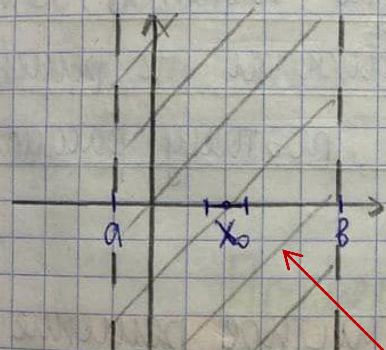
4.6 Уравнение Риккати

1. Немного теории
2. Практика интегрирования

$y' = P(x)y^2 + Q(x)y + R(x)$

В правой части: квадратный трёхчлен относительно искомой функции с непрерывными коэффициентами (P, Q, R - функции x (икса), непрерывны на (a, b))



Проверим выполнение условий теоремы Пикара (о существовании единственного решения) $\forall (x_0, y_0)$, где $a < x < b$, $|y| < +\infty$. Проверка заключается в рассмотрении уравнения вида $y' = f(x,y)$, в данном случае $f(x,y) = P(x)y^2 + Q(x)y + R(x)$:

1) $f(x,y)$ - непрерывна, $\exists\, \vartheta(x_0)$

2) $f'_y(x,y)$ - непрерывна в некоторой окрестности $\vartheta(x_0)$

Следовательно, существует единственное решение $y = y(x)$, удовлетворяющее начальному условию $y(x_0) = y_0$

Замечание! В отличие от линейных ДУ, в которых $P \equiv 0$, речь идёт о единственном решении, существующем, возможно, в достаточно малой окрестности точки x_0. В общем виде уравнение Риккати не решено, особых решений не имеет, поэтому рассматриваем частные случаи

I Подстановка через частное решение и $z = z(x)$

Если известно частное решение y_1, то:

- с помощью подстановки $y = y_1 + \frac{1}{z}$, $z = z(x)$ получим уравнение, приводящееся к линейному ДУ относительно z.
- с помощью подстановки $y = y_1 + z$, уравнение приводящееся к уравнению Бернулли относительно z.

Подбор частного решения

Иногда по виду $R(x)$ можно предположить о возможном частном решении с неопределенными коэффициентами, затем проверить:

- Если $R(x) = ax^2 + bx + c$ (квадратный трёхчлен относительно x), то тогда частное решение: $y_1 = Ax + B$
- Если $R(x) = \frac{a}{x^2}$, то возможно частное решение: $y_1 = \frac{A}{x}$

Пример 1

$y' = y^2 - x^2 - 1$

- свести к линейному ДУ
- свести к уравнению Бернулли и решить

– Подберём частное решение. Поскольку $R(x) = -x^2 - 1$, то $y_1 = ax + b$, $y_1' = a$.
Подставим y_1 и y_1' в исходное уравнение:

$$a = (ax + b)^2 - x^2 - 1$$

$a = a^2x^2 + b^2 + 2abx - x^2 - 1$

– Выпишем коэффициенты при x^2, x, x^0:

$$\begin{array}{l} x^2 \\ x \\ x^0 \end{array} \begin{cases} a^2 - 1 = 0 \\ 2ab = 0 \\ b^2 - 1 = a \end{cases} \quad \begin{cases} a = \pm 1 \\ b = 0 \\ a = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 0 \end{cases}$$

Тогда $y_1 = ax + b = -x$ – частное решение

1) Подставим $y = y_1 + \frac{1}{z} = -x + \frac{1}{z}$,

$y' = -1 - \frac{z'}{z^2}$ в исходное уравнение:

$$-1 - \frac{z'}{z^2} = \left(-x + \frac{1}{z}\right)^2 - x^2 - 1$$

$$-\frac{z'}{z^2} = \frac{1}{z^2} - \frac{2x}{z} \quad \Big| \cdot (-z^2)$$

$$z' = 2xz - 1$$

* Получим линейное уравнение относительно z, находим z и возвращаемся к первоначальным переменным $z = \frac{1}{y+x}$

