> *restart*;

Лабораторная работа 3.3: "Системы дифференциальных уравнений"

Выполнил: студент группы 153501 Бычко Василий

Вариант 3

Задание 1: Исследовать поведение фазовых кривых системы уравнений вблизи точки покоя. Сделать чертёж. Определить тип точки покоя по фазовому портреру и собственным значениям матрицы системы. Найти общее решение системы и выделить фундаментальную систему решений.

$$\begin{cases} y'_1 = 5\,y_1 + y_2 \\ y'_2 = 12\,y_1 + 9\,y_2 \end{cases}$$

Данная система является системой линейных однородных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

В тетради я решал ее соответсвенно

```
> de[1] := diff(y[1](x), x) = 5·y[1](x) + 1·y[2](x) :
> de[2] := diff(y[2](x), x) = 12· y[1](x) + 9·y[2](x) :
> sol := dsolve({de[1], de[2]}, {y[1](x), y[2](x)});
```

$$sol := \left\{ y_1(x) = \_C1\, e^{11\,x} + \_C2\, e^{3\,x},\ y_2(x) = 6\,\_C1\, e^{11\,x} - 2\,\_C2\, e^{3\,x} \right\} \quad \textbf{(1)}$$

в maple и в тетради немного не сошлись значения при C1 и C2, но это не страшно, так как C1 и C2 это константы

Для нахождения особой точки, найдем собственные значения данной матрицы

$$> M := \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 12 & 9 \end{bmatrix} :$$

```
> with(LinearAlgebra) :
> λ[1] := Eigenvectors(M)[1][1];
> λ[2] := Eigenvectors(M)[1][2];
```

