9. ЗАКОН РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ФУНКЦИИ СЛУЧАЙНОЙ ВЕЛИЧИНЫ

Пусть некоторая случайная величина X подвергается детерминированному преобразованию φ, в результате которого получается величина У. Рассмотрим задачу определения числовых характеристик и закона распределения получаемой в результате преобразования случайной величины *У*.

9.1. Числовые характеристики функции случайного аргумента.

Рассмотрим случайную величину Y, зависящую функционально от случайной величины X с известным законом распределения $F(x)$: $Y=\varphi(X)$.

Если X – дискретная случайная величина и известен ее ряд распределения имеет вид:

X_i	x_1	x_2	…	x_n
p_i	p_1	p_2	…	p_n

Определяем вероятности появления различных значений случайной величины *У*

$\varphi(X)_i$	$\varphi(x_1)$	$\varphi(x_2)$	…	$\varphi(x_n)$
p_i	p_1	p_2	…	p_n

Тогда математическое ожидание случайной величины Y определяется так:

$$m_y = M[Y] = \sum_{i=1}^{n} y_i p_i = \sum_{i=1}^{n} \varphi(x_i) p_i = M[\varphi(X)]. \qquad (9.1)$$

Если случайная величина X непрерывна и имеет плотность распределения $f(x)$, то заменяя в формуле (9.1) вероятности p_i элементом вероятности $f(x)dx$, а сумму – интегралом, получаем:

$$m_y = M[Y] = \int_{-\infty}^{\infty} yf(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) f(x)dx = M[\varphi(x)]. \qquad (9.2)$$

Для смешанной случайной величины выражение для математического ожидания преобразуется к виду:

$$m_y = M[Y] = M[\varphi(x)] = \int_H \varphi(x)dF(x) + \sum_i \varphi(x_i) p_i. \qquad (9.3)$$

Соотношения (9.1), (9.2) и (9.3) – *общее понятие математического ожидания*, позволяющее вычислить математическое ожидание для неслучайных функций случайного аргумента. Например, дисперсия случайной величины Y=φ(x) определяется так:

$$D[Y] = M[(Y - m_y)^2] = M[Y^2] - m_y^2 = M[(\varphi(x))^2] - (M[\varphi(x)])^2.$$

Величину $M[\varphi(x)]$ рассчитываем в соответствии с (9.1)-(9.3). Для определения математического ожидания квадрата $\varphi(x)$ воспользуемся следующими соотношениями:

$$M[(\varphi(x))^2]=\begin{cases}\sum\limits_{i=1}^{n}\varphi^2(x_i)\,p_i, & \textit{для}\quad \textit{ДСВ}\\ \int\limits_{-\infty}^{\infty}\varphi^2(x)\,f(x)dx, & \textit{для}\quad \textit{НСВ}.\\ \int\limits_{H}\varphi^2(x)\,f(x)dx+\sum\limits_{i=1}^{n}\varphi^2(x_i)\,p_i, & \textit{для}\quad \textit{ССВ}\end{cases} \qquad (9.4)$$

Таким образом, для нахождения числовых характеристик функции $Y=\varphi(x)$ достаточно знать закон распределения ее аргумента.

9.2. Закон распределения функции дискретного случайного аргумента

Для дискретной случайной величины $Y=\varphi(x)$ определяем вероятности появления различных значений случайной величины:

$\varphi(X)_i$	$\varphi(x_1)$	$\varphi(x_2)$	…	$\varphi(x_n)$
p_i	p_1	p_2	…	p_n

Преобразуем полученную таблицу в ряд распределения случайной величины Y. Для этого расположим значения Y в порядке возрастания, а для определения вероятностей p$\{Y=y_i\}$ будем руководствоваться следующими правилами:

- если различным возможным значениям аргумента X соответствуют различные возможные значения Y, то $P\{Y=\varphi(x_i)\}=p_i$;
- если различным возможным значениям случайной величины X соответствуют значения Y, среди которых есть равные между собой, то следует складывать вероятности повторяющихся значений СВ Y.

Полученный таким образом ряд является рядом распределения случайной величины Y.

9.3. Закон распределения функции непрерывного случайного аргумента

Пусть X – непрерывная случайная величина с известной плотностью вероятности. Алгоритм определения закона распределения СВ Y зависит от вида функции Y=φ(x).

9.3.1. Рассмотрим случай ***монотонного возрастания функции Y=φ(x)*** на интервале [a,b) определения случайной величины X (рис. 9.1).

