Тема 3 Методы интегрирования линейных неоднородных систем дифференциальных уравнений

Система дифференциальных уравнений вида

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + ... + a_{1n}y_n + f_1(t), \\ \dfrac{dy_2}{dx} = a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + ... + a_{2n}y_n + f_2(t), \\ .... , \\ \dfrac{dy_n}{dx} = a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + ... + a_{nn}y_n + f_n(t), \end{cases}$$

где $a_{11},...,a_{nn}$ – числа, называется системой линейных неоднородных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.

Рассмотрим три основных метода решения линейных неоднородных систем дифференциальных уравнений.

Метод Лагранжа (вариации произвольной постоянной)

Аналогично решению линейного дифференциального уравнения этим методом ищется общее решение соответствующей однородной системы и подставляется в исходную систему в предположении, что произвольные постоянные являются функциями общего аргумента. После подстановки получается алгебраическая система относительно производных этих функций. Решив ее, приходят к общему решению системы.

Пимер. Решить систему дифференциальных уравнений методом Лагранжа:

$$\begin{cases} x' = -2x - 4y + 1 + 4t, \\ y' = -x + y + \dfrac{3}{2}t^2. \end{cases}$$

Решение. Ищем общее решение соответствующей однородной системы. Для этого составляем и решаем ее характеристическое уравнение:

$$\begin{vmatrix} -2-\lambda & -4 \\ -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \lambda^2 + \lambda - 6 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 2,\ \lambda_2 = -3.$$

При $\lambda_1 = 2$ соответствующая алгебраическая система имеет вид:

$$\begin{cases} -4\gamma_1 - 4\gamma_2 = 0, \\ -\gamma_1 - \gamma_2 = 0. \end{cases}$$

Эта система имеет бесконечное множество решений. Для определенности положим $\gamma_1 = -1$, тогда $\gamma_2 = 1$. Получаем частные решения:

$$x_1(t) = -e^{2t}, \; y_2(t) = e^{2t}.$$

При $\lambda_2 = -3$ соответствующая система принимает вид:

$$\begin{cases} \gamma_1 - 4\gamma_2 = 0, \\ -\gamma_1 + 4\gamma_2 = 0. \end{cases}$$

Положим $\gamma_1 = 4,$ тогда $\gamma_2 = 1.$

Значит, корню $\lambda_2 = -3$ соответствуют частные решения:

$$x_2(t) = 4e^{-3t}, \; y_2(t) = e^{-3t}.$$

Общее решение исходной системы запишется в виде:

$$\begin{cases} x(t) = -C_1 e^{2t} + 4C_2 e^{-3t}, \\ y(t) = C_1 e^{2t} + C_2 e^{-3t}. \end{cases}$$

Полагаем в полученном общем решении однородной системы $C_1 = C_1(t), C_2 = C_2(t)$ и подставим его в заданную неоднородную систему, найдя предварительно и производные искомых функций. В результате получим:

$$\begin{cases} -C_1' e^{2t} + 4C_2' e^{-3t} = 1 + 4t, \\ C_1' e^{2t} + C_2' e^{-3t} = \dfrac{3}{2} t^2. \end{cases}$$

Найдем из этой системы C_1', C_2':

$$\begin{cases} C_1' = \dfrac{1}{5}\left(6t^2 - 4t - 1\right) e^{-2t}, \\ C_2' = \dfrac{1}{10}\left(3t^2 + 8t + 2\right) e^{3t}. \end{cases}$$

Интегрируя каждое уравнение, получим:

$$\begin{cases} C_1(t) = -\dfrac{1}{5}(3t^2 + 3t) e^{-2t} + C_1, \\ C_2(t) = \dfrac{1}{10} t(t+2) e^{3t} + C_2, \end{cases}$$

где C_1, C_2 − произвольные постоянные.

Окончательно после подстановки получим общее решение заданной системы:

$$\begin{cases} x(t) = -C_1 e^{2t} + 4C_2 e^{-3t} + t + t^2, \\ y(t) = C_1 e^{2t} + C_2 e^{-3t} - \dfrac{1}{2} t^2. \end{cases}$$

Метод Эйлера (неопределнных коэффициентов)

В методе используется свойство структуры общего решения линейной неоднородной системы дифференциальных уравнений, а именно: оно представляет собой, как и линейное неоднородное уравнение, сумму общего решения соответствующей однородной системы и частного решения исходной неоднородной системы. Частное решение часто удается подобрать «по подобию» неоднородной части системы с неопределенными коэффициентами. Найдя после подстановки в исходную систему их значения, записывают общее решение как сумму общего решения однородной системы и частного неоднородной системы с уже найденными коэффициентами.

Пример. Решить систему дифференциальных коэффициентов методом Эйлера:

$$\begin{cases} x' = x - 2y + e^t, \\ y' = x + 4y + e^{2t}. \end{cases}$$

Решение. Ищем общее решение соответствующей однородной системы. Для этого составляем и решаем ее характеристическое уравнение:

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 \\ 1 & 4-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 2,\ \lambda_2 = 3.$$

При $\lambda_1 = 2$ соответствующая алгебраическая система имеет вид:

$$\begin{cases} -\gamma_1 - 2\gamma_2 = 0, \\ \gamma_1 + 2\gamma_2 = 0. \end{cases}$$

Эта система имеет бесконечное множество решений. Для определенности положим $\gamma_1 = 2$, тогда $\gamma_2 = -1$. Получаем частные решения:

$$x_1(t) = 2e^{2t},\ y_2(t) = -e^{2t}.$$

При $\lambda_2 = 3$ соответствующая система принимает вид:

$$\begin{cases} -2\gamma_1 - 2\gamma_2 = 0, \\ \gamma_1 + \gamma_2 = 0. \end{cases}$$

Положим $\gamma_1 = 1$, тогда $\gamma_2 = -1$.

