Тема 2 Линейные дифференциальные уравнения высших порядков

2.1 Линейные однородные дифференциальные уравнения высших порядков

Определение. Линейным однородным дифференциальным уравнением n-го порядка называется уравнение вида

$$y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0.$$

Общим решением этого уравнения является функция $y = C_1y_1 + C_2y_2 + \ldots + C_ny_n$, где $y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_n$ – линейно независимые частные решения уравнения, $C_1,\ C_2,\ \ldots,\ C_n$ – произвольные постоянные.

Определение. Совокупность n линейно независимых на $(a,\ b)$ решений уравнения называется его фундаментальной системой решений.

Частным случаем этого уравнения является линейное однородное уравнение n-го порядка с постоянными коэффициентами:

$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + a_{n-2}y^{(n-2)} + \ldots + a_1y' + a_0y = 0,$ где $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$ – действительные числа.

Для нахождения частных решений этого уравнения составляют характеристическое уравнение $\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + a_1\lambda + a_0 = 0$ путем замены в уравнении производных определенного порядка на соответствующие степени параметра λ: $y^{(k)}$ на λ^k, где $k = 0,\ 1,\ \ldots,\ n.$

Замечание. Характеристическое уравнение является следствием подстановки $y = e^{\lambda x}$, которую ввел Эйлер.

Каждому корню характеристического уравнения соответствует определенное частное решение дифференциального уравнения. Вид частного решения зависит от типа алгебраического корня. Возможны следующие четыре случая, которые определяет правило частных решений.

1. Если λ_0 – действительный корень кратности 1 (простой корень), то ему соответствует решение вида $y = e^{\lambda_0 x}$.

2. Если λ_1 – действительный корень кратности k, то ему соответствует k частных решений:

$y_1 = e^{\lambda_1 x},\ y_2 = xe^{\lambda_1 x},\ \ldots,\ y_k = x^{k-1}e^{\lambda_1 x}.$

3. Если $\lambda_{2,3}=\alpha\pm i\beta$ – пара комплексно-сопряженных корней, то им соответствует два частных решения:

$y_1=e^{\alpha x}\cos\beta x,\ \ y_2=e^{\alpha x}\sin\beta x.$

4. Если $\lambda_{4,5}=\alpha\pm i\beta$ – пара k-кратных комплексно-сопряженных корней, то им соответствуют $2k$ частных решения:

$y_1=e^{\alpha x}\cos\beta x,\ y_2=xe^{\alpha x}\cos\beta x, ...,\ y_k=x^{k-1}e^{\alpha x}\cos\beta x,$

$y_{k+1}=e^{\alpha x}\sin\beta x,\ y_{k+2}=xe^{\alpha x}\sin\beta x,\ ...,\ y_{2k}=x^{k-1}e^{\alpha x}\sin\beta x.$

Поскольку характеристическое уравнение имеет n корней с учетом кратности, то для дифференциального уравнения по правилу частных решений можно указать n решений $y_1, y_2, ..., y_n$. Эти решения и образуют фундаментальную систему решений.

Тогда общее решение уравнения определяется формулой $y=C_1y_1(x)+C_2y_2(x)+...+C_ny_n(x),$ где $C_1, C_2, ..., C_n$ – произвольные постоянные.

Пример. Найти общее решение уравнения:

1) $y''-25y=0;$ 2) $y''-25y'=0;$

3) $y''-4y'+4y=0;$ 4) $y''-2y'+2y=0.$

Решение. 1) Составим характеристическое уравнение: $\lambda^2-25=0.$

Решив его, получим $\lambda_1=5,\ \ \lambda_2=-5$ – два действительных простых корня. Им соответствуют частные решения $y_1=e^{5x},\ \ y_2=e^{-5x}.$ Тогда общее решение заданного дифференциального уравнения имеет вид $y=C_1e^{-5x}+C_2e^{5x},$ где C_1, C_2 – произвольные постоянные.

2) Составим характеристическое уравнение $\lambda^2-25\lambda=0.$

Решив его, получим $\lambda_1=0,\ \ \lambda_2=25$ – два действительных простых корня. Им соответствуют частные решения $y_1=1,\ \ y_2=e^{25x}.$ Тогда общее решение заданного дифференциального уравнения имеет вид $y=C_1+C_2e^{25x},$ где C_1, C_2 – произвольные постоянные.

3) Характеристическое уравнение имеет вид $\lambda^2-4\lambda+4=0$ или $(\lambda-2)^2=0.$ Отсюда $\lambda=2$ – корень кратности 2. Тогда решения $y_1=e^{2x}$ и $y_2=xe^{2x}$ образуют фундаментальную систему решений исходного дифференциального уравнения, а общее решение имеет вид $y=C_1e^{2x}+C_2xe^{2x},$ где C_1, C_2 – произвольные постоянные.

4) Характеристическое уравнение заданного дифференциального уравнения

$\lambda^2-2\lambda+2=0.$ Его корни: $\lambda_1=1+i,\ \ \lambda_2=1-i$ – простые комплексно-сопряженные. Тогда этой паре корней характеристического уравнения соответствуют два линейно независимых частных решения заданного дифференциального уравнения: $y_1=e^x\cos x,\ \ y_2=e^x\sin x.$

Получаем общее решение исходного дифференциального уравнения: $y=C_1e^x\cos x+C_2e^x\sin x,$ где C_1,C_2 – произвольные постоянные.

Пример . Найти общее решение дифференциального уравнения:

1) $y'''-3y''+2y'=0;$ 2) $y'''+3y''+4y'+2y=0;$

3) $y^{IV}-4y'''+5y''=0;$ 4) $y^{VI}+3y^{IV}+3y''+y=0.$

Решение. 1) Запишем характеристическое уравнение заданного дифференциального уравнения: $\lambda^3-3\lambda^2+2\lambda=0.$ Его корнями будут $\lambda_1=0,\ \ \lambda_2=1,\ \ \lambda_3=2,$ т. е. корни характеристического уравнения действительные и различные. Им соответствуют три линейно независимых частных решения: $y_1=1,\ \ y_2=e^x,\ \ y_3=e^{2x}.$

Тогда общее решение заданного дифференциального уравнения имеет вид: $y=C_1+C_2e^x+C_3e^{2x},$ где $C_1,C_2,\ C_3$ – произвольные постоянные.

2) Составим характеристическое уравнение заданного дифференциального уравнения: $\lambda^3+3\lambda^2+4\lambda+2=0.$

Его корни: $\lambda_1=-1,\ \ \lambda_2=-1+i,\ \ \lambda_3=-1-i.$ Им соответствуют три линейно независимых частных решения: $y_1=e^{-x},\ \ y_2=e^{-x}\cos x,\ \ y_3=e^{-x}\sin x.$

Тогда общее решение имеет вид: $y=C_1e^{-x}+C_2e^{-x}\cos x+C_3e^{-x}\sin x,$ где C_1,C_2,C_3 – произвольные постоянные.

3) Характеристическое уравнение имеет вид: $\lambda^4-4\lambda^3+5\lambda^2=0.$ Его корни: $\lambda_{1,2}=0$ (корень кратности 2), $\lambda_3=2+i,\ \ \lambda_4=2-i.$ Им соответствуют четыре линейно независимых частных решения вида $y_1=1,\ \ y_2=x,\ \ y_3=e^{2x}\cos x,\ \ y_4=e^{2x}\sin x.$

Тогда общее решение имеет вид: $y=C_1+C_2x+C_3e^{2x}\cos x+C_4e^{2x}\sin x,$ где $C_1,\ C_2,\ C_3,\ C_4$ – произвольные постоянные.

