Модуль 8 Элементы операционного исчисления

Тема 1 Операторный метод

Возникновение операционного исчисления как самостоятельной теории относится к концу XIX века. Однако его истоки прослеживаются еще в классических работах Лейбница, Д. Бернулли, Лагранжа, Лапласа, Эйлера, Фурье, Пуассона, Коши.

Основной идеей, лежащей в основе операторного метода, является подход к оператору дифференцирования как к алгебраической величине. Формальные правила работы с этой величиной были предложены английским физиком О. Хевисайдом при решении дифференциальных уравнений с начальными условиями. Позже операционное исчисление получило строгое обоснование на базе теории аналитических функций, непосредственно связанной с преобразованиями Фурье и Лапласа.

1.1 Преобразование Лапласа: основные понятия

Определение 1. Числовая функция $f(t)$, определенная на множестве действительных чисел, называется оригиналом, если она удовлетворяет следующим условиям:

1) $f(t)=0$, если $t<0$;

2)кусочно-непрерывна при $t \geq 0$, причем на каждом конечном промежутке имеет лишь конечное число точек разрыва I рода;

3)имеет порядок роста не выше экспоненциального, то есть $\exists M>0, \sigma \in \mathbb{R} : |f(t)| \leq Me^{st} \ \ \forall t \geq 0$.

Показателем роста такой функции называют число $s_0 = \inf\{s\}$.

Слово оригинал по отношению к функции подчеркивает возможность применить к ней преобразование Лапласа.

Пример 1. Убедиться, что функция $f(t)=\left[\begin{array}{c} e^{3t}\sin 5t,\ t>0, \\ 0,\ t<0 \end{array}\right.$ является оригиналом.

Решение. Заданная функция:

1.определена на всей числовой оси, кроме нуля, и обращается в 0 для отрицательных значений аргумента;

2.непрерывна на всей области определения, кроме единственной точки $t=0$, являющейся точкой устранимого разрыва;

3.$|e^{3t}\sin 5t| = e^{3t}|\sin 5t| \le e^{3t} \Rightarrow M=1,\ s_0=3$.

Значит, она является оригиналом.

Еще проще убедиться в том, что является оригиналом и функция

$$\eta(t)=\left[\begin{array}{l}1,\ t>0,\\ 0,\ t<0,\end{array}\right.$$

которая называется функцией Хевисайда и является самой простой функцией-оригиналом.

Замечание. Если некоторая функция $f(t)$ удовлетворяет условиям 2) и 3) оригинала, но не обращается в ноль для отрицательного аргумента, то рассматривают обычно произведение $f(t)\eta(t)$, которое решает эту проблему. В дальнейшем, по умолчанию, множитель $\eta(t)$ не пишут, но подразумевают его присутствие. В примере 1 была приведена функция $f(t)=e^{3t}\sin 5t\cdot\eta(t)$. Сравните с помощью графиков, приведенных ниже, поведение функций $e^{3t}\sin 5t\cdot\eta(t)$ (рис. 1) и $e^{3t}\sin 5t$ (рис. 2):

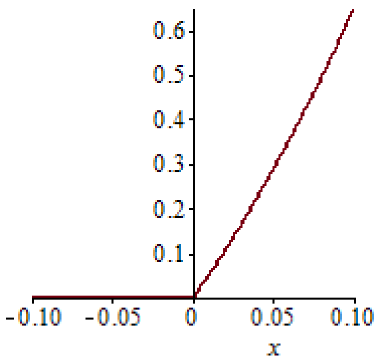


Рис1. $f(t)=e^{3t}\sin 5t\cdot\eta(t)$

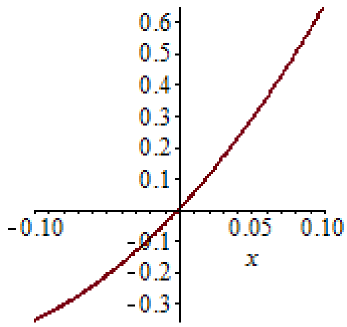


Рис.2. $f(t)=e^{3t}\sin 5t$

Определение 2. Изображением Лапласа функции-оригинала $f(t)$ называется функция $F(p)$ комплексного переменного $p=s+i\sigma$, которая определяется равенством

$$F(p)=\int_0^{+\infty} e^{-pt}f(t)dt.$$

Операцию перехода от оригинала к изображению называют преобразованием Лапласа.

Соответствие между оригиналом $f(t)$ и изображением $F(p)$ может быть записано в разных формах, приведенных ниже в таблице:

$f(t)\xrightarrow{L}F(p)$	$F(p)\xrightarrow{L^{-1}} f(t)$
$f(t)\risingdotseq F(p)$	$F(p)\risingdotseq f(t)$
$F(p)=L[f(t)]$	$f(t)=L^{-1}[F(p)]$

Здесь L – оператор Лапласа.

Теорема 1. Для всякого оригинала с показателем роста s_0 существует изображение $F(p)$ в полуплоскости $\operatorname{Re} p = s > s_0$ (рис. 3), которое является аналитической (дифференцируемой) функцией на этом множестве.

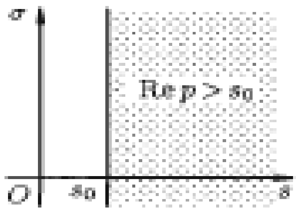


Рис.3 Область существования и аналитичности изображения

∇Оценим интеграл, определяющий изображение $F(p)$, и учтем при этом, что $|f(t)|< Me^{s_0 t}$:

$$|F(p)|=\left|\int_0^{+\infty} e^{-pt}f(t)dt\right|\le \int_0^{+\infty}|e^{-pt}f(t)|dt\le \int_0^{+\infty}|e^{-pt}|\cdot Me^{s_0 t}dt=$$

$$=M\int_0^{+\infty}|e^{-pt+s_0 t}|\,dt=M\int_0^{+\infty}|e^{-(s+i\sigma)t+s_0 t}|\,dt=M\int_0^{+\infty}|e^{-t(s-s_0)}|\cdot|e^{-i\sigma t}|\,dt=$$

$$=\left\| e^{-i\sigma t}|=|\cos(-\sigma t)+i\sin(-\sigma t)|=\cos^2(\sigma t)+\sin^2(\sigma t)=1\right\|=M\int_0^{+\infty}e^{-t(s-s_0)}dt=\left[\begin{array}{ll}\dfrac{M}{s-s_0}, & s>s_0,\\ +\infty, & s\le s_0.\end{array}\right.$$

Таким образом, при $s>s_0$ интеграл Лапласа сходится равномерно, т.е функция $F(p)$ определена в полуплоскости $s>s_0$.