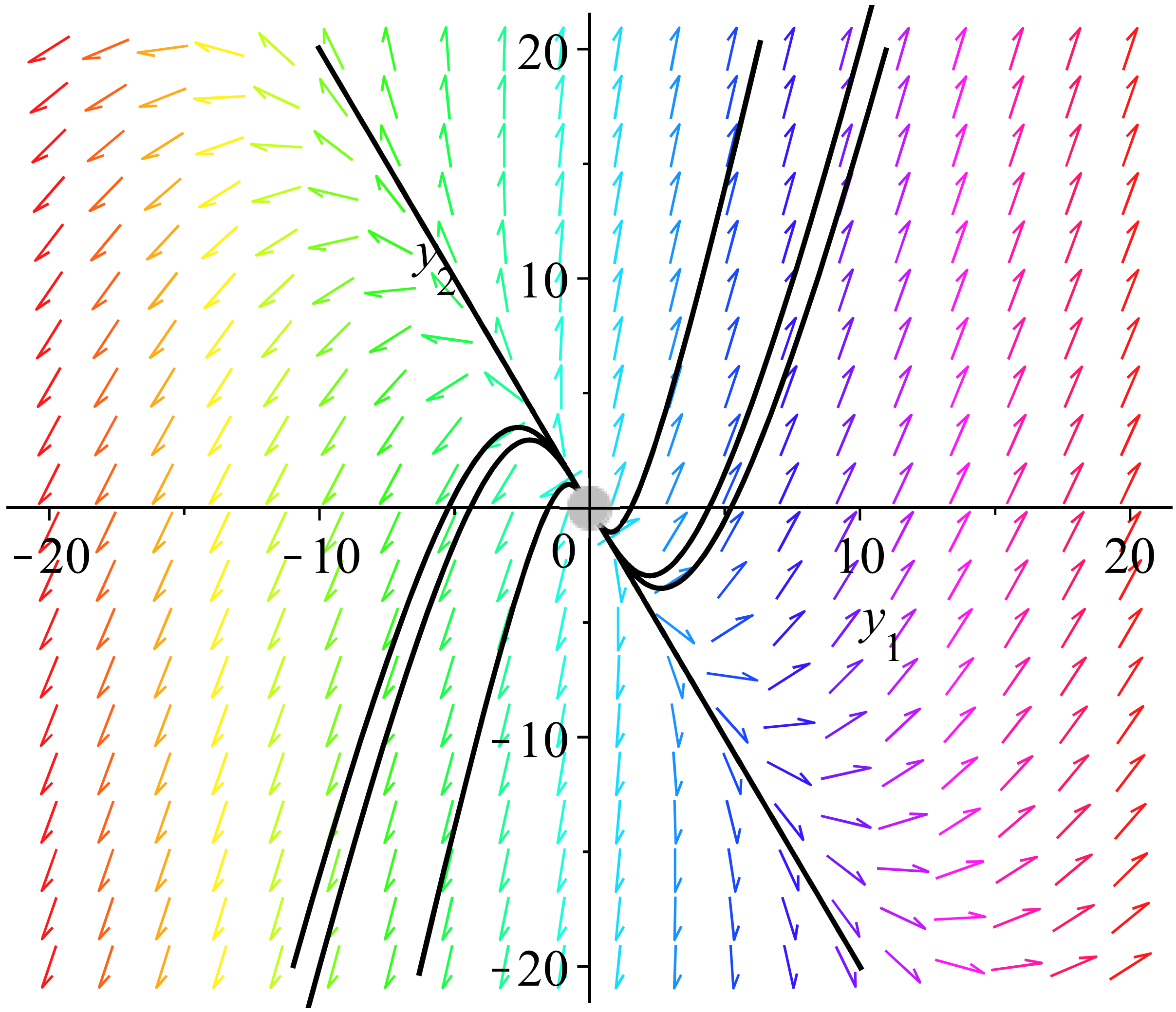
$$\lambda_1 := 3$$

$$\lambda_2 := 3 \quad \textbf{(2)}$$

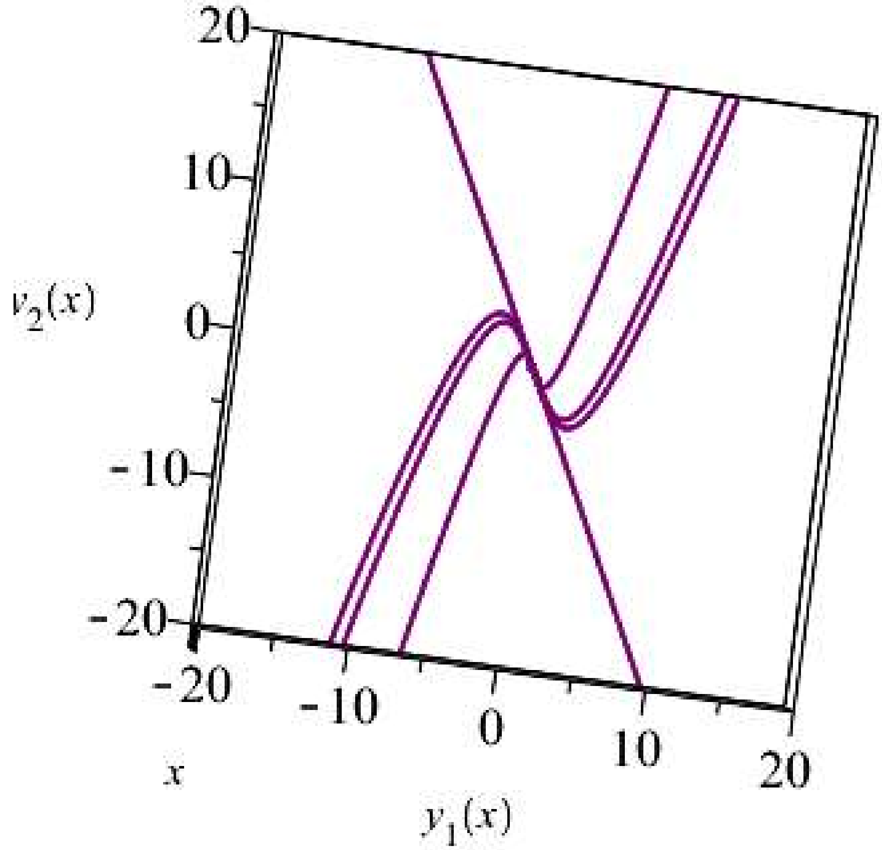
Т.к. $\lambda_1 \neq \lambda_2$, $\lambda_1 \cdot \lambda_2 > 0$ и $\lambda_{1,\,2} \in \mathbb{R}$, то **тип особой точки - узел**