4) Запишем характеристическое уравнение заданного дифференциального уравнения: $\lambda^6+3\lambda^4+3\lambda^2+1=0.$ Преобразуем это уравнение к виду $(\lambda^2+1)^3=0.$ Отсюда, очевидно, что корни характеристического уравнения $\lambda_1=i,\ \ \lambda_2=-i$ – комплексно-сопряженные кратности 3. Тогда им соответствуют шесть линейно-независимых

частных решений вида $y_1 = \cos x,\ \ y_2 = \sin x,\ \ y_3 = x\cos x,\ \ y_4 = x\sin x,\ \ y_5 = x^2\cos x,\ \ y_6 = x^2\sin x.$

Тогда общее решение заданного дифференциального уравнения имеет вид: $y = C_1\cos x + C_2\sin x + C_3 x\cos x + C_4 x\sin x + C_5 x^2\cos x + C_6 x^2\sin x,$ где $C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6$ – произвольные постоянные.

Пример. Решить задачу Коши: $y'' - 6y' + 9y = 0,\ y(0) = 2,\ y'(0) = 9.$

Решение. Характеристическое уравнение имеет вид: $\lambda^2 - 6\lambda + 9 = 0$ или $(\lambda - 3)^2 = 0.$ Его корень $\lambda = 3$ – корень кратности 2. Тогда решения $y_1 = e^{3x},\ \ y_2 = xe^{3x}$ образуют фундаментальную систему решений. Тогда общее решение имеет вид: $y = C_1 e^{3x} + C_2 x e^{3x}.$

Чтобы найти константы C_1 и C_2, дифференцируем найденное общее решение: $y' = 3C_1 e^{3x} + C_2 e^{3x} + 3C_2 x e^{3x}.$ Затем подставляем начальные условия в выражения для y и y' и решаем систему уравнений относительно C_1 и C_2:

$$\begin{cases} 2 = C_1 e^0, \\ 9 = 3C_1 e^0 + C_2 e^0. \end{cases}$$

Получаем $C_1 = 2,\ \ C_2 = 3.$ Тогда решение задачи Коши: $y = 2e^{3x} + 3xe^{3x}.$

2.2 Линейные неоднородные дифференциальные уравнения

Определение. Линейным неоднородным дифференциальным уравнением n-го порядка называется уравнение вида $y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_1(x)y' + a_0(x)y = f(x),$ где $a_0(x), a_1(x), a_2(x), \ldots,\ f(x)$ – непрерывные функции на некотором промежутке (a, b).

Если $f(x) \equiv 0$, то получаем соответствующее однородное дифференциальное уравнение $y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{n-1} + \ldots + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0.$

Метод Лагранжа

Решение линейного дифференциального уравнения методом Лагранжа (вариации произвольных постоянных) включает в себя следующие действия.

1. Записать соответствующее однородное дифференциальное уравнение.

2. Найти фундаментальную систему частных решений $y_1 = y_1(x),\ y_2 = y_2(x),\ \ldots,\ y_n = y_n(x)$ соответствующего однородного дифференциального уравнения.

3. Найти общее решение однородного уравнения в виде $y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \ldots + C_n y_n,$ где $C_1,\ C_2,\ \ldots,\ C_n$ – константы.

4. Решение заданного неоднородного дифференциального уравнения искать в найденной форме для однородного уравнения, но считать, что $C_1 = C_1(x),$

$C_2 = C_2(x),\ ...,\ C_n = C_n(x)$ – функциональные коэффициенты, которые надо определить.

5. Для нахождения коэффициентов $C_k\,(k=\overline{1,n})$ записать систему уравнений

$$\begin{cases} C_1'(x)y_1(x)+C_2'(x)y_2(x)+...+C_n'(x)y_n(x)=0, \\ C_1'(x)y_1'(x)+C_2'(x)y_2'(x)+...+C_n'(x)y_n'(x)=0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ C_1'(x)y_1^{(n-2)}(x)+C_2'(x)y_2^{(n-2)}(x)+...+C_n'(x)y_n^{(n-2)}(x)=0, \\ C_1'(x)y_1^{(n-1)}(x)+C_2'(x)y_2^{(n-1)}(x)+...+C_n'(x)y_n^{(n-1)}(x)=f(x). \end{cases}$$

6. Решить полученную систему относительно $C_1',...,C_n'$ и получить $C_1'(x)=\varphi_1(x),\ldots,C_n'(x)=\varphi_n(x)$.

7. Проинтегрировать полученные равенства для $C_k'(x)$, $k=\overline{1,n}$ и найти $C_1(x)=\int\varphi_1(x)dx+C_1,\ ...,\ C_n(x)=\int\varphi_n(x)dx+C_n$, где $C_1,...,C_n$ – произвольные постоянные.

8. Подставить полученные выражения вместо $C_1(x), C_2(x), ..., C_n(x)$ в решение. Это и есть общее решение заданного дифференциального уравнения.

Пример 1. Решить уравнение методом Лагранжа:

1) $y''+y=\dfrac{1}{\sin x}$; 2) $y''-4y=4x$; 3) $y'''+4y''+y'-6y=e^x$.

Решение. 1) Это неоднородное линейное дифференциальное уравнение 2-го порядка. Найдем решение соответствующего однородного уравнения $y''+y=0.$

Его характеристическое уравнение $\lambda^2+1=0,$ корни которого $\lambda_1=-i,$ $\lambda_2=i$ – комплексно-сопряженные, простые. Тогда общее решение соответствующего однородного уравнения $y_0=C_1\cos x+C_2\sin x,$ где C_1, C_2 – произвольные постоянные.

Общее решение заданного дифференциального уравнения ищем в виде

$$y=C_1\cos x+C_2\sin x, \qquad (22.68)$$

где $C_1=C_1(x),$ $C_2=C_2(x)$ – функции, которые надо найти.

Для нахождения $C_1(x)$, $C_2(x)$ решим систему уравнений

$$\begin{cases} C_1'\cos x+C_2'\sin x=0, \\ C_1'(\cos x)'+C_2'(\sin x)'=\dfrac{1}{\sin x}. \end{cases}$$

Используем, например, метод Крамера:

$$\Delta=\begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{vmatrix}=\cos^2 x+\sin^2 x=1,$$

$$\Delta_1=\begin{vmatrix} 0 & \sin x \\ \dfrac{1}{\sin x} & \cos x \end{vmatrix}=-1,$$

$$\Delta_2=\begin{vmatrix}\cos x & 0\\ -\sin x & \dfrac{1}{\sin x}\end{vmatrix}=\frac{\cos x}{\sin x}=\operatorname{ctg}x.$$

Тогда решениями системы будут:

$$\begin{cases}C_1'=\dfrac{\Delta_1}{\Delta},\\ C_2'=\dfrac{\Delta_2}{\Delta}\end{cases} \text{ или } \begin{cases}C_1'=-1,\\ C_2'=\operatorname{ctg}x.\end{cases}$$

Интегрируя полученные равенства, получаем:

$$\begin{cases}C_1(x)=-x+C_1,\\ C_2(x)=\ln|\sin x|+C_2,\end{cases}$$

где C_1, C_2 – произвольные постоянные.

