6. ЧИСЛОВЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ СЛУЧАЙНОЙ ВЕЛИЧИНЫ

Законы распределения случайной величины являются исчерпывающими характеристиками. Каждый закон распределения представляет собой некоторую *функцию*, указание которой полностью описывает случайную величину с вероятностной точки зрения.

Однако часто закон распределения неизвестен и приходится ограничиваться меньшими сведениями; зачастую достаточно бывает только отдельные числовые параметры, характеризующие отдельные черты распределения; например, среднее значение или разброс случайной величины («степень случайности»). Такие числа называются *числовыми характеристиками случайной величины.*

6.1. Математическое ожидание

Математическое ожидание (МО) характеризует среднее взвешенное значение случайной величины.

Для вычисления математического ожидания для ДСВ каждое значение x_i учитывается с «весом», пропорциональным вероятности этого значения.

$$m_x = M[\times] = x_1 p_1 + x_2 p_2 + ... + x_n p_n = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i. \qquad (6.1)$$

$M[X]$-оператор математического ожидания;

m_x -- число, полученное после вычислений по формуле.

Для НСВ заменим отдельные значения x_i непрерывно изменяющимся параметром x, соответствующие вероятности p_i - элементом вероятности $f(x)dx$, а конечную сумму – интегралом:

$$M[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx. \qquad (6.2)$$

Механическая интерпретация понятия математического ожидания: на оси абсцисс расположены точки с абсциссами x_i, в которых сосредоточены соответственно массы $p_1, p_2,....$, причем $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$. Тогда МО – *абсцисса центра тяжести*. Для НСВ – масса распределена непрерывно с плотностью $f(x)$.

Для смешанных случайных величин математическое ожидание состоит из двух слагаемых.

$$M[X] = \sum_i x_i p_i + \int_H x dF(x), \qquad (6.3)$$

где сумма распространяется на все значения x_i, имеющие отличные от нуля вероятности, а интеграл – на все участки оси абсцисс, где функция распределения $F(x)$ непрерывна.

Физический смысл математического ожидания – это среднее значение случайной величины, т.е. то значение, которое может быть использовано вместо конкретного значения, принимаемого случайной величиной в приблизительных расчетах или оценках.

Свойства математического ожидания.

1. Математическое ожидание неслучайной величины c равно самой величине c:

$$M[c] = c. \tag{6.4}$$

<u>*Доказательствово:*</u> представим величину c как случайную величину, которая принимает одно и то же значение, c вероятностью p=1:

$$M[c]=c\cdot 1=c.$$

2. При умножении СВ X на неслучайную величину c не ту же самую величину увеличится ее математическое ожидание:

$$M[c\cdot X] = \text{c}\cdot M[X]. \tag{6.5}$$

<u>*Доказательство:*</u>

$$M(cX) = cx_1 \cdot p_1 + \ldots.cx_n \cdot p_n = c(x_1 \cdot p_1 + \ldots.x_n \cdot p_n)$$

3. При прибавлении к СВ X неслучайной величины c к ее математическому ожиданию прибавляется такая же величина:

$$M(X + c) = M[x] + c. \tag{6.6}$$

<u>*Доказательство:*</u> следует из свойств 1 и 3.

$$M(X + c) = (c + x_1) \cdot p_1 + \ldots. + (c + x_n) \cdot p_n =$$

$$c(p_1 + \ldots.. + p_n) + (x_1 \cdot p_1 + \ldots.x_n \cdot p_n) = c \cdot 1 + M[x] = M[x] + c.$$

4. Математическое ожидание суммы двух случайных величин равно сумме их математических ожиданий:

$$M[X+Y] = M[X]+M[Y]. \tag{6.6}$$

6.2. Моменты случайной величины

Понятие момента широко применяется в механике для описания распределения масс (статические моменты, моменты инерции и т.д.). Теми же приемами пользуются и в теории вероятностей. Чаще на практике применяются моменты двух видов: начальные и центральные.

Начальный момент s-го порядка СВ X есть математическое ожидание s-й степени этой случайной величины: $\alpha_s = \text{M}[X^s]$.

$$\alpha_k(x) = M[X^s] = \begin{cases} \sum_{i=1}^{n} x_i^s P\{X = x_i\}, & \text{для} \quad ДСВ; \\ \int_{-\infty}^{+\infty} x^s f(x)dx\,, & \text{для} \quad НСВ; \\ \sum_i x_i^s P\{X = x_i\} + \int_H x^s dF(x)\,, & \text{для} \quad ССВ. \end{cases} \tag{6.7}$$

Математическое ожидание случайной величины является начальным моментом первого порядка

Центрированной случайной величиной называется отклонение случайной величины от ее математического ожидания:

$$\overset{0}{X} = X - m_x \quad .$$

Центрирование случайной величины аналогично переносу начала координат в среднюю, «центральную» точку, абсцисса которой равна математическому ожиданию случайной величины.

