Тема 2 Уравнения, разрешенные относительно производной

Дифференциальное уравнение считается проинтегрированным в квадратурах, если его общее решение получено в явной или неявной форме, содержащей интегралы от известных функций. К сожалению, для многих даже очень простых уравнений невозможно получить такое решение. В этих случаях их приходится исследовать другими способами. Рассмотрим основные типы уравнений, интегрирумых в квадратурах.

2.1 Неполные уравнения

Уравнение, не содержащее искомой функции: $y' = f(x)$.

Это уравнение может быть переписано в виде $\frac{dy}{dx} = f(x)$ или $dy = f(x)dx$. Если функция $f(x)$ определена и непрерывна в промежутке (a, b), то все первообразные для $f(x)$ собраны в формуле $\int f(x)dx + C, C -$ произвольная постоянная. Значит, искомое общее решение – $y = \int f(x)dx + C,\ a < x < b,\ |y| < +\infty$. Под выражением $\int f(x)dx$ в теории дифференциальных уравнений обычно подразумевают какую-либо фиксированную в рассматриваемом множестве первообразную.

Первообразная может быть записана также через интеграл $\int\limits_{x_0}^{x} f(t)dt,\ x_0 \in (a, b)$, с переменным верхним пределом. Тогда общее решение примет вид: $y = \int\limits_{x_0}^{x} f(t)dt + C$. Поскольку $C = y(x_0) = y_0$, то выражение $y = \int\limits_{x_0}^{x} f(t)dt + y_0$ представляет собой общее решение в форме Коши. В нем роль произвольной постоянной играет y_0.

Если в некоторой точке $x = x^*$ интервала (a, b) или на его границе $\lim\limits_{x \to x^*} f(x) = \infty$, то формула $y = \int f(x)dx + C$ определяет два решения: для $x \in (a, x^*)$ и $x \in (x^*, b)$. В этом случае необходимо провести дополнительное исследование «перевернутого» уравнения $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{f(x)}$, решением которого является $x = x^*$. Это решение может оказаться частным для исходного уравнения (прямая $x = x^*$ является асимптотой интегральных кривых) или особым (прямая $x = x^*$ является огибающей семейства интегральных кривых).

Уравнение, не содержащее независимой переменной: $y' = f(y)$.

Если функция $f(y)$ непрерывна в некотором промежутке (c, d) и не обращается в нодь, то, переписав уравнение в виде $\dfrac{dx}{dy} = \dfrac{1}{f(y)}$, получим общее решение $x = \int \dfrac{dy}{f(y)} + C$.

Если в точке $y = y^* \in [c, d]$ функция обращается в ноль, то $y = y^*$ может оказаться решением: частным (асимптота интегральных кривых) или особым (огибающая). Частные решения входят в обшее решение, а особые – нет.

На практике обычно решение находят, следуя следующему алгоритму.

1.Умножить уравнение $\dfrac{dy}{dx} = f(y)$ на $\dfrac{dx}{f(y)}$, $f(y) \neq 0$;

2.Получив $\dfrac{dy}{f(y)} = dx$, найти общее решение $x = \int \dfrac{dy}{f(y)} + C$;

3.Решить уравнение $f(y) = 0 \Rightarrow y = y^*$;

4.Проверить непосредственной подстановкой, является ли $y = y^*$ решением заданного дифференциального уравнения. Если да, то определить его статус (особое решение добавляется к общему, чпстное – нет).

Дифференциальное уравнение вида $y' = f(ax + by + c),\ a, b, c \in \mathbb{R},\ b \neq 0$.

Уравнение сводится к только что рассмотренному уравнению заменой $ax + by = z,\ z \equiv z(x)$. Действительно, поскольку $z'(x) = (ax + by)'_x = a + by' \Rightarrow y' = \dfrac{z' - a}{b}$, то получаем $\dfrac{z' - a}{b} = f(z) \Rightarrow z' = a + bf(z) \equiv g(z)$.

Уравнение с разделенными переменными: $P(x)dx + Q(y)dy = 0$.

Если $P(x), Q(y)$ − непрерывные функции в рассматриваемой области, то уравнение можно переписать как $d\left(\int\limits_{x_0}^{x} P(t)dt + \int\limits_{y_0}^{y} Q(t)dt \right) = 0$. Тогда общее решение −

$$\int_{x_0}^{x} P(t)dt + \int_{y_0}^{y} Q(t)dt = C \text{ или } \int P(x)dx + \int Q(y)dy = C.$$

К уравнению рассмотренного типа приводится уравнение вида $y' = f_1(x) f_2(y)$.

Пример. Найти общее решение уравнения $2xdx + 3y^2dy = 0$.

Решение. Общий интеграл уравнения имеет вид $\int 2xdx + \int 3y^2dy = C$ или $x^2 + y^3 = C$.

Пример. Найти интегральную кривую уравнения $2xdx = \frac{dy}{y}$, проходящую через точку (0, 1).

Решение. Интегрируя, получим

$$x^2 = \ln|y| + C_1 \Rightarrow \ln|y| = x^2 - C_1 \Rightarrow y = \pm e^{x^2 - C_1} \Rightarrow y = \pm e^{-C_1} e^{x^2}.$$

Последнее равенство можно записать в более удобном виде: $y = Ce^{x^2}$, $C = \pm e^{-C_1}$.

Для нахождения частного решения подставим в полученное общее решение $x = 0$, $y = 1$ и определим C: $1 = Ce^{0^2} \Rightarrow C = 1$. Таким образом, уравнение кривой, проходящей через точку (0, 1), – $y = e^{x^2}$ (рис. 1).

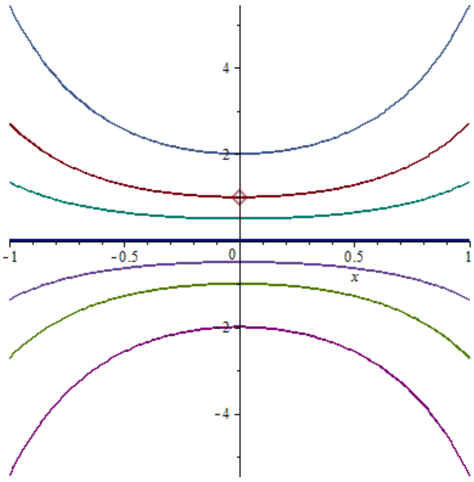

Рис. 1

2.2 Уравнение с разделяющимися переменными

Дифференциальное уравнение вида $f_1(x)g_1(y)dx + f_2(x)g_2(y)dy = 0$, где f_1, f_2, g_1, g_2 – непрерывные функции в рассматриваемой области, называется уравнением с разделяющимися переменными.

