Модуль 5 Дифференциальные уравнения высших порядков

# Тема 1 Дифференциальные уравнения, допускающие понижение порядка

## 1.1 Понятие дифференциальных уравнений высших порядков.

**Определение.** Дифференциальным уравнением $n$-го порядка, $n \in \mathbb{N}$, называется уравнение вида $F(x, y, y', y'', ..., y^{(n)}) = 0$. Если его можно разрешить относительно старшей производной, то получим нормальную форму этого уравнения:

$$y^{(n)} = f(x, y, y', y'', ..., y^{(n-1)}).$$

Решением дифференциального уравнения $n$-го порядка является всякая $n$ раз дифференцируемая функция $y = y(x)$, которая обращает данное уравнение в тождество. Общим решением уравнения называется функция $y = y(x, C_1, C_2, ..., C_n)$, где $C_1, C_2, ..., C_n$ – произвольные постоянные.

Задача нахождения решения $y = y(x)$, удовлетворяющего начальным условиям $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y'_0$, ..., $y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}$, где $x_0$, $y_0$, $y'_0$, ..., $y_0^{(n-1)}$ – заданные числа, называется задачей Коши.

Геометрический смысл дифференциального уравнения 2-го порядка**.**

Поскольку $y'' = \dfrac{y''}{(1+y'^2)^{3/2}} \cdot (1+y'^2)^{3/2}$, где отношение $\dfrac{y''}{(1+y'^2)^{3/2}}$ определяет кривизну $y = y(x)$ в точке $(x, y)$, то уравнение 2-го порядка выражает общее свойство интегральных кривых, устанавливая зависимость между координатами точки и кривизной функции в ней. Задача Коши для такого уравнения с геометрической точки зрения означает выделение из семейства интегральных кривых данного уравнения той, что проходит через заданную точку $(x_0, y_0)$ под заданным углом $\alpha$: $\mathrm{tg}\,\alpha = y'_0 \equiv y'(x_0)$.

## 1.2 Дифференциальные уравнения, допускающие понижение порядка

1. Уравнение вида $F(x, y^{(n)}) = 0$ или $y^{(n)} = f(x)$.

Уравнение, не содержащее искомой функции $y$ и всех ее производных, кроме старшей, решается последовательным интегрированием $n$ раз.

**Пример**. Найти общее решение уравнения $y''' = -\sin 2x$.

**Решение.** Это уравнение рассмотренного типа 3-го порядка. Проинтегрируем его последовательно три раза:

$$y'' = \int(-\sin 2x)\,dx = \frac{\cos 2x}{2} + C_1,$$

$$y' = \int\left(\frac{\cos 2x}{2} + C_1\right)dx = \frac{\sin 2x}{4} + C_1x + C_2,$$

$$y = \int\left(\frac{\sin 2x}{4} + C_1x + C_2\right)dx = -\frac{\cos 2x}{8} + \frac{C_1x^2}{2} + C_2x + C_3,$$ где $C_1, C_2, C_3$ – произвольные постоянные. Полученная функция $y = y(x)$ и есть общее решение исходного уравнения.

**Пример**. Найти частное решение уравнения $y^{IV} = x\ln x$, $y(1) = 1$, $y'(1) = 0$, $y''(1) = -1$, $y'''(1) = 0$.

**Решение.** Это дифференциальное уравнение рассматриваемого типа 4-го порядка. Проинтегрируем его последовательно четыре раза, находя из начальных условий значения произвольных постоянных на каждом этапе.

Интегрируем первый раз: $y''' = \int x\ln x dx = \frac{x^2\ln x}{2} - \frac{x^2}{4} + C_1$. Определим константу $C_1$ из начального условия $y'''(1) = 0$: $0 = -\frac{1}{4} + C_1$ или $C_1 = \frac{1}{4}$.

