

## 6. РЕШЕНИЕ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

Пусть дано уравнение  $f(x) = 0$ . Ставится задача: найти решение данного уравнения с точностью до некоторой заданной величины  $\varepsilon$ . Точное решение данного уравнения будем обозначать через  $x^*$ , а приближенное через  $\hat{x}$ .

Методы решения уравнений делятся на прямые и итерационные.

Прямые методы – это методы, позволяющие вычислить решение по формуле. Например, нахождение корней квадратного или кубического уравнения.

Итерационные методы – это методы, в которых задается некоторое начальное приближение и строится сходящаяся последовательность приближений к точному решению, причем каждое последующее приближение вычисляется с использованием предыдущих:

$$x_n = \varphi_n(x_0, x_1, \dots, x_{n-1}).$$

Очевидно, что прямые методы могут быть использованы только для решения простейших уравнений (так уже для многочлена 5-й степени не существует общих формул для вычисления корней).

Одним из простейших методов решения нелинейных уравнений является использование теоремы Больцано-Коши. Известно, что если функция  $f$  непрерывна на отрезке  $[a, b]$  и  $f(a) \cdot f(b) < 0$ , то на отрезке  $[a, b]$  существует хотя бы один корень уравнения  $f(x) = 0$  (рис. 6.1).

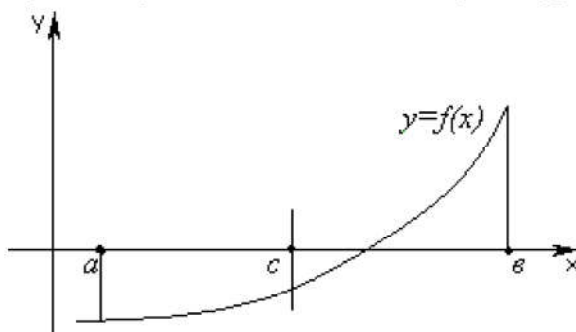


Рис. 6.1

Методом дихотомии (делением отрезка пополам) можно выделить промежуток половинной длины, на концах которого функция принимает значения разных знаков. Продолжая процесс можно найти корень с любой заданной точностью.

Очевидным недостатком этого метода является его трудоемкость. Другой менее очевидный, однако более существенный недостаток иллюстрируется рисунком 6.2.

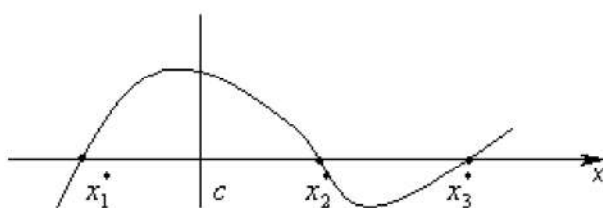


Рис. 6.2

Если на отрезке есть несколько корней данного уравнения (см. рис. 6.2), при делении отрезка пополам будет найден только один корень и произойдет потеря других. Чтобы избежать этого, нужно предварительно провести процедуру отделения корней.

Другим простейшим методом решения нелинейных уравнений является использование принципа сжимающих отображений.

Пусть функция  $f$  непрерывно дифференцируема на отрезке  $[a, b]$  и на концах его принимает значения разных знаков. По уравнению  $f(x) = 0$  строим уравнение  $x = \varphi(x)$ , где  $\varphi(x) = x - \lambda f(x)$ . Множитель  $\lambda$  выбираем таким образом, чтобы на отрезке были выполнены условия  $\varphi: [a, b] \rightarrow [a, b]$  и  $|\varphi'(x)| < q < 1$  на  $[a, b]$ . После этого строим итерационную последовательность

$$x_n = \varphi(x_{n-1}), \quad n = 1, 2, \dots$$

которая сходится к искомому решению уравнения.

## 6.1. Проблема отделения корней

Поставим задачу: найти интервал  $(a, b)$ , на котором для заданной функции  $f(x)$  выполняется условие  $f(a) \cdot f(b) < 0$  и который содержит *только один* корень функции  $f(x)$ .