Подставляем найденные значения функций в (22.68) и получаем общее решение заданного дифференциального уравнения:

$$y=C_1\cos x+C_2\sin x-x\cos x+\sin x\ln|\sin x|.$$

2) Это неоднородное линейное дифференциальное уравнение 2-го порядка. Найдем решение соответствующего однородного уравнения: $y''-4y=0.$ Его характеристическое уравнение $\lambda^2-4=0,$ корни которого $\lambda_1=2,$ $\lambda_2=-2$ – простые, действительные. Тогда общее решение соответствующего однородного уравнения $y_0=C_1e^{2x}+C_2e^{-2x},$ где C_1, C_2 – произвольные постоянные.

Общее решение заданного дифференциального уравнения ищем в виде

$$y=C_1e^{2x}+C_2e^{-2x}, \qquad (22.69)$$

где $C_1=C_1(x),$ $C_2=C_2(x)$ – функции, которые надо найти.

Для нахождения $C_1(x),$ $C_2(x)$ решим систему уравнений

$$\begin{cases}C_1'e^{2x}+C_2'e^{-2x}=0,\\ C_1'(e^{2x})'+C_2'(e^{-2x})'=4x.\end{cases}$$

Используем метод Крамера:

$$\Delta=\begin{vmatrix}e^{2x} & e^{-2x}\\ 2e^{2x} & -2e^{-2x}\end{vmatrix}=-2e^0-2e^0=-4,$$

$$\Delta_1=\begin{vmatrix}0 & e^{-2x}\\ 4x & -2e^{-2x}\end{vmatrix}=-4xe^{-2x},$$

$$\Delta_2=\begin{vmatrix}e^{2x} & 0\\ 2e^{2x} & 4x\end{vmatrix}=4xe^{2x}.$$

Тогда решение системы:

$$\begin{cases} C_1' = \dfrac{\Delta_1}{\Delta}, \\ C_2' = \dfrac{\Delta_2}{\Delta} \end{cases} \text{ или } \begin{cases} C_1' = xe^{-2x}, \\ C_2' = -xe^{2x}. \end{cases}$$

Интегрируем полученные равенства:

$$C_1(x) = \int xe^{-2x}dx = \begin{vmatrix} u = x, \ \ du = dx \\ dv = e^{-2x}dx, \ \ v = -\dfrac{e^{-2x}}{2} \end{vmatrix} = -\frac{xe^{-2x}}{2} + \int \frac{e^{-2x}}{2}dx =$$

$$= -\frac{xe^{-2x}}{2} - \frac{e^{-2x}}{4} + C_1,$$

$$C_2(x) = \int -xe^{2x}dx = \begin{vmatrix} u = x, \ \ du = dx, \\ dv = e^{2x}dx, \ \ v = \dfrac{e^{2x}}{2} \end{vmatrix} = -\left(\frac{xe^{2x}}{2} - \int \frac{e^{2x}}{2} \ dx\right) =$$

$$= -\frac{xe^{2x}}{2} + \frac{e^{2x}}{4} + C_2.$$

Таким образом,

$$\begin{cases} C_1(x) = -\dfrac{xe^{-2x}}{2} - \dfrac{e^{-2x}}{4} + C_1, \\ C_2(x) = -\dfrac{xe^{2x}}{2} + \dfrac{e^{2x}}{4} + C_2, \end{cases}$$

где C_1, C_2 – произвольные постоянные. Подставляем найденные значения функций в (22.69) и получаем общее решение заданного дифференциального уравнения:

$$y = \left(-\frac{xe^{-2x}}{2} - \frac{e^{-2x}}{4} + C_1\right)e^{2x} + \left(-\frac{xe^{2x}}{2} + \frac{e^{2x}}{4} + C_2\right)e^{-2x}.$$

После упрощения приходим к ответу:

$$y = C_1e^{2x} + C_2e^{-2x} - x.$$

3) Это неоднородное линейное дифференциальное уравнение 3-го порядка. Найдем решение соответствующего однородного уравнения

$$y''' + 4y'' + y' - 6y = 0.$$

Его характеристическое уравнение $\lambda^3 + 4\lambda^2 + \lambda - 6 = 0,$ корни которого $\lambda_1 = 1,$ $\lambda_2 = -2,$ $\lambda_3 = -3$ – действительные, простые. Тогда общее решение соответствующего однородного уравнения $y_0 = C_1e^x + C_2e^{-2x} + C_3e^{-3x},$ где C_1, C_2, C_3 – произвольные постоянные. Общее решение заданного дифференциального уравнения ищем в виде

$$y = C_1e^x + C_2e^{-2x} + C_3e^{-3x}, \qquad (22.70)$$

где $C_1 = C_1(x),\ C_2 = C_2(x),\ C_3 = C_3(x)$ – функции, которые надо найти. Для нахождения $C_1(x), C_2(x), C_3(x)$ решаем систему уравнений

$$\begin{cases} C_1' e^{x} + C_2' e^{-2x} + C_3' e^{-3x} = 0, \\ C_1' e^{x} - 2C_2' e^{-2x} - 3C_3' e^{-3x} = 0, \\ C_1' e^{x} + 4C_2' e^{-2x} + 9C_3' e^{-3x} = e^{x}. \end{cases}$$

По методу Крамера:

$$\Delta = \begin{vmatrix} e^{x} & e^{-2x} & e^{-3x} \\ e^{x} & -2e^{-2x} & -3e^{-3x} \\ e^{x} & 4e^{-2x} & 9e^{-3x} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^{x} & e^{-2x} & e^{-3x} \\ 0 & -3e^{-2x} & -4e^{-3x} \\ 0 & 3e^{-2x} & 8e^{-3x} \end{vmatrix} = e^{x} \begin{vmatrix} -3e^{-2x} & -4e^{-3x} \\ 3e^{-2x} & 8e^{-3x} \end{vmatrix} =$$

$$= e^{x}(-24e^{-5x} + \ 12e^{-5x}) = e^{x}(-12e^{-5x}) = -12e^{-4x},$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & e^{-2x} & e^{-3x} \\ 0 & -2e^{-2x} & -3e^{-3x} \\ e^{x} & 4e^{-2x} & 9e^{-3x} \end{vmatrix} = e^{x} \begin{vmatrix} e^{-2x} & e^{-3x} \\ -2e^{-2x} & -3e^{-3x} \end{vmatrix} = e^{x}(-3e^{-5x} + 2e^{-5x}) = -e^{-4x},$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} e^{x} & 0 & e^{-3x} \\ e^{x} & 0 & -3e^{-3x} \\ e^{x} & e^{x} & 9e^{-3x} \end{vmatrix} = -e^{x} \begin{vmatrix} e^{x} & e^{-3x} \\ e^{x} & -3e^{-3x} \end{vmatrix} = -e^{x}(-3e^{-2x} - e^{-2x}) = 4e^{-x},$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} e^{x} & e^{-2x} & 0 \\ e^{x} & -2e^{-2x} & 0 \\ e^{x} & 4e^{-2x} & e^{x} \end{vmatrix} = e^{x} \begin{vmatrix} e^{x} & e^{-2x} \\ e^{x} & -2e^{-2x} \end{vmatrix} = e^{x}(-2e^{-x} - e^{-x}) = -3.$$

Тогда решение системы:

$$\begin{cases} C_1' = \dfrac{\Delta_1}{\Delta}, \\ C_2' = \dfrac{\Delta_2}{\Delta}, \\ C_3' = \dfrac{\Delta_3}{\Delta} \end{cases} \text{ или } \begin{cases} C_1' = \dfrac{1}{12}, \\ C_2' = -\dfrac{e^{3x}}{3}, \\ C_3' = \dfrac{e^{4x}}{4}. \end{cases}$$

Интегрируя полученные равенства, получаем:

$$\begin{cases} C_1(x) = \dfrac{x}{12} + C_1, \\ C_2(x) = -\dfrac{e^{3x}}{9} + C_2, \\ C_3(x) = \dfrac{e^{4x}}{16} + C_3, \end{cases}$$

где C_1, C_2, C_3 – произвольные постоянные.