Почленным делением уравнения на $f_2(x)\cdot g_1(y)$, $f_2(x)\neq 0$ и $g_1(y)\neq 0$,его сводят к уравнению $\frac{f_1(x)}{f_2(x)}dx=-\frac{g_2(y)}{g_1(y)}dy$ с разделенными переменными. Интегрирование последнего равенства (слева – по переменной *x*, а справа – по *y*) приводит к общему решенюе $\int\frac{f_1(x)}{f_2(x)}dx=-\int\frac{g_2(y)}{g_1(y)}dy+C$.

Ограничения $f_2(x)\neq 0, g_1(y)\neq 0$ могут привести к потере решений дифференциального уравнения. Поэтому следует сделать проверку, решив уравнения $f_2(x)=0$ и $g_1(y)=0$ и подставив их решение в исходное дифференциальное уравнение. Если они превращают дифференциальное уравнение в тождество,то то необходимо определить, входят ли они в общее решение или являются особыми.

Пример. Найти общее решение дифференциального уравнения:

1) $\sqrt{x^2+4}y'=x$;   2) $ydx+(1+x^2)dy=0$;   3) $y'+\cos y=1$.

Решение. 1) Используем то, что $y'=\frac{dy}{dx}$, и запишем исходное дифференциальное уравнение в виде $\sqrt{x^2+4}\frac{dy}{dx}=x$ или $\sqrt{x^2+4}dy=xdx$.

Так как $\sqrt{x^2+4}\neq 0$ для всех $x\in\mathbb{R}$, то преобразуем уравнение к виду $dy=\frac{xdx}{\sqrt{x^2+4}}$. Интегрируя последнее равенство, получаем общее решение $y=\sqrt{x^2+4}+C$ дифференциального уравнения.

2) Предполагая, что $y\neq 0$, а $1+x^2\neq 0$ для всех $x\in\mathbb{R}$, преобразуем заданное дифференциальное уравнение к виду $-\frac{dx}{1+x^2}=\frac{dy}{y}$.

Интегрируя последнее равенство, получаем $-\operatorname{arctg} x=\ln|y|+\ln C, C>0$.

Произвольную константу записали в форме ln*C* для удобства дальнейших преобразований: $\ln C|y|=-\operatorname{arctg} x$, $C|y|=e^{-\operatorname{arctg} x}$, $y=Ce^{-\operatorname{arctg} x}$.

Заметим, что преобразования аналитических выражений производятся с точностью до константы *C*. Таким образом, $y=Ce^{-\operatorname{arctg} x}$ – общее решение исходного дифференциального уравнения.

Проверим, является ли решением $y=0$. Подставив его в заданное дифференциальное уравнение, получим 0=0. Значит, $y=0$ является решением дифференциального уравнения. Однако оно не является особым, поскольку получается из общего решения при $C=0$.

Приходим к ответу: $y=Ce^{-\operatorname{arctg} x}$ – общее решение, C = *const*.

3) Используя, что $y'=\dfrac{dy}{dx}$, запишем уравнение в виде $\dfrac{dy}{dx}=1-\cos y$.

Предполагая, что $1-\cos y\neq 0$, преобразуем уравнение к виду $\dfrac{dy}{1-\cos y}=dx$.

Проинтегрируем последнее равенство, применив тригонометрическую формулу $2\sin^2\dfrac{\alpha}{2}=1-\cos\alpha$. В результате получим: $-\operatorname{ctg}\dfrac{y}{2}=x+C$ или $\operatorname{ctg}\dfrac{y}{2}=C-x$.

Таким образом, $y=2\operatorname{arcctg}(C-x)+2\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$ – общее решение исходного дифференциального уравнения.

Проверим, дает ли равенство $1-\cos y=0$ решения. Подставляя, $y=2\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$, в дифференциальное уравнение, убеждаемся, что они являются особыми решениями. Получили ответ:

$$\left[\begin{array}{l} y=2\operatorname{arcctg}\left(C-x\right)+2\pi n, \\ y=2\pi k, \end{array}\right. \quad n\in\mathbb{Z},\ k\in\mathbb{Z}.$$

Пример . Найти частное решение дифференциального уравнения:

1) $2xdx-(1+x^2)dy=0$, $y(0)=0$; 2) $\dfrac{y}{y'}=\ln y$, $y\left(2\right)=1$;

3) $y'=2e^x\sin x$, $y\left(0\right)=1$.

Решение. 1) Разделим уравнение на $1+x^2\neq 0$, получим $dy=\dfrac{2x}{1+x^2}dx$ и проинтегрируем его: $y=\displaystyle\int\frac{2x}{1+x^2}dx+C_1$, $y=\ln(1+x^2)+\ln C$.

Таким образом, $y=\ln(C(1+x^2))$ – общее решение исходного дифференциального уравнения. Подставим начальное условие $y(0)=0$ и найдем константу C: $0=\ln C$ или $C=1$.

Искомое частное решение – $y=\ln(1+x^2)$.

2) Приведем заданное уравнение с учетом того, что $y'=\dfrac{dy}{dx}$, к $dx=\dfrac{\ln y}{y}dy$ и проинтегрируем: $\int dx=\int\dfrac{\ln y}{y}dy+C$ или $x=\dfrac{\ln^2 y}{2}+C$. Получили общий интеграл исходного уравнения.

Подставим начальное условие $x=2,\ y=1$ в полученное решение и найдем константу *C*: $2=\dfrac{\ln^2 1}{2}+C$, т. е. $C=2$. Значит, $x=\dfrac{\ln^2 y}{2}+2$ или $2(x-2)=\ln^2 y$ – искомое частное решение.

3) С учетом равенства $y'=\dfrac{dy}{dx}$ получим $dy=2e^x\sin x dx$. Интегрируя, получим $y=2\int e^x\sin x dx+C$. Вычислим последний интеграл, дважды интегрируя по частям:

$$\int e^x\sin x dx=\left|\begin{matrix} u=e^x,\ du=e^x dx \\ dv=\sin x dx,\ v=-\cos x\end{matrix}\right|=-e^x\cos x+\int e^x\cos x dx=$$

$$=\left|\begin{matrix} u=e^x,\ du=e^x dx, \\ dv=\cos x dx,\ v=\sin x\end{matrix}\right|=-e^x\cos x+e^x\sin x-\int e^x\sin x dx.$$

Отсюда получим: $2\int e^x\sin x dx=e^x(\sin x-\cos x)$.

