer par le cas de surface, que nous connaissons par les exemples de types : « partage de part d'un gâteau ». Ceci entraînera un gros obstacle, c'est que contrairement à la demi-droite graduée, il n'y a aucune fraction plus grande que 1. Mais aussi des difficultés dans l'acception d'égalité du type « $1/2 = 2/4$ » et « $3/3 = 1$ ». Le cas de surface va permettre l'arrivée des nombres fractionnaires et une représentation algébrique de ce qu'apprennent les élèves avec les partages de surfaces.

Ceci entraîne que pour certains élèves, une fraction est vue comme un nombre plus petit que 1... or ce qui est faux, par exemple « $12/5 = 2,4$ » et « $2,4 > 1$ » pourtant $12/5$ est bel et bien une fraction.

Il est important de signaler l'arrivée de problème mathématique du style : « Partager de manière équitable une somme de 10 euros entre 3 personnes » par une résolution grâce aux rationnels (Balacheff, 1982). Ce qui enchaînera sur la compétence de raisonner et d'utiliser les nombres rationnels pour résoudre des problèmes comme énoncés ci-dessus.

I.2.b) Obstacle dans les calculs et les comparaisons

Par rapport aux obstacles liés à la définition et la représentation des rationnels, nous avons une source d'obstacle dans la distinction entre fraction/mesure et fraction/opérateur linéaire ce qui engendrera de nombreux obstacles dans la réalisation des calculs rationnels. En termes de calculs, de nombreux obstacles apparaissent alors dans les opérations de multiplication et de division. Par exemple, en termes de connaissance venant du primaire, le fait de multiplier ne donne pas forcément quelque chose de plus grand, comme « $1/2 * 4 = 2$ » ou divisé ne donne pas quelque chose de plus petit, comme « $1/0,5 = 1/(1/2) = 2$ » ou mettre en puissance ne donne pas quelque chose de plus grand, comme « $(0,5)^2 = 0,25$ ».

Par rapport aux études nationales, nous avons un obstacle récurrent sur les calculs de nombres décimaux comme « $3,8 + 7,5 = 10,13$ » sur la distinction entre les unités et les décimales. Nous pourrions aller plus loin dans l'étude des nombres décimaux, mais nous nous centraliserons essentiellement sur les obstacles des rationnels en général dans ce mémoire.

Un autre obstacle qui quant à lui présente sur tout le niveau secondaire dans le cadre des calculs, la division de deux rationnels. Par exemple, de la forme $(a / b) / c$ ou $a / (b / c)$, mais aussi de la forme $(a / b) / (c / d)$ avec a, b, c et d des nombres entiers. De même, la règle des opérations dans les calculs qui représentent la base dans les calculs dits littéraux est encore même pour des personnes ayant fini leur scolarité une source d'obstacle très présente.

De nombreuses difficultés sont aussi observées chaque année dans ces évaluations nationales dans le cadre des comparaisons comme « $3,14 > 3,7$ car $14 > 7$ ». Pour comparer des nombres décimaux, les élèves comparent d'abord la partie entière « $42,45 < 536,45$ », mais quand la partie entière est la même, ils comparent les parties décimales comme pour des entiers. L'étude de Neyret (1991) montre que les élèves caractérisent la partie décimale en utilisant le vocabulaire de la partie entière comme dans "13,475" on a que 4 est pris souvent pour le chiffre des centaines. D'ailleurs la numération orale française dit : « treize virgule quatre cent soixante-quinze » et pour "13,7" on dit : « treize virgule sept ». On comprend alors pourquoi tant d'élèves qui éprouvent déjà des difficultés en mathématiques jugent "13,7" plus petit que "13,475".

I.2.c) Obstacle dans le langage et entre les changements de RS

Il ne s'agit donc pas seulement d'obstacles de techniques de calculs ou de comparaisons, mais aussi d'obstacles de langage pour les nombres rationnels. Les erreurs de numération orale que nous venons de voir précédemment vont nous permettre de revenir sur les erreurs induites par l'usage des mots, comme nous l'avons vu sur les écritures fractionnaires avec l'exemple de « trois cinquième » au lieu d'écrire « $3/5$ » qui impliqueront de grandes lacunes pour la suite du cursus de la notion des nombres rationnels (Adjage, 1999). Tout comme pour les comparaisons entre décimaux avec l'exemple précédent.

Beaucoup de ces obstacles se relie et s'enchaînent à travers les différents RS, par exemple la fraction « $1/2$ » qui vaut en termes d'écriture décimale « 0,5 » et représente en termes de langage « la moitié » ou le milieu du segment de la droite graduée $[0 ; 1]$. En effet, nous avons pu voir que certains obstacles n'apparaissent que lors des changements de RS comme entre les fractions et les décimaux ou les partages de surfaces et la demi-droite graduée. Par exemple, sur les valeurs des nombres fractionnaires, c'est-à-dire les nombres décimaux avec le passage entre les deux écritures comme « $5/2 = 5,2$ au lieu de 2,5 » qui arrive fréquemment, selon les évaluations nationales. Ce qui implique et nous rappelle l'importance de l'arrivée des différents RS dans l'introduction des rationnels par Adjage.

L'ensemble de cette sous-partie nous a donc permis de catégoriser au mieux l'ensemble des obstacles des nombres rationnels, dans le but de les relier aux différentes introductions que nous verrons par la suite. Ainsi, nous pouvons avoir répertorié ces obstacles par type : définition, spatial, comparaison, calculatoire, langage et changement entre RS. Nous considérons que le cas de spatial regroupe les dimensions 1 et 2, respectivement la demi-droite graduée et le partage de surface fractionnée.

I.3) Approches d'apprentissage par les différentes introductions

Ici, nous allons analyser quelques introductions aux nombres rationnels tout en analysant les RS exploités. Pour nous permettre d'étudier chaque étape des introductions dans le cadre du processus de la transmission du savoir de ces nombres pour les relier aux types d'obstacles que nous venons d'étudier.

Dans notre analyse, nous mettons en avant le fait qu'il s'agisse avant tout de mettre en jeu une variable de contexte, comme l'a expliqué Adjage (2005) pour montrer la pertinence didactique montrant que les changements de registre ont un impact repérable sur les scores et les procédures des élèves. C'est que nous allons voir notamment par les différentes introductions et dialogues entre les RS lorsqu'il y en a.

I.3.a) Par les fractions avec le spatial

Les études d'Adjage (1999) nous permettent l'analyse d'un exemple d'introduction sur l'enseignement initial des rationnels par l'écriture fractionnaire basé sur trois phases : « Une première phase consacrée au "sens" », « une deuxième phase montrant les écritures fractionnaires comme de simples notations », puis « une troisième phase constituée d'un entraînement intensif à l'usage des écritures fractionnaires ». Nous avons noté que la première phase est structurée par l'illustration spatiale (RS spatial) avec succès auprès des élèves. La seconde phase présente les écritures fractionnaires (RS écriture fractionnaire) comme de simples notations, mais là, c'est une grande difficulté qui se révèle incontournable pour les élèves, car cette phase est particulièrement mal vécue auprès des élèves. Puis, la dernière phase est consacrée à une pratique intensif à l'usage des fractions dans le cadre du calcul formel, dans le but de revenir sur la première phase

et donc de récupérer les élèves en difficulté, pour leur permettre une acquisition des connaissances des nombres fractionnaires. Comme nous pouvons le voir, il est d'intérêt de récupérer les élèves dans le processus d'apprentissage et de ne pas les laisser seuls face à leur dégoût et incompréhension des nombres fractionnaires suite à la deuxième phase. Le RS des écritures fractionnaires est capital, mais de ce que nous venons de voir, il est initié par un contexte spatial pour donner du « sens » à ce que l'on fait, pour ensuite partir dans les représentations « abstraites » de ces écritures fractionnaires. Nous sommes dans un apprentissage partant du plus « simple » au plus « compliqué » pour éviter les lacunes auprès des élèves. C'est une introduction très classique, mélangeant ainsi les échanges entre les RS des écritures fractionnaires et spatiales, permettant une progression croissante dans les difficultés.

I.3.b) Par le partage de surface venant du RS spatial avec les fractions

Dans la manière d'introduire les nombres rationnels, on peut aussi voir apparaître dans Adjage (1999) le partage de surface, par exemple « partager en 6 parts une pizza ». Durant cette introduction, nous sommes, selon Brousseau (1987), dans un processus de conceptualisation qui réside essentiellement là où les objets n'ont pas encore de "nom", mais "s'inscrivent dans des schémas d'action du sujet" et c'est par ce processus que la notation fractionnaire est transmise. On constate que c'est un dialogue entre RS par une variable de contexte. Cependant, la notion de concept représente évidemment un temps didactique long qui permet une recomposition par filiations et ruptures du savoir que nous allons transmettre. Ce qui est montré par Blouin & Lemoyne (2002) est que nous sommes dans le cadre d'une rupture du contrat didactique (attente du professeur envers des élèves et attente des élèves envers du professeur). Tandis que les critères de notations représentent un temps didactique assez court, permettant aux élèves d'avoir une fourniture du type "clé en main" rapidement. C'est une introduction différente par l'utilisation du RS des écritures fractionnaires, car nous partons du principe que nous allons amener les élèves à se questionner sur « comment peut-on faire, pour trouver une valeur mathématique permettant de répondre à la situation donnée ? ». On part sur un problème, amenant de nouvelles sources de savoir pour les élèves et faire le lien avec les notations « traditionnelles » des nombres rationnels pour poursuivre avec le reste des RS.

I.3.c) Par la demi-droite graduée venant du RS spatial avec les fractions et les décimaux

Tout d'abord, nous parlons de la demi-droite graduée au lieu de la droite graduée, car nous n'aborderons que les rationnels négatifs qu'après les rationnels positifs, il semble risqué de s'aventurer sur les négatifs en même temps que les positifs, durant cette phase d'introduction. Ceci pour éviter d'interférer avec l'ensemble des nombres relatifs que les élèves viendront d'apprendre avant l'ensemble des rationnels. Adjage se questionne sur :

“Existe-t-il un registre de transition entre les deux registres incontournables des écritures fractionnaires et décimales [...] ? Un registre susceptible d'annoncer puis de contrôler les futurs et périlleux traitements fractionnaires ? Nous avons [...] que la demi-droite graduée, équipée de ressources appropriées, répond à ce premier cahier des charges ” (Adjage, 2007).

Il est donc conseillé, voire indispensable d'utiliser le registre de la droite demi-graduée comme support d'appui de dialogue entre les RS d'écritures fractionnaires et décimales. C'est aussi une première approche pour les rationnels dans le cadre de « positionner » ces nombres dans un repère graphique (ici la demi-droite ou connu aussi pour être l'axe des abscisses positives).

Jusque-là, nous tournons principalement autour de deux registres sémiotiques dans l'introduction des nombres rationnels qui sont les écritures fractionnaires et le spatial par le partage de surface et la demi-droite graduée. En effet, par la demi-droite graduée nous pouvons avoir le cas d'introduction des rationnels dans le cadre de déterminer les coordonnées d'un point non entier entre deux points dont les coordonnées sont entières. Nous sommes dans une construction qu'avait développée Kieren en 1988 sur les transferts entre différents registres de représentations. Dans cette construction, nous avons des changements de contextes du même point de vu qu'Adjage (2005) et des sous-constructions inter-dépendantes (Kieren, 1988). La demi-droite graduée permet un apprentissage en distinguant l'importance de faire des transpositions entre chaque registre sémiotique des rationnels. Cette introduction met aussi l'accent sur la connaissance du repère graphique notamment sur l'axe des abscisses (vu précédemment), permettant un futur chapitre sur un repère orthonormé dans le cadre de positionnement de points voir sur l'introduction au logiciel Géogébra. Il ne s'agit pas seulement de mélanger les RS des rationnels, mais aussi de faire des liens avec d'autres chapitres pour la suite.