Подставляем найденные значения функций в (22.70) и получаем общее решение заданного дифференциального уравнения:

$$y = \left(\frac{x}{12} + C_1\right) e^{x} + \left(-\frac{e^{3x}}{9} + C_2\right) e^{-2x} + \left(\frac{e^{4x}}{16} + C_3\right) e^{-3x}.$$

После упрощения приходим к ответу:

$$y = C_1 e^{x} + C_2 e^{-2x} + C_3 e^{-3x} + \left(\frac{x}{12} - \frac{7}{144}\right) e^{x}.$$

Пример 2. Решить задачу Коши:

1) $y''+9y=\mathrm{ctg}3x,\ y\left(\frac{\pi}{6}\right)=0,\ y'\left(\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{8}{3};$

2) $y'''+4y'=x^2,\ y(0)=2,\ y'(0)=\frac{15}{8},\ y''(0)=4.$

Решение. 1) Это линейное неоднородное дифференциальное уравнение 2-го порядка. Найдем общее решение соответствующего однородного уравнения $y''+9y=0.$ Его характеристическое уравнение $\lambda^2+9=0,$ корни которого $\lambda_1=3i,\ \ \lambda_2=-3i$ – комплексно-сопряженные, простые. Тогда общее решение соответствующего однородного уравнения $y_0=C_1\cos 3x+C_2\sin 3x,\ C_1,\ C_2=const.$ Общее решение заданного дифференциального уравнения ищем в виде

$$y=C_1\cos 3x+C_2\sin 3x,$$

где $C_1=C_1(x),\ C_2=C_2(x)$ – функции, для нахождения которых составляем систему

$$\begin{cases} C_1'\cos 3x+C_2'\sin 3x=0, \\ -3C_1'\sin 3x+3C_2'\cos 3x=\mathrm{ctg}3x. \end{cases}$$

Решаем ее методом Крамера:

$$\Delta=\begin{vmatrix} \cos 3x & \sin 3x \\ -3\sin 3x & 3\cos 3x \end{vmatrix}=3,$$

$$\Delta_1=\begin{vmatrix} 0 & \sin 3x \\ \mathrm{ctg}\,3x & 3\cos 3x \end{vmatrix}=-\cos 3x,$$

$$\Delta_2=\begin{vmatrix} \cos 3x & 0 \\ -3\sin 3x & \mathrm{ctg}3x \end{vmatrix}=\frac{\cos^2 3x}{\sin 3x}.$$

Получаем решение системы:

$$\begin{cases} C_1'=-\dfrac{\cos 3x}{3}, \\ C_2'=\dfrac{\cos^2 3x}{3\sin 3x}. \end{cases}$$

Интегрируем полученные равенства:

$$C_1(x)=\int -\frac{\cos 3x}{3}dx=-\frac{\sin 3x}{9}+C_1,$$

$$C_2(x)=\int \frac{\cos^2 3x}{3\sin 3x}dx=\frac{1}{3}\int \frac{1-\sin^2 3x}{\sin 3x}dx=$$

$$=\frac{1}{3}\int \frac{dx}{\sin 3x}-\frac{1}{3}\int \sin 3x dx=\frac{1}{9}\ln\left|\mathrm{tg}\frac{3x}{2}\right|+\frac{\cos 3x}{9}+C_2,$$

где C_1, C_2 – произвольные постоянные.

Тогда общее решение заданного дифференциального уравнения:

$$y=\left(C_1-\frac{\sin 3x}{9}\right)\cos 3x+\left(\frac{1}{9}\ln\left|\operatorname{tg}\frac{3x}{2}\right|+\frac{\cos 3x}{9}+C_2\right)\sin 3x.$$

После упрощения получаем:

$$y=C_1\cos 3x+C_2\sin 3x+\frac{1}{9}\ln\left|\operatorname{tg}\frac{3x}{2}\right|\sin 3x.$$

Далее решаем задачу Коши. Дифференцируем полученное общее решение:

$$y'=-3C_1\sin 3x+3C_2\cos 3x+$$

$$+\frac{1}{9}\left(\frac{1}{\left|\operatorname{tg}\frac{3x}{2}\right|}\cdot\frac{1}{\cos^2\frac{3x}{2}}\cdot\frac{3}{2}\sin 3x+\ln\left|\operatorname{tg}\frac{3x}{2}\right|\cdot 3\cos 3x\right).$$

Подставляем начальные условия $y\left(\frac{\pi}{6}\right)=0,\quad y'\left(\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{8}{3}$ в выражения для y и y' и определяем константы C_1 и C_2:

$$0=C_1\cos\frac{3\pi}{6}+C_2\sin\frac{3\pi}{6}+\frac{1}{9}\ln\left|\operatorname{tg}\frac{3\pi}{12}\right|\sin\frac{3\pi}{6},$$

$$-\frac{8}{3}=-3C_1\sin\frac{3\pi}{6}+3C_2\cos\frac{3\pi}{6}+$$

$$+\frac{1}{9}\left(\frac{1}{\left|\operatorname{tg}\frac{3\pi}{12}\right|}\cdot\frac{1}{\cos^2\frac{3\pi}{12}}\cdot\frac{3}{2}\sin\frac{3\pi}{6}+\ln\left|\operatorname{tg}\frac{3\pi}{12}\right|\cdot 3\cos\frac{3\pi}{6}\right).$$

Отсюда имеем:

$$\begin{cases}C_1=1,\\ C_2=0.\end{cases}$$

Получаем решение задачи Коши:

$$y=\cos 3x+\frac{1}{9}\ln\left|\operatorname{tg}\frac{3x}{2}\right|\sin 3x.$$

2) Это линейное неоднородное дифференциальное уравнение 3-го порядка. Найдем его общее решение методом Лагранжа. Соответствующее однородное уравнение имеет вид: $y'''+4y'=0.$ Его характеристическое уравнение $\lambda^3+4\lambda=0,$ где $\lambda_1=0,$ $\lambda_2=2i,\quad \lambda_3=-2i$ – корни. Тогда общее решение однородного дифференциального уравнения: $y_0=C_1+C_2\cos 2x+C_3\sin 2x.$

Общее решение заданного дифференциального уравнения ищем в виде

$$y=C_1+C_2\cos 2x+C_3\sin 2x,$$

где $C_1=C_1(x),\ C_2=C_2(x),\ C_3=C_3(x)$ – искомые функциональные коэффициенты.