Центральным моментом s-го порядка СВ X есть математическое ожидание s-й степени центрированной случайной величины: $\mu_s = M[(X\text{-}m_x)^s]$.

$$\mu_k(x) = M[\dot{X}^s] = \begin{cases} \sum_{i=1}^{n}(x_i - m_x)^s P\{X = x_i\}, & для \quad ДСВ; \\ \int_{-\infty}^{+\infty}(x - m_x)^s f(x)dx\,, & для \quad НСВ; \\ \sum_i (x_i - m_x)^s P\{X = x_i\} + \int_H (x - m_x)^s dF(x)\,, & для \quad ССВ. \end{cases} \quad (6.8)$$

Очевидно, что для любой случайной величины X центральный момент первого порядка равен нулю:

$$\mu_1(X) = M[\dot{X}] = M[X - m_x] = M[X] - m_x = 0.$$

Приведем некоторые соотношения, связывающие начальные и центральные моменты:

Для второго :

$$\mu_2 = M[\dot{X}^2] = \sum_{i=1}^{n}(x_i - m_x)^2 p_i = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 p_i - 2m_x \sum_{i=1}^{n} x_i p_i + m_x^2 \sum_{i=1}^{n} p_i = \alpha_2 - m_x^2$$

Для третьего центрального момента:

$$\mu_3 = M[\dot{X}^3] = \sum_{i=1}^{n}(x_i - m_x)^3 p_i = \sum_{i=1}^{n} x_i^3 p_i - 3m_x \sum_{i=1}^{n} x_щ^2 p_i + 3m_x^2 \sum_{i=1}^{n} x_щ p_i + m_x^3 \sum_{i=1}^{n} p_i =$$

$$= \alpha_3 - 3\alpha_2 m_x + 2m_x^3.$$

Аналогично можно получить моменты не только относительно начала координат (начальные моменты) или математического ожидания (центральные моменты), но и относительно произвольной точки a.

6.3. Дисперсия

Дисперсия случайной величины есть математическое ожидание квадрата соответствующей центрированной случайной величины.

Она характеризует степень разброса значений случайной величины относительно ее математического ожидания, т.е. ширину диапазона значений.

Расчетные формулы:

$$D[x] = M[\dot{X}^2] = \begin{cases} \sum_{i=1}^{n}(x_i - m_x)^2 P\{X = x_i\}, & для \quad ДСВ; \\ \int_{-\infty}^{+\infty}(x - m_x)^2 f(x)dx, & для \quad НСВ; \\ \sum_i (x_i - m_x)^2 P\{X = x_i\} + \int_H (x - m_x)^2 f(x)dx, & для \quad ССВ. \end{cases} \quad (6.9)$$

Дисперсия может быть вычислена через второй начальный момент:

$$D[X] = M[(x-m_x)^2] = M[x^2 - 2xm_x + m_x^2] = \\ = M[x^2] - 2m_x \cdot M[X] + m_x^2 = M[x^2] - m_x^2. \qquad (6.10)$$

Дисперсия случайной величины характеризует степень рассеивания (разброса) значений случайной величины относительно ее математического ожидания. Дисперсия СВ (как дискретной, так и непрерывной) есть неслучайная (постоянная) величина.

Дисперсия СВ имеет размерность квадрата случайной величины. Для наглядности характеристики рассеивания пользуются величиной, размерность которой совпадает с размерностью СВ.

Средним квадратическим отклонением (СКО) СВ *X* называется характеристика

$$\sigma_x = \sigma[x] = \sqrt{D[X]}. \qquad (6.11)$$

СКО измеряется в тех же физических единицах, что и СВ, и характеризует ширину диапазона значений СВ.

Свойства дисперсии

Дисперсия постоянной величины *c* равна нулю.