I.3.d) Par les décimaux en lien avec les fractions et l'écriture scientifique

On a tendance à mettre en avant les nombres fractionnaires, mais il ne faut pas oublier que ces nombres fractionnaires donnent comme valeur des nombres décimaux ou non-décimaux ou des entiers simplement. Par une synthèse de travaux, comme ceux de Brousseau (1987) et Douady (1984), on explique actuellement les difficultés d'apprentissage sur les décimaux par un ensemble de facteurs. L'intérêt de commencer par les décimaux, est de savoir comment on peut retranscrire ces décimaux en écriture fractionnaire. Il s'agit en fait d'un travail cognitif et méta-cognitif, car on met en jeu la valeur des nombres fractionnaires par les nombres décimaux. C'est un ensemble de processus par lequel la connaissance va s'acquérir chez les élèves. De plus, c'est aussi bien pour faire travailler la prise de conscience des modalités des élèves que pour leur faire développer leurs compétences. Par de nombreuses situations physico-empiriques (expérience mise en pratique), on peut analyser que les élèves sachent très bien décrire les nombres décimaux composés en unité, en dixième, en centième, ainsi de suite et remettre sous forme de fraction décimale (Douady, 1984). Nous sommes dans une phase de dialogue entre RS des écritures décimales et fractionnaires, c'est un retour sur le RS des écritures fractionnaires. Nous avons vu aussi dans les RS, celui des écritures scientifiques, qui était une forme particulière des nombres décimaux et une première approche pour les puissances de 10 positives et négatives dans le cadre de la position/déplacement de la virgule pour ces nombres. Cette façon d'écrire est alors transmise lors de ces reconversions en nombre fractionnaire et peut-être utilisée comme support de transition en lien avec une variable de contexte avec par exemple la conversion de « $\frac{1}{10} = 1 * 10^{-1} = 0,1$ ».

I.3.e) Par des logiciels informatiques sur les échanges de RS

Dans les différents RS du début de notre recherche, nous avons vu une nouvelle progression dans la pédagogie, par celle de nombreux logiciels informatiques permettant aux élèves une interaction plus « simple » pour un premier contact avec une nouvelle notion. Dans Adjage (1999), nous pouvons voir l'utilisation des logiciels ORATIO, NovOra, Gradu, Fracti et dans Adjage (2007) une étude plus centrée sur ORATIO et NovOra qui

ont été conçu par Adjage lui-même dans le cadre de sa recherche doctorale de 1999. En effet, ORATIO est un logiciel qui est une base de données enregistrant les performances des élèves, de fiches pédagogiques accompagnant un enseignement des rationnels à l'école et au début du collège. NovOra est quant à lui un logiciel consacré aux quotients d'entiers, au produit par un rationnel et à la proportionnalité, il est destiné à des élèves de 6ème et de 5ème. Leurs originalités résident avant tout dans l'utilisation des droites graduées comme premier système d'expression des rationnels. Ces logiciels nous permettent de mettre en pratique plus facilement que traditionnellement les différents RS que nous avons étudiés. L'outil informatique que l'on peut par exemple constater dans des établissements 4.0 avec l'utilisation d'un ordinateur pour chaque élève, permet une introduction par les logiciels que nous avons cités ci-dessus plus rapide. De même, si nous ne sommes pas dans un établissement 4.0, les élèves disposent d'un ordinateur personnel mobilisable à tout moment. L'objectif ici est de traiter plus facilement chaque RS notamment par les changements de RS entre les fractions et les décimaux (Adjage, 2007). Attention, il ne s'agit pas seulement de ne faire que de cette manière, il serait peut-être dangereux de laisser s'habituer les élèves pratiquer seulement sur ordinateur. Il ne faut pas oublier la technique traditionnelle du papier/crayon, l'outil informatique représente un avantage pour montrer aux élèves les divers RS des rationnels, mais il faudra tout de même rester dans un environnement pédagogique mélangeant les différentes pédagogies entre l'ordinateur et le papier/crayon. Les logiciels ne mettent pas forcément en avant les changements de RS, mais plus tôt un changement dans le contrat didactique, car les diverses attentes entre le professeur et les élèves ne sont plus les mêmes. Dans l'intérêt de faire changer les élèves d'environnement de travail pour les faire progresser et les amener à les faire travailler plus aisément.

I.3.f) Par d'autres contextes

On peut aussi avoir des introductions en faisant interagir des contextes différents, par exemple les mathématiques et la physique, pour faire émerger la conceptualisation des nombres rationnels lors des phases de problèmes. On met en œuvre un double langage dans l'introduction qui aurait pour fonction de communiquer et de représenter les nombres rationnels en même temps. Par ailleurs, Duval (1998) rappelle qu'il existe deux

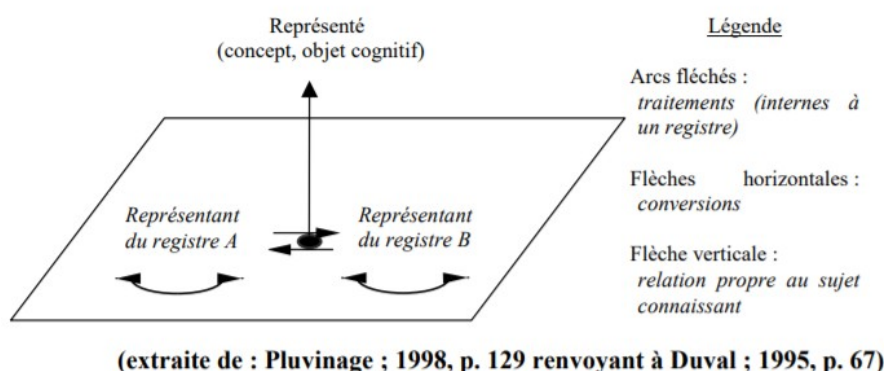
points de vue dans l'analyse d'un problème, dont le point de vue "en aval" et le point de vue "en amont". Pour le premier, « regarder un problème [...] c'est regarder d'emblée la (les) solution(s) de ce problème ». Pour le deuxième, c'est « rechercher toutes les variations possibles de l'énoncé qui conservent, pour la résolution du problème, la mise en œuvre de la même méthode mathématique [...] ». Selon Adjage (1999), il est possible de construire le sens en problématisant les représentations elles-mêmes. L'idée serait de partir d'un problème en physique nécessitant des outils mathématiques, permettant ainsi de représenter notre problème et ainsi de mobiliser de nouvelles connaissances, c'est ce que nous avons vu précédemment avec le partage de surface. Attention, car ces représentations requises ne sont pas considérées comme un moyen d'exprimer des notions comme les nombres rationnels, mais une occasion de mobiliser l'expression mathématiques de ces dernières, telle l'expression des nombres fractionnaires. Pour en revenir sur cette introduction, notons que, selon Duval (2006) : « la compréhension conceptuelle apparaît liée à la découverte d'une invariance entre des représentations sémiotiquement hétérogènes » ce qui nous ramène à notre première analyse d'introduction par le RS des écritures fractionnaires. Il faut savoir poser un problème aux élèves (Adjage, 2007) pour les amener à se représenter ce que l'on cherche et donc mettre en place des phases de recherche en groupe ou en individuel. Ensuite, on doit avoir une discussion du moins, un débat des différents résultats scientifiques des élèves. Pour pouvoir en faire une synthèse donnant l'accès à l'introduction du cours, on parle en soit d'une introduction par une ou des activité(s). Par exemple, faire les liens entre la proportionnalité et les pourcentages seraient une idée d'introduction des rationnels par l'intermédiaire de ces chapitres.

On pourrait aussi caractériser ces autres contextes par l'introduction du terme de rationnel par un professeur de physique qui aurait besoin de cette notion alors que les élèves ne l'auraient pas encore vu en mathématiques.

Nous ne saurions donc pas dans un contexte mathématique, mais dans celui de la physique dans le cas de la situation d'au-dessus, nous serions donc dans un travail d'interdisciplinarité.

I.4) Grille d'analyse des différentes introductions face aux types d'obstacles

Nous venons de voir différentes introductions des rationnels, auxquelles nous avons relié les différents RS des rationnels que nous avons vu précédemment. Nous constatons que chaque introduction requiert l'utilisation d'au moins deux RS avec échange entre eux pour pouvoir palier aux sources d'obstacles que nous avons étudiées avant. La variable de contexte permettant différents échanges entre chaque RS que nous avons vu, nous prouve bien que tous les registres sont reliés entre eux. Nous retournons sur de nombreux acquis concernant le fait suivant, qu'il est indispensable de savoir changer de registre pour évaluer si un élève a compris une notion en mathématiques (Adjiage, 2007). Pour donner suite à cela, nous avons choisi de mettre ci-dessous un schéma construit par Pluvinage datant de 1998 qui nous permet de synthétiser nos différents RS avec leurs traitements et leurs échanges sous forme de diverses flèches entre eux.



Maintenant, nous allons mettre sous forme d'une grille nos différentes introductions afin de les relier aux sources d'obstacles que nous avons vu, ce qui nous permettra d'en faire une analyse fonctionnelle pour la suite de ce mémoire avec notre expérimentation.

Section - I/ Éléments théoriques

Choix d'introductions	Par les fractions avec le spatial	Par le partage de surface venant du RS spatial avec les fractions	Par la demi-droite graduée venant du RS spatial avec les fractions et les décimaux	Par les décimaux en lien avec les fractions et l'écriture scientifique	Par des logiciels informatiques sur les échanges de RS	Par d'autres contextes
Type d'obstacle						
Définition	Vu comme abstraite avec les fractions	Permet un retour positif sur les fractions	Faire intervenir la graduation régulière et donc la proportionnalité	Beaucoup d'écriture pour définir le terme de rationnel	Permet d'éclaircir la définition avec les différentes écritures avec plus de fluidité	Conceptualiser les rationnels lors des phases de problèmes
Spatial	Donner du sens pour la représentation des fractions	Partage d'un gâteau (fraction plus petite que 1)	Quelles valeurs se situent entre 0 et 1	Aucune représentation spatiale ici	Manipuler plus facilement sur la demi-droite graduée	Représenter les solutions d'un problème
Calculatoire	Décrochage pour les élèves	Dangereux pour des calculs de fractions compliquées	Utile pour des calculs de rationnels simples	Différence entre unités / décimal comme $3,8 + 7,5 = 10,13$	Les élèves testent plus facilement leurs calculs via des logiciels	Dépend du contexte
Changement de RS	Il faut récupérer les élèves en décrochage lors de cet échange	Couramment utilisé avec les fractions	Choix principal en tant que support d'échange entre deux RS	$2/5 = 2,5$	Dialogue et échange rapide entre les RS	Faire le lien entre les RS
Comparaison	Inégalité fausse comme $1/4 > 1/3$ car $4 > 3$	Contexte compliqué pour les fractions plus grandes que 1 comme $3/2$ lors du partage	Le nombre le plus à gauche sur une droite graduée est le plus petit lors d'une comparaison de 2 nombres	Inégalité fausse comme $3,475 > 3,7$ à cause de la numération orale	Comparaison plus rapide avec la demi-droite graduée sur un logiciel	Comparer l'utilisation des rationnels entre les mathématiques et la physique
Langage	Enseignement verbal dangereux : écrire trois cinquième au lieu de $3/5$	Faire réfléchir les élèves sur des notions inconnues	Adéquate pour positionner des nombres	Numération orale dangereuse (exemple vu avec la comparaison)	Utilisation d'ordinateur	Communiquer et représenter les rationnels

Légende	Identifié par tel couleur
Exemple de cas d'obstacle	
Obstacle antérieur mis en évidence dans ce contexte d'introduction	
Exemple de cas aidant à éviter l'obstacle	
Commentaires sur de possibles obstacles	

Grille d'analyse des différentes introductions reliées aux types d'obstacles

En effet, dans cette grille, nous avons croisé nos différentes introductions et types d'obstacles. Les données récoltées par cette grille représentent en soi des exemples de cas d'obstacle (case rouge), des obstacles antérieurs qui pourraient ressurgir lors de ces phases d'introductions (case orange), de cas permettant d'éviter certains obstacles (case verte), ainsi que certains commentaires sur de possibles obstacles (case bleu). Il s'agit avant tout de savoir cibler sur quels possibles obstacles nous pourrions être amené à rencontrer, donc à résoudre. Tout en voyant l'importance de certains choix permettant de voir leur apport et leur bien fait dans ces différents choix d'introduction. L'intérêt de cette grille est d'en faire une étude fonctionnelle, c'est-à-dire voir, selon des critères si nous avons des avis similaires d'après des enseignants, selon notre expérience de recherche que nous mettrons en œuvre lors de la partie III. De ce que nous pouvons déjà constater par cette grille, c'est la présence d'obstacle majeur et antérieur lors des introductions par les fractions et les décimaux, notamment dans la définition, les calculs et le langage. Concernant le choix des logiciels informatiques et autres contextes, nous pouvons voir qu'aucun obstacle majeur n'est présent, mais cela ne veut pas dire qu'il n'y en aura pas. En effet, tout dépend des logiciels et du contexte choisis lors de ces introductions. Ici, nous avons pris des exemples de cas généraux, de même pour les choix d'introductions, il en existe bien d'autres. Nous pourrions par exemple faire une introduction seulement par

Section - I/ Éléments théoriques

le RS des écritures fractionnaires et celui du RS des écritures décimales. Selon nos résultats que nous obtiendrons durant notre partie expérimentale, cela nous permettra de voir quel mélange de choix est le plus utilisé lors de l'introduction des rationnels. L'idée est ici de mettre avant tout des exemples pour nous permettre d'analyser les données que nous aurons à traiter par la suite de ce mémoire. A la suite de cela, de nombreuses questions de recherche vont se construire amenant ainsi une problématique dans le cadre de ce mémoire, c'est ce que nous allons aborder maintenant.