Для доказательства аналитичности функции $F(p)$ на множестве $s>s_0$ получим аналогичную оценку для $|F'(p)|$:

$$|F'(p)|=\left|\int_0^{+\infty} -te^{-pt} f(t)dt\right| \le \int_0^{+\infty} |te^{-pt} f(t)|dt \le \int_0^{+\infty} |te^{-pt}|\cdot Me^{s_0 t}dt =$$

$$== M\int_0^{+\infty} |e^{-(s+i\sigma)t+s_0 t}|\, dt = M\int_0^{+\infty} te^{-t(s-s_0)}dt = \begin{vmatrix} u=t \to du=dt \\ dv=e^{-t(s-s_0)}dt \to v=-\dfrac{e^{-t(s-s_0)}}{s-s_0} \end{vmatrix} =$$

$$= -M\frac{te^{-t(s-s_0)}}{s-s_0}\Bigg|_{t=0}^{t\to+\infty} + \frac{M}{s-s_0}\int_0^{+\infty} e^{-t(s-s_0)}dt = \left[\begin{array}{l} \dfrac{M}{(s-s_0)^2},\ s>s_0, \\ +\infty, \qquad s\le s_0. \end{array}\right. \quad \Delta$$

Следствие (необходимый признак существования изображения). Если $F(p)$ − изображение функции-оригинала $f(t)$, то $\lim\limits_{p\to\infty} F(p)=0$, оставаясь внутри угла $-\dfrac{\pi}{2}+\alpha<\arg p<\dfrac{\pi}{2}-\alpha,\ \alpha-$ сколь угодно малое положительное число.

∇ Утверждение вытекает из оценки $|F(p)|\le\dfrac{M}{s-s_0}$ при $s\to s_0$. Δ

Теорема 2 (о единственности). Если $F(p)$ − изображение двух функций-оригиналов, то они совпадают в точках непрерывности.

Если при решении практической задачи определено изображение искомой функции, а затем и сама эта функция, то на основании теоремы о единственности можно заключить, что найденная функция есть решение поставленной задачи и других решений не существует.

Теорема 3 (линейность). Для любых чисел a и b справедливо равенство

$$af(t)+bg(t)\xrightarrow{L} aF(p)+bG(p)$$

∇ Доказательство следует непосредственно из линейности интеграла. Δ

Пример 2. Найти изображение функции $f(t)=e^{3t}$.

Решение. Напомним, что в операционном исчисление под функцией-оригиналом $f(t)$ подразумевается функция $f(t)\eta(t)$. Поэтому $f(t)=e^{3t}$ удовлетворяет всем условиям оригинала при $M=1,\ s_0=3$.

Найдем ее изображение:

$$F(p)=\int_0^{+\infty} e^{-pt}\cdot e^{3t}dt=\int_0^{+\infty} e^{-pt+3t}dt=\int_0^{+\infty} e^{-(p-3)t}dt=$$

$$=-\frac{1}{p-3}e^{-(p-3)t}\Big|_{t=0}^{t\to+\infty}=\frac{1}{p-3}.$$

\Таким образом $e^{3t}\xrightarrow{L}\frac{1}{p-3}$.

Аналогично можно показать, что $e^{at}\xrightarrow{L}\frac{1}{p-a}$, $a\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$ и при $a=0$ имеем $\eta(t)\xrightarrow{L}\frac{1}{p}$.

Пример 3. Найти изображение функции $f(t)=t^n$.

Решение. Рассмотрим $e^{at}\xrightarrow{L}\frac{1}{p-a}$, $a\neq 0$. Продифференцируем левую и правые части n раз по параметру a. В результате получим:

$$te^{at}\xrightarrow{L}\frac{1}{(p-a)^2}$$

$$t^2e^{at}\xrightarrow{L}\frac{1\cdot 2}{(p-a)^3}$$

$$\ldots$$

$$t^ne^{at}\xrightarrow{L}\frac{n!}{(p-a)^{n+1}}$$

При $a=0$ имеем $t^n\xrightarrow{L}\frac{n!}{p^{n+1}}$. Такой же результат получим, если будем искать изображение по определению, интегрируя по частям n раз.

Пример 4. Найти изображение функций $f_1(t)=e^{\alpha t}\cos\beta t,\ f_2(t)=e^{\alpha t}\sin\beta t$.

Решение. Поскольку $e^{at}\xrightarrow{L}\frac{1}{p-a}$, $a\neq 0$, то $e^{(\alpha+i\beta)t}\xrightarrow{L}\frac{1}{p-(\alpha+i\beta)}$, $\alpha^2+\beta^2\neq 0$

Воспользуемся формулой Эйлера для перехода к тригонометрическим функциям в правой части последнего соотношения: $e^{(\alpha+i\beta)t}=e^{\alpha t}(\cos\beta t+i\sin\beta t)$.

Преобразуем аналогично и правую часть этого соотношения, выделив его действительную и мнимую части,:

$$\frac{1}{p-(\alpha+i\beta)}=\frac{p-\alpha+i\beta}{(p-\alpha-i\beta)(p-\alpha+i\beta)}=\frac{p-\alpha+i\beta}{(p-\alpha)^2-(i\beta)^2}=$$
$$=\frac{p-\alpha+i\beta}{(p-\alpha)^2+\beta^2}=\frac{p-\alpha}{(p-\alpha)^2+\beta^2}+i\frac{\beta}{(p-\alpha)^2+\beta^2}.$$

На основании линейности преобразования Лапласа приходим к выводу, что

$$e^{\alpha t}\cos\beta t\xrightarrow{L}\frac{p-\alpha}{(p-\alpha)^2+\beta^2},\quad e^{\alpha t}\sin\beta t\xrightarrow{L}\frac{\beta}{(p-\alpha)^2+\beta^2}.$$

Замечание. Функция Хевисайда относится к классу, так называемых, обобщенных функций. Ее часто называют единичной обобщенной функцией. Среди обобщенных функций есть также функция-оригинал, изображение которой равно 1. Это функция Дирака, или дельта-функция. Она определяется следующим образом:

$$\delta(t)=\left[\begin{array}{l}\infty,\ t=0,\\ 0,\ t\neq 0.\end{array}\right.$$

Не вдаваясь в подробности теории обобщенных функций, заметим, что эти функции связаны следующими равенствами: $\eta'(t)=\delta(t),\quad \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\delta(t)dt=1$. Если учесть, что $\int\limits_a^b \delta(t)f(t)dt=f(0),\ 0\in(a,b)$, можно найти изображение $\delta(t)$:

$$\delta(t)\xrightarrow{L}\int\limits_0^{+\infty}e^{-pt}\delta(t)dt=\int\limits_{-0}^{+0}e^{-pt}\delta(t)dt+\int\limits_{+0}^{+\infty}e^{-pt}\delta(t)dt=1.$$

Таким образом, используя определение и простейшие свойства преобразования Лапласа, были получены изображения основных функций-оригиналов (табл.1).