Таким образом, $y=e^x(\sin x-\cos x)+C$ – общее решение исходного дифференциального уравнения. Подставляя в него $x=0,\ y=1$, найдем *C*: $1=e^0(\sin 0-\cos 0)+C$, т. е. $C=2$. Частным решением является $y=e^x(\sin x-\cos x)+2$.

2.3. Однородные дифференциальные уравнения.

Интегрирование однородного уравнения

Дифференциальное уравнение вида $P(x,\ y)dx+Q(x,\ y)dy=0$ называют однородным, если обе функции $P(x,y)$ и $Q(x,y)$ являются однородными функциями одного и того же порядка *k*, т. е. для любого ненулевого параметра *t* выполняются соотношения: $P(tx,\ ty)=t^nP(x,\ y)$, $Q(tx,\ ty)=t^nQ(x,\ y)$.

Однородное уравнение всегда может быть преобразовано к виду $y'=\varphi\left(\dfrac{y}{x}\right)$, где

φ – непрерывная на некотором множестве функция. Затем с помощью замены $\dfrac{y}{x} = z$, где $z = z(x)$, оно может быть приведено к уравнению с разделяющимися переменными: $y = xz \Rightarrow y' = z + xz' \Rightarrow z + xz' = \varphi(z) \Rightarrow z' = \dfrac{\varphi(z) - z}{x}$.

Иногда целесообразнее сделать замену $\dfrac{x}{y} = z$, где $z = z(y)$.

Дифференциальное уравнение $y' = f\left(\dfrac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\right)$.

Рассмотрим три возможных случая коэффициентов.

1. Если $\dfrac{a_1}{a_2} \neq \dfrac{b_1}{b_2}$, то делают замену переменных:

$$\begin{cases} x = u + \alpha, \\ y = v + \beta, \ v = v(u), \end{cases}$$

где числа α и β находят как решение системы уравнений

$$\begin{cases} a_1\alpha + b_1\beta + c_1 = 0, \\ a_2\alpha + b_2\beta + c_2 = 0. \end{cases}$$

Этой заменой исходное дифференциальное уравнение приводится к однородному уравнению:

$$\frac{dv}{du} = f\left(\frac{a_1(u+\alpha) + b_1(v+\beta) + c_1}{a_2(u+\alpha) + b_2(v+\beta) + c_2}\right) = f\left(\frac{a_1u + b_1v + a_1\alpha + b_1\beta + c_1}{a_2u + b_2v + a_2\alpha + b_2\beta + c_2}\right) = f\left(\frac{a_1u + b_1v}{a_2u + b_2v}\right).$$

2. Если $k = \dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{b_1}{b_2} \neq \dfrac{c_1}{c_2}$, то заданное уравнение может быть записано в виде

$$y' = f\left(\frac{k(a_2x + b_2y) + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\right), \ k \in \mathbb{R}.$$

Последующая замена $z = a_2x + b_2y, \ z' = a_2 + b_2y'$, где $z = z(x)$, приводит его к дифференциальному уравнению с разделяющимися переменными.

3. Если $\dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{b_1}{b_2} = \dfrac{c_1}{c_2} = k, \ k \in \mathbb{R}$, то получаем простейшее уравнение $y' = f\left(\dfrac{k(a_2x + b_2y + c_2)}{a_2x + b_2y + c_2}\right)$ или $dy = f(k)dx.$

Пример . Решить уравнение:

1) $(x+2y)dx-xdy=0;$ 2) $xy'=\sqrt{x^2-y^2}+y;$

3) $\left(y+x\sin\frac{x}{y}\right)dy-y\sin\frac{x}{y}dx=0.$

Решение. 1) $P(x,\ y)=x+2y,$ $Q(x,\ y)=-x.$ Так как $P(tx,\ ty)=tx+2ty=t(x+2y)=tP(x,\ y)$, $Q(tx,\ ty)=t(-x)=tQ(x,\ y)$, то $P(x,\ y)$ и $Q(x,\ y)$ – однородные функции первого порядка.

Делением на $x\,(x\neq 0)$ уравнение сводится к виду $\left(1+2\frac{y}{x}\right)dx-dy=0$, т. е. $\frac{dy}{dx}=1+2\frac{y}{x}$ или $y'=1+2\frac{y}{x}.$ Заменяем $\frac{y}{x}=z$, где $z=z(x)$, откуда $y=x\cdot z$ и $y'=z+xz'.$ Подставляя в исходное дифференциальное уравнение, получим: $z+xz'=1+2z,$ т. е. $x\frac{dz}{dx}=1+z.$

Разделяем переменные (при условии $1+z\neq 0$): $\frac{dx}{x}=\frac{dz}{1+z}.$ Интегрируем: $\int\frac{dx}{x}=\int\frac{dz}{1+z}+C$ или $\ln|x|=\ln|1+z|+\ln C.$ Отсюда $\frac{x}{1+z}=C.$

Заметим, что заменять переменные можно было и через дифференциалы: $y=xz\Rightarrow dy=xdz+zdx$. Исходное уравнение приведется к тому же виду:

$$(x+2xz)dx-x(xdz+zdx)=0\Rightarrow$$
$$\Rightarrow x(1+2z-z)dx-xdz=0\Rightarrow(1+z)dx-xdz=0.$$

Возвращаемся к старым переменным, подставляя вместо z выражение $\frac{y}{x}.$ Тогда общий интеграл исходного дифференциального уравнения будет иметь вид: $\frac{x^2}{x+y}=C.$

Рассмотрим отдельно возможные решения $x=0$ и $1+z=0,$ которые ранее были исключены. В последнем случае имеем $1+\frac{y}{x}=0,$ т. е. $y=-x.$ Подставляем $x=0$ и $y=-x$ в заданное дифференциальное уравнение и убеждаемся, что они тобращают его в тождество. При этом решение $x=0$ содержится в формуле общего интеграла при $C=0.$ Решение $y=-x$ не содержится в полученной формуле общего интеграла.

Поэтому окончательное решение: $\left[\begin{array}{l}\dfrac{x^2}{x+y}=C,\\ y=-x.\end{array}\right.$

2) Разделив однородное дифференциальное уравнение на x $(x \neq 0)$, получим $y' = \sqrt{1-\left(\dfrac{y}{x}\right)^2} + \dfrac{y}{x}$. После замены $\dfrac{y}{x} = z$, где $z = z(x)$, имеем $z + xz' = \sqrt{1-z^2} + z$.

Далее приведем подобные и разделим переменные, считая $1 - z^2 \neq 0$, т. е. $z \neq \pm 1$. Получим $\dfrac{dz}{\sqrt{1-z^2}} = \dfrac{dx}{x}$. Общее решение после интегрирования − $\arcsin z = \ln|x| + C$.