Если функция на заданном интервале непрерывно дифференцируема, то можно воспользоваться следствием из теоремы Ролля, по которому между парой корней всегда находится по крайней мере одна стационарная точка. Алгоритм решения задачи в данном случае будет следующий:

- 1) находим производную  $f'(x)$ ,
- 2) решаем уравнение  $f'(x) = 0$  для нахождения стационарных точек,
- 3) разбиваем исходный интервал  $(a, b)$  на меньшие интервалы с помощью найденных стационарных точек,
- 4) из полученных интервалов выбираем только те, на концах которых  $f(x)$  принимает значения разных знаков,
- 5) уточняем интервалы за счет их сужения.

Очевидным недостатком метода является трудность нахождения стационарных точек (зачастую это более трудная задача, чем решение заданного уравнения). К достоинствам метода можно отнести его принципиальную простоту и то обстоятельство, что часто других более хороших способов нет.

Для отделения корней можно также воспользоваться графиком функции. К достоинствам подобного способа можно отнести его наглядность и простоту, к недостаткам низкую точность и необходимость строить график функции.

Полезным средством для отделения корней является также использование теоремы Штурма.

Пусть  $f(x)$  – многочлен, и уравнение  $f(x)=0$  не имеет кратных корней, т.е. нет точек, в которых  $f(x)=0$  и  $f'(x)=0$  (стационарные точки не являются корнями).

Построим так называемый ряд Штурма:  $f_0(x)$ ,  $f_1(x)$ , ...,  $f_n(x)$ , где

$$f_0(x) = f(x),$$

$$f_1(x) = f'(x),$$

$f_2(x)$  – остаток от деления  $\frac{f_0}{f_1}$ , взятый с обратным знаком,

$f_k(x)$  – остаток от деления  $\frac{f_{k-2}}{f_{k-1}}$ , взятый с обратным знаком,

и так далее, пока не получим постоянную.

Обозначим через  $N(a)$  – число перемен знаков в ряде Штурма, при  $x=a$ ; через  $N(b)$  – число перемен знаков в ряде Штурма, при  $x=b$ .

**Теорема Штурма.** При сделанных выше предположениях, число корней уравнения  $f(x) = 0$  на отрезке  $[a, b]$  равно  $N(a) - N(b)$ .

Получим простую оценку для погрешности приближения.

Пусть

$$f(x) = 0, \quad a \leq x \leq b.$$

Тогда по формуле конечных приращений

$$f(\hat{x}) - f(x^*) = f'(c) \cdot (\hat{x} - x^*), \quad \text{где } c \in (a, b).$$

Так как  $x^*$  – корень, то  $f(x^*) = 0$  и, следовательно,

$$f(\hat{x}) = f'(c) \cdot (\hat{x} - x^*).$$

Предполагаем, что в интервале  $(a, b)$  корень отделен, а производная не обращается в нуль на  $[a, b]$ , т.е. стационарных точек нет.

Оценим снизу и сверху абсолютное значение производной:

$$m_1 \leq |f'(x)| \leq M_1. \quad \text{Тогда получаем оценку}$$

$$|\hat{x} - x^*| \leq \frac{|f(\hat{x})|}{m_1}. \quad (6.1)$$

## 6.2. Метод хорд

Пусть дано уравнение  $f(x) = 0$ ,  $a \leq x \leq b$ , где  $f(x)$  – дважды непрерывно дифференцируемая функция.

Пусть выполняется условие  $f(a) \cdot f(b) < 0$  и проведено отделение корней, т.е. на данном интервале  $(a, b)$  находится один корень уравнения. При этом, не ограничивая общности, можно считать, что  $f(b) > 0$ .

Пусть функция  $f$  выпукла на интервале  $(a, b)$  (рис. 6.3).