Интегрируем второй раз: $y'' = \int\left(\frac{x^2\ln x}{2} - \frac{x^2}{4} + \frac{1}{4}\right)dx = \frac{x^3\ln x}{6} - \frac{5x^3}{36} + \frac{x}{4} + C_2$.

Определяем $C_2$ из начального условия $y''(1) = -1$: $-1 = -\frac{5}{36} + \frac{1}{4} + C_2$ или $C_2 = -\frac{10}{9}$.

Интегрируем третий раз: $y' = \int\left(\frac{x^3\ln x}{6} - \frac{5x^3}{36} + \frac{x}{4} - \frac{10}{9}\right)dx = \frac{x^4\ln x}{24} - \frac{13x^4}{288} + \frac{x^2}{8} - \frac{10x}{9} + C_3$. Из начального условия $y'(1) = 0$ находим $C_3$: $0 = -\frac{13}{288} + \frac{1}{8} - \frac{10}{9} + C_3$ или $C_3 = \frac{33}{32}$.

Интегрируем последний раз:

$$y = \int\left(\frac{x^4\ln x}{24} - \frac{13x^4}{288} + \frac{x^2}{8} - \frac{10x}{9} + \frac{33}{32}\right)dx = \frac{x^5\ln x}{120} - \frac{77x^5}{7200} + \frac{x^3}{24} - \frac{5x^2}{9} + \frac{33x}{32} + C_4.$$

Находим константу $C_4$ из начального условия $y(1) = 1$:

$1=-\frac{77}{7200}+\frac{1}{24}-\frac{5}{9}+\frac{33}{32}+C_4$ или $C_4=\frac{114}{225}.$

Получили частное решение уравнения: $y=\frac{x^5\ln x}{120}-\frac{77x^5}{7200}+\frac{x^3}{24}-\frac{5x^2}{9}+\frac{33x}{32}+\frac{114}{225}.$

2.<u>Уравнение вида </u>$F(x, y^{(k)}, ..., y^{(n)})=0$.

Уравнение, не содержащее искомой функции $y$ и первых $(k-1)$-х ее производных, $k\in\mathbb{N}$ решают с помощью замены $z=y^{(k)}$, где $z=z(x)$. Таким образом, порядок исходного уравнения понижается на $k$ единиц: $F(x,z,...,z^{(n-k)})=0.$ Полученное уравнение решают далее в зависимости от его типа.

**Пример**. Найти общее решение уравнения $xy''+2y'=0$.

**Решение.** Это уравнение 2-го порядка, не содержащее явно искомой функции $y$. Введем новую функцию $z=y'$, где $z=z(x)$, и продифференцируем: $y''=z'$. Подставим вместо $y'$ и $y''$ в исходное уравнение новые выражения, $xz'+2z=0$, и проинтегрируем уравнение с разделяющимися переменными: $\frac{dz}{z}=-\frac{2dx}{x}$ $z\neq 0,\ x\neq 0.$

В результате имеем: $\ln|z|=-2\ln|x|+\ln C_1,$ откуда $z=C_1x^{-2}$ – общее решение промежуточного уравнения.

Возвращаемся к старым переменным: $y'=C_1x^{-2}$ – уравнение первого порядка. Интегрируем его: $\int dy=\int C_1x^{-2}dx$.

Получаем $y=C_1x^{-1}+C_2$ – общее решение исходного уравнения.

**Пример**. Найти частное решение уравнения $y''-2y'=0,\ y(0)=\frac{3}{2},\ y'(0)=1.$

**Решение.** Заданное уравнение имеет 2-й порядок. Делаем замену $z=y',\ z=z(x).$ Тогда $y''=z',$ и заданное уравнение принимает вид: $z'-2z=0$.

Получили дифференциальное уравнение 1-го порядка с разделяющимися переменными. Решаем его: $\frac{dz}{z}=2dx,\ \ln|z|=2x+\ln C_1$ или $z=C_1e^{2x}.$

Возвращаясь к старой переменной, получим: $y'=C_1e^{2x}$.