Возвращаемся к старым переменным: $\arcsin\dfrac{y}{x} = \ln|x| + C$.

Анализируем, являются ли решениями $x = 0$ и $z = \pm 1$, т. е. $y = \pm x$. Для этого подставляем $x = 0$, $y = x$, $y = -x$ в заданное дифференциальное уравнение и убеждаемся, что $x = 0$ не удовлетворяет уравнению, а $y = x$, $y = -x$ являются решениями, которые не входят в полученное общее решение. Приходим к итоговому решению исходного дифференциального уравнения:

$$\left[\begin{array}{l}\arcsin\dfrac{y}{x} = \ln|x| + C,\\ y = \pm x.\end{array}\right.$$

3) Запишем заданное уравнение в виде $\left(y + x\sin\dfrac{x}{y}\right) - y\sin\dfrac{x}{y}\dfrac{dx}{dy} = 0.$

Делим его на y $(y \neq 0)$: $\left(1 + \dfrac{x}{y}\sin\dfrac{x}{y}\right) - \sin\dfrac{x}{y}x' = 0.$ Делаем замену $\dfrac{x}{y} = z$, где $z = z(y)$, т. е. $x = yz$ и $x' = z + yz'$. После подстановки в уравнение получаем: $(1 + z\sin z) - \sin z(z + yz') = 0$, т. е. $(1 + z\sin z)dy - \sin z(ydz + zdy) = 0$.

После упрощения имеем

$dy - y\sin z dz = 0$. Разделяем переменные: $\dfrac{dy}{y} = \sin z dz$.

Интегрирование дает $\ln|y| = -\cos z + C$ или $\ln|y| + \cos z = C$.

Возвращаемся к старым переменным, используя $z = \dfrac{x}{y}$. Тогда общий интеграл имеет вид: $\ln|y| + \cos\dfrac{x}{y} = C.$

Пример . Решить задачу Коши: 1) $(y^2 - x^2)dx - 2xydy = 0,\ y(1) = 1.$

2) $(y - 2x)dx + (x + 2y)dy = 0,\ y(1) = 3.$

Решение. 1) Это однородное уравнение. Разделив заданное уравнение на x^2, $x \neq 0$, получаем $\left(\dfrac{y^2}{x^2} - 1\right)dx - 2\dfrac{y}{x}dy = 0.$

Делаем замену $\dfrac{y}{x} = z,\ dy = xdz + zdx$, где $z = z(x)$: $(z^2 - 1)dx - 2z(xdz + zdx) = 0$ или, приведя подобные, $-(z^2 + 1)dx - 2zxdz = 0.$ Разделяем переменные: $\dfrac{2z}{z^2 + 1}dz = -\dfrac{dx}{x}$, $(z^2 + 1 \neq 0)$. Интегрируем последнее уравнение: $\ln(z^2 + 1) = -\ln|x| + \ln C$, т. е., используя свойства логарифма, имеем $z^2 + 1 = \dfrac{C}{|x|}$.

Возвращаясь к старым переменным, получаем: $\dfrac{y^2}{x^2} + 1 = \dfrac{C}{|x|}$ – общий интеграл исходного уравнения.

Подставляем в него начальные условия $x = 1,\ \ y = 1$ и находим C: $\dfrac{1}{1} + 1 = \dfrac{C}{1}$ или $C = 2.$ Значит, решением задачи Коши является $\dfrac{y^2}{x^2} + 1 = \dfrac{2}{|x|}$.

2) Это уравнение однородное. Разделив его на x $(x \neq 0)$, получаем:

$$\left(\frac{y}{x} - 2\right)dx + \left(1 + 2\frac{y}{x}\right)dy = 0.$$

Делаем замену $\dfrac{y}{x} = z,$ где $z = z(x),$ $y = xz,$ $dy = xdz + zdx$: $(z - 2)dx + (1 + 2z)(xdz + zdx) = 0.$ Приводим подобные: $(z - 2 + z + 2z^2)dx + x(1 + 2z)dz = 0$ или $2(z^2 + z - 1)dx + x(1 + 2z)dz = 0.$

Разделяем переменные, считая $z^2 + z - 1 \neq 0$: $\dfrac{1 + 2z}{z^2 + z - 1}dz + \dfrac{2dx}{x} = 0.$

Далее интегрируем уравнение и получаем: $\ln\left|z^2+\ z-1\right|+2\ln|x|=\ln C.$

Используем свойства логарифма и получаем: $(z^2+z-1)x^2=C.$

Возвращаемся к старым переменным:

$\left(\frac{y^2}{x^2}+\frac{y}{x}-1\right)x^2=C$ или $y^2+xy-x^2=C.$

Отсюда получаем:

$y^2+xy-x^2=C$ – общий интеграл заданного уравнения. Подставив в него начальные условия: $x=1,\ y=3,$ получим $C=11.$

Решение задачи Коши: $y^2+xy-x^2=11.$

Пример 3. Найти решение дифференциального уравнения:

1) $y'=\frac{-2x+4y-6}{x+y-3}$; 2) $y'=\frac{2x+y+1}{4x+2y-3}$; 3) $y'=\frac{2x+y+1}{4x+2y+2}$.

Решение. 1) Это уравнение не является однородным, но сводится к однородному дифференциальному уравнению. Поскольку $\frac{a_1}{a_2}=\frac{-2}{1}\neq\frac{b_1}{b_2}=\frac{4}{1}$, то сделаем следующую замену переменных:

$$\begin{cases} x=u+\alpha \\ y=v+\beta,\ v=v(u). \end{cases}$$

Числа α и β найдем из системы уравнений:

$$\begin{cases} -2\alpha+4\beta-6=0, \\ \alpha+\beta-3=0, \end{cases} \text{ откуда } \begin{cases} \alpha=1, \\ \beta=2. \end{cases}$$

Подставив $\begin{cases} x=u+1, \\ y=v+2 \end{cases}$ заданное уравнение, получим:

$\frac{dv}{du}=\frac{-2(u+1)+4(v+2)-6}{u+1+v+2-3}$ или $\frac{dv}{du}=\frac{-2u+4v}{u+v}$.

В полученном однородном уравнении введем следующую замену перменных: $\frac{v}{u}=z,$ где $z=z(u);\ v=uz,\ dv=udz+zdu.$ После подстановки получим:

$$\frac{udz+zdu}{du}=\frac{-2u+4uz}{u+uz},$$

$$(-2+4z)du=(1+z)(udz+zdu),$$

$$(-2+4z)du=u(1+z)dz+(z+z^2)du,$$

$$-u(1+z)dz=(z^2-3z+2)du.$$

Разделим переменные, полагая $z^2-3z+2\neq 0$: $\dfrac{1+z}{z^2-3z+2}\ dz=-\dfrac{du}{u}$.