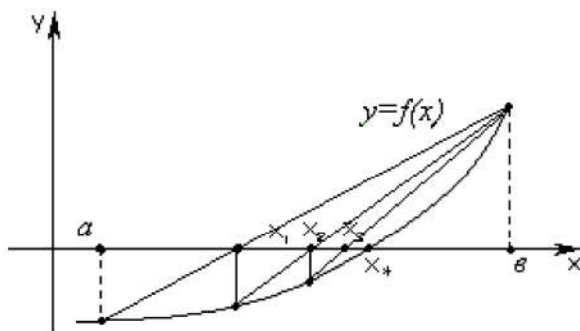


Рис. 6.3

Заменим график функции хордой (прямой), проходящей через точки  $M_0(a, f(a))$  и  $M_1(b, f(b))$ .

Уравнение прямой, проходящей через две заданные точки, можно записать в виде  $\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$ . В нашем случае получим  $\frac{y - f(a)}{f(b) - f(a)} = \frac{x - a}{b - a}$ .

Найдем точку пересечения хорды с осью  $Ox$ .

Полагая  $y = 0$ , получаем из предыдущего уравнения:

$$x_1 = a - \frac{f(a)}{f(b) - f(a)} \cdot (b - a).$$

Теперь возьмем интервал  $(x_1, b)$  в качестве исходного и повторим вышеописанную процедуру (рис. 6.3). Получим

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f(b) - f(x_1)} \cdot (b - x_1).$$

Продолжим процесс. Каждое последующее приближение вычисляется по рекуррентной формуле

$$x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f(b) - f(x_{n-1})} \cdot (b - x_{n-1}) \quad n = 1, 2, \dots, \quad (6.2)$$

$$x_0 = a.$$

Если же функция вогнута (см. рис. 6.4),

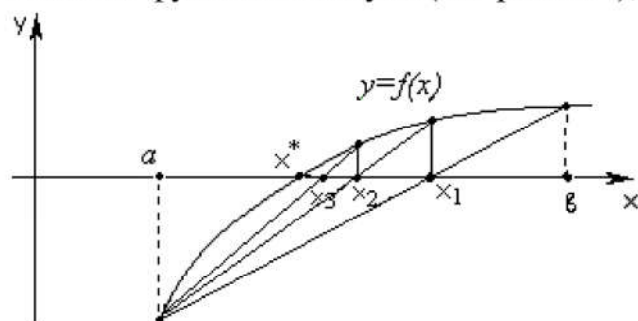


Рис. 6.4

уравнение прямой, соединяющей точки  $M_0(a, f(a))$  и  $M_1(b, f(b))$  запишем в виде

$$\frac{y - f(b)}{f(a) - f(b)} = \frac{x - b}{a - b}.$$

Найдем точку пересечения хорды с осью  $Ox$ :

$$x_1 = b - \frac{f(b)}{f(a) - f(b)} \cdot (a - b).$$

Теперь возьмем интервал  $(a, x_1)$  в качестве исходного и найдем точки пересечения хорды, соединяющей точки  $(a, f(a))$  и  $(x_1, f(x_1))$  с осью абсцисс (рис. 6.4). Получим

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f(a) - f(x_1)} \cdot (a - x_1).$$

Повторяя данную процедуру, получаем рекуррентную формулу

$$x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f(a) - f(x_{n-1})} \cdot (a - x_{n-1}) \quad n = 1, 2, \dots \quad (6.3)$$

$$x_0 = b.$$

Описанный выше метод построения рекуррентных последовательностей (6.2) и (6.3) называется методом хорд. Для использования метода хорд нужно было бы предварительно найти точки перегиба и выделить участки, на которых функция не меняет характер выпуклости. Однако на практике поступают проще: в случае  $f(b)f''(b) > 0$  для построения рекуррентной последовательности применяются формулы (6.2), а в случае, когда  $f(a)f''(a) > 0$ , применяют формулы (6.3).

Докажем сходимость метода хорд.

