7. ТИПОВЫЕ ЗАКОНЫ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ДСВ

7.1. Геометрическое распределение

Дискретная случайная величина X имеет ***геометрическое распределение***, если вероятности ее возможных значений 0,1,….,k,.. определяются так:

$$p_k = P\{X = k\} = q^k p,$$

где p – параметр распределения, $(0 \le p \le 1)$, а $q=1-p$.

x_i	0	1	2	…	k	**…**
p_i	p	$q^1 p$	$q^2 p$	…	$q^k p$	**…**

На практике геометрическое распределение появляется при следующих условиях. Пусть производится некоторый опыт, в котором некоторое событие появляется с вероятностью p. Опыты производятся последовательно, до наступления события. Случайная величина X, равная числу неудачных опытов, имеет геометрическое распределение.

Числовые характеристики геометрического распределения:

$$M[X] = q / p, D[X] = q / p.^2$$

“Смещенное” геометрическое распределение получается из геометрического путем преобразования СВ X и СВ Y=X+1.

Дискретная случайная величина Y имеет смещенное геометрическое распределение если вероятности ее возможных значений 1,…,k, определяются так

$$p_k = P(Y = k) = q^{k-1} p,$$

где p – параметр распределения $(0 \le p \le 1)$, а $q=1-p$.

x_i	1	2	3	…	k	**…**
p_i	p	$q^1 p$	$q^2 p$	…	$q^{k-1} p$	**…**

Числовые характеристики смещенного геометрического распределения определяются с использованием их свойств:

$$M[Y] = M[X+1] = M[X] + 1 = q / p + 1 = 1 / p,$$

$$D[Y] = D[X+1] = D[X] = q / p^2.$$

7.2. Индикатор случайного события.

Величина X называется индикатором случайного события A, если она равна 1 при осуществлении события A и 0 при осуществлении A.

$$X = \begin{cases} 1\ , A \\ 0\ , \overline{A} \end{cases}$$

Ряд распределения вероятностей

x_i	0	1
P_i	q	p

P – вероятность наступления события A.

Числовые характеристики индикатора события определяются так.

$M[X]=0 \cdot q + 1 \cdot p = p$;

$M[X^2] = 0^2 \cdot q + 1^2 \cdot p = p$;

$D[X] = M[X^2] - m_x^2 = p - p^2 = p(1-p) = pq; \qquad \sigma_x = \sqrt{pq}.$

7.3. Биноминальный закон распределения

Дискретная случайная величина X имеет *биноминальное* распределение, если ее закон распределения описывается формулой Бернулли:

$$P\{X = k\} = P(n,k) = C_n^k p^k q^{n-k},$$

где p – параметр распределения $(0 \le p \le 1), q = 1 - p.$

Распределение загасит от двух параметров n и p.

На практике биноминальное распределение возникает при следующих условиях. Пусть производится серия из n испытании, в каждом из которых некоторое событие появляется с вероятностью p. Случайная величина X, равная числу наступлений события в n опытах, имеет биноминальное распределение.

Числовые характеристики: $M\,[X] = n, D[X] = npq$.

Название объясняется тем, что правую часть равенства можно рассматривать как общий член разложения Бинома Ньютона:

$$(p+q)^n = C_n^n p^0 q^n + C_n^1 pq^{n-1} + ... + C_n^k p^k q^{n-k} + C_n^n p^n \cdot q^0 = 1, \quad p + q = 1,$$

т.е. $\qquad \sum_{k=0}^{n} P_n(k) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k p^k q^{n-k} = 1.$

7.4. Распределение Пуассона

Соотношениями, описывающими биноминальное распределение, удобно пользоваться в тех случаях, если величина и достаточно мала, а p велико.

Теорема: Если, $n \to \infty$, а $p \to 0$ так, что $np = \alpha (0 < \alpha < \infty)$, то

$$P\{X = k\} = C_n^k p^k q^{n-k} = \frac{\alpha^k}{k!} e^{-a}$$

при любом $k = 0, 1, \ldots$.

Числовые характеристики: $M[X] = \alpha$, $D[X] = \alpha$.

Закон Пуассона зависит от одного параметра α, смысл которого заключается в следующем: он является одновременно и математическим ожиданием и дисперсией случайной величины *X*.

Физические условия возникновения распределения.

Рассмотрим временную ось, на которой будем отмечать моменты возникновения случайных событий (например, отказы компонентов в сложном техническом устройстве, заявки на обслуживание).

Поток случайных событий называется *стационарным*, если число событий, приходящихся на интервал τ в общем случае не зависит от расположения этого участка на временной оси и определяется только его длительностью, т.е. среднее число событий в единице времени (λ) (интенсивность потока) постоянно.

Поток случайных событий называется *ординарным*, если вероятность попадания в некоторый участок Δt двух и более случайных событий пренебрежимо мала по сравнению с вероятностью попадания на него одного события.

В потоке *отсутствует последействие*, если вероятность попадания событий на участок τ не зависит от того, сколько событий попало на другие участки, не пересекающиеся с данным.

Поток случайных событий называется *простейшим*, или *Пуассоновским*, если он является стационарным, ординарным и без последействия.

Для Пуассоновского потока число событий поступивших в течение интервала τ является дискретной случайной величиной с распределением Пуассона с параметром α = τλ

Пример 7.1. Вероятность того, что изделие не выдержит испытания, равна 0,0004. Найти вероятность того, что из 1000 изделий не менее двух не выдержит испытаний.

Решение. В данном случае имеет место последовательность независимых испытаний, для которых применима формула Бернулли, но так как p = 0,0004 мало, а n = 1000 велико, то можно считать, что число неисправных изделий X распределено по закону Пуассона с параметром, $\lambda = pn$ =. 0,0004 • 1000 = 4. Необходимо найти вероятность $P\{x \geq 2\}$:

$$P\{x \geq 2\} = 1 - P\{x < 2\} = 1 - (P\{x = 0\} + P\{x = 1\}),$$

$$P\{X = 0\} = \frac{\lambda^0}{0!} e^{-\lambda} = e^{-4} \approx 0{,}018,$$

$$P\{X = 1\} = \frac{\lambda^1}{1!} e^{-\lambda} = 4e^{-4} \approx 0{,}0733,$$

$$P\{x \geq 2\} = 1 - (0{,}018 + 0{,}0733) = 0{,}908.$$