Преобразуем дробное выражение $\dfrac{1+z}{z^2-3z+2}$, представив его в виде суммы простейших дробей: $\dfrac{1+z}{z^2-3z+2}=\dfrac{3}{z-2}-\dfrac{2}{z-1}$, и получим $\left(\dfrac{3}{z-2}-\dfrac{2}{z-1}\right)dz=-\dfrac{du}{u}$.

Интегрируем последнее уравнение:

$$3\ln|z-2|-2\ln|z-1|=-\ln|u|+\ln C_1$$

$$\ln\frac{|z-2|^3}{(z-1)^2}+\ln|u|=\ln C_1$$

$$\frac{u(z-2)^3}{(z-1)^2}=C.$$

Возвращаемся к старым переменным: $\dfrac{(x-1)\left(\dfrac{y-2}{x-1}-2\right)^3}{\left(\dfrac{y-2}{x-1}-1\right)^2}=C.$

После упрощения получаем общий интеграл $(y-2x)^3=C(y-x-1)^2$ заданного дифференциального уравнения.

Кроме того, решением исходного дифференциального уравнения будет $z^2-3z+2=0$ или $y=2x$ и $y=x+1$.

Решение $y=2x$ входит в общий интеграл при $C=0$. Таким образом, искомое решение дифференциального уравнения – $\left[\begin{array}{l}(y-2x)^3=C(y-x-1)^2,\\ y=x+1.\end{array}\right.$

2) Так как $\dfrac{a_1}{a_2}=\dfrac{b_1}{b_2}=\dfrac{1}{2}\neq\dfrac{c_1}{c_2}$, то заданное уравнение приводится к уравнению $y'=\dfrac{2x+y+1}{2(2x+y)-3}$.

Заменяем $z = 2x + y$, где $z = z(x)$, $y = z - 2x$, $y' = z' - 2$ и получаем $z' - 2 = \dfrac{z+1}{2z-3}$.

Разделяем переменные, $\dfrac{dz}{dx} = \dfrac{5(z-1)}{2z-3} \Rightarrow \dfrac{2z-3}{z-1}dz = 5dx$, считая $z \neq 1$.

Упрощаем: $\left(2 - \dfrac{1}{z-1}\right)dz = 5dx$.

Интегрируем: $2z - \ln|z-1| = 5x + C$.

Возвращаясь к старым переменным, получаем общий интеграл:

$$2y - \ln|2x + y - 1| - x = C.$$

Кроме того, решением исходного дифференциального уравнения будет $z = 1$ или $2x + y = 1 \Rightarrow y = 1 - 2x$. Таким образом, искомое решение дифференциального уравнения:

$$\left[\begin{array}{l} 2y - \ln|2x + y - 1| - x = C, \\ y = 1 - 2x. \end{array}\right.$$

3) Так как $\dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{2}{4} = \dfrac{b_1}{b_2} = \dfrac{1}{2} = \dfrac{c_1}{c_2} = \dfrac{1}{2}$, то заданное уравнение сводится к уравнению $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2x + y + 1}{2(2x + y + 1)}$.

После сокращения имеем $2dy = dx$. Интегрируем и получаем общее решение исходного дифференциального уравнения: $2y = x + C$.

2.3. Линейные уравнения.

<u>Интегрирование линейного однородного уравнения</u>

Уравнение вида $y' + p(x)y = q(x)$, где $p(x)$, $q(x)$ – заданные непрерывные функции, называется линейным дифференциальным уравнением первого порядка.

Если $q(x) \equiv 0$, то оно называется линейным однородным дифференциальным уравнением. Если $q(x) \neq 0$, – линейным неоднородным дифференциальным уравнением.

Однородное уравнение решают разделением переменных: $\dfrac{dy}{y} = -p(x)dx$. Интегрируя, получают общее решение:

$$\ln|y| = -\int p(x)dx + C_1 \Rightarrow |y| = e^{-\int p(x)dx + C_1} = e^{-C_1}e^{-\int p(x)dx} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow y = \pm e^{-C_1}e^{-\int p(x)dx} \Rightarrow y = Ce^{-\int p(x)dx},\ C = \pm e^{-C_1}.$$

<u>Методы решения линейного неоднородного уравнения.</u>

Метод вариации произвольной постоянной (метод Лагранжа**).**

1) Найти общее решение соответствующего линейного однородного уравнения: $y = Ce^{-\int p(x)dx},\ C = const,\quad C \in \mathbb{R}$.

2) Общее решение линейного неоднородного уравнения записать в виде $y = C(x)e^{-\int p(x)dx}$, где $C = C(x)$ – некоторая функция, которую необходимо найти.

3) Ввести в заданное уравнение замену $y = C(x)e^{-\int p(x)dx}$ и $y' = C'(x)e^{-\int p(x)dx} - C(x)p(x)e^{-\int p(x)dx}$, после чего оно приведется к простейшему дифференциальному уравнению $C'(x)e^{-\int p(x)dx} = q(x)$ относительно искомой функции $C(x)$.

4) Решить полученное уравнение: $C(x) = C + \int q(x)e^{\int p(x)dx}dx$,где C – произвольная постоянная.

4) Записать общее решение заданного уравнения:

$$y = e^{-\int p(x)dx}\left(C + \int q(x)\ e^{\int p(x)dx}dx\right).$$

Метод Бернулли

1) Ввести замену $y = u \cdot v$, где $u = u(x)$, $v = v(x)$ – новые искомые функции.

2) Подставить новое выражение для функции y и ее производной $y' = u'v + uv'$ в заданное уравнение: $u'v + uv' + p(x)uv = q(x)$ или $u'v + u(v' + vp(x)) = q(x)$.

3) Функцию $v(x)$ подобрать как частное решение (при любом C) дифференциального уравнения $v' + vp(x) = 0$.

4) Найти общее решение уравнения $u'v = q(x)$

5) Общее решение исходного уравнения записать как произведение найденных функций $u(x)$ и $v(x)$.

<u>Уравнение Бернулли</u>: $y' + p(x)y = q(x)y^m$, где $m \in \mathbb{R}$, $m \neq 0,\ m \neq 1.$

Наиболее распространенными на практике являются два способа решения.

1-й способ – использование подстановки Бернулли с дальнейшей реализацией соответствующего алгоритма.

2-й способ – сведение к линейному уравнению следующим образом.

1.Разделить уравнение на y^m: $\frac{y'}{y^m} + p(x)\frac{1}{y^{m-1}} = q(x)$.