потсроение фазового портрета и точки покоя

```
> phase_portrait := DEtools[phaseportrait]([de[1], de[2]], [y[1](x), y[2](x)], x =-10 ..10,
      [[3, 10, 20], [-3,-10,-20], [0, 1,-2], [0,-1, 2], [0, 6, 2], [0,-6,-2], [0, 3, 5], [0,-3,
      -5]], y[1] =-20 ..20, y[2] =-20 ..20, stepsize = 0.01, color = y[1], linecolor = black,
      thickness = 2) :
> rest_point := plot([[0, 0]], style = point, color = grey, symbol = solidcircle, symbolsize = 30) :
> plots[display](phase_portrait, rest_point);
```



> *curves* ≔ *DEtools*[*DEplot3d*]([*de*[1], *de*[2]], [*y*[1](*x*), *y*[2](*x*)], *x* = −10 ..10, [[3, 10, 20], [−3, −10, −20], [0, 1, −2], [0, −1, 2], [0, 6, 2], [0, −6, −2], [0, 3, 5], [0, −3, −5]], *y*[1] = −20 ..20, *y*[2] = −20 ..20, *stepsize* = .01, *color* = *purple*, *linecolor* = *purple*, *thickness* = 2);



> *restart*;

> $deY2Y1 := diff(y[2](y[1]), y[1]) = \dfrac{12 \cdot y[1] + 9 \cdot y[2](y[1])}{5 \cdot y[1] + y[2](y[1])}$:

> $solY2Y1 := dsolve(deY2Y1, y[2](y[1]), implicit)$;

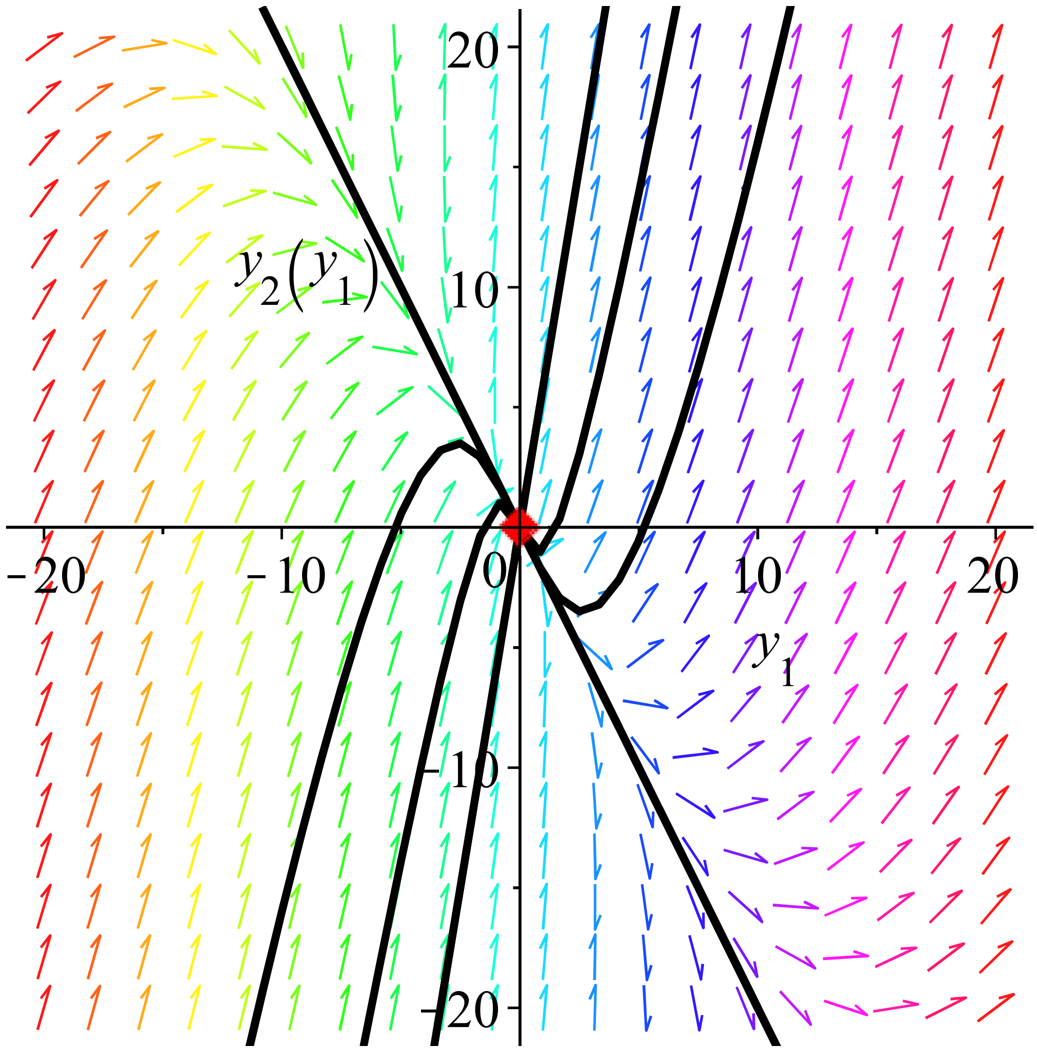
$$solY2Y1 := -\frac{11 \ln\left(\frac{y_2(y_1)}{y_1} - 6\right)}{8} + \frac{3 \ln\left(\frac{y_2(y_1)}{y_1} + 2\right)}{8} - \ln(y_1) - \_C1 = 0 \qquad \textbf{(3)}$$