$f(t)$	$\eta(t)$	t^n	e^{at}	$t^n e^{at}$	$e^{\alpha t}\cos\beta t$	$e^{\alpha t}\sin\beta t$	$\delta(t)$
$F(p)$	$\frac{1}{p}$	$\frac{n!}{p^{n+1}}$	$\frac{1}{p-a}$	$\frac{n!}{(p-a)^{n+1}}$	$\frac{p-\alpha}{(p-\alpha)^2+\beta^2}$	$\frac{\beta}{(p-\alpha)^2+\beta^2}$	1

Табл. 1. Основные оригиналы и их изображения

1.2 Свойства преобразования Лапласа

Находить изображение по определению достаточно просто для ограниченного множества функций. Свойства преобразования Лапласа существенно облегчают задачу как поиска изображений для большого числа оригиналов, так и поиска оригиналов по изображению.

Пусть в формулировках ниже следующих теорем

$$f(t)\xrightarrow{L}F(p),\ g(t)\xrightarrow{L}G(p),$$
$$|f(t)|\le Me^{s_1 t},\ |g(t)|\le Ne^{s_2 t}.$$

Теорема 1 (о подобии). $f(kt)\xrightarrow{L}\frac{1}{k}F\left(\frac{p}{k}\right)\quad \forall k>0$.

∇ По определению преобразования Лапласа

$$f(kt)\xrightarrow{L}\int_0^{+\infty}e^{-pt}f(kt)dt=\left|\begin{matrix}kt=u\to t=\dfrac{u}{k}\to dt=\dfrac{1}{k}du\\ 0\to 0,\ +\infty\to+\infty\end{matrix}\right|=$$
$$=\frac{1}{k}\int_0^{+\infty}e^{-p\frac{u}{k}}f(u)du=\frac{1}{k}\int_0^{+\infty}e^{-\frac{p}{k}u}f(u)du=\frac{1}{k}F\left(\frac{p}{k}\right).$$

Полученное изображение определено и аналитично в области $\operatorname{Re}p>\max\{s_1,ks_1\}$, поскольку $|f(t)|\le Me^{s_1 t}$. Таким образом, $f(kt)\xrightarrow{L}\frac{1}{k}F\left(\frac{p}{k}\right)\quad\forall k>0$. Δ

Пример 1. Используя теорему о подобии, найти изображение функции $\cos 2t$.

Решение. Воспользуемся тем, что $\cos t\xrightarrow{L}F(p)=\dfrac{p}{p^2+1}$. Тогда $\cos 2t\xrightarrow{L}\dfrac{1}{2}F\left(\dfrac{p}{2}\right)=\dfrac{1}{2}\dfrac{\frac{p}{2}}{\left(\frac{p}{2}\right)^2+1}=\dfrac{1}{4}\dfrac{p}{\frac{p^2+4}{4}}=\dfrac{p}{p^2+4}$. Сравните результат с полученным ранее.

Теорема 2 (о запаздывании). $f(t-\tau)\xrightarrow{L}e^{-\tau p}F(p)\quad\forall\tau>0$.

∇ Поскольку $f(t-\tau)$ − оригинал, то $f(t-\tau)=0$ при $t<\tau$ (Рис.1).

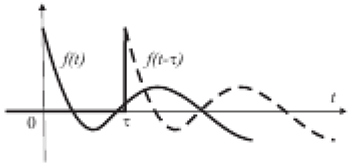


Рис.1 Оригинал и его запаздывающий аналог

Значит,

$$f(t-\tau)\xrightarrow{L}\int_0^{+\infty} e^{-pt} f(t-\tau)dt=\int_\tau^{+\infty} e^{-pt} f(t-\tau)dt=$$

$$\left|\begin{array}{l} t-\tau=u\rightarrow dt=du \\ \tau\rightarrow 0,\ +\infty\rightarrow+\infty \end{array}\right|=\int_0^{+\infty} e^{-p(u+\tau)} f(u)du=e^{-p\tau}\int_0^{+\infty} e^{-pu} f(u)du=e^{-p\tau}F(p).$$

Таким образом, $f(t-\tau)\xrightarrow{L}e^{-\tau p}F(p)\quad\forall\tau>0$. Δ

Пример 2. Используя теорему 2, найти изображение функции $f(t-1)=(t-1)^3\eta(t-1)$.

Решение. Поскольку $f(t)=t^3\eta(t)\xrightarrow{L}F(p)=\frac{3!}{p^{3+1}}=\frac{6}{p^4}$, то на основании теоремы о запаздывании при $\tau=1$ имеем $f(t-1)\xrightarrow{L}e^{-p\cdot 1}F(p)=e^{-p}\frac{6}{p^4}$.

Замечание. Следует проводить различие между функцией $f(t-\tau)$ и функцией, в аналитическом задании которой присутствует выражение $t-\tau$. В качестве иллюстрации найдем изображения следующих функций:

$f(t-1)=(t-1)^3\eta(t-1)$ и $g(t)=(t-1)^3\eta(t)$ (Рис.2, 3).