Составляем систему

$$\begin{cases} C_1' + C_2' \cos 2x + C_3' \sin 2x = 0, \\ -2C_2' \sin 2x + 2C_3' \cos 2x = 0, \\ -4C_2' \cos 2x - 4C_3' \sin 2x = x^2. \end{cases}$$

Решаем ее методом Крамера:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & \cos 2x & \sin 2x \\ 0 & -2\sin 2x & 2\cos 2x \\ 0 & -4\cos 2x & -4\sin 2x \end{vmatrix} = 8\sin^2 2x + 8\cos^2 2x = 8,$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & \cos 2x & \sin 2x \\ 0 & -2\sin 2x & 2\cos 2x \\ x^2 & -4\cos 2x & -4\sin 2x \end{vmatrix} = x^2(2\cos^2 2x + 2\sin^2 2x) = 2x^2,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \sin 2x \\ 0 & 0 & 2\cos 2x \\ 0 & x^2 & -4\sin 2x \end{vmatrix} = -2x^2 \cos 2x,$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & \cos 2x & 0 \\ 0 & -2\sin 2x & 0 \\ 0 & -4\cos 2x & x^2 \end{vmatrix} = -2x^2 \sin 2x.$$

Тогда решение системы:

$$\begin{cases} C_1' = \dfrac{2x^2}{8}, \\ C_2' = -\dfrac{x^2 \cos 2x}{4}, \\ C_3' = -\dfrac{x^2 \sin 2x}{4}. \end{cases}$$

Интегрируем эти равенства:

$$C_1(x) = \frac{x^3}{12} + C_1,$$

$$C_2(x) = \int -\frac{x^2 \cos 2x}{4}\, dx = \frac{\sin 2x}{16} - \frac{x\cos 2x}{8} - \frac{x^2 \sin 2x}{8} + C_2,$$

$$C_3(x) = \int -\frac{x^2 \sin 2x}{4}\, dx = \frac{x^2 \cos 2x}{8} - \frac{x\sin 2x}{8} - \frac{\cos 2x}{16} + C_3,$$

где C_1, C_2, C_3 – произвольные постоянные (при интегрировании C_2' и C_3' применялся метод интегрирования по частям).

Подставляя выражения для C_1, C_2, C_3 в общее решение, получаем:

$$y = \frac{x^3}{12} + C_1 + \left(\frac{\sin 2x}{16} - \frac{x\cos 2x}{8} - \frac{x^2 \sin 2x}{8} + C_2\right)\cos 2x +$$

$$+\left(\frac{x^2 \cos 2x}{8} - \frac{x\sin 2x}{8} - \frac{\cos 2x}{16} + C_3\right)\sin 2x$$

или после упрощения:

$$y = C_1 + C_2 \cos 2x + C_3 \sin 2x - \frac{x}{8} + \frac{x^3}{12}.$$

Дифференцируем полученное общее решение дважды:

$$y' = -2C_2 \sin 2x + 2C_3 \cos 2x - \frac{1}{8} + \frac{x^2}{4},$$

$$y'' = -4C_2 \cos 2x - 4C_3 \sin 2x + \frac{x}{2}.$$

Подставляем в выражения для y, y', y'' заданные начальные условия и находим C_1, C_2, C_3:

$$\begin{cases} 2 = C_1 + C_2, \\ \frac{15}{8} = 2C_3 - \frac{1}{8}, \\ 4 = -4C_2. \end{cases}$$

Отсюда $C_1 = 3,\ \ C_2 = -1,\ \ C_3 = 1.$

Получили решение задачи Коши:

$$y = 3 - \cos 2x + \sin 2x - \frac{x}{8} + \frac{x^3}{12}.$$

Структура общего решения неоднородного линейного уравнения определяется формулой $y = y_0 + y_ч$, где y_0 – общее решение соответствующего однородного уравнения, $y_ч$ – частное решение неоднородного уравнения. Это свойство используется в методе Эйлера, алгоритм реализации которого излагается ниже.

Метод неопределенных коэффициентов

Для решения линейных неоднородных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами и правой частью $f(x)$ специального вида используют метод Эйлера (метод неопределенных коэффициентов). Этот метод применим, если функция $f(x)$ имеет вид: $f(x) = e^{\alpha x}\left(P_n(x)\cos \beta x + Q_m(x)\sin \beta x\right)$, где $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$, $P_n(x)$, $Q_m(x)$ – многочлены степени n и m соответственно.

Для реализации метода необходимо выполнить следующие действия.

1. Решить соответствующее однородное дифференциальное уравнение, используя характеристическое уравнение $\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + ... + a_1\lambda + a_0 = 0.$

Общее решение однородного уравнения записать в виде $y_0 = C_1 y_1 + C_2 y_2 + ... + C_n y_n$, где $y_1, y_2, ..., y_n$ – его частные решения, полученные в соответствии с типом корней характеристического уравнения.

2. Записать контрольное число $\sigma = \alpha + \beta i$, где α, β – числа, которые заданы исходным уравнением. Определить, имеется ли число σ среди корней характеристического уравнения. Если имеется, то определить кратность k этого корня.

3. Если $\sigma=\alpha+\beta i$ не содержится среди корней характеристического уравнения, то записать искомое частное решение $y_ч$ дифференциального уравнения в виде $y_ч=e^{\alpha x}(\bar{P}_r(x)\cos\beta x+\overline{Q_r}(x)\sin\beta x).$

Если среди корней характеристического уравнения имеется корень $\sigma=\alpha+\beta i,$ кратность которого k, то искомое частное решение $y_ч$ дифференциального уравнения записать в виде $y_ч=x^k e^{\alpha x}(\bar{P}_r(x)\cos\beta x+\bar{Q}_r(x)\sin\beta x),$ где в равенствах $\bar{P}_r(x),$ $\bar{Q}_r(x)$ – многочлены степени $r,$ $r=\max(n,m)$ – бóльшая степень многочленов из правой части заданного уравнения. Многочлены $\bar{P}_r(x)$ и $\bar{Q}_r(x)$ необходимо записать в стандартном виде с буквенными коэффициентами.

4. Коэффициенты многочленов $\bar{P}_r(x),$ $\bar{Q}_r(x)$ найти методом неопределенных коэффициентов. Для этого необходимо вычислить производные $y'_ч,\ y''_ч,\ \ldots,\ y_ч^{(n)}$ и подставить в левую часть уравнения заданного уравнения. Далее надо привести подобные относительно $\cos\beta x$ и $\sin\beta x,$ а затем приравнять многочлены при одноименных тригонометрических функциях. Используя равенство многочленов, записывают систему уравнений относительно искомых числовых коэффициентов.

5. Найденные значения числовых коэффициентов необходимо подставить в многочлены $\bar{P}_r$ и $\bar{Q}_r$ частного решения $y_ч$

6. Записать общее решение заданного дифференциального уравнения.

Замечание. 1.Если правая часть неоднородного линейного уравнения есть сумма различных функций специального вида, то для нахождения $y_ч$ используют теорему о наложении решений: если в уравнении правая часть имеет вид: $f(x)=f_1(x)+f_2(x)+\ldots+f_k(x),$ где $k\in\mathbf{N},$ а $y_{ч_1},y_{ч_2},\ldots,y_{ч_k}$ – частные решения уравнений

$$
\begin{aligned}
&y^{(n)}+a_{n-1}(x)y^{(n-1)}+\ldots+a_0(x)y=f_1(x),\\
&y^{(n)}+a_{n-1}(x)y^{(n-1)}+\ldots+a_0(x)y=f_2(x),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&y^{(n)}+a_{n-1}(x)y^{(n-1)}+\ldots+a_0(x)y=f_k(x),
\end{aligned}
$$

соответственно, то функция $y_ч=y_{ч_1}+y_{ч_2}+\ldots+y_{ч_k}$ является решением заданного уравнения.