Очевидно, обе последовательности (6.2) и (6.3) могут быть записаны в виде

$$x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})(\hat{x} - x_{n-1})}{f(\hat{x}) - f(x_{n-1})},$$

где  $\hat{x} = a$  или  $\hat{x} = b$ .

$$\text{Построим функцию } \varphi(x) = x - \frac{f(x)}{f(\hat{x}) - f(x)}(\hat{x} - x),$$

где  $\hat{x} = a$  или  $\hat{x} = b$  (в зависимости от характера выпуклости). Тогда метод хорд дает рекуррентную последовательность, определяемую единой формулой

$$x_n = \varphi(x_{n-1}), \quad n = 1, \dots, x_0 = \hat{x}. \quad (6.4)$$

Покажем, что  $\varphi$  будет сжимающим отображением в случае достаточно малого интервала  $(a, b)$ . Приведем выражение для  $\varphi(x)$  к общему знаменателю:

$$\varphi(x) = \frac{xf(\hat{x}) - xf(x) - \hat{x}f(x) + xf(x)}{f(\hat{x}) - f(x)} = \frac{xf(\hat{x}) - \hat{x}f(x)}{f(\hat{x}) - f(x)}.$$



Найдем производную

$$\varphi'(x) = \frac{f(\hat{x})(f(\hat{x}) - f(x)) - \hat{x}f'(x)(f(\hat{x}) - f(x)) + f'(x)(xf(\hat{x}) - \hat{x}f(x))}{(f(\hat{x}) - f(x))^2}.$$

Вычислим значение этой производной в точке  $x^*$ , учитывая, что  $f(x^*) = 0$ :

$$\varphi'(x^*) = \frac{f^2(\hat{x}) - \hat{x}f'(x^*)f(\hat{x}) + f'(x^*)x^*f(\hat{x})}{f^2(\hat{x})} = \frac{f(\hat{x}) - f'(x^*)(\hat{x} - x^*)}{f(\hat{x})}.$$

По формуле Тейлора

$$f(\hat{x}) = f(x^*) + f'(x^*)(\hat{x} - x^*) + \frac{f''(\xi)}{2}(\hat{x} - x^*)^2,$$

где  $\xi$  некоторая точка, лежащая между  $x^*$  и  $x$ . С учетом данного выражения получим

$$\varphi'(x^*) = \frac{f''(\xi)}{f(\hat{x})} \cdot \frac{(\hat{x} - x^*)^2}{2}.$$

Оценим полученное выражение для производной  $\varphi'(x^*)$ :

$$|\varphi'(x^*)| = \frac{|f''(\xi)|}{|f(\hat{x})|} \cdot \frac{|\hat{x} - x^*|^2}{2} \leq \frac{|\hat{x} - x^*|}{|f(\hat{x})|} \cdot \frac{M_2}{2} |\hat{x} - x^*|,$$

где  $M_2 = \max_{a \leq x \leq b} |f''(x)|$ .

Откуда, учитывая полученную ранее оценку (6.1)

$$|\hat{x} - x^*| \leq \frac{|f(\hat{x})|}{m_1},$$

имеем

$$|\varphi'(x^*)| \leq \frac{M_2}{2m_1} |\hat{x} - x^*|.$$

Таким образом, для сходимости итерационной последовательности (6.4) достаточно потребовать выполнения условия

$$\frac{M_2}{2m_1} |\hat{x} - x^*| < 1 \quad \text{или} \quad |\hat{x} - x^*| < \frac{2m_1}{M_2}.$$

Очевидно, при значении  $\hat{x}$  достаточно близком к точке  $x^*$  последнее неравенство всегда выполняется и, значит, в некоторой окрестности  $U_\delta(x^*)$  точки  $x^*$  выполнено условие  $|\varphi'(x)| \leq q < 1$  и, следовательно, отображение  $\varphi$  является сжимающим.

Остается показать, что  $\varphi: U_\delta(x^*) \rightarrow U_\delta(x^*)$ . Действительно, для любого  $x$  из этой окрестности справедливо

$$\begin{aligned} |\varphi(x) - x^*| &= |\varphi(x^*) + \varphi'(\zeta)(x - x^*) - x^*| \leq \\ &\leq |\varphi(x^*) - x^*| + |\varphi'(\zeta)(x - x^*)| \leq q |x - x^*| < \delta, \end{aligned}$$

где точка  $\zeta$  лежит в окрестности  $U_\delta(x^*)$ . Последнее неравенство означает, что  $\varphi: U_\delta(x^*) \rightarrow U_\delta(x^*)$ .