2. Ввести замену: $\frac{1}{y^{m-1}} = z,\ z = z(x),\ z' = (y^{1-m})' = (1-n)y^{-m}y' \Rightarrow \frac{y'}{y^m} = \frac{z'}{1-n}$.

3. Найти общее решение полученного линейного уравнения $\frac{z'}{1-m} + p(x)z = q(x)$ относительно новой функции $z = z(x)$.

4. Вернуться к старым переменным.

Пример 1. Решить уравнение двумя способами:

1) $xy' - 4y = 2x^4$;   2) $y' - \frac{y}{x} = -2x^3$.

Решение. 1) Преобразуем уравнение (полагая $x \neq 0$) к виду линейного неоднородного дифференциального уравнения

$$y' - \frac{4}{x}y = 2x^3.$$

1-й способ. Решим методом Лагранжа. Найдем общее решение соответствующего ему однородного уравнения $y' - \frac{4}{x}y = 0,\ \frac{dy}{y} = \frac{4dx}{x}$.

Интегрируем и получаем:

$$\ln|y| = 4\ln|x| + \ln C$$

или $y = Cx^4$, где $C = const$.

Общее решение исходного дифференциального уравнения будем искать в виде

$$y = Cx^4, \tag{22.23}$$

где $C = C(x)$ – функция от переменной x.

Найдем $C(x)$. Для этого дифференцируем (22.23):

$$y' = C'x^4 + 4Cx^3.$$

Подставляем функцию (22.23) и ее производную в исходное дифференциальное уравнение:

$$x(C'x^4 + 4Cx^3) - 4Cx^4 = 2x^4.$$

Упрощаем полученное уравнение и решаем относительно C'. Получаем: $C' = \frac{2}{x}$.

Далее интегрируем:

$C(x) = \int \frac{2}{x}dx + C,\;\; C(x) = 2\ln|x| + C;\;\; C(x) = \ln x^2 + C.$ Подставляем найденное выражение вместо C в равенство (22.23). Тогда общее решение исходного дифференциального уравнения имеет вид $y = (\ln x^2 + C)x^4$.

2-й способ. Ищем общее решение исходного уравнения в виде (22.19). После подстановки получим:

$$u\left(v' - v\cdot\frac{4}{x}\right) + u'v = 2x^3. \qquad (22.25)$$

Подбираем функцию v как частное решение (при $C = 0$) уравнения

$v' - \frac{4v}{x} = 0,$ т. е. $\frac{dv}{v} = \frac{4dx}{x}.$

Вследствие интегрирования имеем:

$\ln|v| = 4\ln|x|,\;\; v = x^4.$

Подставляем найденную функцию v в (22.25), получаем:

$u'x^4 = 2x^3.$

Находим общее решение последнего уравнения, разделяя переменные:

$du = \frac{2}{x}dx.$

Интегрируем и получаем:

$u = 2\ln|x| + C$ или $u = \ln x^2 + C,$ где $C = const.$

Тогда общее решение исходного уравнения имеет вид (в соответствии с (22.19)):

$y = (\ln x^2 + C)x^4.$

Вывод: в данном примере решение методом Бернулли (*2-й способ*) оказалось более рациональным, так как быстрее привело к ответу.

2) *1-й способ*. Решим уравнение методом Лагранжа. Находим общее решение соответствующего ему однородного уравнения

$y' - \frac{y}{x} = 0,$ т. е. $\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x}.$

Интегрирование дает:

$\ln|y| = \ln|x| + \ln C$ или $y = Cx,\;\; C = const.$

Общее решение исходного дифференциального уравнения будем искать в виде

$y = Cx,$ (22.26)

где $C = C(x)$.

Дифференцируем функцию (22.26):

$y' = C'x + C.$

Подставляем функцию (22.26) и ее производную в исходное дифференциальное уравнение:

$C'x + C - \frac{Cx}{x} = -2x^3, \quad C'x = -2x^3, \quad C' = -2x^2.$ Интегрирование последнего равенства дает нам $C(x) = -\frac{2x^3}{3} + C,$ где $C = const.$

Подставляем найденное выражение вместо $C(x)$ в (22.26). Получаем общее решение заданного уравнения:

$y = \left(-\frac{2}{3}x^3 + C\right)x,$ т. е. $y = Cx - \frac{2}{3}x^4.$

2-й способ. Ищем общее решение в виде $y = uv$ (метод Бернулли), где $u = u(x), \quad v = v(x)$ – функции, которые надо найти. Вычисляем производную $y' = u'v + uv'$ и подставляем ее вместе с функцией $y = uv$ в исходное уравнение. Получаем:

$u'v + uv' - \frac{uv}{x} = -2x^3,$ т. е.

$u\left(v' - \frac{v}{x}\right) + u'v = -2x^3.$ (22.27)

Согласно методу, полагаем $v' - \frac{v}{x} = 0.$ Из этого уравнения (как из дифференциального уравнения с разделяющимися переменными) найдем функцию $v(x)$. Интегрируем равенство $\frac{dv}{v} = \frac{dx}{x}$ и находим $\ln|v| = \ln|x|$ (константу C полагаем равной нулю).

Из последнего уравнения имеем: $v = x.$ Возвращаемся к уравнению (22.27). С учетом равенства нулю выражения в скобках и найденной функции $v(x)$ оно имеет вид:

$u'x = -2x^3$ или $du = -2x^2dx.$

Интегрируем последнее равенство. Получаем:

$u = \int -2x^2dx = -\frac{2}{3}x^3 + C,$

где $C = const.$

Тогда общее решение $y = u \cdot v$ исходного дифференциального уравнения имеет вид:

$y = \left(-\frac{2}{3}x^3 + C\right)x,$ т. е. приходим к ответу:

$y = Cx - \frac{2}{3}x^4.$

Вывод: более рациональным оказался метод Лагранжа (*1-й способ*), так как быстрее привел к общему решению исходного дифференциального уравнения.

Пример 2. Найти частное решение дифференциального уравнения:

1) $y' + y = x + 1,\ y(0) = 1;$ 2) $y' - 3y = e^x,\ y(0) = 0.$

Решение. 1. Найдем общее решение методом Лагранжа. Рассмотрим соответствующее однородное уравнение

$y' + y = 0.$

Решаем его как дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными, т. е.

$\frac{dy}{y} = -dx.$

Его решением является $y = Ce^{-x},$ где $C = const.$

Ищем общее решение заданного дифференциального уравнения в виде

$y = Ce^{-x},$ (22.28)

где $C = C(x)$ – некоторая функция.