2. Если в правой части $f(x)$ линейного неоднородного уравнения присутствует только одно слагаемое с тригонометрической функцией (т. е. $P_n\cos\beta x$ или $Q_m\sin\beta x$), то общее решение и в этом случае записывают в общем виде, т. е. с двумя тригонометрическими функциями.

Пример. Решить уравнение методом Эйлера:

1) $y''-3y'=e^{-3x}(x+2)^2$; 2) $y^{IV}+2y''+y=2\cos x+3\sin x$;

3) $y'''+y''+4y'+4y=e^{-x}(\cos 2x+x\sin 2x)$.

Решение. 1) Это линейное неоднородное дифференциальное уравнение 2-го порядка с постоянными коэффициентами и правой частью специального вида. Для его решения используем метод Эйлера.

Рассмотрим соответствующее однородное уравнение $y''-3y'=0.$ Его характеристическое уравнение – $\lambda^2-3\lambda=0 \Rightarrow \lambda(\lambda-3)=0$ – имеет простые действительные корни $\lambda_1=0,\ \lambda_2=3$. Тогда общее решение однородного уравнения − $y_0=C_1+C_2e^{3x}$, где C_1, C_2 – произвольные постоянные.

Запишем контрольное число $\sigma=-3$ (так как $\alpha=-3,\ \beta=0$). Контрольное число не содержится среди корней характеристического уравнения. Тогда искомое частное решение заданного дифференциального уравнения имеет вид $y_ч=e^{-3x}(Ax^2+Bx+C)$, где A, B, C – неопределенные коэффициенты, которые надо найти. Для этого вычислим производные $y'_ч,\ y''_ч$:

$$y'_ч=-3e^{-3x}(Ax^2+Bx+C)+e^{-3x}(2Ax+B),$$

$$y''_ч=9e^{-3x}(Ax^2+Bx+C)-3e^{-3x}(2Ax+B)-3e^{-3x}(2Ax+B)+2Ae^{-3x}.$$

Подставляем полученные выражения $y'_ч$ и $y''_ч$ в заданное дифференциальное уравнение:

$$9e^{-3x}(Ax^2+Bx+C)-6e^{-3x}(2Ax+B)+2Ae^{-3x}-$$

$$-3(-3e^{-3x}(Ax^2+Bx+C)+e^{-3x}(2Ax+B))=e^{-3x}(x+2)^2.$$

Сокращаем на e^{-3x} и группируем относительно степеней x:

$$(9A+9A)x^2+(9B-12A+9B-6A)x+9C-6B+2A+9C-3B=x^2+4x+4.$$

Приравниваем коэффициенты при одинаковых степенях x:

$$\begin{array}{l} x^2: \\ x^1: \\ x^0: \end{array}\begin{cases} 18A=1, \\ 18B-18A=4, \\ 18C-9B+2A=4. \end{cases}$$

Решаем полученную систему уравнений и находим A, B, C: $A=\frac{1}{18},\ B=\frac{5}{18},\ C=\frac{115}{324}.$

Подставляем найденные коэффициенты в частное решение:

$$y_ч=e^{-3x}\left(\frac{1}{18}x^2+\frac{5}{18}x+\frac{115}{324}\right) \text{ или } y_ч=\frac{e^{-3x}}{18}\left(x^2+5x+\frac{115}{18}\right).$$

Тогда общее решение заданного дифференциального уравнения имеет вид:

$$y = C_1 + C_2 e^{3x} + \frac{e^{-3x}}{18}\left(x^2 + 5x + \frac{115}{18}\right).$$

2) Это линейное неоднородное дифференциальное уравнение 4-го порядка с постоянными коэффициентами и правой частью специального вида. Используем метод Эйлера для нахождения его общего решения. Соответствующее однородное уравнение – $y^{IV} + 2y'' + y = 0.$ Его характеристическое уравнение – $\lambda^4 + 2\lambda^2 + 1 = 0$ или $(\lambda^2 + 1)^2 = 0$ – имеет корни $\lambda_{1,2} = \pm i$ кратности 2 (комплексно-сопряженные).

Тогда общее решение соответствующего однородного уравнения – $y_0 = C_1 \cos x + C_2 x \cos x + C_3 \sin x + C_4 x \sin x,$ где C_1, C_2, C_3, C_4 – произвольные постоянные.

Запишем контрольное число $\sigma = i,$ так как $\alpha = 0,$ $\beta = 1.$ Контрольное число σ содержится среди корней характеристического уравнения кратности 2. Поэтому искомое частное решение заданного дифференциального уравнения ищем в виде $y_ч = x^2 (A\cos x + B\sin x),$ где A, B – коэффициенты, которые надо найти.

Дифференцируем $y_ч$ дважды:

$$y'_ч = 2x(A\cos x + B\sin x) + x^2(-A\sin x + B\cos x),$$

$$y''_ч = 2(A\cos x + B\sin x) + 2x(-A\sin x + B\cos x) +$$
$$+2x(-A\sin x + B\cos x) + x^2(-A\cos x - B\sin x).$$

Упростим $y''_ч$: $y''_ч = (2 - x^2)(A\cos x + B\sin x) + 4x(-A\sin x + B\cos x).$

Далее получим:

$$y'''_ч = -2x(A\cos x + B\sin x) + (2 - x^2)(-A\sin x + B\cos x) +$$

$$+4(-A\sin x + B\cos x) + 4x(-A\cos x - B\sin x).$$

Упростим это выражение: $y'''_ч = -6x(A\cos x + B\sin x) + (6 - x^2)(-A\sin x + B\cos x).$

Дифференцируем последний раз:

$$y^{IV}_ч = -6(A\cos x + B\sin x) - 6x(-A\sin x + B\cos x) - 2x(-A\sin x + B\cos x) + (6 - x^2)(-A\cos x - B\sin x).$$

Упрощаем полученное выражение: $y^{IV}_ч = (x^2 - 12)(A\cos x + B\sin x) - 8x(-A\sin x + B\cos x).$

Подставляем выражения для $y^{IV}_ч$, $y''_ч$ и $y_ч$ в заданное дифференциальное уравнение:

$$(x^2 - 12)(A\cos x + B\sin x) - 8x(-A\sin x + B\cos x) +$$

$$+2(2 - x^2)(A\cos x + B\sin x) + 8x(-A\sin x + B\cos x) +$$

$$+x^2(A\cos x + B\sin x) = 2\cos x + 3\sin x.$$

Группируем относительно $\cos x$ и $\sin x$:

$$(Ax^2 - 12A - 8Bx + 4A - 2Ax^2 + 8Bx + Ax^2)\cos x +$$

$$+(Bx^2-12B+8Ax+4B-2Bx^2-8Ax+Bx^2)\sin x=2\cos x+3\sin x.$$

После преобразований в скобках получим: $-8A\cos x-8B\sin x=2\cos x+3\sin x.$

Приравниваем коэффициенты при одноименных тригонометрических функциях и получаем систему

$$\begin{matrix}\cos x: \\ \sin x:\end{matrix}\begin{cases}-8A=2,\\ -8B=3,\end{cases}$$

решение которой: $A=-\dfrac{1}{4},\ B=-\dfrac{3}{8}.$

Подставляем найденные коэффициенты в частное решение $y_ч:\ y_ч=x^2\left(-\dfrac{1}{4}\cos x-\dfrac{3}{8}\sin x\right).$