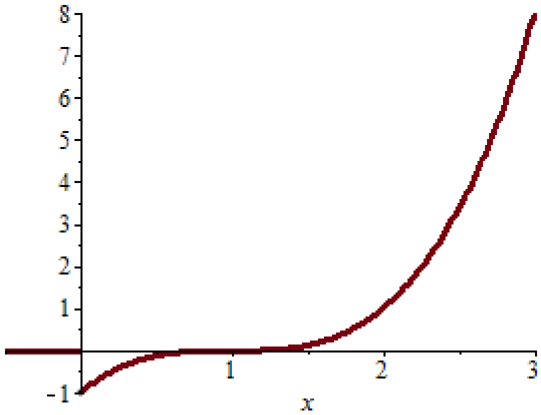


Рис.2 $f(t-1)=(t-1)^3\eta(t-1)$

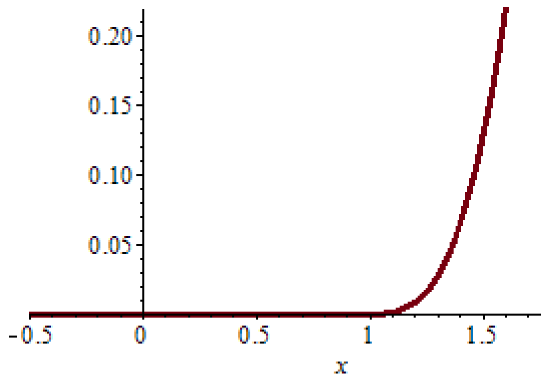


Рис.3 $g(t)=(t-1)^3\eta(t)$

Как было найдено в примере 2, $f(t-1)\xrightarrow{L}e^{-p}\frac{6}{p^4}$. Для нахождения изображения функции $g(t)=(t-1)^3\eta(t)$ воспользуемся линейностью преобразования Лапласа:

$$(t-1)^3\eta(t)=(t^3-3t^2+3t-1)\eta(t)\xrightarrow{L}L[t^3]-3L[t^2]+3L[t]-L[\eta(t)]=$$

$$=\frac{6}{p^4}-3\cdot\frac{2}{p^3}+3\cdot\frac{1}{p^2}-\frac{1}{p}=\frac{6-6p+3p^2-p^3}{p^4}.$$

Легко видеть, что изображения функций не совпадают.

Теорему о запаздывании удобно применять для функций, которые на разных участках задаются различными выражениями.

Пример 4. Найти изображение функции, заданной графически (рис.4).

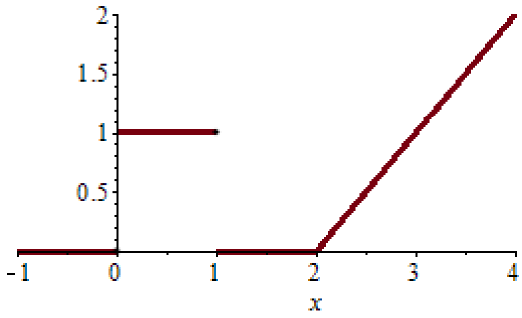


Рис.4 Функция-оригинал

Решение. Проанализируем заданный график. При $t<0$ и на интервале $(1, 2)$ функция обращается в 0, на промежутке $(0, 1)$ она принимает значение 1, наконец, при $t \geq 2$ ее графиком является часть прямой, проходящей через точки $(2, 0)$, $(3, 1)$ согласно уравнению $f(t)=t-2$. Запишем аналитическое выражение для функции на основании сделанного анализа:

$$f(t)=\left[\begin{array}{l} 1,\ 0<t<1, \\ 0,\ 1<t<2, \\ t-2,\ t>2. \end{array}\right.$$

Теперь построим одну формулу для задания функции.

Пусть сначала $f(t)=\eta(t)$. Найдем такую функцию $f_1(t)$, чтобы при сложении с $\eta(t)$ на промежутке $(1, 2)$ получить $f(t)=\eta(t)+f_1(t)=0$. Очевидно, $f_1(t)=-\eta(t-1)$. Аргумент единичной функции взят с запаздыванием, чтобы обнуление началось с аргумента $t>1$. Таким образом, $f(t)=\eta(t)-\eta(t-1),\ t<2$. Теперь добавим к имеющейся формуле $f_2(t)=t-2,\ t>2$. В виде одного выражения это можно записать как $f_2(t)=(t-2)\eta(t-2)$. Таким образом, заданную функцию на всей вещественной прямой определим формулой $f(t)=\eta(t)-\eta(t-1)+(t-2)\eta(t-2)$.

На основании линейности преобразования Лапласа и теоремы запаздывания получим:

$$f(t)=\eta(t)-\eta(t-1)+(t-2)\eta(t-2)\xrightarrow{L}F(p)=\frac{1}{p}-e^{-p}\frac{1}{p}+e^{-2p}\frac{1}{p^2}.$$

Замечание. Можно вывести аналогично теореме 2 общую формулу для изображения функции $f(t+\tau),\ \tau>0$: $f(t+\tau)\xrightarrow{L} e^{p\tau}\left(F(p)-\int\limits_0^{\tau} e^{-pt} f(t)dt\right)$.

Теорема 3 (изображение для периодической функции). Если оригинал $f(t)$ является T – периодической функцией, то ее изображение $F(p)=\dfrac{\int\limits_0^T e^{-pt} f(t)dt}{1-e^{-pT}}$.

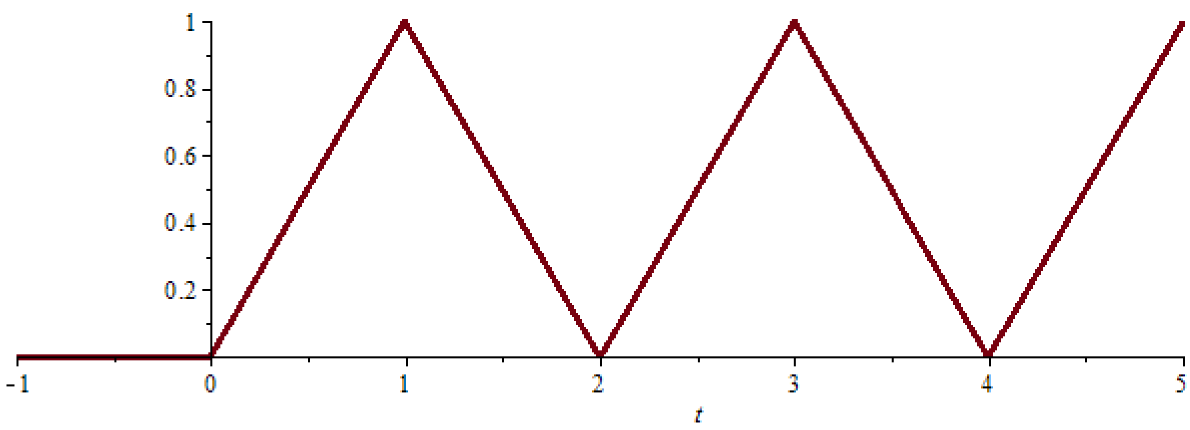
∇ Имеем $f(t)\xrightarrow{L} F(p)$, значит, в силу периодичности $f(t)$ также справедливо $f(t+T)\xrightarrow{L} F(p)$. Согласно предыдущему замечанию имеем:

$$f(t+T)\xrightarrow{L} e^{pT}\left(F(p)-\int\limits_0^T e^{-pt} f(t)dt\right).$$