Доказательство: по определению дисперсии

$$D(C) = M\left\{[C - M(C)]^2\right\} = M\left\{[C - C]^2\right\} = M(0) = 0$$

При прибавлении к случайной величине *X* неслучайной величины *c* ее дисперсия не меняется.

$$D[X+c] = D[X].$$

Доказательство: по определению дисперсии

$$D[X] = M[((X+c)-(m_x-c))^2] = \\ M[(X+c-m_x-c)^2] = M[(X-m_x)^2] = D[X]. \qquad (6.12)$$

3. При умножении случайной величины *X* на неслучайную величину *c* ее дисперсия умножается на c^2.

Доказательство: по определению дисперсии

$$D(cX) = M[(cx - M[cx])^2] = M[(cx - cm_x)^2] = \\ M[c^2(x-m_x)^2] = c^2 M[(x-m_x)^2] = c^2 D[X]. \qquad (6.13)$$

Для среднего квадратичного отклонения это свойство имеет вид:

$$\sigma[cX] = |c| \cdot \sigma[X]. \qquad (6.14)$$

Действительно, при $|C| > 1$ величина cX имеет возможные значения (по абсолютной величине), большие, чем величина X. Следовательно, эти значения рассеяны вокруг математического ожидания $M[cX]$ больше, чем возможные значения X вокруг $M[X]$, т.е. $D(cX) > D(X)$. Если 0<|c|<1, то $D(cX) < D(X)$.

Правило 3σ. Для большинства значений случайной величины абсолютная величина ее отклонения от математического ожидания не превосходит утроенного среднего квадратического отклонения, или, другими словами, практически все значения СВ находятся в интервале:

$$[\, m - 3\sigma;\ m + 3\sigma;\,]. \qquad (6.15)$$

6.4.Дополнительные характеристики случайной величины

6.4.1. ***Модой*** случайной величины называется ее наиболее вероятное значение, т.е. то значение, для которого вероятность p_i (для дискретной СВ) или $f(x)$ (для непрерывных СВ) достигают максимума. Обозначения: *Mx*, *Mo.:*

Распределение с одним максимумом ряда распределения (для ДСВ) или плотности вероятности (НСВ) называется *«унимодальным».*

Если многоугольник распределения или кривая распределения имеют несколько локальных максимумов, то такое распределение называют *«полимодальным».*

Если распределение обладает не максимумом, а минимумом, то оно называется *«антимодальным».*

6.4.2. ***Медианой*** случайной величины X называется такое ее значение, для которого выполняется условие $P\{X<Me\} = P\{X \geq Me\}$. Медиана, как правило, существует только для непрерывных случайных величин:

$$\int_{-\infty}^{Me} f(x)dx = 0.5 \qquad \int_{Me}^{+\infty} f(x)dx = 0.5$$

Если известна функция распределения случайной величины X, то Me есть решение уравнения $F(Me) = F(x) = 0.5$

6.4.3. Функция распределения $F(x)$ случайной величины X произвольному числу $x \in R$ ставит в соответствие вероятность.

Для решения обратной задачи используются следующие понятия.

Квантилью χ_p случайной величины X является такое ее значение, для которого выполняется условие $P\{X<\chi_p\} = F(\chi_p) = p$. Т.к. функция $F(x)$ непрерывная, то для непрерывной случайной величины X для любых p, 0<p<1, существуют квантили.

Очевидно, что квантиль, которая соответствует значению p=0.5, является медианой .

Квантили $\chi_{0.25}$ и $\chi_{0.75}$ -называются нижней и верхней квантилью.

6.4.4.Третий центральный момент служит для характеристики асимметрии распределения. Если распределение симметрично относительно МО (масса распределена равномерно относительно центра тяжести), то все моменты нечетного порядка равны нулю. Поэтому для характеристик асимметрии выбирают третий центральный момент – он имеет размерность куба случайной величины. Безразмерный ***коэффициент асимметрии*** вычисляется так:

$$S_k = \mu_3 / \sigma^3. \tag{6.16}$$

6.4.5. Четвертый центральный момент служит для характеристики так называемой «крутости», т.е. островершинности или плосковершинности распределения. Это свойство распределения описывается с помощью ***эксцесса***:

$$E_x = \mu_4 / \sigma^3 - 3. \tag{6.17}$$

6.4.6. ***Коэффициент вариации*** безразмерная величина, характеризует степень разбросанности значений СВ и вычисляется по формуле:

$$\upsilon_x = \frac{\delta_x}{m_x}. \tag{6.18}$$

Пример 6.1. Из партии численностью 25 изделий, среди которых имеется шесть нестандартных, случайным образом выбраны три изделия. Найти математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение нестандартных изделий, содержащихся в выборке.