* Решим однородное ДУ:

$$z' - 2xz = 0$$

$$z' = 2xz \Rightarrow \frac{dz}{dx} = 2xz \Rightarrow \frac{dz}{z} = 2x\,dx$$

$\ln|z| = x^2 + C$

$z = e^{x^2+C} = e^{x^2} \cdot C$

* Пусть $C = C(x)$, тогда $z = e^{x^2} \cdot C(x)$

$z' = 2xe^{x^2} C(x) + C'(x) e^{x^2}$, подставим и найдем $C(x)$:

$2xe^{x^2} C(x) + C'(x) e^{x^2} - 2x \cdot e^{x^2} \cdot C(x) = -1$

$C'(x) e^{x^2} = -1 \Rightarrow C'(x) = -\frac{1}{e^{x^2}}$

$\frac{dC}{dx} = -\frac{1}{e^{x^2}} \Rightarrow dC = -\frac{dx}{e^{x^2}}$

$C(x) = C - \frac{\sqrt{\pi}}{2} \operatorname{erf}(x)$

* Подставим $C(x)$ в $z = e^{x^2} \cdot C(x)$:

$z = e^{x^2}\left(C - \frac{\sqrt{\pi}}{2} \operatorname{erf}(x)\right)$

* Вернёмся к первоначальным переменным при помощи подстановки $z = \frac{1}{y+x}$

$\frac{1}{y+x} = e^{x^2}\left(C - \frac{\sqrt{\pi}}{2} \operatorname{erf}(x)\right)$

$$\boxed{y = \frac{1}{e^{x^2}\left(C - \frac{\sqrt{\pi}}{2} \operatorname{erf}(x)\right)} - x}$$

② Подставим $y = y_1 + z = -x + z$, $z = z(x)$, $y' = -1 + z'$ в исходное уравнение:

$$z' - 1 = z^2 - 2zx + x^2 - x^2 - 1$$

$$z' = z^2 - 2zx$$

$$\boxed{z' + 2zx = z^2}$$ – уравнение Бернулли

♠ Разделим на z^2 и заменим $u = \frac{1}{z}$, $u' = -\frac{z'}{z^2}$, $u = u(x)$:

$$\frac{z'}{z^2} + \frac{2x}{z} = 1$$

$$-u' + 2xu = 1$$

$$u' - 2xu = -1$$

♠ Решим по аналогии: расмотрим однородное ДУ $u' - 2xu = 0$, а затем возьмем $C = C(x)$, найдём $C(x)$ и подставим, вернёмся к первоначальным переменным и придём к:

$$y = \frac{1}{e^{x^2}\left(C - \frac{1}{2}\sqrt{\pi}\,\mathrm{erf}(x)\right)} - x$$

Пример 2

Свести к линейному ДУ и решить

$$y' = \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{2x^2}$$

- Подберём частное решение. Поскольку $R(x) = \frac{1}{2x^2}$, то $y_1 = \frac{a}{x}$, $y_1' = -\frac{a}{x^2}$.

Подставим y_1 и y_1' в исходное уравнение:

$$-\frac{a}{x^2} = \frac{a^2}{2x^2} + \frac{1}{2x^2} \quad \Big| \cdot 2x^2$$

$$-2a = a^2 + 1 \Rightarrow a^2 + 1 + 2a = 0$$

$$(a+1)^2 = 0 \Rightarrow a = -1$$

Тогда $y_1 = -\frac{1}{x}$ – частное решение

- Подставим $y = y_1 + \frac{1}{z} = -\frac{1}{x} + \frac{1}{z}$, $y' = \frac{1}{x^2} - \frac{z'}{z^2}$ в исходное уравнение:

$$\frac{1}{x^2} - \frac{z'}{z^2} = \frac{1}{2x^2} + \frac{1}{2z^2} - \frac{1}{xz} + \frac{1}{2x^2}$$