Problématique

Suite à nos éléments théoriques, nous allons pouvoir élaborer notre problématique concernant l'introduction des nombres rationnels au collège. De ce que nous avons vu lors de l'analyse de nos éléments théoriques, c'est que l'approche des rationnels dépend essentiellement de différents registres sémiotiques (RS). Nous avons pu aboutir à différents exemples d'introductions de ces nombres par le biais de ces RS, ce qui nous a permis de voir l'utilisation de plusieurs RS de façon mélangée et d'en extirper certains types d'obstacles potentiels. Cependant, le fait de mélanger certains RS permet d'apporter des phases de remédiation d'après Adjage, Douady et Duval, ce qui aura pour but de surmonter des obstacles majeurs pour la suite du cursus.

Notre problématique va être d'étudier ce mélange entre ces RS pour l'analyse lors de l'introduction des rationnels pour en étudier les différents impacts pour les élèves.

Pour répondre à cette problématique, dans un premier temps nous allons partir sur l'étude de divers manuels et progressions, pour mettre en parallèle les différentes approches et sources d'obstacles qui auront été vues précédemment, pour aboutir à différentes grilles et graphes d'analyses synthétiques. Dans un second temps, nous élaborerons une mise en pratique par l'intermédiaire d'un questionnaire, nous permettant d'analyser les résultats de notre recherche, selon les différentes approches et sources d'obstacles que nous aurons étudiées durant la partie I. Cette mise en pratique sera avant tout, un questionnement auprès de divers professeurs dans le but de juger de la fonctionnalité de notre recherche, pour ainsi répondre à notre problématique et c'est ce que nous verrons durant la partie III.

II/ Analyse de divers manuels et progressions

Dans cette partie, nous analysons divers manuels tels que Mission Indigo, Phare, Myriade, Dimension, Transmath, Sesamath et Delta pour des classes de 5ème édition 2016/17 et Triangle classe de 5ème édition 2010. Dans un premier temps, nous traitons chaque manuel, puis nous en construisons une grille synthétisant les différentes approches des rationnels. Dans un second temps, nous faisons les liens avec notre analyse de la première partie théorique pour ces différents manuels, pour étudier l'efficacité de notre grille établie sur les différentes introductions reliées aux sources d'obstacles, tout en évaluant les différents repères de progression de chaque manuel.

II.1) Pré-analyse des manuels sur l'introduction des nombres rationnels

Il s'agit aussi de faire l'analyse du triangle didactique (Houssaye, 1986) sur l'introduction des nombres rationnels et sur la transposition didactique nécessaire ; en nous basant essentiellement sur les obstacles de la part des élèves pour mieux comprendre et résoudre ces obstacles. En effet, le triangle de Houssaye nous permet d'étudier chaque côté du triangle de l'enseignement qui le constitue. D'une part, nous avons le côté professeur – élève qui représente la branche de la formation. D'autre part, nous avons le côté professeur – savoir qui a pour intérêt de montrer la place de l'enseignement. Puis, nous avons le côté élève – savoir qui signifie l'application d'apprendre. Sans le savoir, dans notre analyse, nous étudions chaque branche de ce triangle de Houssaye, car nous sommes dans une étude pédagogique dans l'intérêt sera de traiter plusieurs introductions différentes, permettant de surpasser tous les obstacles rencontrés. Dans ce mémoire de recherche, sur la notion d'obstacle, nous sommes plutôt axés sur la branche élève – savoir du triangle de Houssaye, car il s'agit de mettre en avant les obstacles, comme nous l'avons vu, des élèves faces aux différentes approches des rationnels. Dorénavant, notre but va être d'étudier les différents programmes et repères de progression mise en place dans les manuels de mathématiques. Cependant, comme nous l'avons déjà évoqué, durant le cycle 3 (classe de CM1-CM2-6ème), les élèves ont déjà rencontré des rationnels sous forme de fractions simples sans leur donner le statut de nombre, de même pour les nombres décimaux. Dès le début du cycle 4 (classe de 5e-4e-

Section - II/ Analyse de divers manuels et progressions

3e), les élèves construisent et mobilisent les fractions comme nombre qui rend toutes les divisions possibles. Ainsi, en classe de 5ème, les élèves seront amenés à calculer et comparer des proportions et des fréquences, ce qui nous amènera à un raisonnement par égalité de deux quotients, reconnaissent un nombre rationnel. Puis, à partir de la classe de 4ème, ils seront conduits à additionner, soustraire, multiplier et diviser des quotients, mais aussi passer d'une représentation à une autre d'un nombre quelconque. Cependant, suite à la réforme concernant les cycles, nous pourrions avoir des notions de calculs de 4ème en 5ème, c'est donc pour cela que nous avons étudié plusieurs calculs faisant des sources d'obstacles durant notre première partie. Maintenant que nous connaissons le programme sur les rationnels, nous allons étudier chacun des manuels annoncés ci-dessus.

II.1.a) Mission Indigo

Dans ce manuel, nous avons une progression par thème, c'est-à-dire que l'on commence par un thème sur les nombres via un premier chapitre sur les entiers positifs. Puis, on enchaîne avec un second chapitre sur la notion de fraction, abordée par le terme de quotient avec un échange sur la demi-droite graduée. Le thème de rationnel est abordé en clarifiant les différents vocabulaires avec les différents RS que nous avons vu. Nous avons une définition d'un nombre rationnel par l'intermédiaire du RS des écritures fractionnaires qui est évoquée ici par le terme des quotients. Cependant, au moment de l'introduction d'un rationnel, nous avons directement un dialogue avec la demi-droite graduée pour permettre aux élèves de visualiser un rationnel. Ce dialogue d'échange n'est pas anodin, nous en avons parlé dans les choix d'approches des rationnels. Nous avons évoqué le fait qu'il était nécessaire de définir et d'introduire une notion à l'aide de différents RS. C'est un choix très important dans le cadre de surpasser les sources d'obstacles dans la définition et les calculs pour permettre aux élèves de se représenter la notion de rationnel et éviter les possibles décrochages lors des phases calculatoires.

II.1.b) Phare

Dans ce manuel, nous avons une progression en spirale, c'est-à-dire que l'on mélange l'ordre des chapitres entre différents thèmes. Ici, on commence par les décimaux,

puis on aborde de la géométrie sur les agrandissements et réductions de figures pour enchaîner avec la notion de quotient (rappel sur les divisions) et la définition de rationnel. Avant de définir le terme de rationnel, nous pouvons voir un rappel sur les quotients en commençant par la notion de partage de surface, ce qui nous rappelle le RS spatial. Dans un second temps avec un échange sur la demi-droite graduée pour une seconde représentation d'un quotient. Ainsi, suite à tous ces rappels, nous avons une définition d'un rationnel faisant intervenir les RS d'écritures fractionnaires par les quotients en lien avec les décimaux ce qui nous permet d'avoir une définition très construite permettant d'éviter le maximum d'obstacle.

II.1.c) Myriade

Dans ce manuel, nous abordons le terme de rationnel par le RS des écritures fractionnaires. La progression mise en place est très classique, on enchaîne les chapitres par thème, nous sommes donc dans le thème de l'analyse sur les nombres. Ici, il s'agit de reconnaître le terme de rationnel par une fraction ou un quotient ou une proportion de deux entiers positifs. En effet, au début, nous restons dans les nombres positifs, car la notion de nombre négatif (relatif) ne sera abordée qu'au chapitre suivant. D'après ce que nous avons vu en première partie, il s'agit en fait d'éviter d'employer directement les nombres négatifs dans les rationnels. Suite à la définition des rationnels, ce manuel met en avant aussi l'utilisation de logiciel, nous avons donc un échange entre le RS des écritures fractionnaires et le RS des logiciels informatiques. C'est le logiciel de Géogébra qui est mis en avant dans ce manuel. Effectivement, Géogébra est l'un des logiciels les plus couramment utilisés de nos jours au collège, tout comme le logiciel Scratch. Attention, nous n'allons pas utiliser toutes les fonctionnalités de Géogébra en classe 5ème, ici il ne s'agira que de travailler numériquement sur une demi-droite graduée permettant de placer des points de coordonnées type rationnels, c'est-à-dire des nombres fractionnaires ou à virgules. Finalement, nous retrouvons trois RS pour définir et comprendre la notion de rationnel permettant d'éviter l'obstacle de la représentation des rationnels par l'intermédiaire de Géogébra traitant la demi-droite graduée.

II.1.d) Delta

Dans ce manuel, la progression mise en place est classique, comme nous l'avons déjà vu, c'est-à-dire par thème, mais cette fois-ci, nous commençons par les nombres décimaux. Suite à l'étude des décimaux sans définir le terme de rationnel, nous enchaînons sur les écritures fractionnaires où le terme de rationnel apparaît avec une définition utilisant les décimaux, ainsi que les quotients. On retrouve ensuite une similitude par rapport au manuel Phare où nous transposons ces nombres sur une demi-droite graduée dans le but de représenter ces nombres. Encore une fois, il s'agit de tourner autour de trois RS pour définir et expliquer la notion de rationnel. L'intérêt est d'exploiter les échanges entre les RS pour justement éviter certains obstacles.

II.1.e) Dimension

Dans ce manuel, la progression mise en place est par thème, avec un début d'année sur les nombres décimaux. Les décimaux sont abordés par les fractions décimales, puis, dans la continuité, nous avons une suite avec les écritures fractionnaires nous permettant d'aborder le terme de rationnel mélangeant ainsi les RS des écritures décimales et fractionnaires. Comme le manuel Mission Indigo, nous n'avons que deux RS présents lors de l'introduction des rationnels, mais dans le manuel Dimension, il s'agit des deux écritures les plus utilisées. En effet, il n'y aucune présence de RS permettant de représenter les rationnels dans ce manuel qui représentera un obstacle majeur pour cette introduction.

II.1.f) Transmath

Dans ce manuel, nous avons une progression de type spiralé. On commence par la même étude que le manuel Dimension, c'est-à-dire par les nombres décimaux en utilisant les fractions décimales, mais avec cette fois-ci une utilisation de la demi-droite graduée. Le chapitre abordé par la suite, est une première approche du langage impliquant du calcul littéral. Suite à cela, nous abordons les quotients, par l'intermédiaire du RS des écritures fractionnaires pour définir le terme de rationnel. Puis, une fin de chapitre sur l'application des rationnels dans d'autres domaines, ici la proportionnalité et les

fréquences, donc par d'autres contextes. L'utilisation de plusieurs RS ainsi que les échanges entre eux permettra de bien introduire les rationnels permettant une connexion avec d'autres chapitres pour une suite ultérieure. On remarque bien l'intérêt des échanges de RS comme dans le manuel Phare, c'est-à-dire de bien détailler chaque partie de la notion de rationnel.