Значит, корню $\lambda_2 = 3$ соответствуют частные решения:

$$x_2(t) = e^{3t}, \ y_2(t) = -e^{3t}.$$

Общее решение исходной системы запишется в виде:

$$\begin{cases} x(t) = 2C_1e^{2t} + C_2e^{3t}, \\ y(t) = -C_1e^{2t} - C_2e^{-3t}. \end{cases}$$

Для нахождения частного решения неоднородной системы проанализируем «неоднородности» заданной системы: $f_1(t) = e^t$, $f_2(t) = e^{2t}$. Поскольку $\sigma = 2$ во второй функции соответствует одному из характеристических корней ($\lambda_1 = 2$ − простой действительный корень), то частное решение с неопределнными коэффициентамипримет вид:

$$\begin{cases} x_ч = Ae^t + (Bt + C)e^{2t}, \\ y_ч = De^t + (Et + F)e^{2t}. \end{cases}$$

После подстановки в неоднородную систему этого решения и производных $x_ч{}'$, $y_{ч'}$, получим $A = -\dfrac{3}{2}$, $B = 2$, $C = 0$, $D = \dfrac{1}{2}$, $E = -1$, $F = -1$.

Общее решение запишем как сумму общего решения соответствующей однородной системы и частного исходной неоднородной системы с найденными коэффициентами:

$$\begin{cases} x(t) = 2C_1e^{2t} + C_2e^{3t} - \dfrac{3}{2}e^t + 2te^{2t}, \\ y(t) = -C_1e^{2t} - C_2e^{3t} + \dfrac{1}{2}e^t + (t+1)e^{2t}. \end{cases}$$

Метод Даламбера

Метод направлен на построение интегрируемых комбинаций неоднородной линейной системы 2-го порядка:

$$\begin{cases} x' = a_1x + b_1y + f_1(t), \\ y' = a_2x + b_2y + f_2(t). \end{cases}$$

Заключается в поиске числа $\lambda \neq 0$ такого, что, складывая одно уравнение системы со вторым, умноженным на это число, получим интегрируемую комбинацию.

Умножим для определенности второе уравнение на $\lambda \neq 0$ и сложим с первым:

$$x' + \lambda y' = a_1 x + \lambda a_2 x + b_1 y + \lambda b_2 y + f_1(t) + \lambda f_2(t).$$

Приведем подобные:

$$(x + \lambda y)' = (a_1 + \lambda a_2)x + (b_1 + \lambda b_2)y + f_1(t) + \lambda f_2(t).$$

Преобразуем:

$$(x + \lambda y)' = (a_1 + \lambda a_2)(x + \frac{b_1 + \lambda b_2}{a_1 + \lambda a_2} y) + f_1(t) + \lambda f_2(t).$$

Введем замену: $x + \lambda y = z,\ z = z(t),\ \dfrac{b_1 + \lambda b_2}{a_1 + \lambda a_2} = \lambda$.

В результате получим линейное дифференциальное уравнение относительно z:

$$z' = (a_1 + \lambda a_2)z + f_1(t) + \lambda f_2(t).$$

Пример. Решить систему методом Даламбера:

$$\begin{cases} x' = 5x + 4y + e^t, \\ y' = 4x + 5y + 1. \end{cases}$$

Решение. Находим λ из уравнения $\dfrac{4 + 5\lambda}{5 + 4\lambda} = \lambda \Rightarrow \lambda = \pm 1$. Значит, получаем две интегрируемые комбинации.

Для $\lambda = 1$ имеем: $z = x + y \Rightarrow z' = (5 + 1 \cdot 4)z + e^t + 1 \cdot 1 \Rightarrow z' - 9z = e^t + 1$. Решив это уравнение, например, методом Бернулли, получим $x + y = -\dfrac{1}{8}e^t - \dfrac{1}{9} + C_1 e^{9t}$.

Для $\lambda = -1$ имеем: $z = x - y \Rightarrow z' = (5 - 1 \cdot 4)z + e^t - 1 \cdot 1 \Rightarrow z' - z = e^t - 1$. Решив это уравнение, получим $x - y = te^t + 1 + C_2 e^t$.

Из системы

$$\begin{cases} x + y = -\dfrac{1}{8}e^t - \dfrac{1}{9} + C_1 e^{9t}, \\ x - y = te^t + 1 + C_2 e^t \end{cases}$$

найдем искомые функции:

$$\begin{cases} x = \left(\dfrac{t}{2} - \dfrac{1}{16}\right)e^t + \dfrac{4}{9} + C_1 e^{9t} + C_2 e^t, \\ y = -\left(\dfrac{t}{2} + \dfrac{1}{16}\right)e^t - \dfrac{5}{9} + C_1 e^{9t} - C_2 e^t. \end{cases}$$