Тогда общее решение заданного дифференциального уравнения:

$$y=C_1\cos x+C_2x\cos x+C_3\sin x+C_4x\sin x+x^2\left(-\frac{1}{4}\cos x-\frac{3}{8}\sin x\right)$$ или

$$y=\left(C_1+C_2x-\frac{x^2}{4}\right)\cos x+\left(C_3+C_4x-\frac{3x^2}{8}\right)\sin x.$$

3) Это линейное неоднородное дифференциальное уравнение 3-го порядка с постоянными коэффициентами и специальной правой частью. Соответствующее однородное уравнение – $y'''+y''+4y'+4y=0.$ Его характеристическое уравнение – $\lambda^3+\lambda^2+4\lambda+4=0$ или $(\lambda+1)(\lambda^2+4)=0.$ Получаем корни характеристического уравнения: $\lambda_1=-1,\ \ \lambda_{2,3}=\pm 2i.$ Тогда общее решение соответствующего однородного уравнения имеет вид: $y_0=C_1e^{-x}+C_2\cos 2x+C_3\sin 2x,$ где C_1,C_2,C_3 – произвольные постоянные.

Запишем контрольное число $\sigma=-1+2i,$ так как $\alpha=-1,\ \ \beta=2.$ Контрольное число не содержится среди корней характеристического уравнения. Тогда искомое частное решение заданного дифференциального уравнения ищем в виде $y_ч=e^{-x}((Ax+B)\cos 2x+(Cx+D)\sin 2x),$ где A, B, C, D – коэффициенты, которые надо найти. Дифференцируем трижды $y_ч$:

$$y'_ч=-e^{-x}((Ax+B)\cos 2x+(Cx+D)\sin 2x)+$$

$$+e^{-x}(A\cos 2x-2(Ax+B)\sin 2x+C\sin 2x+2(Cx+D)\cos 2x).$$

Упростим это выражение: $y'_ч=e^{-x}((-Ax+2Cx-B+A+2D)\cos 2x+(-Cx-2Ax-D-2B+C)\sin 2x).$

Далее дифференцируем:

$$y''_ч=-e^{-x}((-Ax+2Cx-B+A+2D)\cos 2x+(-Cx-2Ax-D-$$

$$-2B+C)\sin 2x)+e^{-x}((-A+2C)\cos 2x-2(-Ax+2Cx-B+$$

$$+A+2D)\sin 2x+(-C-2A)\sin 2x+2(-Cx-2Ax-D-2B+C)\cos 2x).$$

Упростим это выражение:

$$y_ч'' = e^{-x}((-3Ax - 4Cx - 2A - 3B + 4C - 4D)\cos 2x + (4Ax - 3Cx - 4A +$$

$$+4B - 2C - 3D)\sin 2x.$$

$$y_ч''' = -e^{-x}((-3Ax - 4Cx - 2A - 3B + 4C - 4D)\cos 2x + (4Ax - 3Cx - 4A +$$

$$+4B - 2C - 3D)\sin 2x) + e^{-x}((-3A - 4C)\cos 2x - 2(-3Ax - 4Cx - 2A -$$

$$-3B + 4C - 4D)\sin 2x + (4A - 3C)\sin 2x + 2(4Ax - 3Cx - 4A + 4B -$$
$$-2C - 3D)\cos 2x).$$

Упростим это выражение:

$$y_ч''' = e^{-x}((11Ax - 2Cx - 9A + 11B - 12C - 2D)\cos 2x + (2Ax +$$

$$+11Cx + 12A + 2B - 9C + 11D)\sin 2x).$$

Подставляя выражения для $y_ч,\ y_ч',\ y_ч'',\ y_ч'''$ в заданное дифференциальное уравнение, группируем и, приравнивая коэффициенты при одноименных тригонометрических функциях, имеем:

$$\begin{array}{r} x\cos 2x: \\ x\sin 2x: \\ \cos 2x: \\ \sin 2x: \end{array}\begin{cases} 11A - 2C - 3A - 4C - 4A + 8C + 4A = 0, \\ 2A + 11C + 4A - 3C - 8A - 4C + 4C = 1, \\ -9A + 11B - 12C - 2D - 2A - 3B + 4C - 4D - 4B + 4A + 8D + 4B = 1, \\ 12A + 2B - 9C + 11D - 4A + 4B - 2C - 3D - 4D - 8B + 4C + 4D = 0. \end{cases}$$

Упрощая выражения, получаем систему уравнений

$$\begin{cases} 8A + 2C = 0, \\ -2A + 8C = 1, \\ -7A + 8B - 8C + 2D = 1, \\ 8A - 2B - 7C + 8D = 0. \end{cases}$$

Решаем ее и находим: $A = -\frac{1}{34},\ C = \frac{4}{34},\ B = \frac{50}{289},\ D = \frac{203}{1156}.$

Подставляем найденные коэффициенты в $y_ч$: $y_ч = e^{-x}\left(\left(\frac{50}{289} - \frac{x}{34}\right)\cos 2x + \left(\frac{4x}{34} + \frac{203}{1156}\right)\sin 2x\right).$

Тогда общее решение заданного дифференциального уравнения:

$$y = C_1 e^{-x} + C_2\cos 2x + C_3\sin 2x +$$

$$+e^{-x}\left(\left(\frac{50}{289} - \frac{x}{34}\right)\cos 2x + \left(\frac{4x}{34} + \frac{203}{1156}\right)\sin 2x\right).$$

Пример. Решить уравнения:

1) $y'' - 2y' - 3y = e^{2x};$ 2) $y'' + 25y = \cos 5x;$ 3) $y'' - y = 2x + e^x.$

Решение. 1) Это линейное неоднородное уравнение 2-го порядка с постоянными коэффициентами и специальной правой частью вида $f(x) = e^{2x}(0\cdot\cos 0x + b\cdot\sin 0x),$ где b – число, $\alpha = 2,\ \ \beta = 0.$

Соответствующее однородное уравнение: $y'' - 2y' - 3y = 0.$ Его характеристическое уравнение – $\lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0$ – имеет действительные простые корни $\lambda_1 = -1,\ \ \lambda_2 = 3$. Тогда общее решение соответствующего однородного дифференциального уравнения – $y_0 = C_1 e^{-x} + C_2 e^{3x}$.

Запишем контрольное число $\sigma = 2.$ Оно не является корнем характеристического уравнения. Тогда частное решение заданного дифференциального уравнения ищем в виде $y_ч = Ae^{2x},$ где A – коэффициент, который надо найти.

Дифференцируем $y_ч$ дважды:

$y'_ч = 2Ae^{2x},\ \ y''_ч = 4Ae^{2x}.$

Подставляем $y_ч, y'_ч, y''_ч$ в заданное дифференциальное уравнение:

$4Ae^{2x} - 2\cdot 2Ae^{2x} - 3Ae^{2x} = e^{2x},$ получаем $A = -\dfrac{1}{3}.$

Затем подставляем этот коэффициент в выражение для $y_ч$: $y_ч = -\dfrac{e^{2x}}{3}.$

Общее решение заданного дифференциального уравнения запишем в виде

$y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{3x} - \dfrac{e^{2x}}{3}.$

2) Это линейное неоднородное дифференциальное уравнение 2-го порядка с постоянными коэффициентами и специальной правой частью вида

$$f(x) = e^{0x}(1\cdot\cos 5x + 0\cdot\sin 5x),\ \text{где}\ \alpha = 0,\ \ \beta = 5.$$

Соответствующее однородное уравнение имеет вид: $y'' + 25y = 0$. Его характеристическое уравнение – $\lambda^2 + 25 = 0,$ – имеет простые комплексно-сопряженные корни $\lambda_{1,2} = \pm 5i$. Тогда общее решение однородного уравнения – $y_0 = C_1\cos 5x + C_2\sin 5x.$

Контрольное число $\sigma = 5i$ совпадает с одним из корней характеристического уравнения, кратности 1. Поэтому частное решение заданного дифференциального уравнения ищем в виде $y_ч = x(A\cos 5x + B\sin 5x),$ где A, B – коэффициенты, которые надо найти.

