Тема 2 Системы линейных однородных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

Система дифференциальных уравнений вида

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \ldots + a_{1n}y_n, \\ \dfrac{dy_2}{dx} = a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \ldots + a_{2n}y_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots , \\ \dfrac{dy_n}{dx} = a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + \ldots + a_{nn}y_n, \end{cases}$$

где $a_{11},\ldots,a_{nn}$ – числа, называется системой линейных однородных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Решение этой системы ищут в виде

$$y_1 = \gamma_1 e^{\lambda x},\ y_2 = \gamma_2 e^{\lambda x},\ \ldots,\ y_n = \gamma_n e^{\lambda x},$$

где $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n, \lambda$ – постоянные, которые подбираются. Подставляя эти функции в систему, получаем систему *n* алгебраических уравнений с *n* неизвестными:

$$\begin{cases} (a_{11} - \lambda)\gamma_1 + a_{12}\gamma_2 + \ldots + a_{1n}\gamma_n = 0, \\ a_{21}\gamma_1 + (a_{22} - \lambda)\gamma_2 + \ldots + a_{2n}\gamma_n = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}\gamma_1 + a_{n2}\gamma_2 + \ldots + (a_{nn} - \lambda)\gamma_n = 0. \end{cases}$$

Чтобы алгебраическая система имела ненулевое решение, необходимо и достаточно, чтобы ее определитель был равен нулю:

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Полученное уравнение называется характеристическим уравнением заданной системы дифференциальных уравнений. Оно имеет *n* корней, вид которых определяет общее решение системы.

<u>Правило нахождения общего решения системы линейных однородных уравнений</u>

1. Любому простому действительному корню λ_1 характеристического уравнения соответствует решение $y_{11} = \gamma_{11} e^{\lambda_1 x},\ y_{21} = \gamma_{21} e^{\lambda_1 x},\ \ldots,\ y_{n1} = \gamma_{n1} e^{\lambda_1 x},$ где коэффициенты $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$ определяют из алгебраической системы при найденном $\lambda_1,$ т. е.

$$\begin{cases} (a_{11} - \lambda_1)\gamma_1 + a_{12}\gamma_2 + \ldots + a_{1n}\gamma_n = 0, \\ a_{21}\gamma_1 + (a_{22} - \lambda_1)\gamma_2 + \ldots + a_{2n}\gamma_n = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}\gamma_1 + a_{n2}\gamma_2 + \ldots + (a_{nn} - \lambda_1)\gamma_n = 0. \end{cases}$$

Тогда общее решение системы записывают в виде

$$y_1 = C_1 y_{11} + C_2 y_{12} + \ldots + C_n y_{1n},$$

$$y_2 = C_1 y_{21} + C_2 y_{22} + \ldots + C_n y_{2n},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$y_n = C_1 y_{n1} + C_2 y_{n2} + \ldots + C_n y_{nn},$$

где $C_1, C_2, ..., C_n$ – произвольные постоянные.

Пример. Решить систему однородных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами:

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = y_1 + 8y_2, \\ \dfrac{dy_2}{dx} = y_1 - y_2. \end{cases}$$

Решение. Характеристическое уравнение системы имеет вид:

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 8 \\ 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Вычисляя определитель, получаем $\lambda^2 = 9$, откуда $\lambda_1 = -3$, $\lambda_2 = 3$ – простые действительные корни. Частные решения системы ищем в виде

$$y_1(x) = \gamma_1 e^{\lambda x}, \quad y_2(x) = \gamma_2 e^{\lambda x}.$$

При $\lambda_1 = -3$ соответствующая алгебраическая система имеет вид:

$$\begin{cases} 4\gamma_1 + 8\gamma_2 = 0, \\ \gamma_1 + 2\gamma_2 = 0. \end{cases}$$

Эта система имеет бесконечное множество решений. Для определенности положим $\gamma_1 = -2$, тогда $\gamma_2 = 1.$ Получаем частные решения:

$$y_{11}(x) = -2e^{-3x}, \quad y_{21}(x) = e^{-3x}.$$

При $\lambda_2 = 3$ соответствующая система принимает вид:

$$\begin{cases} -2\gamma_1 + 8\gamma_2 = 0, \\ \gamma_1 - 4\gamma_2 = 0. \end{cases}$$

Положим $\gamma_1 = 4,$ тогда $\gamma_2 = 1.$

Значит, корню $\lambda_2 = 3$ соответствуют частные решения:

$$y_{12}(x) = 4e^{3x}, \quad y_{22}(x) = e^{3x}.$$

Общее решение исходной системы запишется в виде

$$\begin{cases} y_1(x) = -2C_1 e^{-3x} + 4C_2 e^{3x}, \\ y_2(x) = C_1 e^{-3x} + C_2 e^{3x}. \end{cases}$$

2. Если $\lambda = \lambda_0$ – корень кратности k, то решение, соответствующее этому корню, ищут в виде $y_1 = P_{k-1}^{(1)}(x)e^{\lambda_0 x}$, $y_2 = P_{k-1}^{(2)}(x)e^{\lambda_0 x}$, ..., $y_n = P_{k-1}^{(n)}(x)e^{\lambda_0 x}$, где $P_{k-1}^{(i)}(x)$ – многочлен с неопределенными коэффициентами степени $k-1$, $i = \overline{1, n}$.