На основании теоремы единственности $F(p)=e^{pT}\left(F(p)-\int\limits_0^T e^{-pt} f(t)dt\right)$, откуда

$$F(p)=-\frac{e^{pt}\int\limits_0^T e^{-pt} f(t)dt}{1-e^{pt}}=\frac{\int\limits_0^T e^{-pt} f(t)dt}{1-e^{-pt}}.$$

Пример 5. Используя формулу теоремы 3, найти изображение периодической функции, заданной графиком:



Решение. Из графика можно заметить, что $T=2$, а на периоде функция задана формулой:

$$f(t)=\left[\begin{array}{l} t,\ 0<t\le 1, \\ 2-t,\ 1<t\le 2. \end{array}\right.$$

На основании теоремы 3 имеем:

$$F(p)=\frac{1}{1-e^{-pt}}\int_0^T e^{-pt}f(t)dt=|T=2|=\frac{1}{1-e^{-2p}}\left(\int_0^1 te^{-pt}dt+\int_1^2(2-t)e^{-pt}dt\right)=$$

$$=\frac{1}{1-e^{-2p}}\left(-\frac{e^{-p}}{p}-\frac{e^{-p}}{p^2}+\frac{1}{p^2}+\frac{e^{-p}}{p}-\frac{e^{-p}}{p^2}+\frac{e^{-2p}}{p^2}\right)=\frac{(1-e^{-p})^2}{p^2(1-e^{-p})(1+e^{-p})}=\frac{1-e^{-p}}{p^2(1+e^{-p})}$$

Теорема 4 (о смещении). $e^{ct}f(t)\xrightarrow{L}F(p-c)\ \ \forall c\in\square$.

∇ Найдем изображение функции-оригинала $e^{ct}f(t)\ \forall c\in\square$ по определению преобразования Лапласа:

$$e^{ct}f(t)\xrightarrow{L}\int_0^{+\infty}e^{-pt}e^{ct}f(t)dt=\int_0^{+\infty}e^{-(p-c)t}f(t)dt=F(p-c)\ \ \forall c\in\square\ .\Delta$$

Пример 6. Найти изображение функции $e^{-3t}\cos 2t$ с помощью теоремы о смещении.

Решение. Поскольку $f(t)=\cos 2t\xrightarrow{L}F(p)=\dfrac{p}{p^2+4},\ c=-3$, то на основании теоремы 4 $e^{-3t}\cos 2t\xrightarrow{L}F(p-(-3))=\dfrac{p+3}{(p+3)^2+4}$. Сравните с таблицей оригиналов и изображений.

Теорема 5 (о дифференцировании оригинала). Если $f(t),\ f'(t),\ f''(t),...,\ f^{(n)}(t)$ – функции-оригиналы, то

$$\begin{aligned}&f'(t)\xrightarrow{L}pF(p)-f(+0),\\&f''(t)\xrightarrow{L}p^2F(p)-pf(+0)-f'(+0),\\&...\\&f^{(n)}(t)\xrightarrow{L}p^nF(p)-p^{n-1}f(+0)-p^{n-2}f'(+0)-...-f^{(n-1)}(+0).\end{aligned}$$

∇ Найдем изображения $f'(t),\ f''(t)$ по определению:

$$f'(t)\xrightarrow{L}\int e^{-pt}f'(t)dt=\begin{vmatrix}u=e^{-pt}\to du=-pe^{-pt}dt\\ dv=f'(t)dt\to v=f(t)\end{vmatrix}=$$

$$=e^{-pt}f(t)\Bigg|_{t\to+0}^{t\to+\infty}+p\int_0^{+\infty}e^{-pt}f(t)dt=0-f(+0)+pF(p)=pF(p)-f(+0).$$

Поскольку $f'(t)$ − оригинал по условию теоремы с найденным изображением $F_1(p) = pF(p) - f(+0)$, то согласно только что выведенной формуле

$$(f'(t))' \xrightarrow{L} pF_1(p) - f'(+0) = p(pF(p) - f(+0)) - f'(+0) = p^2F(p) - pf(+0) - f'(+0).$$

На основании метода математической индукции можно доказать что

$$f^{(n)}(t) \xrightarrow{L} p^nF(p) - p^{n-1}f(+0) - p^{n-2}f'(+0) - ... - f^{(n-1)}(+0). \ \Delta$$

Следствие. Если для функции $f(t)$ и ее производных выполняются условия

$f(+0) = f'(+0) = ... = f^{(n-1)}(+0) = 0$, то их изображения упрощаются:

$$f'(t) \xrightarrow{L} pF(p),\ f''(t) \xrightarrow{L} p^2F(p),..., f^{(n)}(t) \xrightarrow{L} p^nF(p).$$

Замечание. Последние соотношения наглядно демонстрируют возможность формальной замены оператора дифференцирования символом p по отношению к изображению Лапласа.

Пример 7. Найти изображение функции $f(t) = \sin^2(t)$.

Решение. Поскольку $f'(t) = (\sin^2 t)' = 2\sin t\cos t = \sin 2t \xrightarrow{L} \dfrac{2}{p^2+4}$, а по теореме о дифференцировании оригинала $f'(t) \xrightarrow{L} pF(p) - f(+0) = pF(p)$, где $F(p)$ − искомое изображение, а $f(+0) = \sin^2(0) = 0$, получаем $pF(p) = \dfrac{2}{p^2+4}$. Из последнего уравнения следует $F(p) = \dfrac{2}{p(p^2+4)}$.

Теорема 6 (об интегрировании оригинала). Справедливо следующее соотношение:

$$\int_0^t f(u)du \xrightarrow{L} \frac{F(p)}{p}.$$

∇ Для нахождения изображения воспользуемся определением преобразования Лапласа и поменяем пределы интегрирования в полученном двойном интеграле:

$$\int_0^t f(u)du \xrightarrow{L} \int_0^{+\infty} e^{-pt}\left(\int_0^t f(u)du\right)dt = \left|0<u<t<+\infty\right| = \int_0^{+\infty} f(u)\left(\int_u^{+\infty} e^{-pt}dt\right)du =$$

$$= \int_0^{+\infty} f(u)\left(-\frac{e^{-pt}}{p}\right)\Bigg|_{t=u}^{t\to+\infty} du = \frac{1}{p}\int_0^{+\infty} f(u)e^{-pu}du = \frac{1}{p}F(p).$$

Δ

Пример 8. Найти изображение интеграла $\int_0^t e^u du$.