$$-\frac{z'}{z^2} = \frac{1}{2z^2} - \frac{1}{xz} \quad \Big| \cdot -z^2$$

$$z' = \frac{z}{x} - \frac{1}{2}$$

Получим линейное ДУ $z' - \frac{z}{x} = -\frac{1}{2}$

• Решим методом Лагранжа. Для этого рассмотрим однородное ДУ

$$z' - \frac{z}{x} = 0$$

$$\frac{dz}{dx} = \frac{z}{x} \Rightarrow \frac{dz}{z} = \frac{dx}{x}$$

$$\ln|z| = \ln|x| + \ln|C|$$

$$z = C \cdot x$$

• Пусть $C = C(x)$, тогда $z = C(x) \cdot x$, $z' = C'(x) \cdot x + C(x)$, подставим и найдём $C(x)$:

$$C'(x) \cdot x + C(x) - \frac{C(x) \cdot x}{x} = -\frac{1}{2}$$

$$C'(x) \cdot x = -\frac{1}{2} \Rightarrow C'(x) = -\frac{1}{2x}$$

$$\frac{dC}{dx} = \frac{-1}{2x} \Rightarrow C(x) = \int -\frac{dx}{2x} + C$$

$$C(x) = -\frac{1}{2}\ln|x| + C$$

• Подставим $C(x)$ в $z = C(x) \cdot x$ и вернёмся к первоначальным переменным, зная что $\frac{1}{z} = y + \frac{1}{x}$:

$$z = \left(-\frac{1}{2}\ln|x| + C\right) \cdot x$$

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{(-\frac{1}{2}\ln|x| + C)\cdot x} = y + \frac{1}{x}$$

$$y = \frac{1}{\frac{1}{2}(C - \ln|x|)\cdot x} - \frac{1}{x}$$

$$\boxed{y = \frac{2}{(C - \ln|x|)\cdot x} - \frac{1}{x}}$$

II Случай $y' = Ay^2 + \frac{B}{x}y + \frac{C}{x^2}$

1★ Если коэффициенты удовлетворяют условию $(B+1)^2 \geqslant 4AC$, то частное решение можно найти по формуле $y_1 = \frac{a}{x}$. ДУ сводится к уравнению Бернулли или линейному ДУ.

2★ Если не выполняется 1★, то можно рассмотреть уравнение $\frac{y}{x^\alpha} = z$ в общем случае, что это обобщенное однородное ДУ с $\alpha = -1 \Rightarrow y = \frac{z}{x}$, $z = z(x)$. Обобщенное однородное сводится к ДУ с разделяющимися переменными.

Доказательство 1 ★

Для доказательства подставим $y = \frac{a}{x}$, $y' = -\frac{a}{x^2}$:

$$-\frac{a}{x^2} = A \cdot \frac{a^2}{x^2} + B \cdot \frac{a}{x^2} + \frac{C}{x^2} \quad \Big| \cdot (x^2)$$

$$Aa^2 + Ba + a + C = 0$$

$$Aa^2 + (B+1)a + C = 0$$

Получив квадратное уравнение относительно a, можем его решить. Для этого необходим не отрицательный дискриминант:

$$D = (B+1)^2 - 4AC \geqslant 0$$ — условие существования $a \in \mathbb{R}$

Тогда $(B+1)^2 \geqslant 4AC$ $\boxtimes$

Доказательство 2 ★

Определим обобщенное однородное ДУ, для этого присвоим $y = \alpha$, $dy = \alpha - 1$

Распишем размерности слагаемых исходного уравнения:

$$\alpha - 1 = 2\alpha = \alpha - 1 = -2 \Rightarrow \alpha = -1$$

Таким образом подстановка $\frac{y}{x^{-1}} = z$, $z = xy$ даёт возможность перейти к ДУ с разделяющимися переменными.