Коэффициенты многочленов $P_{k-1}^{(i)}(x)$, $i = \overline{1, n}$, подставляют эти решения в систему и приравнивают коэффициенты подобных членов в левой и правой частях уравнений. Выразив все коэффициенты через любые k, полагают по очереди один из них равным единице, а остальные – нулю.

Пример. Решить систему однородных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 3x + y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 5y - x. \end{cases}$$

Решение. Характеристическое уравнение системы –

$$\begin{vmatrix} 3-\gamma & 1 \\ -1 & 5-\lambda \end{vmatrix} = 0,$$

которое приобретает вид $(3-\lambda)(5-\lambda)+1=0$ или $\lambda^2 - 8\lambda + 16 = 0.$ Уравнение имеет двукратный корень $\lambda = 4.$ Ему соответствует решение вида $x(t) = (At+B)e^{4t}$, $y(t) = (Ct+D)e^{4t}$.

Продифференцируем функции $x(t)$ и $y(t)$ и подставим в исходную систему:

$$\begin{cases} e^{4t}(A + 4At + 4B) = e^{4t}(3At + 3B + Ct + D), \\ e^{4t}(C + 4Ct + 4D) = e^{4t}(-At - B + 5Ct + 5D). \end{cases}$$

Сокращаем на $e^{4t} \neq 0$ и группируем. Получаем систему для коэффициентов

$$\begin{cases} A - C = 0, \\ A + B - D = 0, \\ B + C - D = 0. \end{cases}$$

Так как кратность корня $\lambda = 4$ равна двум ($k = 2$), то выразим все коэффициенты последней системы через любые два, например, через A и B:

$$\begin{cases} C = A, \\ D = A + B. \end{cases}$$

Полагая $A=1$, $B=0$, находим $C=1$, $D=1$. Полагая $A=0$, $B=1$, находим $C=0$, $D=1$.

Получаем два линейно-независимых частных решения:

$$\begin{cases} x_1(t) = te^{4t}, \\ y_1(t) = (t+1)e^{4t} \end{cases} \text{ и } \begin{cases} x_2(t) = e^{4t}, \\ y_2(t) = e^{4t}. \end{cases}$$

Общее решение исходной системы имеет вид:

$$\begin{cases} x(t) = C_1 te^{4t} + C_2 e^{4t}, \\ y(t) = C_1 (t+1)e^{4t} + C_2 e^{4t}. \end{cases}$$

3. Каждому комплексному корню $\lambda_1 = a + bi$ и ему сопряженному $\lambda_2 = a - bi$ соответствуют два линейно независимых действительных решения. Для построения этих решений находим комплексное решение для корня λ_1 соответствующей алгебраической системы, как и в случае 1, и выделяем действительную и мнимую части этого решения (корень λ_2 уже не рассматриваем, так как новых решений системы он не дает).

Пример. Найти частное решение системы

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x - y, \\ \dfrac{dy}{dt} = x + 2y, \ x(0) = 1, \ y(0) = -1. \end{cases}$$

Решение. Характеристическое уравнение системы

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0, \text{ т. е. } (2-\lambda)^2 + 1 = 0.$$

Оно имеет корни $\lambda_1 = 2 + i,\ \ \lambda_2 = 2 - i.$ Для корня $\lambda_1 = 2 + i$ составляем алгебраическую систему:

$$\begin{cases} -i\gamma_1 - \gamma_2 = 0, \\ \gamma_1 - i\gamma_2 = 0. \end{cases}$$

Полагаем $\gamma_1 = 1,$ тогда $\gamma_2 = -i.$

Частное комплексное решение системы – $x(t) = e^{(2+i)t}, \ \ y(t) = -ie^{(2+i)t}.$

Выделяем в полученных функциях действительные и мнимые части.

Поскольку $x(t) = e^{(2+i)\,t} = e^{2t}(\cos t + i\sin t),$ $y(t) = -ie^{(2+i)t} = -ie^{2t}(\cos t + i\sin t),$ то $\operatorname{Re} x = e^{2t}\cos t,\ \operatorname{Im} x = e^{2t}\sin t;\ \ \operatorname{Re} y = e^{2t}\sin t,\ \ \operatorname{Im} y = -e^{2t}\cos t.$

Сопряженный корень $\lambda_2 = 2 - i$ новых линейно независимых решений не дает, поэтому не рассматривается. Таким образом, общее решение исходной системы:

$$\begin{cases} x(t) = C_1 e^{2t}\cos t + C_2 e^{2t}\sin t, \\ y(t) = C_1 e^{2t}\sin t - C_2 e^{2t}\cos t, \\ C_1, C_2 = const. \end{cases}$$

Найдем частное решение для заданных начальных условий. Получаем:

$\begin{cases} 1 = C_1 + 0, \\ -1 = 0 - C_2, \end{cases}$ откуда находим $\tilde{N}_1 = 1,\ \tilde{N}_2 = 1.$

Искомое частное решение системы:

$$\begin{cases} x(t) = e^{2t}(\cos t + \sin t), \\ y(t) = e^{2t}(\sin t - \cos t). \end{cases}$$