Определим константу $C_1$ из начального условия $y'(0)=1.$ Тогда $1=C_1e^0$ или $C_1=1.$

Таким образом, $y'=e^{2x}$. Интегрируем и получаем: $y=\int e^{2x}dx=\frac{e^{2x}}{2}+C_2.$

Определяем $C_2$ из 2-го начального условия: $y(0)=\frac{3}{2},$ т. е. $C_2=1.$

Частным решением исходного дифференциального уравнения является функция $y=\frac{e^{2x}}{2}+1.$

3.<u>Уравнение вида </u>$F(y, y', ..., y^{(n)})=0$

Уравнение, не содержащее независимой переменной *x*, решают с помощью замены $y'=z$, где $z=z(y),\ \ y=y(x)$. Этой заменой порядок исходного уравнения понижается на единицу, поскольку $y''=z'_y y'_x=z'_y z$ (функцию $z(y)$ дифференцируют по *x* как сложную). Аналогично выражают $y'''$ и т. д.

**Пример**. Найти общее решение уравнения $yy''-2(y')^2=0$.

**Решение.** Это уравнение 2-го порядка, не содержащее явно независимой переменной *x*. Поэтому делаем замену $y'=z,$ где $z=z(y),\ \ y=y(x).$ Дифференцируем новую функцию по *x* как сложную функцию, получаем: $y''=z'_y y'_x=z'z.$ Подставляем выражения для $y'$ и $y''$ в исходное уравнение: $yz'z-2z^2=0$. Это уравнение с разделяющимися переменными. Решаем его: $\frac{dz}{dy}yz=2z^2$ или $\frac{dz}{z}=\frac{2dy}{y},\ \ z\neq 0,\ \ y\neq 0.$

Далее интегрируя, имеем: $\ln|z|=2\ln|y|+\ln C_1,$ откуда $z=C_1y^2$ – общее решение.

Возвращаемся к старым переменным, получаем $y'=C_1y^2$ – уравнение с разделяющимися переменными. Тогда $\frac{dy}{dx}=C_1y^2$ или $\frac{dy}{y^2}=C_1dx.$

Интегрируем: $-\frac{1}{y}=C_1x+C_2$ или $y=\frac{1}{C_1x+C_2}$ – общее решение исходного дифференциального уравнения.

**Пример 2**. Найти частное решение уравнения:

**Пример.** Найти частное решение уравнения $3yy''=2(y')^2,\ \ y(0)=1,\ \ y'(0)=2$.

**Решение.** Это уравнение 2-го порядка, не содержащее явно переменную *x*.

Делаем замену $y' = z,\ z = z(y),\ y = y(x)$. Тогда $y'' = z'z$, и заданное уравнение примет вид $3yz'z = 2z^2$. Получили уравнение 1-го порядка с разделяющимися переменными. Интегрируем его: $\frac{dz}{z} = \frac{2dy}{3y}$, имеем: $\ln|z| = \frac{2}{3}\ln|y| + \ln C_1$ или $z = C_1 y^{\frac{2}{3}}$.

Возвращаемся к старой переменной: $y' = C_1 y^{\frac{2}{3}}$. Определяем $C_1$, используя 2-е начальное условие: $2 = C_1 \cdot 1$, отсюда $C_1 = 2$.

Получаем $y' = 2y^{\frac{2}{3}}$ – уравнение 1-го порядка с разделяющимися переменными. Его решение: $3y^{\frac{1}{3}} = 2x + C_2$ или $y = \frac{1}{27}\left(2x + C_2\right)^3$. Определяем константу $C_2$, используя первое начальное условие: $1 = \frac{1}{27}C_2^3$, откуда $C_2 = 3$.

Тогда частным решением заданного уравнения является функция $y = \frac{1}{27}\left(2x + 3\right)^3$.