Таким образом, в силу принципа сжимающих отображений, метод хорд сходится, когда начальное приближение достаточно близко к решению.

### 6.3. Метод Ньютона (метод касательных)

Пусть дано уравнение  $f(x) = 0$ ,  $a \leq x \leq b$ , где  $f(x)$  — дважды непрерывно дифференцируемая функция.

Если выполняется условие  $f(a) \cdot f(b) < 0$ , то на данном интервале содержится корень уравнения. Предположим, что корень отделен, т.е. на данном интервале он только один. Не ограничивая общности, можно считать, что  $f(a) < 0$ ,  $f(b) > 0$ .

Рассмотрим рис. 6.5.

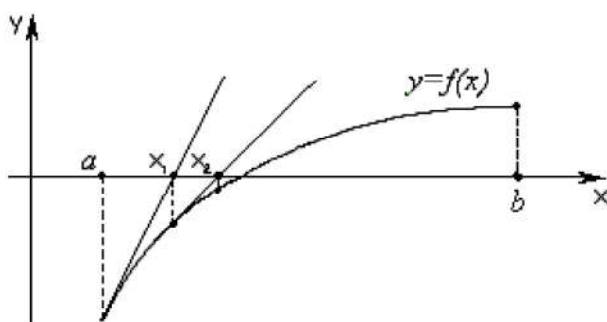


Рис. 6.5

Пусть

$$f(x) = 0, \quad a \leq x \leq b.$$

Запишем уравнения касательной в точке  $(a, f(a))$ :

$$y - f(a) = f'(a)(x - a).$$

Найдем точку ее пересечения с осью  $Ox$ . Получаем

$$x_1 = a - \frac{f(a)}{f'(a)}.$$

Построив касательную в точке  $(x_1, f(x_1))$ , находим точку ее пересечения с осью  $Ox$ :

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}.$$

Продолжая процесс, получим

$$x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})}, \quad x_0 = a, \quad n = 1, 2, \dots$$

Для рис. 6.5 характерно условие:  $f(a)f''(a) > 0$ , так как вторая производная и сама функция отрицательны.

Рассмотрим ситуацию с  $f(b)f''(b) > 0$  (рис. 6.6).

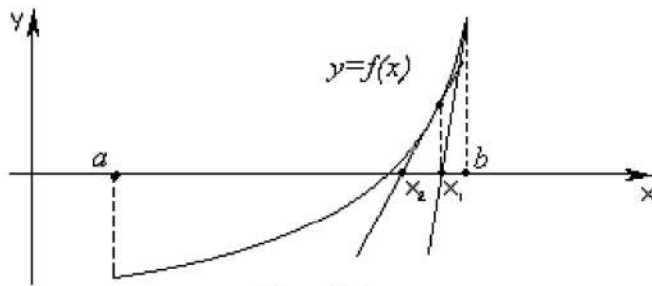


Рис. 6.6

Здесь  $x_0 = b$  и  $f(b)f''(b) > 0$ .

Построив касательную в точке  $(b, f(b))$ , находим точку ее пересечения с осью  $Ox$ :

$$x_1 = b - \frac{f(b)}{f'(b)}, \quad \text{т. е.} \quad x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}.$$

Продолжая процесс, получаем ту же рекуррентную формулу

$$x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})}, \quad n = 1, 2, \dots,$$

но с начальным условием  $x_0 = b$ .

Таким образом, рекуррентная последовательность Ньютона задается единой формулой

$$x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})}, \quad n = 1, 2, \dots,$$

где  $x_0 = a$  (при  $f(a)f''(a) > 0$ ) или  $x_0 = b$  (при  $f(b)f''(b) > 0$ ).