Найдем функцию $C(x).$ Дифференцируем выражение (22.28):

$y' = C'e^{-x} - Ce^{-x}.$

Подставляем найденную производную и функцию (22.28) в заданное уравнение, получаем:

$C'e^{-x} - Ce^{-x} + Ce^{-x} = x + 1,$ т. е.

$C'e^{-x} = x + 1$ или $C'(x) = e^x(x + 1).$

Тогда $C(x) = \int e^x(x+1)dx + C.$ Интегрируя по частям, получим:

$C(x) = xe^x + C,$

где $C = const.$

Найденное выражение $C\ (x)$ подставляем в равенство (22.28), получаем: $y = x + Ce^{-x}.$

Найдем частное решение, используя начальное условие. Если $x = 0$ и $y = 1,$ то $C = 1.$ Значит, частное решение имеет вид: $y = x + e^{-x}.$

2) Найдем общее решение методом Бернулли, т. е. в виде $y = u \cdot v.$

После подстановки производной $y' = u'v + uv'$ и самой функции $y = uv$ в исходное дифференциальное уравнение получаем:

$u'v + uv' - 3uv = e^x,$ т. е.

$$u(v' - 3v) + u'v = e^x. \qquad (22.29)$$

Полагаем $v' - 3v = 0.$ Интегрируем это уравнение как дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными и находим $v(x)$:

$$\frac{dv}{dx} = 3v, \quad \frac{dv}{v} = 3dx,$$

$\ln|v| = 3x$ (полагаем $C = 0$) или $v = e^{3x}.$

Возвращаемся к дифференциальному уравнению (22.29):

$$u'e^{3x} = e^x, \quad u' = e^{-2x}, \quad \frac{du}{dx} = e^{-2x}.$$

Имеем уравнение $du = e^{-2x}dx,$ которое интегрируем, и получаем:

$$u = \int e^{-2x}dx = -\frac{e^{-2x}}{2} + C,$$

где $C = const.$

Тогда общее решение заданного дифференциального уравнения имеет вид:

$y = \left(-\frac{e^{-2x}}{2} + C\right)e^{3x}$ или $y = Ce^{3x} - \frac{e^x}{2}.$

Найдем частное решение, используя начальное условие. Если $x = 0$ и $y = 0,$ то $C = \frac{1}{2}.$ Значит, частное решение имеет вид: $y = \frac{e^{3x} - e^x}{2}.$

Пример 3. Решить уравнение:

1) $xy' + y = \frac{y^2 \ln x}{5};$ 2) $y'x^2 \cos y + y = xy'.$

Решение. 1) Это уравнение Бернулли. Будем искать общее решение методом Бернулли, т. е. в виде $y = u \cdot v.$

После подстановки получим:

$$x(u'v + uv') + uv = \frac{u^2v^2 \ln x}{5}.$$

После упрощения имеем:

$$u(xv' + v) + u'vx = \frac{u^2v^2 \ln x}{5}. \qquad (22.30)$$

Полагая $xv' + v = 0,$ находим функцию $v = v(x)$:

$$\frac{dv}{v} = -\frac{dx}{x}, \quad \ln|v| = -\ln|x|,$$

$v = \frac{1}{x}$ (полагаем $C = 0$).

Подставляем найденную функцию $v = \frac{1}{x}$ в дифференциальное уравнение (22.30):

$$u' \cdot \frac{1}{x} \cdot x = \frac{u^2 \cdot \frac{1}{x^2} \ln x}{5} \text{ или } \frac{du}{u^2} = \frac{\ln x}{5x^2} dx.$$

Интегрируем последнее уравнение:

$$-\frac{1}{u} = \int \frac{\ln x}{5x^2} dx + \tilde{N}.$$

После интегрирования по частям получаем:

$$-\frac{1}{u} = -\frac{1}{5x}(\ln x + 1) + C, \text{ откуда } u = \frac{5x}{\ln x + 1 + 5xC}.$$

Тогда общее решение заданного дифференциального уравнения имеет вид:

$$y = \frac{5}{\ln x + 5Cx + 1}.$$

2) Запишем заданное уравнение в виде

$$\frac{dy}{dx} x^2 \cos y + y = x \frac{dy}{dx}.$$

Это уравнение не является линейным дифференциальным уравнением вида (22.15) или уравнением Бернулли вида (22.22). Умножим заданное уравнение на $\frac{dx}{dy}$, получим: $x^2 \cos y + y \frac{dx}{dy} = x.$

Разделим его на y ($y \neq 0$) и получим уравнение Бернулли

$$\frac{dx}{dy} - \frac{1}{y} x = -\frac{x^2}{y} \cos y, \qquad (22.31)$$

решением которого является функция $x = x(y).$ Ищем общее решение последнего дифференциального уравнения в виде $x = u \cdot v,$ где $u = u(y),$ $v = v(y).$ Находим производную $x' = u'v + uv'$ и подставляем ее вместе с функцией в уравнение (22.31):

$$u'v + uv' - \frac{uv}{y} = -\frac{u^2 v^2}{y} \cos y \text{ или}$$

$$u\left(v' - \frac{v}{y}\right) + u'v = -\frac{u^2 v^2}{y} \cos y. \qquad (22.32)$$

Найдем $v(y)$, решая уравнение

$v' - \frac{v}{y} = 0,$ т. е. $\frac{dv}{v} = \frac{dy}{y}.$

Интегрирование дает:

$\ln|v| = \ln|y|,$ т. е. $v = y$ (полагаем $C = 0$).

Подставляем найденную функцию v в уравнение (22.32):

$u'y = -\frac{u^2 y^2}{y}\cos y,\ \ \frac{du}{u^2} = -\cos y dy.$ Интегрируя последнее уравнение, получим:

$-\frac{1}{u} = -\sin y + C$ или $u = \frac{1}{C + \sin y}.$

Получаем общее решение (общий интеграл) заданного дифференциального уравнения:

$x = \frac{y}{C + \sin y}$ или $y = x(C + \sin y).$

2.5. Уравнение в полных дифференциалах

Уравнение вида $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$ называется уравнением в полных дифференциалах, если его левая часть представляет собой полный дифференциал некоторой функции $u = u(x, y)$, т. е. $du = P(x, y)dx + Q(x, y)dy$.

В этом случае исходное уравнение приведется к уравнению $du = 0,$ и его общий интеграл определится формулой $u(x, y) = C,$ где C – произвольная постоянная.

Теорема. Для того чтобы равенство $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$, где функции $P(x, y),\ Q(x, y)$ непрерывны в некоторой области вместе со своими частными производными P'_y и Q'_x, причем $P^2(x, y) + Q^2(x, y) \neq 0$, являлось дифференциальным уравнением в полных дифференциалах, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось тождество $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$.