Решение. Поскольку $f(t)=e^p \xrightarrow{L} F(p)=\frac{1}{p-1}$**,** то на основании теоремы об интегрировании оригинала имеем:

$$\int_0^t e^u du \xrightarrow{L} \frac{1}{p}F(p) = \frac{1}{p}\cdot\frac{1}{p-1} = \frac{1}{p(p-1)}.$$

Теорема 7 (о дифференцировании изображения). Справедливо следующее соотношение:

$$(-t)^n f(t) \xrightarrow{L} F^{(n)}(p).$$

∇ Продифференцируем изображение $F(p)=\int_0^{+\infty} e^{-pt}f(t)dt$ функции $f(t)$ n раз: б

$$F'(p) = \int_0^{+\infty}(-te^{-pt})f(t)dt = \int_0^{+\infty} e^{-pt}(-tf(t))dt \risingdotseq -tf(t),$$

$$F''(p) = \int_0^{+\infty}(-t)^2 e^{-pt} f(t)dt = \int_0^{+\infty} e^{-pt}(-t)^2 f(t)dt \risingdotseq (-t)^2 f(t),$$

$$\dots$$

$$F^{(n)}(p) = \int_0^{+\infty}(-t)^n e^{-pt} f(t)dt = \int_0^{+\infty} e^{-pt}(-t)^n f(t)dt \risingdotseq (-t)^n f(t).\Delta$$

Пример 9. Найти изображение функции t^2e^t.

Решение. Поскольку $f(t)=e^t \xrightarrow{L} F(p)=\frac{1}{p-1}$, то на основании теоремы о дифференцировании изображения имеем:

$$t^2e^t=t^2 f(t)\xrightarrow{L}F''(p)=\left(\frac{1}{p-1}\right)''=\left(-\frac{1}{(p-1)^2}\right)'=\frac{2}{(p-1)^3}.$$

Теорема 8 (об интегрировании изображения). Если несобственный интеграл $\int\limits_p^{+\infty}F(u)du$ сходится, то $\frac{f(t)}{t}\xrightarrow{L}\int\limits_p^{+\infty}F(u)du$.

$$\nabla\ \frac{f(t)}{t}\xrightarrow{L}\int\limits_0^{+\infty}e^{-pt}\frac{f(t)}{t}dt=\int\limits_0^{+\infty}f(t)\int\limits_p^{+\infty}\left(e^{-ut}du\right)dt=\int\limits_p^{+\infty}\int\limits_0^{+\infty}f(t)e^{-ut}dtdu=\int\limits_p^{+\infty}F(u)du\,.\Delta$$

Следствие. $\int\limits_0^{+\infty}\frac{f(t)}{t}dt=\int\limits_0^{+\infty}F(p)dp$ при условии сходимости несобственного интеграла.

∇ Подставим в правую часть равенства интеграл Лапласа и поменяем пределы интегрирования:

$$\int\limits_0^{+\infty}F(p)dp=\int\limits_0^{+\infty}\int\limits_0^{+\infty}e^{-pt}f(t)dtdp=\int\limits_0^{+\infty}f(t)\int\limits_0^{+\infty}e^{-pt}dpdt=$$

$$=\int\limits_0^{+\infty}f(t)\left(-\frac{1}{t}e^{-pt}\right)\Bigg|_{p=0}^{p\to+\infty}dt=\int\limits_0^{+\infty}\frac{f(t)}{t}dt.$$

Δ

Пример 10. Найти изображение функции-оригинала $\frac{\sin t}{t}$.

Решение. Поскольку $f(t)=\sin t\xrightarrow{L}F(p)=\frac{1}{p^2+1}$, то на основании теоремы об интегрировании изображения имеем:

$$\frac{\sin t}{t}\xrightarrow{L}\int\limits_p^{+\infty}\frac{du}{u^2+1}=arctgu\Bigg|_{u=p}^{u\to+\infty}=\frac{\pi}{2}-arctgp=arcctgp\,.$$

Пример 11. Вычислить интеграл $\int\limits_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t}dt$.

Решение. Поскольку $f(t)=\sin t \xrightarrow{L} F(p)=\dfrac{1}{p^2+1}$, то на основании следствия из теоремы 8 имеем: $\int\limits_0^{+\infty}\dfrac{\sin t}{t}dt=\int\limits_0^{+\infty}\dfrac{dp}{p^2+1}=arctg(+\infty)-arctg\,0=\dfrac{\pi}{2}$.

Определение. Сверткой двух функций $f(t)$ и $g(t)$ называется функция вида

$$f(t)*g(t)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f(u)g(t-u)du=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}g(u)f(t-u)du.$$

Для функций-оригиналов с учетом их нулевого значения при отрицательном аргументе справедливо $f(t)*g(t)=\int\limits_0^t f(u)g(t-u)du=\int\limits_0^t g(u)f(t-u)du$.

Теорема 9 (о свертке). Для функций-оригиналов $f(t)$ и $g(t)$ справедливо

$$f(t)*g(t)\xrightarrow{L}F(p)G(p).$$

$$f(t)*g(t)\xrightarrow{L}\int\limits_0^{+\infty}e^{-pt}\int\limits_0^{+\infty}f(u)g(t-u)dudt=|0<u<t<+\infty|=$$

$$\nabla\ =\int\limits_0^{+\infty}\int\limits_u^{+\infty}e^{-pt}f(u)g(t-u)dtdu=\int\limits_0^{+\infty}f(u)\int\limits_u^{+\infty}e^{-pt}g(t-u)dtdu=|t-u=z|=$$

$$=\int\limits_0^{+\infty}f(u)\int\limits_0^{+\infty}e^{-p(u+z)}g(z)dzdu=\int\limits_0^{+\infty}f(u)e^{-pu}du\int\limits_0^{+\infty}e^{-pz}g(z)dz=F(p)G(p).$$

Δ

Пример 12. Найти изображение функции t^2*t.

Решение. Решим задачу двумя способами.