Определим функцию распределения величины У:

$$F_y(y) = p(Y < y) = p(\varphi(x) < y).$$

Чтобы выполнилось условие $Y < y$, необходимо и достаточно, чтобы случайная величина *X* попала на участок оси абсцисс от *a* до *x=ψ(x)*, где *ψ(x)* – функция, обратная функции $\varphi(x)$.

$$F_y(Y) = P(Y < y) =$$
$$= P(a < X < x) =$$
$$= \int_a^x f(x)dx = \int_a^{\psi(y)} f(x)dx.$$

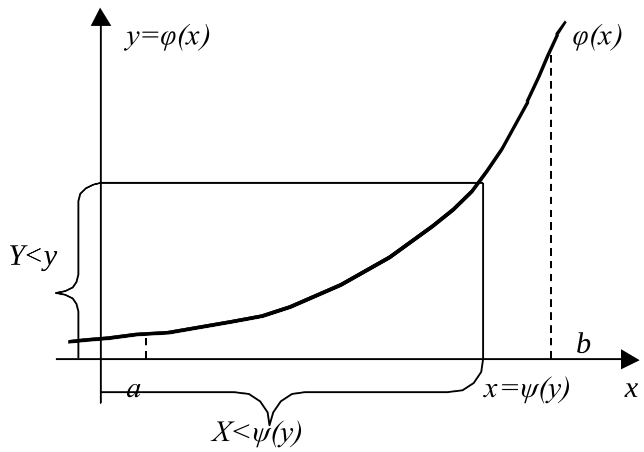

Рис. 9.1

Функция распределения случайной величины *Y* имеет вид:

$$F_y(y) = \begin{cases} 0, & y < \psi(a); \\ \int_a^{\psi(y)} f_x(x)dx, & \psi(a) \le y < \psi(b); \\ 1, & y \ge \psi(b). \end{cases}$$

Дифференцируя интеграл по переменной *y*, входящей в верхний предел, получим:

$$f(y) = F_y'(y) = f_y(\psi(y))\psi'(y).$$

9.3.2. Рассмотрим случай, когда ***y=φ(x) монотонно убывающая функция*** на интервале [a,b) определения случайной величины X (рис. 9.2).

Функция распределения случайной величины *Y* определиться так:

$$F_y(y) = p(Y < y) =$$
$$= p(\varphi(x) < y) =$$
$$= p(X > \psi(y)) =$$
$$= \int_{\psi(y)}^{+\infty} f_x(x)dx.$$

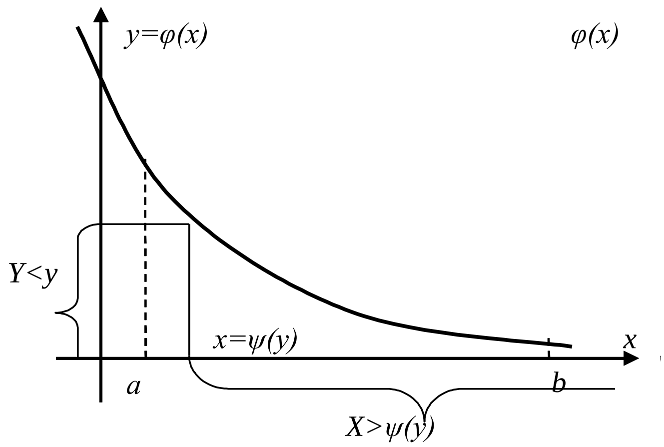

Рис. 9.2

Функция распределения СВ *Y=φ(x)* для СВ *X*, распределенной в интервале [*a*,b], равна:

$$F_y(y)=\begin{cases} 0, & y<\psi(b); \\ \int\limits_{\psi(y)}^{b} f_x(x)dx & \psi(b)\le y<\psi(a); \\ 1 & y\ge\psi(a). \end{cases}$$

Плотность вероятностей для любого монотонного случая принимает вид:

$$f_y(y)=F'(y)=\begin{cases} f_x(\psi(y))\cdot|\psi'(y)|, & y_{\min}\le y<y_{\max} \\ 0, & y<y_{\min}, y\ge y_{\max} \end{cases}. \qquad (9.5)$$

9.3.3. Рассмотрим случай когда ***функция y=φ(x)*** на участке $[a,b)$ возможных значений случайной величины X ***не монотонна*** (рис. 9.3).