Исследуем сходимость метода Ньютона:

$$x_k = x_{k-1} - \frac{f(x_{k-1})}{f'(x_{k-1})} \quad k = 1, 2, \dots,$$

$x_0 = a$  или  $b$ .

Причем  $x_0 = a$  при  $f(a)f''(a) > 0$  и  $x_0 = b$  при  $f(b)f''(b) > 0$ .

Очевидно,

$$f(x^*) = f(x_k) + f'(x_k)(x^* - x_k) + \frac{f''(\xi)(x^* - x_k)^2}{2},$$

где  $\xi$  — некоторая точка между точками  $a$  и  $b$ .

Получаем

$$0 = f(x_k) + f'(x_k)(x^* - x_k) + \frac{f''(\xi)(x^* - x_k)^2}{2},$$

откуда

$$\frac{-f(x_k)}{f'(x_k)} = x^* - x_k + \frac{f''(\xi)}{2f'(x_k)}(x^* - x_k)^2,$$

$$x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} = x^* + \frac{f''(\xi)}{2f'(x_k)}(x^* - x_k)^2,$$

или окончательно



$$x_{k+1} - x^* = \frac{f''(\xi)}{2f'(x_k)}(x^* - x_k)^2.$$

Отсюда

$$|x^* - x_{k+1}| \leq \frac{|f''(\xi)|}{2|f'(x_k)|} |x^* - x_k|^2 \leq \frac{M_2}{2m_1} |x^* - x_k|^2,$$

где

$$f(x^k) + J(x^k)(x - x^k) = 0 \quad M_2 = \max_{a \leq x \leq b} |f''(x)|, \quad m_1 = \min_{a \leq x \leq b} |f'(x)|.$$

Таким образом, получаем следующую оценку скорости сходимости:

$$|x^* - x_{k+1}| \leq \frac{M_2}{2m_1} |x^* - x_k|^2.$$

Из полученной оценки можно получить

$$|x^* - x_1| \leq \frac{M_2}{2m_1} |x^* - x_0|^2 \leq q |x^* - x_0|,$$

где  $\frac{M_2}{2m_1} |x^* - x_0| = q$ , и далее

$$|x^* - x_2| \leq \frac{M_2}{2m_1} |x^* - x_1|^2 \leq \frac{M_2}{2m_1} \cdot q^2 \cdot |x^* - x_0|^2 \leq q^3 |x^* - x_0|,$$

$$|x^* - x_3| \leq \frac{M_2}{2m_1} |x^* - x_2|^2 \leq \frac{M_2}{2m_1} \cdot q^6 \cdot |x^* - x_0|^2 \leq q^7 |x^* - x_0|, \dots$$

Т.е. итерационная последовательность будет заведомо сходиться, если  $\frac{M_2}{2m_1} |x^* - x_0| < 1$ , т. е. если  $x_0$  выбрано достаточно близко к  $x^*$ .

Кроме того, полученная оценка скорости сходимости свидетельствует об очень быстром характере сходимости. Такая скорость сходимости называется квадратичной. Таким образом, метод Ньютона сходится с квадратичной скоростью.

К некоторым недостаткам метода относится необходимость выбора хорошего начального приближения.

**Пример.** Вычислить  $\sqrt{13}$  с точностью  $\varepsilon = 0,00001$ .

Строим функцию  $f(x) = x^2 - 13$  и решаем методом Ньютона уравнение  $f(x) = 0$  на отрезке  $[3, 4]$ . Очевидно  $f(4)f''(4) > 0$ , следовательно  $x_0 = 4$ .

Вычисляем

$$x_1 = 4 - \frac{f(4)}{f'(4)} = 4 - \frac{3}{8} = 3\frac{5}{8}, \quad \text{и т.д.}$$

Можно проверить, что уже  $x_3$  дает приближение с необходимой точностью.

## 6.4. Комбинированный метод хорд и касательных

Пусть для определенности  $f(b)f''(b) > 0$  (рис. 6.7).