**Замечание.** При решении задачи Коши в приведенных примерах произвольные постоянные находились на каждом этапе интегрирования при первом появлении. Можно это делать по-другому: сразу найти общее решение исходного уравнения, а затем, продифференцировав его $n$-1 раз, решить полученную систему $n$ уравнений относительно неизвестных $C_1, C_2, ..., C_n$.

4. Однородное уравнение

**Определение.** Уравнение вида $F(x, y, y', ..., y^{(n)}) = 0$ называется однородным относительно искомой функции $y$ и ее производных $y', y'', ..., y^{(n)}$, если функция $F$ однородна относительно $y, y', ..., y^{(n)}$, т. е. $F(x, \lambda y, \lambda y', ..., \lambda y^{(n)}) = \lambda^m F(x, y, y', ..., y^{(n)})$, где $m \in \square$ – степень однородности, $\lambda \neq 0$ – произвольное число.

Для решения используется замена $z = \frac{y'}{y}$, где $z = z(x)$, понижающая порядок исходного уравнения на единицу.

**Пример**. Найти общее решение уравнения: $x^2 yy'' - (y - xy')^2 = 0$.

**Решение.** Это уравнение 2-го порядка, однородное относительно $y, y'$ и $y''$, так как $x^2\lambda y\lambda y'' - (\lambda y - x\lambda y')^2 = \lambda^2(x^2yy'' - (y - xy')^2)$, где $\lambda$ – произвольное число. Делаем замену $z = \dfrac{y'}{y}$, где $z = z(x)$, отсюда получаем: $y' = zy$. Дифференцируем это равенство еще раз: $y'' = z'y + zy'$, – и получаем $y'' = z'y + z^2y$, $y'' = y(z' + z^2)$.

Подставляем выражения для $y'$ и $y''$ в исходное уравнение: $x^2yy(z' + z^2) - (y - xzy)^2 = 0$.

Делим его на $y^2$ $(y \neq 0)$: $x^2(z' + z^2) - (xz - 1)^2 = 0$.

После упрощения имеем уравнение $x^2z' - 1 + 2xz = 0$.

Делим его почленно на $x^2$ $(x \neq 0)$: $z' + \dfrac{2z}{x} = \dfrac{1}{x^2}$.

Получили линейное уравнение 1-го порядка. Решаем его, например, методом Бернулли: $z = uv$, $z' = u'v + uv'$. Тогда оно примет вид: $u'v + uv' + \dfrac{2uv}{x} = \dfrac{1}{x^2}$, т. е. $u'v + u\left(v' + \dfrac{2v}{x}\right) = \dfrac{1}{x^2}$.

Полагаем $v' + \dfrac{2v}{x} = 0$, откуда $\dfrac{dv}{v} = -\dfrac{2dx}{x}$. Интегрирование приводит к равенству $\ln|v| = -2\ln|x|$. Тогда имеем: $v = \dfrac{1}{x^2}$ – искомая функция $v$.

Далее имеем: $\dfrac{u'}{x^2} = \dfrac{1}{x^2}$, т. е. $du = dx$, что означает $u = x + C_1$. Отсюда $z = (x + C_1)x^{-2}$.

Возвращаемся к старым переменным: $\dfrac{y'}{y} = \left(x + C_1\right)x^{-2}$ или $\dfrac{dy}{y} = \left(\dfrac{1}{x} + \dfrac{C_1}{x^2}\right)dx$.

Интегрируем: $\ln|y| = \ln|x| - \dfrac{C_1}{x} + \ln C_2$. Используя свойства логарифма, получаем: $\ln\left(\dfrac{y}{C_2x}\right) = \dfrac{-C_1}{x}$ или $\dfrac{y}{C_2x} = e^{-\frac{C_1}{x}}$.

Таким образом, $y = C_2xe^{-\frac{C_1}{x}}$ – общее решение исходного уравнения.