Число значений обратной функции ψ(y) зависит от того, какое значение Y выбрано. Событие Y<y равносильно попаданию случайной величины X в один из непересекающихся отрезков, отмеченных жирной линией на рис.9.3, где соответствующая часть кривой y-φ(X) лежит ниже прямой y. Попадания точки X в эти отрезки – события несовместные; по правилу сложения вероятностей

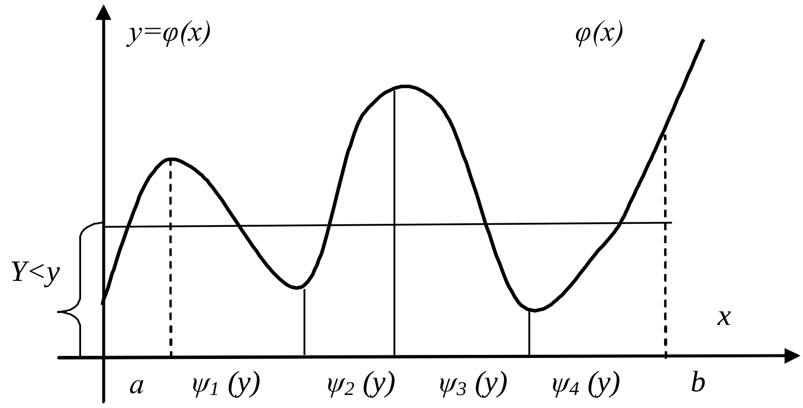

Рис. 9.3

$$F(y)=P(Y<y)=P(X\subset]\psi_1(y),\psi_2(y)]\cup X\subset]\psi_3(y),\psi_4(y)]\cup ......)$$
$$=\sum_{i=1}^{k}\int\limits_{\psi_i(y)}^{\psi_{i+1}(y)} f(x)dx \qquad (9.6)$$

Плотность вероятностей случайной величины *Y* равна

$$f_y(y)=\begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{k} f_x(\psi_i(y))\cdot|\psi_i'(y)|, & y_{\min i}\le y<y_{\max i}; \\ 0 & y<y_{\min}, y>y_{\max}, \end{cases} \qquad (9.7)$$

где: k – интервалов монотонности функции φ(x);

y_{min} , y_{max} – соответственно минимальное и максимальное значение случайной величины Y;

y_{mini} , y_{maxi} – соответственно минимальное и максимальное значение случайной величины Y на i-ом интервале монотонности.

Пример 9.1. Определить плотность вероятности величины $Y = X^2$, если *X* - случайная величина, равномерно распределенная на интервале (-1, 2).

Решение. В зависимости от числа *k* обратных функций выделим следующие интервалы для *Y* (см. рис. 3.1):

(-∞, 0) $k = 0$,

(0, 1) $k = 2$,

(1, 4) $k = 1$,

$(4, +\infty)$ $k = 0$.

Так как на интервалах $(-\infty, 0)$ и $(4, +\infty)$ обратная функция не существует, то $g(y)=0$.

В интервале (0,1) две обратных функции: $\psi_1(y) = +\sqrt{y}$ и $\psi_2(y) = -\sqrt{y}$. По формуле (3.1) получим

$$g(y) = f_x(\psi_1(y)) \cdot |\psi_1'(y)| + f_x(\psi_2(y)) \cdot |\psi_2'(y)| =$$

$$= f_x(\sqrt{y}) \cdot \frac{1}{2\sqrt{y}} + f_x(-\sqrt{y}) \cdot \frac{1}{2\sqrt{y}} = \frac{1}{3\sqrt{y}}$$

В интервале (1,4) одна обратная функция $\psi_1(y) = +\sqrt{y}$, следовательно

$$g(y) = f_x(\psi_1(y)) \cdot |\psi_1'(y)| = f_x(\sqrt{y}) \cdot \frac{1}{2\sqrt{y}} = \frac{1}{6\sqrt{y}}$$

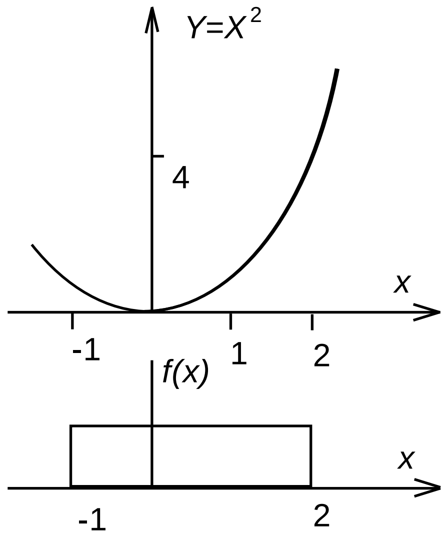

Рис. 9.4