<u>1-й способ</u>. По определению свертки функций-оригиналов

$$t^2*t=\int\limits_0^t u^2(t-u)du=\left(\frac{u^3t}{3}-\frac{u^4}{4}\right)\Bigg|_{u=0}^{u=t}=\frac{t^4}{3}-\frac{t^4}{4}=\frac{t^4}{12}\xrightarrow{L}\frac{1}{12}\cdot\frac{4!}{p^5}=\frac{2}{p^5}.$$

<u>2-й способ.</u> Поскольку $t^2\xrightarrow{L}\dfrac{2}{p^3}$, $t\xrightarrow{L}\dfrac{1}{p^2}$, то на основании теоремы о свертке

$$t^2*t\xrightarrow{L}L[t^2]\cdot L[t]=\frac{2}{p^3}\cdot\frac{1}{p^2}=\frac{2}{p^5}.$$

1.3 Обратное преобразование Лапласа

Оригинал по известному изображению определяется однозначно следующей формулой при достаточно общих условиях:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{s_0 - i\infty}^{s_0 + i\infty} e^{pt} F(p)dp, \ \operatorname{Re} p > s_0 .$$

На практике наиболее удобными являются методы обращения изображения, основанные на, так называемых, теоремах разложения. Приведем наиболее простые следствия из них в виде правил, которые в сочетании со свойствами преобразования Лапласа являются полезными алгоритмами для решения многих задач.

<u>Правило 1.</u> Если $F(p)$ − правильная рациональная дробь, то ее можно разложить на сумму простейших дробей, найти оригинал для каждого из слагаемых и воспользоваться свойством линейности изображения.

Пример 1. Найти оригинал функции $F(p) = \dfrac{1}{p(p-1)(p^2+4)}$.

Решение. Разложим дробь на сумму простейших дробей с неопределенными коэффициентами:

$$\frac{1}{p(p-1)(p^2+4)} = \frac{a}{p} + \frac{b}{p-1} + \frac{cp+d}{p^2+4}.$$

Приведем правую часть к общему знаменателю:

$$\frac{1}{p(p-1)(p^2+4)} = \frac{a(p-1)(p^2+4) + bp(p^2+4) + (cp+d)(p^2-1)}{p(p-1)(p^2+4)}.$$

Найдем коэффициенты из равенства числителей-многочленов:

$$1 = a(p-1)(p^2+4) + bp(p^2+4) + (cp+d)(p^2-1).$$

Для этого приравняем коэффициенты при одинаковых степенях p:

$$\begin{aligned} &p^3: \ a+b+c=0, \\ &p^2: \ -a-c+d=0, \\ &p^1: \ 4a+4b-d=0, \\ &p^0: \ -4a=1. \end{aligned}$$

Решим полученную систему линейных уравнений: $a = -\dfrac{1}{4}, b = \dfrac{1}{5}, c = \dfrac{1}{20}, d = -\dfrac{1}{5}$.

Таким образом, $F(p)=-\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{p}+\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{p-1}+\frac{1}{20}\cdot\frac{p}{p^2+4}-\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{p^2+4}$.

Найдя оригиналы для простейших дробей по таблице оригиналов и изображений, получим на основании свойства линейности изображения искомую функцию-оригинал:

$$f(t)=-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}e^t+\frac{1}{20}\cos 2t-\frac{1}{10}\sin 2t.$$

Пример 2. Найти оригинал изображения $F(p)=\frac{1}{(p^2+1)^2}$.

Решение. Изображение представлено простейшей дробью, которой нет в построенной таблице оригиналов и изображений. Воспользуемся теоремой о свертке. Действительно, $F(p)=\frac{1}{(p^2+1)^2}=\left(\frac{1}{p^2+1}\right)^2=\left(L[\sin t]\right)^2$. Значит, оригинал $f(t)$ представляет собой свертку $\sin t*\sin t$. Найдем ее:

$$\sin t*\sin t=\int_0^t \sin u\sin(t-u)du=\frac{1}{2}\int_0^t(\cos(2u-t)-\cos t)du=$$

$$=\frac{1}{4}\sin(2u-t)\Big|_{u=0}^{u=t}-\frac{1}{2}u\cos t\Big|_{u=0}^{u=t}=\frac{1}{4}\sin t-\frac{1}{4}\sin(-t)-\frac{1}{2}t\cos t=\frac{1}{2}(\sin t-t\cos t).$$

Пример 3. Найти оригинал изображения $F(p)=\frac{e^{-p}}{p+1}$.

Решение. Наличие множителя e^{-p} позволяет применить теорему о запаздывании. Поскольку $\frac{1}{p+1}=L[e^{-t}]$, то на основании теоремы о запаздывании с параметром $\tau=1$ получим $F(p)=\frac{e^{-p}}{p+1}=L[e^{-(t-1)}\eta(t-1)]$, то есть $f(t)=e^{-(t-1)}\eta(t-1)$.

<u>Правило 2</u>. (Дополнительный материал, так как для его понимания необходимо знание основ комплексного анализа). При нахождении оригиналов может быть использована формула

$$f(t)=\sum_k res_{p_k}(F(p)e^{pt}),$$

где сумма вычетов берется по всем особым точкам p_k функции $F(p)$.

В частности, если $F(p)=\dfrac{Q(p)}{R(p)}$ − правильная рациональная дробь, то

$$f(t)=\sum_k \frac{1}{(n_k-1)!}\lim_{p\to p_k}\frac{d^{n_k-1}}{dp^{n_k-1}}(F(p)e^{pt}(p-p_k)^{n_k},$$

где p_k − полюсы $F(p)$ кратности n_k.

В случае простых полюсов последняя формула упрощается и принимает вид:

$$f(t)=\sum_k \frac{Q(p_k)}{R'(p_k)}e^{p_k t}.$$

Пример 4. Найти оригинал изображения $F(p)=\dfrac{p}{(p^2-1)^2}$.

Решение. Функция $F(p)$ имеет полюсы $p=\pm 1$ второго порядка. Значит,

$$f(t)=\lim_{p\to -1}\left(\frac{pe^{pt}}{(p-1)^2}\right)'_p+\lim_{p\to 1}\left(\frac{pe^{pt}}{(p+1)^2}\right)'_p=$$

$$=\lim_{p\to -1}\frac{(e^{pt}+pte^{pt})(p-1)^2-2pe^{pt}(p-1)}{(p-1)^4}+\lim_{p\to 1}\frac{(e^{pt}+pte^{pt})(p+1)^2-2pe^{pt}(p+1)}{(p+1)^4}=$$

$$=\frac{4(e^{-t}-te^{-t})-4e^{-t}}{16}+\frac{4(e^{t}+te^{t})-4e^{t}}{16}=-\frac{1}{4}te^{-t}+\frac{1}{4}te^{t}=\frac{1}{2}t\frac{e^{t}-e^{-t}}{2}=\frac{1}{2}t\,\mathrm{sh}\,t.$$

1.4 Решение задачи Коши некоторых дифференциальных уравнений и их систем

Применяя преобразование Лапласа к решению задачи Коши, искомое частное решение дифференциального уравнения (системы дифференциальных уравнений) получают путем решения соответствующего алгебраического уравнения (системы алгебраического уравнений) относительно его изображения (изображений).