II.1.g) Sésamath

Dans ce manuel, d'édition 2017, nous pouvons constater d'une part, une progression très classique par thème comme de nombreux ouvrages, d'autre part une introduction aux rationnels par les fractions tout en exploitant le RS spatial par le domaine des partages de surfaces et en faisant le lien avec les décimaux. Néanmoins, dans l'ordre d'arrivée des RS, les décimaux sont introduits bien avant les rationnels, mais ils ne seront exploités qu'à partir de l'usage des fractions pour définir les nombres rationnels. On retrouve une similitude par exemple avec le manuel Delta, c'est-à-dire l'usage d'un RS intermédiaire permettant un lien supplémentaire entre les écritures fractionnaires et décimales qui est ici le RS du spatial concernant le partage de surface. On peut voir qu'à chaque étape du chapitre des rationnels, donc les égalités, les comparaisons et les calculs, que les trois RS que nous avons présentés ici sont exploités de manière générale. Les différents exemples et exercices employés ont donc pour but de permettre aux élèves d'utiliser de multiples façon les rationnels dans les différents cadres proposés.

II.1.h) Triangle

Nous avons choisi ce manuel par rapport à ça date d'édition, contrairement aux autres manuels que nous avons choisis précédemment qui étaient tous d'édition 2016 et 2017, celui-ci est une édition 2010, c'est-à-dire avant la réforme sur les cycles entre l'école et le collège. Dans l'intérêt d'évaluer la manière dont été construit les programmes avant la réforme, évidemment, nous pourrions remonter plus loin, mais ne nous sommes pas là pour refléter l'histoire des programmes, mais pour analyser ceux du présent. Dans ce manuel, nous avons une proposition de progression en spiral, similaire à celui du manuel Phare, hors ici, il n'y a aucun RS d'écriture décimale. Le terme de rationnel n'est abordé que lors des écritures fractionnaires avec un échange sur la demi-droite graduée avec un

Section - II/ Analyse de divers manuels et progressions

enchaînement sur les proportionnalités et pourcentages. Ensuite, nous avons le lien avec la géométrie sur les rapports d'agrandissement et de réduction des figures. Nous retrouvons notre RS classique des écritures fractionnaires avec celui de la demi-droite graduée pour le RS spatial, mais nous avons aussi, une approche par d'autres contextes par les rapports de proportionnalité et pourcentages pour ensuite aborder le thème de la géométrie mélangeant ainsi plusieurs RS de natures différentes. Il s'agit en fait de montrer l'utilité de l'ensemble des rationnels avec des exemples d'autres chapitres comme en géométrie. Toujours dans l'optique d'éviter les obstacles naissant lors de l'introduction sur les rationnels.

II.2) Grille d'analyse des manuels et repère de progressions

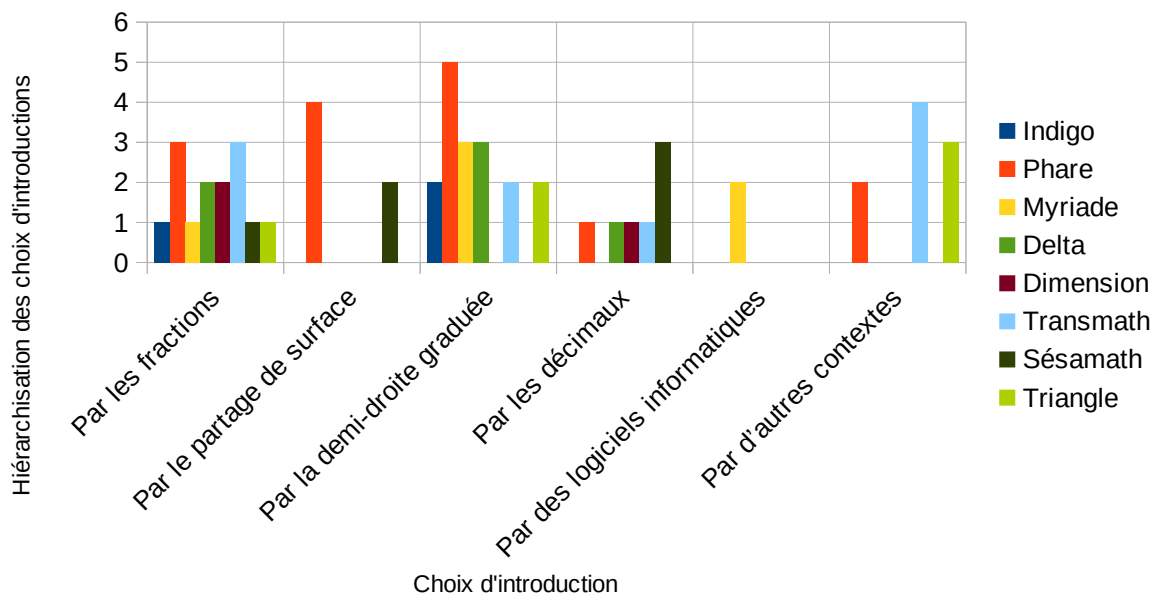
Suite aux différents manuels que nous venons d'étudier, nous allons mettre en œuvre une grille synthétique permettant de visualiser par la présence de nombre, l'ordre d'arrivée des choix de RS d'introduction des rationnels dans les manuels. Tout en construisant un graphique permettant de visualiser plus aisément cette grille synthétique. Puis, dans un second tableau, nous créerons de même une grille permettant de visualiser les différentes progressions choisies dans les manuels par la présence d'une croix : « x ».

	Par les fractions	Par le partage de surface	Par la demi-droite graduée	Par les décimaux	Par des logiciels informatiques	Par d'autres contextes
Indigo	1		2			
Phare	3	4	5	1		2
Myriade	1		3		2	
Delta	2		3	1		
Dimension	2			1		
Transmath	3		2	1		4
Sésamath	1	2		3		
Triangle	1		2			3

Section - II/ Analyse de divers manuels et progressions

Grille d'analyse de l'ordre des choix d'arrivée des RS d'introduction des rationnels pour chaque manuel

Synthèse de l'ordre des choix d'introductions des rationnels dans les manuels



	Progression par thème	Progression spiralee
Indigo	x	
Phare		x
Myriade	x	
Delta	x	
Dimension	x	
Transmath		x
Sésamath	x	
Triangle		x

Grille d'analyse des différentes progressions par manuels

II.3) Expertise des grilles d'analyses

Notre mission ici est de rassembler les données que nous venons de collecter par l'intermédiaire de nos divers manuels et progressions. En effet, nous partons déjà sur une analyse de la progression mise en place dans les manuels, pour étudier la manière dont les rationnels sont abordés.

La majeure partie du temps, les manuels proposent des progressions par thème, nous verrons que par la suite, ce choix de progression est très peu pris dans les progressions établies par les enseignants.

Nous pouvons constater que par rapport à notre grille, le mélange d'au moins trois RS d'introductions différents est toujours présent lors de la mise en place de la définition d'un rationnel. Cela permet d'éviter les obstacles vus dans la définition d'un rationnel, par rapport aux éléments théoriques de notre première partie. Le terme de rationnel est principalement vu comme un quotient de deux nombres entiers, ce qui nous ramène à une question redondante selon Adjage (1999) qui est posée de la manière suivante : « Fraction = rationnel ? ». C'est une étude de constat sur des manuels d'enseignements en général. Cependant, nous pouvons voir que justement l'un des RS de choix d'introduction les plus utilisés en premier choix n'est autre que celui des écritures fractionnaires. De même, le RS des écritures décimales est autant choisi en première place de choix d'introduction dans les manuels. Majoritairement, le second choix d'introduction repose sur le RS de la spatialité concernant la demi-droite graduée. Grâce aux données de notre grille synthétique, ainsi que de notre graphe, nous pouvons constater la présence d'un troisième choix d'introduction. Ce troisième choix dépend évidemment des autres choix d'introductions. De ce fait, nous pouvons en conclure sur l'utilisation de deux RS d'introduction, munie d'un troisième RS permettant le dialogue entre les deux RS de départ. Cependant, nous pouvons analyser des introductions pour les rationnels dans les manuels manipulant plus de trois RS, ce qui renforce encore plus les dialogues entre RS, permettant une exploitation complète des rationnels dans plusieurs domaines.

Pour Pluvinage, *"Un objet mathématique doit son existence à des changements de registres d'expression [...]. [...] la construction du sens provient à la fois des traitements internes à chaque registre mis en jeu et des échanges entre les registres [...])"*. Effectivement, de ce qui est déjà établi, les manuels mettent bien en avant la citation de

Pluvinage sur un objet en mathématiques. Dans la construction des rationnels, nous sommes dans une phase interne de traitement de plusieurs RS, ainsi que les échanges entre eux où nous pouvons voir la présence d'un dialogue, comme dit ci-dessus par l'intermédiaire d'un troisième choix de RS d'introduction.

Ce dialogue qui symbolise un changement de RS implique parfois un changement de cadre, qui consiste à « traduire un problème dans un domaine de travail autre que celui que la première présentation du problème permet d'identifier. » (Duval, 1993). Cela étant, tout dépend des manuels, on peut avoir un changement de RS sans changement de cadre. Par exemple, dans le manuel Myriade nous avons un cadre arithmétique qui mobilise à la fois le RS des écritures fractionnaires et celui du spatial par l'intermédiaire de la demi-droite graduée pour la représentation des rationnels.

Précédemment, nous avons parlé du triangle de Houssaye en général, mais dans le contexte de l'utilisation des logiciels informatiques comme dans Myriade, nous sommes dans une situation du tétraèdre de Lombard. Ce tétraèdre permet de mettre en avant un quatrième pôle dans le triangle du Houssaye, que l'on nomme TICE représentant les outils numériques. Nous pouvons étudier ce tétraèdre par face avec trois pôles et le sommet pour le quatrième pôle représentant le « fou de Houssaye » qu'on nomme aussi le « maître ». Avec le manuel Myriade, nous avons le logiciel Géogébra qui est mis en avant dont la tâche à pour intérêt de faire expérimenter les élèves sur les représentations des rationnels entre leurs écritures fractionnaires et la demi-droite graduée. La face du tétraèdre mise en avant dans ce manuel à pour pôles principaux, celui du savoir, des élèves et du logiciel Géogébra (TICE) avec pour fou de Houssaye l'enseignant. D'après les études faites par Adjage, nous avons que l'utilisation des logiciels informatiques représente un côté expérimental très satisfaisant pour la compréhension des différents RS de représentation des rationnels.

III/ Expérimentation

Dorénavant, nous allons mettre en pratique notre méthode expérimentale permettant de mettre en œuvre nos recueils de données sur notre partie théorique et sur notre partie d'analyse des divers manuels et progressions. Nous commençons par présenter l'expérimentation que nous allons mettre en place. Ensuite, nous recueillons et triions les données que nous avons récoltées. Puis, nous finirons par analyser ces données grâce aux grilles que nous aurons élaboré dans nos parties précédentes. De ce fait, nous pourrons juger par notre analyse de la fonctionnalité de nos grilles pour le corps enseignant dans l'avenir, tout en répondant à notre problématique sur l'efficacité des dialogues entre les RS lors de l'introduction des rationnels.

III.1) Présentation de la méthode expérimentale

Pour pouvoir expérimenter notre recherche, nous allons ici présenter notre méthode expérimentale. Notre but est de recueillir un maximum d'information par rapport à nos grilles que nous avons créées à partir de nos éléments théoriques, ainsi que les manuels et progressions choisis. Nous allons donc mettre en place un questionnaire par la plateforme numérique « Framaforms ». Ce questionnaire dont nous allons détailler chaque question ci-dessous va nous permettre de recueillir des informations sous forme de graphique et diagramme circulaire permettant de visualiser les moyennes des réponses de chaque question du questionnaire plus aisément. Nous donnerons le questionnaire à de nombreux enseignants ayant ou ayant eu des classes de niveau 5ème dans l'académie de Reims par l'intermédiaire de l'inspecteur académique. L'exploitation de ce questionnaire repose essentiellement sur le partage par les réseaux numériques et sociaux. Nous attendrons une centaine de réponses de la part du corps enseignant que nous avons évoqué plus haut, pour pouvoir analyser notre recherche dans le cadre de ce mémoire.