∇Необходимость. Пусть $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$ − уравнение в полных дифференциалах. Тогда для некоторой функции $u(x, y)$ выполняется условие $du = P(x, y)dx + Q(x, y)dy$. Поскольку полный дифференциал функции двух переменных определяется формулой $du = u'_x dx + u'_y dy$, то приходим к двум равенствам: $P = u'_x,\ Q = u'_y$. Дифференцируя их по y и x соответственно, получим

$P'_y = u'_{xy}$, $Q'_x = u'_{yx}$. Поскольку P'_y и Q'_x непрерывны, то u'_{xy}, u'_{yx} тоже непрерывны, а значит, равны. Таким образом, $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$.

Достаточность. Пусть $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$. Подберем функцию $u(x, y)$ таким образом, чтобы $u'_x = P(x, y),\ u'_y = Q(x, y)$. Проинтегрируем первое равенство: $u(x, y) = \int\limits_{x_0}^{x} P(t, y)dt + C(y)$, где $C(y)$ − произвольная непрерывно дифференцируемая функция, зависящая только от y. Тогда

$$u'_y = \left(\int\limits_{x_0}^{x} P(t, y)dt + C(y) \right)'_y = \int\limits_{x_0}^{x} P'_y(t, y)dt + C'(y) = \left| P'_y = Q'_x \right| =$$

$$= \int\limits_{x_0}^{x} Q'_t(t, y)dt + C'(y) = Q(x, y) - Q(x_0, y) + C'(y).$$

Учитывая, что $u'_y = Q(x, y)$, получим $Q(x, y) - Q(x_0, y) + C'(y) = Q(x, y)$ или $C'(y) = Q(x_0, y)$. Найдем $C(y)$, интегрируя последнее уравнение: $C(y) = \int\limits_{y_0}^{y} Q(x_0, t)dt + C_1,\ C_1 \in \mathbb{R}$. Таким образом, $u(x, y) = \int\limits_{x_0}^{x} P(t, y)dt + \int\limits_{y_0}^{y} Q(x_0, t)dt + C_1$. Поскольку общее решение исходного уравнения − $u(x, y) = C_2,\ C_2 \in \mathbb{R}$, то окончательно получим: $\int\limits_{x_0}^{x} P(t, y)dt + \int\limits_{y_0}^{y} Q(x_0, t)dt = C,\ C = C_2 - C_1$.

Замечание. На практике удобнее решать уравнение, используя неопределенные интегралы, с последующим объединением (суммированием) всех произвольных постоянных в одну.

<u>Общая схема решения уравнения.</u>

1) Проверить выполнение равенства $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$.

2) Если равенство выполняется, то следует определить функцию $u = u(x, y)$ из системы уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = P(x,\ y), \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = Q(x,\ y); \end{cases}$$

3) Записать общее решения в виде $u(x,y) = C,$ после нахождения функции $u = u(x,\ y)$ (все константы перенести в правую часть и обозначить одной буквой).

Пример. Решить дифференциальное уравнение: $(3x+5y)dx + (5x-3y)dy = 0$.

Решение. В заданном уравнении $P(x,y) = 3x+5y,\ \ Q(x,y) = 5x-3y.$ Проверим выполнение условия теоремы: $\dfrac{\partial P}{\partial y} = 5,\ \ \dfrac{\partial Q}{\partial x} = 5,\ \dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}.$ Значит, это уравнение в полных дифференциалах.

Определим функцию $u(x, y)$ из системы уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = 3x+5y, \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = 5x-3y. \end{cases}$$

Интегрируем первое уравнение системы по x, считая y постоянной величиной:

$$u(x,y) = \int (3x+5y)\,dx = \frac{3x^2}{2} + 5xy + C(y),$$

где в качестве произвольной постоянной относительно переменной x выступает функция $C = C(y),$ которую нужно найти. Для этого определенную выше функцию $u(x,\ y)$ дифференцируем по y: $\dfrac{\partial u}{\partial y} = 5x + C'(y).$

Правую часть полученного равенства приравниваем к правой части второго уравнения системы: $5x + C'(y) = 5x - 3y,$ откуда получаем $C'(y) = -3y.$

Интегрируем последнее равенство: $C(y) = \int (-3y)\ dy = -\dfrac{3y^2}{2} + C_1,$ где $C_1 = const.$

Подставляем найденную функцию $C(y)$ в формулу для функции $u(x,\ y)$:

$$u(x,y) = \frac{3x^2}{2} + 5xy - \frac{3y^2}{2} + C_1.$$

Тогда имеем: $\dfrac{3}{2}\left(x^2 - y^2\right) + 5xy + C_1 = C_2,$ где $C_2 = const,$ т. е. $\dfrac{3}{2}\left(x^2 - y^2\right) + 5xy = C,$

$(C = const)$ – общий интеграл заданного дифференциального уравнения.

Пример 2. Решить задачу Коши: $(\sin x - 2xy)dx - (x^2 + \cos y)dy = 0,\ \ y(0) = \dfrac{\pi}{2}.$

Решение. В уравнении $\dfrac{\partial P}{\partial y} = -2x,\ \ \dfrac{\partial Q}{\partial x} = -2x.$ Значит, это уравнение в полных дифференциалах. Найдем функцию $u(x, y)$ из системы уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = \sin x - 2xy, \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = -x^2 - \cos y. \end{cases}$$

Интегрируем первое уравнение системы: $u(x,y) = \int(\sin x - 2xy)\,dx + C(y).$

Получаем: $u(x,y) = -\cos x - x^2 y + C(y),$ где $C(y)$ – функция от y, которую надо найти.

Дифференцируем последнее равенство по y: $\dfrac{\partial u}{\partial y} = -x^2 + C'(y).$

Используем полученное равенство и второе равенство системы , приравниваем их правые части: $-x^2 + C'(y) = -x^2 - \cos y$ или $dC = -\cos y dy.$

Интегрированием получаем: $C(y) = -\sin y + C_1,$ где $C_1 = const.$

Тогда общий интеграл заданного дифференциального уравнения имеет вид:

$$\cos x + \sin y + x^2 y = C,\ \text{где}\ C = const.$$

Используем начальное условие $x = 0,\ \ y = \dfrac{\pi}{2}$ и находим константу C:

$$\cos 0 + \sin\frac{\pi}{2} + 0\cdot\frac{\pi}{2} = C\ \text{ или }\ C = 2.$$

Поэтому решением задачи Коши является $\cos x + \sin y + x^2 y = 2.$