Рассмотрим дифференциальное уравнение $a_0x''(t)+a_1x'(t)+a_2x(t)=f(t)$ с постоянными коэффициентами a_0, a_1, a_2, где $f(t)$ − функция-оригинал. Будем искать его решение-оригинал, удовлетворяющее начальным условиям $x(0)=x_0,\ x'(0)=x_1$.

Пусть $x(t)\xrightarrow{L}X(p),\ f(t)\xrightarrow{L}F(p)$. Тогда, применив к заданному уравнению с начальными условиями преобразование Лапласа, получим операторное уравнение:

$$a_0(p^2X(p)-px_0-x_1)+a_1(pX(p)-x_0)+a_2X(p)=F(p).$$

Перепишем его в виде:

$$(a_0 p^2 + a_1 p + a_2) X(p) - (a_0 p x_0 + a_0 x_1 + a_1 x_0) = F(p).$$

Разрешим последнее уравнение относительно $X(p)$:

$$X(p) = \frac{F(p) + a_0 p x_0 + a_0 x_1 + a_1 x_0}{a_0 p^2 + a_1 p + a_2}.$$

Это, так называемое, операторное решение, по которому можно найти функцию-оригинал $x(t)$, которая и будет являться решением исходной задачи Коши.

В общем случае решение задачи Коши для линейного дифференциального уравнения n-го порядка с постоянными коэффициентами или систем решается аналогично.

Пример 1. Решить операторным методом задачу Коши:

$$\begin{cases} x''(t) + x(t) = 2\cos t, \\ x(0) = 0,\ x'(0) = -1. \end{cases}$$

Решение. Пусть $x(t) \xrightarrow{L} X(p)$. Тогда по теореме о дифференцировании оригинала

$$x'(t) \xrightarrow{L} pX(p) - x(0) = pX(p),$$
$$x''(t) \xrightarrow{L} p^2 X(p) - px(0) - x'(0) = p^2 X(p) + 1.$$

Поскольку $\cos t \xrightarrow{L} \frac{p}{p^2+1}$, получаем следующее операторное уравнение:

$$p^2 X(p) + X(p) + 1 = \frac{2p}{p^2+1} \Rightarrow X(p) = \frac{2p}{(p^2+1)^2} - \frac{1}{p^2+1}.$$

Найдем оригинал для полученного изображения искомого решения.

Из таблицы найдем $\frac{1}{p^2+1} \xrightarrow{L^{-1}} \sin t$. Для нахождения оригинала изображения $\frac{2p}{(p^2+1)^2}$ можно использовать теорему о свертке или теорему о дифференцировании изображения. Рассмотрим оба подхода.

На основании теоремы о свертке получим:

$$\frac{2p}{(p^2+1)^2}=2\frac{p}{p^2+1}\cdot\frac{1}{p^2+1}=2L[\cos t]\cdot L[\sin t]\xrightarrow{L^{-1}}2\int_0^t \cos u\sin(t-u)du=$$

$$=\int_0^t(\sin(t-2u)+\sin t)du=\frac{1}{2}\cos(t-2u)\Big|_{u=0}^{u=t}+u\sin t\Big|_{u=0}^{u=t}=t\sin t.$$

Для использования теоремы о дифференцирования изображения достаточно заметить, что $\frac{2p}{(p^2+1)^2}=-\left(\frac{1}{p^2+1}\right)'=-(L[\sin t])'\xrightarrow{L^{-1}}-(-1t)(\sin t)=t\sin t.$

Окончательно имеем: $x(t)=(t-1)\sin t$.

Пример 2. Решить операторным методом задачу Коши для системы дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} 2x'(t)+y'(t)+x(t)=1, \\ x'(t)+3y'(t)+2y(t)=0, \\ x(0)=y(0)=0. \end{cases}$$

Решение. Пусть $x(t)\xrightarrow{L}X(p),\ y(t)\xrightarrow{L}Y(p)$. Тогда соответствующая операторная система примет вид:

$$\begin{cases} 2pX(p)+pY(p)+X(p)=\frac{1}{p}, \\ pX(p)3pY(p)+2Y(p)=0. \end{cases}$$

Преобразуем систему к виду:

$$\begin{cases} (2p+1)X(p)+pY(p)=\frac{1}{p}, \\ pX(p)+(3p+2)Y(p)=0. \end{cases}$$

Как видно, это система линейных уравнений относительно неизвестных функций-изображений $X(p),\ Y(p)$. Найдем ее решение методом подстановки, Гаусса или Крамера: $X(p)=\frac{3p+2}{p(5p^2+7p+2)},\ Y(p)=-\frac{1}{5p^2+7p+2}.$

Так как $5p^2+7p+2=5(p+\frac{2}{5})(p+1)$, то первая дробь имеет три простых полюса $p_1=0,\ p_2=-\frac{2}{5},\ p_3=-1$, а вторая – два $p_1=-\frac{2}{5},\ p_2=-1$. Согласно правилу 2 нахождения оригиналов по изображению имеем:

$$x(t)=\frac{3p+2}{(5p^3+7p^2+2p)'}e^{pt}\Bigg|_{p=0}+\frac{3p+2}{(5p^3+7p^2+2p)'}e^{pt}\Bigg|_{p=-\frac{2}{5}}+$$

$$+\frac{3p+2}{(5p^3+7p^2+2p)'}e^{pt}\Bigg|_{p=-1}=1-\frac{2}{3}e^{-\frac{2}{5}t}-\frac{1}{3}e^{-t},$$

$$y(t)=-\frac{1}{(5p^2+7p+2)'}e^{pt}\Bigg|_{p=-\frac{2}{5}}-\frac{1}{(5p^2+7p+2)'}e^{pt}\Bigg|_{p=-1}=-\frac{1}{3}e^{-\frac{2}{5}t}+\frac{1}{3}e^{-t}.$$