La première partie de ce questionnaire sera sur l'exploitation des différents types de registres d'introductions choisis lors de l'approche des rationnels au collège. Ainsi que sur la hiérarchisation des différents types d'introductions choisis précédemment lorsque les enseignants cocheront plusieurs choix différents d'introduction. Puis, nous enchaînerons sur les différents types d'obstacle pour savoir lesquelles reviennent le plus souvent, selon

Section - III/ Expérimentation

les enseignants. Ceci aura pour intérêt de refaire les liens avec ce que nous avons vus durant notre première partie. Le but étant de voir si la grille que nous avons construite en fin de première partie est conforme aux réponses que nous aurons recueillies. Pour donner suite à cette première partie du questionnaire, nous pourrions d'ores et déjà analyser les différents types d'introductions choisis, ainsi que leurs hiérarchisations entre eux pour aboutir sur les types d'obstacles mis en avant par le corps enseignant.

La seconde partie de ce questionnaire traitera de l'utilisation des manuels et progressions mise en place, tout en refaisant les liens avec ce que nous aurons vus. Nous commencerons par demander quel type de manuel les enseignants utilisent et s'ils suivent oui ou non les progressions de leur manuel. Par la suite, nous leur demanderons quel type de progression ils mettent en place dans le cadre de l'introduction des rationnels s'ils ne suivent pas celle de leur manuel.

La troisième et quatrième partie de ce questionnaire auront pour intérêt de savoir à quel type d'enseignant nous aurons eu à faire dans les réponses donc de leur ancienneté dans l'enseignement, ainsi que du nombre de fois où ils ont introduit les rationnels pour des classes de 5ème. Bien évidemment, nous finirons ce questionnaire par la mise en place de commentaire dans le cadre de traiter des questions ou des remarques particulières par rapport à ce questionnaire, selon chaque participant.

Tout le questionnaire se trouve en annexe.

III.2) Recueil et analyse des données de l'expérience

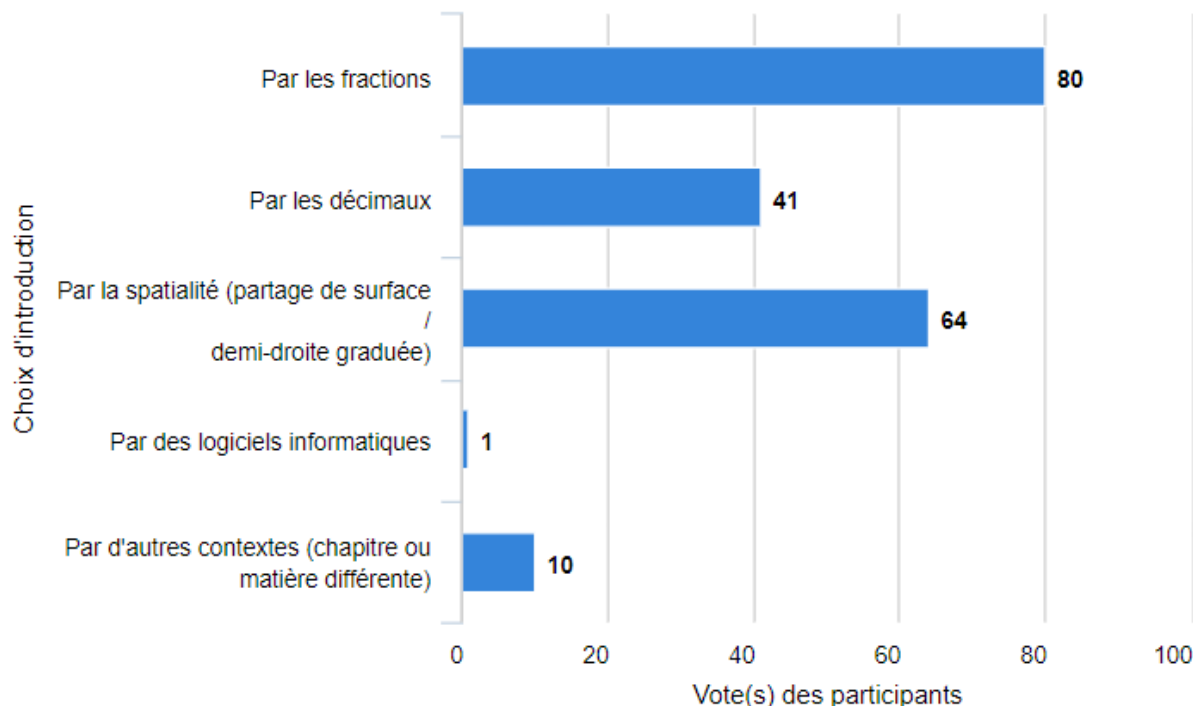
Suite à notre expérience que nous avons mené durant deux semaines, nous avons recueilli exactement 104 retours de professeur de mathématiques ayant des classes de 5ème en charge ou en ayant eu. Nous allons maintenant présenter sous forme de graphique et diagramme circulaire les données que nous avons recueillies, tout en les analysant.

III.2.a) Choix d'introductions

Notre but est de savoir quels choix d'introductions sont les plus utilisés par le corps enseignant. De ce que nous pouvons constater, le choix le plus utilisé n'est autre que celui des fractions avec 80 votes, tout comme pour le spatial avec 64 votes et les décimaux qui

Section - III/ Expérimentation

eux compte 41 votes. Nous avons donc en priorité dans les choix d'introductions, les fractions, le spatial et les décimaux. On remarque que les choix des logiciels informatiques et par d'autres contextes sont très peu pris.



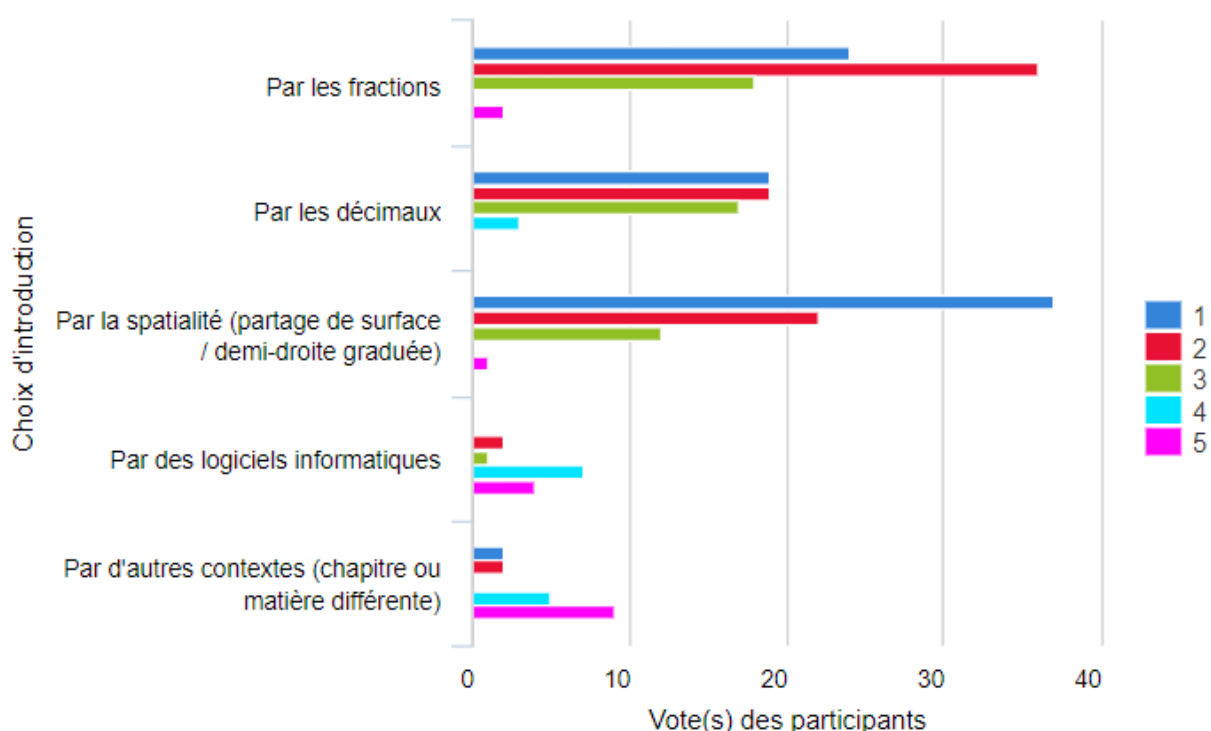
Graphique sur les différents choix d'introductions

Certains participants nous ont mis comme réponse dans la question qui suit (détaillée en-dessous) dans le cadre du choix d'introduction des rationnels par d'autres contextes, l'utilisation des chapitres sur les volumes ou les probabilités ou la proportionnalité ou les jeux d'argents avec la notion de gain et perte.

Dans le cas d'autre type d'introduction, nous avons aussi demandé aux participants de nous dire quelles sont ces autres types d'introductions qu'ils utilisent. Nous avons relevé quelques réponses suite à cela, par exemple, l'utilisation de « lego » dans le cadre de la spatialité autre que les partages de surfaces et de la demi-droite graduée. Tout comme l'utilisation des phases de problème, c'est-à-dire amener les nombres rationnels comme nouvel outil de résolution, c'est ce que nous avons vu dans le cadre d'une résolution d'exercice amenant une nouvelle notion pour sa résolution.

III.2.b) Hiérarchisation des choix d'introductions

Maintenant, nous allons voir dans quel ordre les choix d'introductions sont les plus utilisés par le corps enseignant. Nous pouvons analyser que le premier choix n'est autre que celui de la spatialité, c'est-à-dire l'utilisation des partages de surfaces et/ou de la demi-droite graduée. Ceci en lien avec le deuxième choix qui n'est autre que celui des fractions, puis en troisième choix celui des décimaux. Cependant, nous pouvons constater la présence de quatrième et cinquième choix, respectivement par les logiciels informatiques et par d'autres contextes. Nous pouvons déjà constater en moyenne la présence de trois choix d'introductions différents pour l'introduction des rationnels.



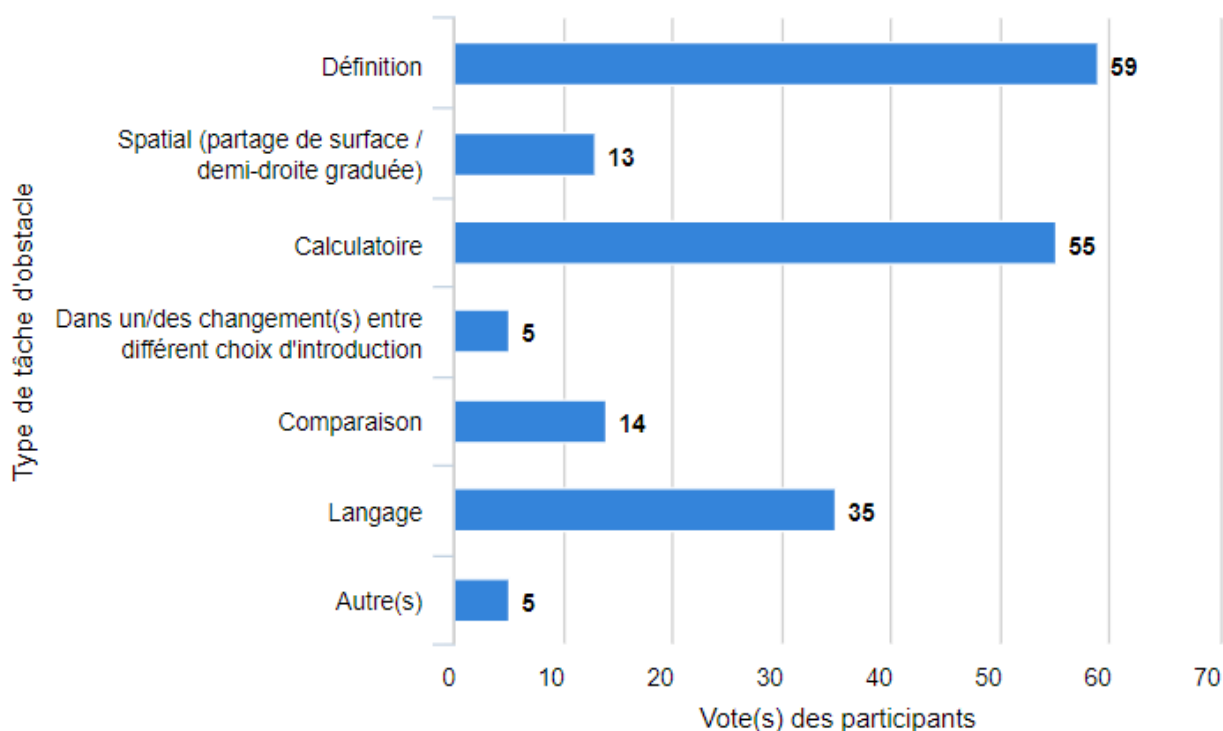
Graphique sur la hiérarchisation des différents choix d'introductions

Nous pouvons faire une remarque concernant le vote des participants dans le choix des logiciels informatiques et par d'autres contextes. Dans la première question de ce questionnaire, nous n'avions recueilli que très peu de vote pour ces choix, tandis qu'ici, ces derniers sont présents dans la hiérarchisation des choix d'introductions plusieurs fois. Il était pourtant marqué dans la question entre parenthèses de cette sous-partie de mettre dans l'ordre les choix d'introduction, s'il y avait eu plusieurs choix votés lors de la première

question. Ce qui nous permet ici de mettre en avant l'utilisation de ces choix comme consolidation de la notion de rationnel pour une introduction complète de ces nombres.