Решение. По условию задачи СВ X принимает следующие значения: x_1=0; x_2=1; x_3=2; x_4=3. Вероятность того, что в этой выборке окажется ровно i (i = 0, 1, 2, 3) нестандартных изделий, вычисляется по формуле

$$p_i = \mathrm{P}\{X = x_i\} = \frac{C_6^i \cdot C_{19}^{3-i}}{C_{25}^i},$$

откуда

$$p_1=0{,}41;\ p_2=0{,}43;\ p_3=0{,}11;\ p_4=0{,}05.$$

Дисперсию определим по формулам

D[X] = M[X^2] - (M[X])^2,

M[X] = 0 · 0,41 + 1· 0,43 + 2 · 0,11 + 3 · 0,05 = 0,8 ,

M[X^2] = 0 · 0,41 + 1 · 0,43 + 2^2 · 0,11 + 3^2 · 0,05 = 1,32 ,

D[X] = 1,32 - $(0{,}8)^2$ = 0,68.

Тогда $\sigma[X] = \sqrt{D[X]} = 0{,}82$.

Пример 6.2. Непрерывная СВ распределена по закону Лапласа:

$$f(x) = b \cdot e^{-|x|}.$$

Найти коэффициент b, математическое ожидание M[X], дисперсию D[X], среднее квадратическое отклонение σ[X].

Решение. Для нахождения коэффициента b воспользуемся свойством нормировки плотности распределения $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 2b\int_0^{\infty} e^{-x}dx = 2b = 1$, откуда b = 1/2. Так как функция $xe^{-|x|}$ - нечетная, то $\mathrm{M}[X] = 0{,}5 \cdot \int_{-\infty}^{\infty} xe^{-|x|}dx = 0$, дисперсия D[$X$] и СКО $\sigma[X]$ соответственно равны:

$$\mathrm{D}[X] = 0{,}5 \cdot \int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-|x|} dx = 2 \cdot 0{,}5 \cdot \int_{0}^{\infty} x^2 e^{-|x|} dx = 2\,,$$

$$\sigma[X] = \sqrt{\mathrm{D}[X]} = \sqrt{2}\,.$$

6.5. Производящие функции

В ряде случаев для определения важнейших числовых характеристик дискретных случайных величин может помочь аппарат ***производящих функций.***

Пусть имеется дискретная случайная величина X, принимающая неотрицательные целочисленные значения 0, 1, …, k, … с вероятностями p_0, p_1, …, p_k, …; $p_k=P\{X=k\}$.

Производящей функцией случайной величины X называется функция вида:

$$\varphi(z) = \sum_{i=0}^{\infty} p_k z^k\,,$$

где z – произвольный параметр(0<z≤1).

Очевидно, что

$$\varphi(1) = \sum_{i=0}^{\infty} p_k = 1.$$

Возьмем первую производную по z от производящей функции:

$$\varphi'(z) = \sum_{i=0}^{\infty} k p_k z^{k-1}$$

и полагаем в ней z=1:

$$\varphi'(z=1) = \sum_{i=1}^{\infty} k p_k\,,$$

т.е. математическому ожиданию случайной величины X.

Таким образом, *математическое ожидание неотрицательной целочисленной случайной величины равно первой производной ее производящей функции φ(z) при z=1.*

Возьмем вторую производную функции *φ(z)*:

$$\varphi''(z) = \sum_{i=1}^{\infty} k(k-1) p_k z^{k-2}.$$

Полагая в ней z=1, получим

$$\varphi''(z=1) = \sum_{k=1}^{\infty} (k^2 - k) p_k = \sum_{k=1}^{\infty} k^2 p_k - \sum_{k=0}^{\infty} k p_k\,.$$

Первая сумма является вторым начальным моментом α_2 случайной величины X, а вторая – ее математическое ожидание. Тогда:

$$\alpha[X] = \varphi''(z=1) + \varphi'(z=1)\,,$$

т.е. второй начальный момент случайной величины равен сумме второй производной от производящей функции при z=1 плюс ее математическое ожидание.

Аналогично, берем третью производную:

$$\varphi'''(z) = \sum_{k=0}^{\infty} k(k-1)(k-2)\, p^{k-3}$$

и полагая в ней z=1, получаем:

$$\varphi'''(z=1) = \alpha_3 - 3\alpha_2 + 2m.$$

И так далее, что позволяет выразить начальные моменты более высокого порядка.