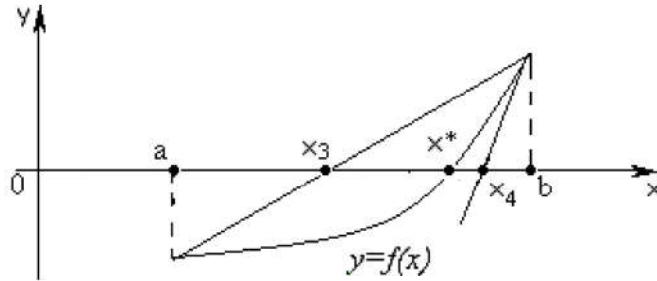


Рис. 6.7.

Тогда, применяя метод хорд при  $x_1 = a$ , получим

$$x_3 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f(b) - f(x_1)}(b - x_1).$$

Применяя метод Ньютона при  $x_2 = b$ , получим

$$x_4 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)}.$$

При этом  $x^* \in (x_3, x_4)$ .

Продолжая процесс далее, получаем

$$\begin{cases} x_5 = x_3 - \frac{f(x_3)}{f(x_4) - f(x_3)}(x_4 - x_3) \\ x_6 = x_4 - \frac{f(x_4)}{f'(x_4)}, \end{cases}$$

причем  $x^* \in (x_5, x_6)$ .

Отсюда

$$x_{2n+1} = x_{2n-1} - \frac{f(x_{2n-1})}{f(x_{2n}) - f(x_{2n-1})}(x_{2n} - x_{2n-1}), \quad n = 1, \dots$$

$$x_{2n+2} = x_{2n} - \frac{f(x_{2n})}{f'(x_{2n})}(x_{2n} - x_{2n-1}), \quad n = 1, \dots,$$

причем всегда  $x^* \in (x_{2n+1}, x_{2n+2})$ .

Пусть теперь  $f(a)f''(a) > 0$  (рис. 6.8).

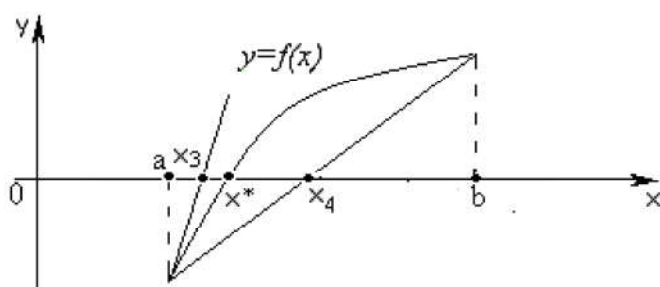


Рис. 6.8.

Применяем метод Ньютона при  $x_1 = a$  и метод хорд при  $x_2 = b$ , и получаем

$$\begin{cases} x_{2n+1} = x_{2n-1} - \frac{f(x_{2n-1})}{f'(x_{2n-1})}, & n = 1, 2, \dots \\ x_{2n+2} = x_{2n} - \frac{f(x_{2n})}{f(a) - f(x_{2n})}(a - x_{2n}), & n = 1, 2, \dots, \end{cases}$$

причем  $x^* \in (x_{2n+1}, x_{2n+2})$ .

Таким образом, комбинированный метод хорд и касательных удобен тем, что корень уравнения всегда находится в интервале между двумя последовательными приближениями.

## 6.5. Решение систем нелинейных уравнений

Пусть есть система  $n$  уравнений с  $n$  неизвестными:

$$\begin{cases} f_1(x_1, \dots, x_n) = 0 \\ \dots\dots\dots \\ f_n(x_1, \dots, x_n) = 0. \end{cases} \quad (6.5)$$

Запишем ее в векторном виде:

$$f(\bar{x}) = \bar{0}, \quad (6.6)$$

где

$$f = \begin{pmatrix} f_1 \\ \mathbf{M} \\ f_n \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \mathbf{M} \\ x_n \end{pmatrix}.$$

### Метод простых итераций

Система (6.4) преобразуется к виду:

$$x = \varphi(x), \quad (6.7)$$

где  $\varphi = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \mathbf{M} \\ \varphi_n \end{pmatrix}.$