> $specPoint := solve(\{5 \cdot y[1] + y[2] = 0, 12 \cdot y[1] + 9 \cdot y[2] = 0\})$:

> $integral\_curve := DEtools[DEplot](deY2Y1, y[2](y[1]), y[1] = -20 .. 20, y[2] = -20 .. 20,$ $[y[2](5) = 40, y[2](-5) = -40, y[2](1) = -2, y[2](-1) = 2, y[2](6) = 2, y[2](-6) = -2, y[2](3) = 5, y[2](-3) = -5], color = 3 \cdot y[1], linecolour = black)$:

> $spec\_point\_plot := plots[pointplot]([rhs(specPoint[1]), rhs(specPoint[2])], color = red,$ $symbol = soliddiamond, symbolsize = 30)$:

> $plots[display](integral\_curve, spec\_point\_plot)$;



>

Задание 2: Решить систему уравнений методом исключений.

$$\begin{cases} y'_1 = 4y_1 + 13y_2 \\ y'_2 = 5y_1 + 3y_2 \end{cases}$$

> $de[1] := diff(y[1](x), x) = 4 \cdot y[1](x) + 13 \cdot y[2](x) :$
> $de[2] := diff(y[2](x), x) = 5 \cdot y[1](x) + 3 \cdot y[2](x) :$
> $sol := dsolve(\{de[1], de[2]\}, \{y[1](x), y[2](x)\});$

$$sol := \left\{ y_1(x) = \_C1\, e^{\frac{(7+3\sqrt{29})x}{2}} + \_C2\, e^{-\frac{(-7+3\sqrt{29})x}{2}}, y_2(x) = \frac{3\,\_C1\, e^{\frac{(7+3\sqrt{29})x}{2}}\sqrt{29}}{26} - \frac{3\,\_C2\, e^{-\frac{(-7+3\sqrt{29})x}{2}}\sqrt{29}}{26} - \frac{\_C1\, e^{\frac{(7+3\sqrt{29})x}{2}}}{26} - \frac{\_C2\, e^{-\frac{(-7+3\sqrt{29})x}{2}}}{26} \right\} \quad (4)$$

> $restart;$

Задание 3: Решить задачу Коши с помощью методов Лагранжа и Д'Аламбера. Сделать чертёж.