III.2.c) Type d'obstacle

Selon ce que nous avons recueilli comme données, nous pouvons constater que les types d'obstacles revenant le plus, concernent la définition pour 59 votes, le langage pour 35 votes et le calculatoire pour 55 votes. Le spatial et les changements entre choix d'introductions ne sont donc pas des obstacles en général durant l'introduction des rationnels. La comparaison est tout de même présente avec 14 votes comme un obstacle présent, cependant toute type d'obstacle peut dépendre par exemple de la hiérarchisation des choix d'introductions. Nous pouvons aussi avoir le cas d'obstacles antérieurs qui réapparaîtraient lors de l'introduction des rationnels.



Graphique sur les différents types d'obstacle

Pour le type d'obstacle traitant un/des changement(s) entre différents choix d'introduction, nous pouvons voir un obstacle entre le lien de définir une fraction comme un nombre, une proportion et un partage, puis un obstacle selon la définition algébrique

Section - III/ Expérimentation

des termes de proportion et quotient. Nous sommes en soi dans le type d'obstacle de la définition et de sa représentation (respectivement sa spatialité).

Concernant les autres types d'obstacle énumérés, nous avons la lecture de consigne, le lien entre le visuel et l'écrit (ce qui pourrait être mentionné dans ce que nous venions de dire précédemment) et l'aspect psychologique, faisant le rappel sur des notions que les élèves auront vu durant les années précédentes (fractions et décimaux).

De plus, selon l'une de nos questions de recherche concernant l'utilité d'exploiter plusieurs registres d'introductions pour palier à de nombreux obstacles, nous pouvons constater que les trois quarts des enseignants ont répondu oui pour cette question (nous y reviendrons plus tard).

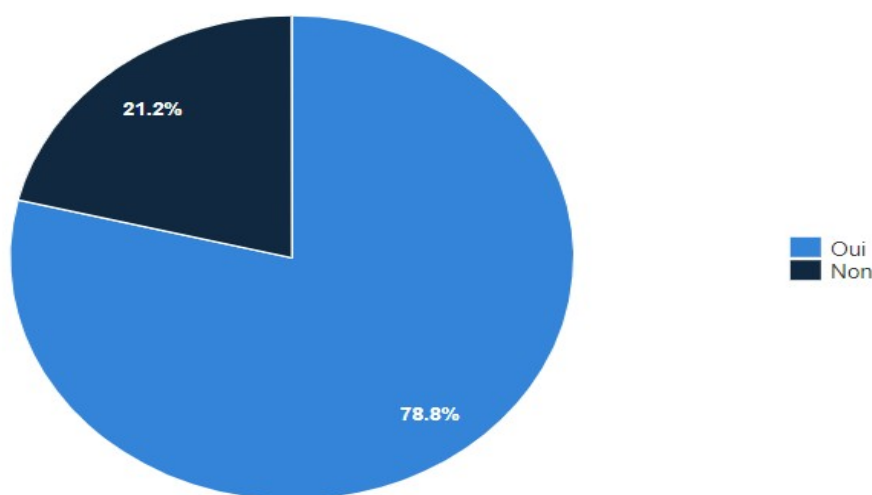
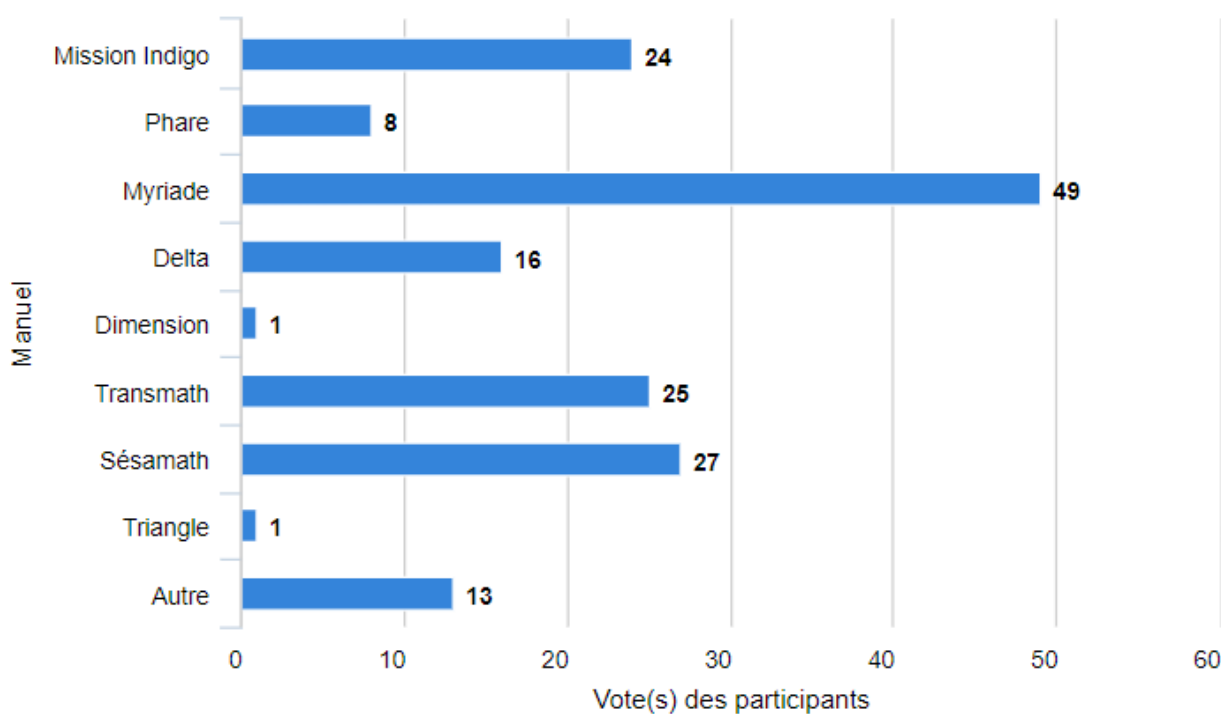


Diagramme circulaire concernant la nécessité de plusieurs types d'introductions pour pallier à de nombreux obstacles

III.2.d) Manuels et progressions

L'intérêt ici est de faire le lien avec notre deuxième partie concernant l'étude des manuels et progressions mise en place par les enseignants. Le manuel Myriade représente le manuel le plus utilisé par le corps enseignant pour 49 votes. Suivi par les manuels Mission Indigo, Transmath et Sésamath qui comptent en moyenne 25 votes. En analysant les détails des réponses des participants, nous avons pu voir que de nombreux enseignants utilisent parfois plus d'un manuel, en effet il est rare de ne rester que sur un seul manuel durant sa carrière.



Graphique sur les choix de manuel utilisé par les enseignants

Nous avons demandé aux participants de citer les manuels qu'ils utilisent si ces derniers n'étaient point présents dans la liste que nous avons étudiée. Nous avons donc que les « autres » manuels cités par les participants auxquelles nous n'avons porté aucune étude dans cette recherche sont les manuels Magnard, Maths Monde cycle 4 et Iparcours pour un très faible taux de vote.

Section - III/ Expérimentation

Nous nous sommes intéressés sur l'utilisation des progressions dans les manuels, ce qui nous permet de constater que plus de 75 % des enseignants ne suivent pas les progressions mises en place dans les manuels.

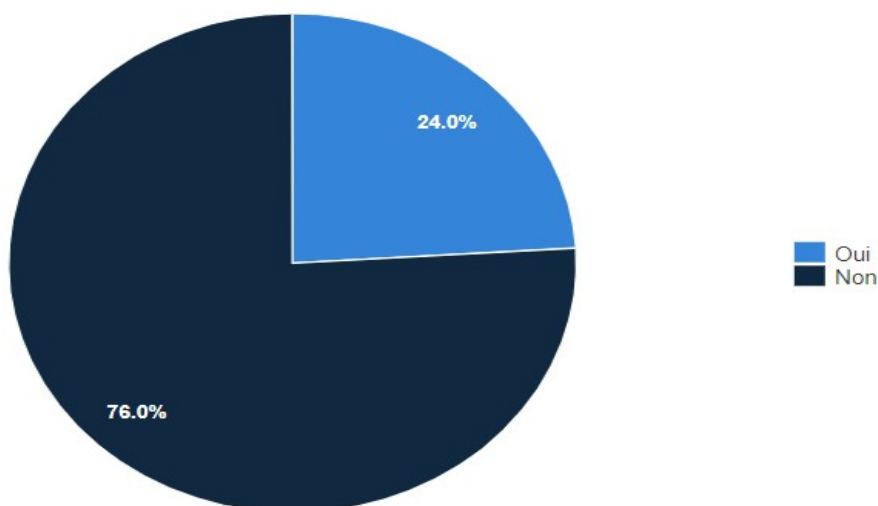
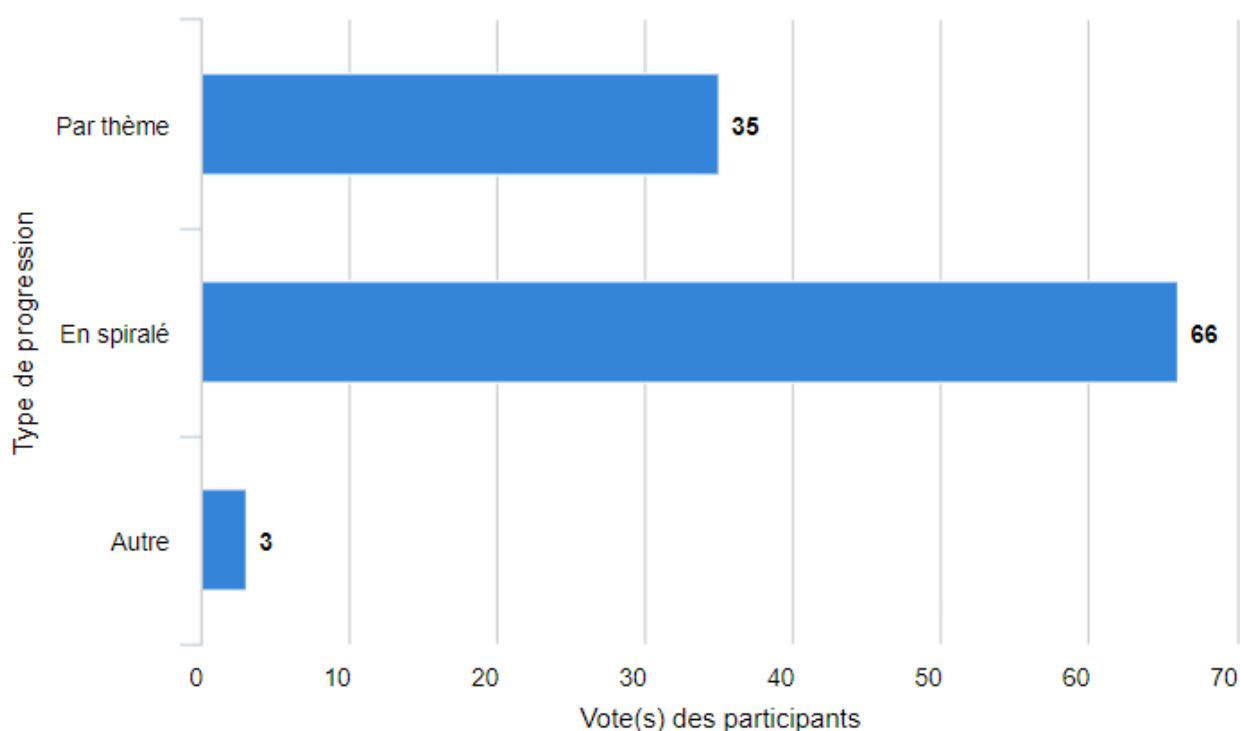


Diagramme circulaire concernant le choix de progression mise en place dans les manuels

De ce fait, de nombreux enseignants, de manière individuelle ou collective créent leurs propres progressions, selon les chapitres qu'ils auront à enseigner. Selon les participants que nous avons eus, on voit que le choix de la progression de manière spiralée est prédominant pour 66 votes, comparés à celle par thème qui compte 35 votes et aux autres types progressions qui comptent seulement 3 votes.