Если рассмотреть правую часть уравнения, вынеся $\frac{1}{x^2}$ и $a = xy$

$$\frac{1}{x^2}(A a^2 + Ba + C)$$

$$\frac{1}{x^2}(A(xy)^2 + B(xy) + C)$$

Замечание! В обобщённых однородных ДУ всегда можно вынести $x^{\alpha-1}$ и получить $f\left(\frac{y}{x^{\alpha}}\right)$:

$$y' = \frac{dy}{dx} = x^{\alpha-1} f\left(\frac{y}{x^{\alpha}}\right)$$

при $\alpha = -1 \Rightarrow y' = \frac{1}{x^2}\left(A\left(\frac{y}{x^{-1}}\right)^2 + B\frac{y}{x^{-1}} + C\right)$

III Подстановка $y = z\sqrt{x}$, $y' = z'\sqrt{x} + \frac{z}{2\sqrt{x}}$

$$y' = a\frac{y^2}{x} + \frac{1}{2}\cdot\frac{y}{x} + C \quad \Big| \cdot x$$

$$xy' = ay^2 + \frac{1}{2}y + Cx$$

Сводится к ДУ с разделяющимися переменными. Для доказательства подставим $y = z\sqrt{x}$ и y' в исходное ДУ:

$$z'\sqrt{x} + \frac{z}{2\sqrt{x}} = \frac{a}{x} \cdot z^2 x + \frac{1}{2}\frac{z\sqrt{x}}{x} + C$$

$$z'\sqrt{x} = \frac{az^2x}{x} + C = az^2 + C$$

$z'\sqrt{x} = az^2 + C$ – ДУ с разделяющимися переменными

$$\frac{dz}{dx} = \frac{az^2+C}{\sqrt{x}} \Rightarrow \frac{dz}{az^2+C} = \frac{dx}{\sqrt{x}} + C$$

Решается в квадратурах

IV Специальное уравнение Риккати

$$y' + Ay^2 = Bx^m$$

При $m=0$ имеем $y' + Ay^2 = B$ – уравнение с разделяющимися переменными

При $m=-2$ имеем $y' + Ay^2 = Bx^{-2}$.

Распишем размерности (показатели) слагаемых:

$$\alpha - 1 = 2\alpha = -2 \Rightarrow \alpha = -1$$

Получим обобщенное однородное ДУ, сводящееся к ДУ с разделяющимися переменными при помощи подстановки $xy = z$.

Условия для алгоритма решения:

- $m / (2m+4) = k \quad (k \in \mathbb{Z}_{\neq 0})$

Несколько значений $m = -4, -\frac{4}{3}, -\frac{8}{3}, -\frac{8}{5}$

Алгоритм решения

① Ввести подстановку $y = \frac{z}{x}, x^{m+2} = t, z = z(t)$

② После подстановки уравнение должно быть приведено к виду:

$$tz' + \alpha z + \beta z^2 = \gamma t \quad (\alpha = k - \tfrac{1}{2})$$

▾ Вар. 1 Замена $z = \frac{t}{a+u}$ $(a = \frac{1+\alpha}{\gamma})$ $u = u(t)$)

▾ Вар. 2. Замена $z = a + \frac{t}{u}$ $(a = -\frac{\alpha}{\sqrt{\beta}})$, $u = u(t)$)

③ Вариантные подстановки приведут к уравнению из III.

Пример 3

$y' = y^2 + x^{-4}$, $m = -4$

• Проверим условие алгоритма

$$\frac{m}{2m+4} = k \Rightarrow \frac{-4}{2(-2)} = 1 \Rightarrow k = 1$$

Целое число найдено, значит можно привести к ДУ с разделяющимися переменными.