$$\begin{cases} x' = -x - 2y + 1 \\ y' = -\frac{3}{2}x + y \end{cases}$$

$x(0) = 1, y(0) = 0$

> $de[1] := diff(x(t), t) = -1 \cdot x(t) - 2 \cdot y(t) + 1 :$

> $de[2] := diff(y(t), t) = -\frac{3}{2} \cdot x(t) + y(t) :$

> $init\_conds := x(0) = 1, y(0) = 0 :$

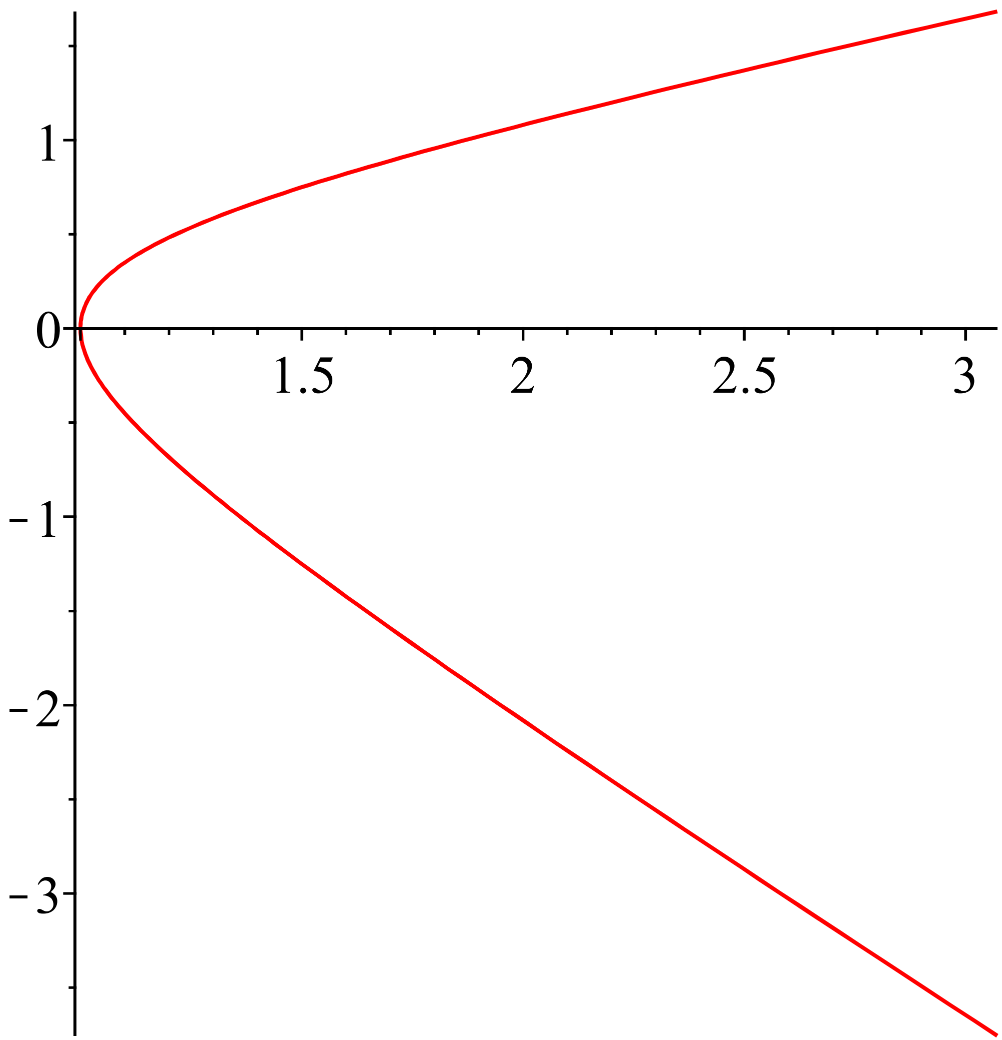
> $sol := dsolve(\{de[1], de[2], init\_conds\}, \{x(t), y(t)\});$

$$sol := \left\{x(t) = \frac{3\,e^{2t}}{8} + \frac{3\,e^{-2t}}{8} + \frac{1}{4}, y(t) = -\frac{9\,e^{2t}}{16} + \frac{3\,e^{-2t}}{16} + \frac{3}{8}\right\} \quad \textbf{(5)}$$

> $X := t \rightarrow rhs(sol[1]) :$

> $Y := t \rightarrow rhs(sol[2]) :$

> $plot([X(t), Y(t), t = -1..1], color = red);$



>

>

>

>