Graphique sur les choix de progression utilisé par les enseignants

Selon les remarques que nous avons eues par rapport aux autres progressions mises en place, il y a celles où nous avons une alternance entre la géométrie et l'algèbre et celles qui utilisent simultanément des progressions par thème et spirales. C'est-à-dire que les fractions apparaissent dans un thème large et seront retravaillées dans un autre thème comme la proportionnalité plus loin dans l'année.

III.2.e) Public touché par ce questionnaire

Pour finir l'analyse de ce questionnaire, nous nous sommes intéressés aux différentes catégories d'enseignants qui ont eu à faire ce questionnaire, dont nous avons analysé leurs réponses. Nous pouvons constater que 48 % des participants ont plus de 16 ans d'ancienneté dans l'enseignement, ainsi que 14 % ont moins de 5 ans d'ancienneté, puis le reste ont entre 6 et 15 ans d'ancienneté. Nous avons donc touché un public plus tôt expérimenté dans le domaine de l'enseignement des mathématiques.

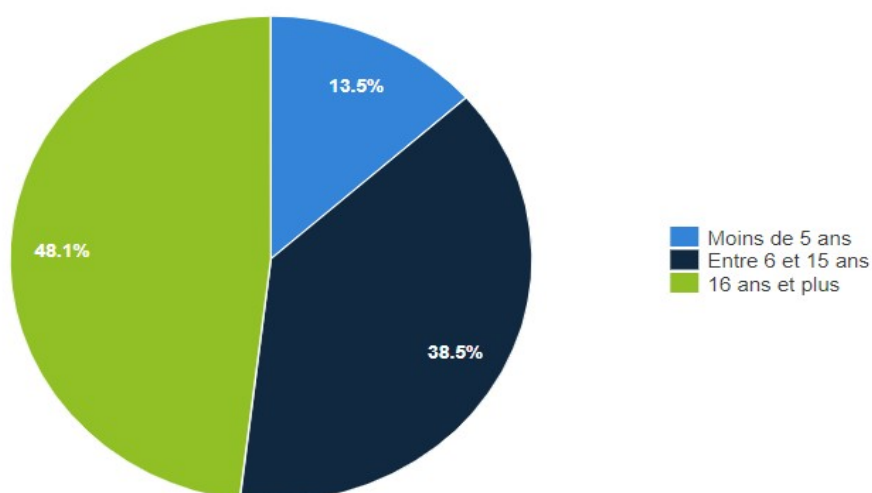


Diagramme circulaire concernant l'ancienneté dans l'éducation nationale des participants

De plus, pour terminer sur l'analyse des données, nous avons que 40 % des participants ont eu à introduire les rationnels moins de 5 fois contre 45 % entre 6 et 15 fois. Les participants restants ont donc eu à introduire plus de 16 fois les rationnels.

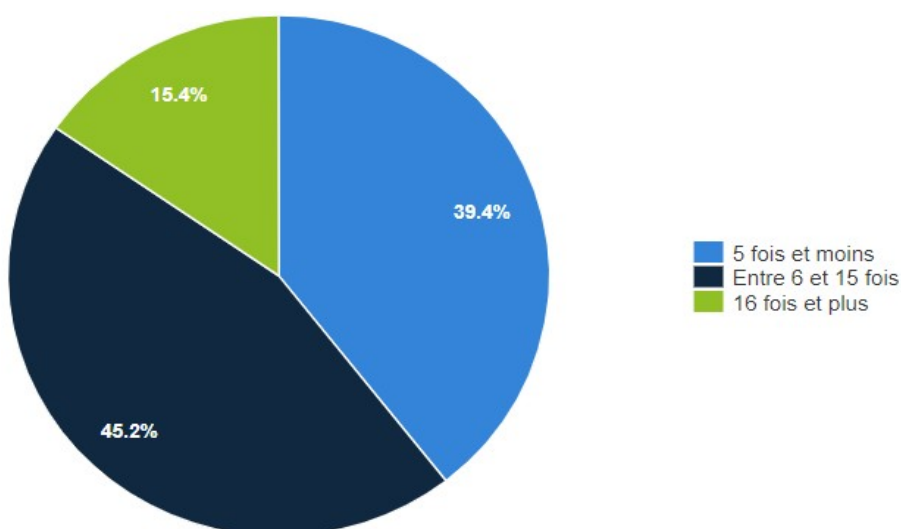


Diagramme circulaire concernant le nombre d'introductions des rationnels effectué par les participants

III.2.f) Commentaires ajoutés à la fin de ce questionnaire

Nous allons mettre ici les quelques commentaires que nous avons recueillis à la fin de ce questionnaire.

En premier, nous savons que la notion de proportion peut-être un bon catalyseur pour l'introduction des rationnels, ce qui nous permet de refaire le lien avec le choix par d'autres contextes pour faire le lien avec d'autres chapitres.

Nous avons eu beaucoup de retours sur le fait que les rationnels ne sont pas introduits en cycle 4, mais lors du cycle 3. Cependant, le terme de rationnel est bien abordé en cycle 4 depuis la réforme de 2016 pour les cycles.

Une remarque très récurrente sur le fait de caractériser les fractions comme des partages serait un choix très judicieux, mais nous reviendrons sur de nombreux obstacles que nous aurions analysés, notamment pour l'étape calculatoire.

De ce fait, nous terminons par un commentaire assez général : ce n'est pas forcément lors de l'introduction des rationnels en classe de 5ème que les obstacles se créent, mais par la suite, car c'est une notion qui se suit durant tout le cycle 4 et qui peut entraîner des lacunes de plus en plus importantes au fil des années. De même, les obstacles pourraient avoir lieu avant la 5ème, c'est-à-dire lors du cycle 3 avec l'introduction aux fractions et aux décimaux, on revient sur la remarque faite par rapport à l'aspect psychologique de ces notions.

III.3) Analyse des données de l'expérience

Maintenant, nous allons analyser les données de chaque question de notre expérience par rapport à notre partie I et II de notre recherche.

III.3.a) Selon la première partie de la recherche

De ce que nous venons de voir, les choix d'introductions par les fractions, le spatial et les décimaux font partie des choix principaux lors de l'introduction des rationnels. Ce n'est pas du hasard, car lors de nos analyses sur les articles scientifiques choisis, nous avons mis en avant l'utilisation de ces choix, notamment lors des exemples

d'introductions que nous avons présenté par la suite. Ainsi, ces choix sont bien présents dans le corps enseignant en général.

Selon la hiérarchisation des choix de manière global, on constate que la représentation des rationnels est avant tout mis en premier choix par le spatial, c'est-à-dire par les partages de surfaces et/ou la demi-droite graduée. Nous revenons sur notre analyse de départ, sur le fait qu'il faut donner du sens aux objets mathématiques que nous employons. Il s'agit ici de mettre en avant la représentation des rationnels avant d'aborder les fractions et les décimaux. Ce n'est pas tout, nous pouvons valider le fait que le corps enseignant emploie l'introduction des rationnels par l'intermédiaire en moyenne de trois RS qui sont en soi, les fameux choix d'introductions que nous évoquions plutôt. De plus, nous pouvons voir la présence du RS des logiciels informatiques en quatrième choix, ce qui permettra d'exploiter l'ensemble des autres RS comme nous l'avons vu lors de notre grille synthétique sur les différentes introductions. Nous pouvons aussi avoir la présence d'un cinquième et dernier choix, mélangeant l'ensemble des RS, celui d'introduire par d'autres contextes les rationnels. Ici, il s'agit avant tout de faire le lien avec d'autres matières ou d'autres chapitres, car ce choix est principalement choisi en dernier pour tisser des liens avec d'autres notions mathématiques.

D'après les données que nous avons analysées traitant des types d'obstacles, nous pouvons revoir le lien avec ce que nous avons vu par rapport à nos différentes parties de cette recherche. La présence de la définition et du langage dans les obstacles ont un impact majeur dans les introductions de façon générale. La définition des rationnels est perçue comme une notion totalement abstraite, cela n'est donc pas choquant de voir la présence de la définition comme obstacle prédominant. Cependant, par rapport au langage, nous revenons sur les enseignements de type verbal, que nous avons vu avec un exemple sur des fractions, tout comme le fait de la numération orale qui impacte les calculs et comparaisons, comme ce que nous avons vu avec les décimaux. Ce qui nous amène sur l'obstacle du calculatoire qui est le deuxième type d'obstacle le plus prédominant après la définition. En effet, l'étape du calculatoire est avant tout un décrochage de la part des élèves, il est donc normal de constater cette étape comme un obstacle majeur. De plus, selon les commentaires apportés par les participants, ils mettent bien en avant le fait que le calculatoire reste un obstacle majeur durant la suite du cursus mathématique des élèves. De même, ces obstacles peuvent être présents bien avant

l'introduction aux rationnels, dès lors du cycle 3 où les élèves aborderont les fractions et les décimaux pour la première fois, comme nous l'avons évoqué dans les commentaires du questionnaire de l'expérience.

III.3.b) Selon la seconde partie de la recherche

Concernant l'utilisation des manuels, d'après ce que nous avons traité, c'est que les quatre manuels que nous avons cités durant notre analyse de l'expérience exploitent le côté spatial des rationnels, dans l'objectif de représenter les rationnels comme nous l'avons déjà évoqué. En effet, ceci nous permet de refaire le lien avec ce que nous avons vu précédemment, c'est-à-dire de commencer par le RS du spatial. On retrouve donc cette similitude avec les manuels pourtant sur une première approche utilisant une représentation des rationnels avant d'en aborder le côté algébrique qui aboutira sur la définition.

En général, comme nous l'avons dit, les enseignants ne suivent pas les progressions mises en place dans les manuels, ils les créent eux-mêmes, bien évidemment, selon les attentes du programme. Pourtant, nous n'avons qu'un quart des participants qui suivent la progression établie par leurs manuels, nous avons donc filtré ces participants pour voir leurs réponses, selon les types de manuels qu'ils utilisent. De ce fait, nous avons pu retrouver les manuels qui utilisent une progression de type spiralé, ainsi qu'un premier choix d'introduction par le RS des écritures fractionnaires enchaînant sur un second choix par le RS du spatial. Ce qui nous ramène sur le fait que ces enseignants exploitent le côté algébrique et spatial pour les rationnels. Or ici, on commence par le côté algébrique, mais on enchaîne directement avec le spatial pour donner du sens et de la représentation avec ce que l'on traite de manière algébrique.

Selon les progressions mises en place par les enseignants, celle portant sur le type spiralé reste prédominante face à la progression de type par thème. De nos jours, la progression spiralée est très employée dans le corps enseignant, elle permet de revenir sur des notions déjà vues ou pour les poursuivre au fur et à mesure de l'année. Dans le cadre des rationnels, nous pouvons voir ce que cette notion est très abordée durant les notions portant sur la proportionnalité du point de vue analyse avec les tableaux de proportionnalité et sur la géométrie avec les rapports de proportion sur les triangles

semblables. D'une façon générale, dans l'ensemble des calculs en mathématiques, nous pouvons être amenés à exploiter les rationnels que ça soit entre eux ou avec d'autres types de nombres, par exemple avec les relatifs. Puis, d'une manière globale, en lien avec les autres matières comme la physique où nous pourrions retrouver ces nombres dans certains exercices qui nécessiteront un usage des rationnels pour la résolution de tel exercice.