• Подставим $y = \frac{z}{x}$, $z = yx$, $z = z(t)$,
$t = x^{m+2} = x^{-2} \Rightarrow x^2 = \frac{1}{t}$;

$$y' = \frac{z'(-2)x^{-3} \cdot x - z}{x^2} = \frac{-2z'x^{-2} - z}{x^2} =$$

$$= \frac{-2z't - z}{t^{-1}} = -2z't^2 - zt$$

• Приравняем найденный и исходный y'

$-2z't^2 - zt = y^2 + x^{-4}$

Зная, что $x^{-2} = t$, $y = \frac{z}{x} = z\sqrt{t}$ имеем

$-2z't^2 - zt = tz^2 + t^2 \quad | : (-2t)$

$$z't + \frac{z}{2} = -\frac{z^2}{2} - \frac{t}{2}$$

$$t z' + \underbrace{\frac{1}{2}}_{\alpha} z + \underbrace{\frac{1}{2}}_{\beta} z^2 = -\underbrace{\frac{1}{2}}_{\gamma} t \quad , \alpha = k - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

- Используем подстановку из варианта №2, тогда $a = -\frac{\alpha}{\beta} = -1$, $z = a + \frac{t}{u} =$ $= -1 + \frac{t}{u}$, $u = u(t)$, $z' = -\frac{u't - u}{u^2}$

$$t \cdot \frac{u - u't}{u^2} + \frac{1}{2}\left(\frac{t}{u} - 1\right) + \frac{1}{2}\left(1 + \frac{t^2}{u^2} - \frac{2t}{u}\right) = -\frac{1}{2}t$$

$$t \cdot \frac{u - u't}{u^2} + \frac{t}{2u} + \frac{t^2}{2u^2} - \frac{t}{u} = -\frac{t}{2} \quad \Big| \cdot \frac{u^2}{t}$$

$$u - u't = -\frac{u^2}{2} - \frac{u}{2} - \frac{t}{2} + u$$

$$-u't = -\frac{u^2}{2} - \frac{u}{2} - \frac{t}{2} \quad \Big| : -t$$

$$u' = \frac{u^2}{2t} + \frac{u}{2t} + \frac{1}{2}$$

- Приведем к уравнению $\boxed{\text{III}}$, которое сводится к ДУ с разделяющимися переменными подстановкой $u = v\sqrt{t}$, $u' = v'\sqrt{t} + \frac{v}{2\sqrt{t}}$

$$v'\sqrt{t} + \frac{v}{2\sqrt{t}} = \frac{v^2 t}{2t} + \frac{v\sqrt{t}}{2t} + \frac{1}{2}$$

$$v'\sqrt{t} = \frac{v^2}{2} + \frac{1}{2} \Rightarrow v' = \frac{v^2 + 1}{2\sqrt{t}}$$

$$\frac{dv}{dt} = \frac{v^2+1}{2\sqrt{t}} \Rightarrow \frac{dv}{v^2+1} = \frac{dt}{2\sqrt{t}}$$

$$\operatorname{arctg} v = \sqrt{t} + C$$

$$v = \operatorname{tg}(\sqrt{t} + C)$$

$$-\frac{\pi}{2} < \sqrt{t} + C < \frac{\pi}{2}$$

- Зная, что $v = \frac{u}{\sqrt{t}}$ имеем:

$$\frac{u}{\sqrt{t}} = \operatorname{tg}(\sqrt{t} + C)$$

- $t = x^{-2} = \frac{1}{x^2}$ получим

$$xu = \operatorname{tg}\left(\frac{1}{x} + C\right)$$

- $z = -1 + \frac{t}{u} \Rightarrow u = \frac{t}{z+1}$; $z = \frac{y}{\sqrt{t}} \Rightarrow$

$\Rightarrow u = \frac{t\sqrt{t}}{y + \sqrt{t}}$; $t = \frac{1}{x^2} \Rightarrow \sqrt{t} = \frac{1}{x}$

$$u = \frac{1}{x^3} \cdot \frac{x}{yx+1} = \frac{1}{x^2(xy+1)} ;$$

$$\frac{1}{x(xy+1)} = \operatorname{tg}\left(\frac{1}{x} + C\right)$$

$$x(xy+1) = \operatorname{ctg}\left(\frac{1}{x} + C\right)$$

$$xy = \frac{\operatorname{ctg}\left(\frac{1}{x} + C\right)}{x} - 1$$

$$\boxed{y = \frac{\operatorname{ctg}\left(\frac{1}{x} + C\right) - x}{x^2}}$$