Дифференцируем $y_ч$ дважды:

$y'_ч = (A\cos 5x + B\sin 5x) + x(-5A\sin 5x + 5B\cos 5x),$

$y''_ч = -5A\sin 5x + 5B\cos 5x - 5A\sin 5x + 5B\cos 5x +$

$+x(-25A\cos 5x - 25B\sin 5x).$

Упрощаем $y''_ч$: $y''_ч = -10A\sin 5x + 10B\cos 5x + x(-25A\cos 5x - 25B\sin 5x).$

Подставляем $y''_ч,\ y_ч$ в заданное дифференциальное уравнение:

$$-10A\sin 5x + 10B\cos 5x + x(-25A\cos 5x - 25B\sin 5x) +$$

$$+25x(A\cos 5x + B\sin 5x) = \cos 5x.$$

Группируя относительно $\sin 5x,$ а также $\cos 5x$ и приравнивая коэффициенты при одноименных тригонометрических функциях, получим систему

$$\begin{cases} 10B = 1, \\ -10A = 0, \end{cases}$$

из которой находим $A = 0,\ B = \frac{1}{10}.$ Тогда частное решение: $y_ч = \frac{x}{10}\sin 5x,$ а общее решение заданного дифференциального уравнения – $y = C_1\cos 5x + C_2\sin 5x + \frac{x}{10}\sin 5x$ или

$$y = C_1\cos 5x + \left(C_2 + \frac{x}{10}\right)\sin 5x.$$

3) Это линейное неоднородное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами и специальной правой частью вида $f_1(x) + f_2(x) = 2x + e^x.$ Для нахождения его общего решения воспользуемся методом Эйлера и теоремой о наложении решений.

Соответствующее однородное уравнение для заданного дифференциального уравнения – $y'' - y = 0.$ Его характеристическое уравнение – $\lambda^2 - 1 = 0,$ имеет простые действительные корни $\lambda_{1,2} = \pm 1.$ Значит, общее решение однородного уравнения – $y_0 = C_1e^{-x} + C_2e^x.$

Частное решение заданного дифференциального уравнения будем искать в виде $y_ч = y_{ч_1} + y_{ч_2},$ где $y_{ч_1}$ – частное решение дифференциального уравнения $y'' - y = 2x;$ $y_{ч_2}$ – частное решение дифференциального уравнения $y'' - y = e^x.$

Контрольные числа этих дифференциальных уравнений $\sigma_1 = 0$ и $\sigma_2 = 1,$ соответственно. Поскольку $\sigma_1 = 0$ не является корнем характеристического уравнения, то частное решение $y_{ч_1}$ ищем в виде $y_{ч_1} = Ax + B,$ где $A,\ B$ – коэффициенты, которые надо найти.

Дифференцируем $y_{ч_1}$: $y'_{ч_1} = A,$ $y''_{ч_1} = 0.$ Подставляя в первое из дифференциальных уравнений $y''_{ч_1}$ и $y_{ч_1}$, получим $-Ax - B = 2x,$ откуда находим $A = -2,$ $B = 0.$ Тогда $y_{ч_1} = -2x.$

Поскольку $\sigma_2 = 1$ – простой корень характеристического уравнения, то частное решение второго из дифференциальных уравнений ищем в виде $y_{ч_2} = Axe^x$, где A – коэффициент, который надо найти.

Дифференцируем $y_{ч_2}$: $y'_{ч_2} = Ae^x + Axe^x$, $y''_{ч_2} = 2Ae^x + Axe^x$. Подставляем $y''_{ч_2}$ и $y_{ч_2}$ в уравнение: $2Ae^x + Axe^x - Axe^x = e^x$ или $2Ae^x = e^x$. Отсюда получаем, что $A = \frac{1}{2}$. Тогда $y_{ч_2} = \frac{xe^x}{2}$.

Записываем частное решение заданного дифференциального уравнения: $y_ч = -2x + \frac{xe^x}{2}$. Тогда его общее решение имеет вид: $y = C_1e^{-x} + C_2e^x - 2x + \frac{xe^x}{2}$.

Пример. Решить задачу Коши:

$$y''' - y' = \sin x, \quad y(0) = 2{,}5, \quad y'(0) = 0, \quad y''(0) = 1{,}5.$$

Решение. Это линейное неоднородное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами и специальной правой частью вида $f(x) = e^{0x}(0 \cdot \cos x + 1 \cdot \sin x)$, где $\alpha = 0$, $\beta = 1$, $P(x) = 0$, $Q(x) = 1$. Соответствующее однородное дифференциальное уравнение – $y''' - y' = 0$. Его характеристическое уравнение – $\lambda^3 - \lambda = 0$, с корнями $\lambda_1 = 0$, $\lambda_{2,3} = \pm 1$. Тогда общее решение однородного уравнения – $y_0 = C_1 + C_2e^{-x} + C_3e^x$.

Контрольное число $\sigma = i$ не является корнем характеристического уравнения. Поэтому частное решение заданного дифференциального уравнения ищем в виде $y_ч = A\cos x + B\sin x$, где A, B – неизвестные коэффициенты.

Дифференцируем $y_ч$ трижды: $y'_ч = -A\sin x + B\cos x$, $y''_ч = -A\cos x - B\sin x$, $y'''_ч = A\sin x - B\cos x$.

Подставляем $y'''_ч$ и $y'_ч$ в заданное дифференциальное уравнение:

$$A\sin x - B\cos x - (-A\sin x + B\cos x) = \sin x.$$

Приравниваем коэффициенты при одноименных тригонометрических функциях, получаем систему

$\begin{cases} 2A = 1, \\ -2B = 0, \end{cases}$ из которой находим $A = \frac{1}{2}$, $B = 0$.

Тогда получаем: $y_ч = \frac{\cos x}{2}$.

Общее решение заданного дифференциального уравнения:

$$y = C_1 + C_2e^{-x} + C_3e^x + \frac{\cos x}{2}.$$

Дифференцируем общее решение:

$$\begin{cases} y' = -C_2e^{-x} + C_3e^x - \frac{\sin x}{2}, \\ y'' = C_2e^{-x} + C_3e^x - \frac{\cos x}{2}. \end{cases}$$

Подставляем заданные начальные условия:

$$\begin{cases} \frac{5}{2} = C_1 + C_2 + C_3 + \frac{1}{2}, \\ 0 = -C_2 + C_3, \\ \frac{3}{2} = C_2 + C_3 - \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Из полученной системы находим $C_1 = 0,\ C_2 = 1,\ C_3 = 1.$

Решением задачи Коши является $y = e^{-x} + e^{x} + \frac{\cos x}{2}.$