III.4) Validation des grilles d'analyses

Pour terminer, nous allons mettre à l'épreuve les grilles d'analyses que nous avons construites au fur et à mesure de cette recherche.

Selon la première grille que nous avons construite qui présentait quelques exemples d'introductions aux rationnels faces aux différents types d'obstacles à la fin de la première partie, nous pouvons déjà valider certains obstacles prédominants. En effet, nous avons pu voir que la présence de la définition, du langage et du calculatoire sont les trois principaux obstacles choisis par les enseignants. Selon notre grille, les seules cases où nous avons mis en rouge pour signifier la présence d'obstacle majeur avec un exemple, nous permet de voir que les types d'obstacles présents selon ces cases, ne sont autres que celle portant sur la définition, le langage et le calculatoire. De ce point de vue, nous pouvons déjà valider ces obstacles dans cette grille. Nous pourrions ne laisser apparent que ces types d'obstacles présents dans notre grille, mais nous avons que d'autres types d'obstacles sont présents, par exemple les comparaisons. Nous avons mis les comparaisons comme obstacle antérieur, car les élèves abordent déjà des comparaisons entre fractions et décimaux lors du cycle 3. C'est pour cela que la comparaison n'est pas mise en avant comme obstacle prédominant dans l'introduction des rationnels au collège. Concernant le spatial et les changements entre RS, nous avons principalement mis ces types d'obstacles par rapport aux cases comme commentaire ou aide pour éviter des obstacles selon les introductions choisies, ce qui nous permet de voir que ceux-ci ne figurent pas dans les obstacles choisis par les enseignants. Du point de vue général, nous pouvons valider cette première grille d'analyse, car du point de vue

pratique, nous sommes en accord avec les enseignants et cette grille pourrait servir de base pour traiter d'autres types d'introductions à l'avenir.

Concernant nos deux autres grilles d'analyses que nous avons construites à la fin de notre deuxième partie, l'intérêt était de synthétiser les choix de hiérarchisation et de progression mis en place dans les manuels. Selon notre expérience, ce sont les manuels exploitant un premier choix portant sur le RS des écritures fractionnaires, puis d'un second choix en lien avec le RS du spatiale et d'un trois RS qui dépendra du manuel utilisé. Ce mélange de trois RS nous permet de refaire le lien avec les choix des RS effectués par les enseignants en général pour l'introduction des rationnels. En rapport avec l'une des questions du questionnaire portant sur l'efficacité de l'utilisation de plusieurs RS pour pallier à de nombreux obstacles, qui s'est avéré très fortement choisi par le corps enseignant. De plus, selon les progressions, nous avons que le choix de progression par thème est fortement choisi dans les manuels, or comme nous l'avons évoqué avant notre expérience, en général les enseignants créent eux-mêmes leurs progressions et c'est une progression spiralée qui est plus choisie. Donc, comme nous l'avons vu quelques paragraphes plus haut, nous pouvons valider le fait que les enseignants ne suivent pas les progressions mises en place dans les manuels et qu'ils créent eux-mêmes ou collectivement avec d'autres enseignants, des progressions de type spiralée en général.

Conclusion

Les rationnels permettent de tisser des liens entre différents ensembles de nombres, mais c'est aussi une source d'obstacle pour leur apprentissage. L'intérêt de notre recherche était principalement axé sur le fait de construire une catégorisation des types d'introductions de nombres rationnels en relation avec les obstacles potentiels qui en découlent. Ceci nous a amené à nous questionner sur la notion de registres sémiotiques des rationnels et de caractériser les types d'introduction à partir de ces derniers. L'idée développée par les chercheurs étant que pour éventuellement pallier les obstacles, la dialectique entre les registres sémiotiques est une piste pertinente. Cela nous a conduit à construire une grille d'analyse traitant différents types d'exemples d'introduction reliant plusieurs registres sémiotiques face à différents types d'obstacles. Dans l'objectif d'évaluer cette grille par la suite pour en voir les différentes fonctionnalités, pour analyser les manuels scolaires et les choix des enseignants. En plus de l'analyse des articles scientifiques qui nous ont permis de construire nos éléments théoriques, ainsi que la grille que nous évoquions, nous avons été amené à analyser de nombreux manuels et types de progressions pour voir comment y étaient introduits les rationnels. Ce qui a débouché sur la construction de grille synthétique montrant la hiérarchisation des choix d'introductions choisis dans les manuels, ainsi que leurs progressions. Tout ceci nous a amené à créer une confrontation avec le terrain sous forme de questionnaire à l'intention d'enseignants ayant ou ayant eu des classes de 5ème, c'est-à-dire ayant pratiqué l'introduction des rationnels. Notre construction théorique s'est avérée efficiente pour analyser ces deux dimensions. Dans le but de finaliser cette recherche par la mise en pratique de nos grilles que nous avons construites au fur et à mesure de cette recherche. Nos analyses montrent que les difficultés des élèves pourraient être liées à l'absence d'utilisation de registres sémiotiques variés.

Durant notre recherche, nous avons été amené à analyser les nombres décimaux dans le cadre des nombres rationnels. Ce qui nous a permis de constater que l'ensemble des nombres décimaux est mis en avant dans de nombreuses recherches, notamment dans le cadre de leur introduction lors du cycle 3, ainsi que l'exploitation de cet ensemble durant le cycle 4. Nous aurions pu pratiquer une recherche seulement sur cet ensemble,

Section - Conclusion

car nous avons pu déceler de nombreuses études et expériences faites sur ces nombres. Dans notre intérêt, nous pourrions continuer notre recherche en nous focalisant sur les nombres décimaux en exploitant les grilles d'analyses que nous avons construites. Pour permettre une recherche similaire à celle que nous avons menée ici, dans le cadre d'introduire et d'approcher les décimaux de manière adéquate pour palier à de nombreux obstacles similaires comme pour l'introduction des rationnels.

Annexes

Première partie du questionnaire

L'introduction des rationnels au collège

Voir Modifier Formulaire Résultats Partager

Ce questionnaire est anonyme et sera traité dans l'éthique du cadre de la recherche de mon mémoire.

J'ai donc créé ce questionnaire pour recueillir un maximum d'information et répondre à mes questions de recherche.

Choix d'introduction(s) et sources d'obstacles : 1 / 5

1) Comment introduisez-vous les nombre rationnels en classe ? *

- ☐ Par les fractions
- ☐ Par les décimaux
- ☐ Par la spatialité (partage de surface / demi-droite graduée)
- ☐ Par des logiciels informatiques
- ☐ Par d'autres contextes (chapitre ou matière différente)

Si vous utilisez d'autres types d'introductions, merci de les écrire ici :

2) Merci de hiérarchiser vos choix : (si plusieurs choix à la question 1)

	1	2	3	4	5
Par les fractions	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
Par les décimaux	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
Par la spatialité (partage de surface / demi-droite graduée)	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
Par des logiciels informatiques	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
Par d'autres contextes (chapitre ou matière différente)	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>

Par exemple, si vous introduisez les rationnels par les décimaux en utilisant des fractions grâce à de la spatialité, alors vous cochez les décimaux en case 1, la spatialité en case 2 et enfin les fractions en case 3

3) Selon vous, Quel(s) type(s) de tâche(s) représente(nt) une(des) source(s) d'obstacle(s) dans le cadre de l'introduction des rationnels ? *

- ☐ Définition
- ☐ Spatial (partage de surface / demi-droite graduée)
- ☐ Calculatoire
- ☐ Dans un/des changement(s) entre différent choix d'introduction
- ☐ Comparaison
- ☐ Langage
- ☐ Autre(s)

Section -

Si vous avez choisi "Dans un/des changement(s) entre différent choix d'introduction" dans la question précédente, pourriez-vous nous dire entre quels types d'introductions vous faites allusion ?

Si vous avez choisi "Autre(s)" dans la question précédente, pourriez-vous nous dire quel type(s) de tâche(s) représente selon vous une source d'obstacle ?

4) Selon vous, pour l'introduction des rationnels, est-il nécessaire d'utiliser différents types d'introductions pour pallier de nombreux obstacles ? *

- Sélectionner - ▼

Page suivante >

Seconde partie du questionnaire

Manuel et progression : 2 / 5

1) Quel(s) manuel(s) de mathématiques utilisez-vous ?

- ☐ Mission Indigo
- ☐ Phare
- ☐ Myriade
- ☐ Delta
- ☐ Dimension
- ☐ Transmath
- ☐ Sésamath
- ☐ Triangle
- ☐ Autre

Si vous avez choisi "Autre" dans la question précédente, pourriez-vous nous dire le(s) nom(s) du/des manuel(s) que vous utilisez ?

2) Suivez-vous les progressions mises en places dans les manuels concernant les nombres rationnels ? *

- Sélectionner - ▼

3) Quel type de progression utilisez-vous pour introduire les rationnels ? *

- Sélectionner - ▼

Si vous avez choisi "Autre" dans la question précédente, pourriez-vous nous dire quel(s) type(s) de progression(s) vous mettez en place ?

< Page précédente

Page suivante >

Troisième et quatrième partie du questionnaire

Renseignements : 3 / 5

1) Quelle est votre ancienneté dans l'éducation nationale ? *

- Sélectionner - ▼

2) Combien de fois avez-vous eu en charge l'introduction des nombres rationnels en classe de 5ème ? *

- Sélectionner - ▼

< Page précédente

Page suivante >

Commentaires : 4 / 5

Si vous avez des commentaires à rajouter sur l'introduction des rationnels, n'hésitez pas à les écrire ici :

< Page précédente

Soumettre

Terminé : 5 / 5

Merci de votre participation.

[Retourner au formulaire](#)

Bibliographie

Adjage, R. (1999). *L'expression des nombres rationnels et leur enseignement initial* (Doctoral dissertation).

Adjage, R. (2005). Diversité et invariants des problèmes mettant en jeu des rapports. *Annales de didactique et sciences cognitives*, IREM de Strasbourg, Vol 10, 95-129.

Adjage, R. (2007). Rationnels et proportionnalité: complexité et enseignement au début du collège. *Petit x*, 74, 5-33.

Blouin, P., & Lemoyne, G. (2002). L'enseignement des nombres rationnels à des élèves en difficulté d'apprentissage: une approche didactique de la rééducation et ses effets. *Petit x*, 58, 7-23.

Bolon, J. (1992). L'enseignement des décimaux à l'école élémentaire. *Grand N*, 52, 49-79.

Brousseau, G., & Brousseau, N. (1987). Rationnels et décimaux dans la scolarité obligatoire. Irem de Bordeaux

Douady, R. (1984). *Jeux de cadres et dialectiques outil-objet dans l'enseignement des Mathématiques. Une réalisation dans tout le cursus primaire* (Doctoral dissertation).

Duval, R. (1993). Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. In *Annales de didactique et de sciences cognitives* (Vol. 5, No. 1, pp. 37-65).

Duval, R. (1995). *Sémiosis et pensée humaine: registres sémiotiques et apprentissages intellectuels*. Berne: Peter Lang.

Duval, R. (1998). Signe et Objet (II) Questions relatives à l'analyse de la connaissance. In *Annales de didactique et de sciences cognitives* (Vol. 6, pp. 165-196).

Section - Bibliographie

Duval, R. (2002). Comment décrire et analyser l'activité mathématique? Cadres et registres. *Actes de la journée en hommage à Régine Douady*, 7, 83-105.

Duval, R. (2006). Transformations de représentations sémiotiques et démarches de pensée en mathématiques. In *Actes du XXXI^e colloque COPIRELEM*, ARPEME, (pp. 67-89).

Kieren, TE (1988). Connaissance personnelle des nombres rationnels: son développement intuitif et formel. *Notions et opérations numériques dans les classes moyennes*, 162-181.

Pluinage, F. (1998). La Nature des objets mathématiques dans le raisonnement. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, IREM-Strasbourg*, 6, 126-138.

Rouche, N. (1998). *Pourquoi ont-ils inventé les fractions?*. Ellipses.