ЛЕКЦИЯ 4

ПРИБЛИЖЕННОЕ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ И ИНТЕГРИРОВАНИЕ

Обе основные операции анализа — дифференцирование и интегрирование — содержат в себе предельный переход и, тем самым, требуют знания функции на целом отрезке. Нам нужны приближенные дискретные аналоги этих операций, такие, которые бы использовали лишь конечное число значений функции.

Традиционный способ получать такие формулы состоит в следующем. Берут функцию и строят многочлен, который в нескольких точках совпадает с этой функцией; такой многочлен называется интерполяционным, а сама процедура называется интерполированием *. Затем вместо того, чтобы интегрировать или дифференцировать функцию, интегрируют или дифференцируют этот многочлен. Поскольку при построении интерполяционного многочлена используются только несколько значений функции, то окончательные формулы содержат только эти значения.

Таков традиционный путь. Если следовать этому пути, то нужно сначала развить теорию интерполирования многочленами. Это требует довольно много времени. Поэтому для начала мы поступим не так, а получим нужные нам простые формулы элементарными средствами.

Идея интерполирования тоже будет использована, но не в общем виде, а для нужных нам конкретных примеров. Вот таков план.

1. Приближенное нахождение производной

Для того, чтобы получить простейшую приближенную формулу для производной, нужно знать только ее определение:

---

* Более точно: интерполированием посредством многочленов заданной степени.

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h}(f(x+h) - f(x)). \tag{1}$$

При малом h можно положить:

$$f'(x) \approx \frac{1}{h}(f(x+h) - f(x)). \tag{2}$$

Это и есть простейшая приближенная формула.

В определении (1) h может принимать значения обоих знаков.

В дискретной записи принято обозначать через h положительное число, так что можно написать еще одну формулу:

$$f'(x) \approx \frac{1}{h}(f(x) - f(x-h)), \quad h > 0. \tag{2'}$$

Какую ошибку мы совершаем, заменяя производную разностным отношением по формуле (2)? Это легко сообразить. Напишем:

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2} f''(\xi) \quad (x < \xi < x+h).$$

Отсюда

$$\frac{m_2}{2} h \leqslant \left| f'(x) - \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \right| \leqslant \frac{M_2}{2} h,$$

где $m_2 = \min |f''(x)|$, $M_2 = \max |f''(x)|$. При $h \to 0$ ошибка стремится к нулю со скоростью h или, как говорят, формула (2) имеет *первый порядок точности*. Сложением формул (2) и (2′) получается симметричная формула:

$$f'(x) \approx \frac{1}{2h}(f(x+h) - f(x-h)). \tag{3}$$

Формула (3), как легко проверить, точнее формулы (2), а именно, ошибка здесь имеет порядок h^2 — это есть формула второго порядка точности *.

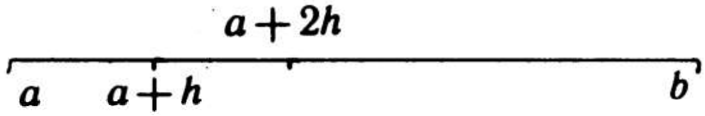
Это увеличение точности получилось, так сказать, «задаром» — только за счет симметрии. Это случается очень часто. В этой лекции мы будем иметь еще несколько случаев, когда симметрия формулы повышает ее точность.

Таким образом, как правило, нужно пользоваться формулой (3) — она точнее. У этой формулы есть лишь один очевидный недостаток: она неприменима на конце отрезка (a, b), на котором задана функция.

---

*Ошибка формулы (3) не превосходит $\frac{1}{6} M_3 h^2$, где $M_3 = \max |f'''(x)|$.

Часто тем не менее бывает нужно сосчитать производную в концевой точке более точно, чем по формуле (2). Я покажу сейчас, как это можно сделать



Рассмотрим наряду с точкой a еще 2 точки: $a+h$ и $a+2h$. Обозначим значения функции в этих точках f_0, f_1, f_2 и построим формулу следующего вида:

$$f'(a) \approx \alpha f_0 + \beta f_1 + \gamma f_2.$$

Коэффициенты α, β, γ подберем так, чтобы получить второй порядок точности. Воспользуемся опять формулой Тэйлора:

$$f_1 = f_0 + hf_0' + \frac{h^2}{2} f_0'' + \ldots; \qquad f_2 = f_0 + 2hf_0' + 2h^2 f_0'' + \ldots$$

Отсюда

$$\alpha f_0 + \beta f_1 + \gamma f_2 = (\alpha+\beta+\gamma) f_0 + (\beta + 2\gamma) h f_0' + \\ + \left(\frac{1}{2}\beta + 2\gamma\right) h^2 f_0'' + O(h^3).$$

Потребуем, чтобы:

$$\alpha+\beta+\gamma = 0, \qquad (\beta+2\gamma) h = 1, \qquad \frac{1}{2}\beta + 2\gamma = 0.$$

Найдя из этой системы α, β, γ, получим нужную формулу:

$$f_0' \approx \frac{1}{2h}(-f_2 + 4f_1 - 3f_0)$$

или

$$f'(a) = \frac{1}{2h}(-f(a+2h) + 4f(a+h) - 3f(a)) + O(h^2). \qquad (4)$$

Таким же способом неопределенных коэффициентов можно было бы получить еще более точные формулы, но в большинстве случаев для вычисления первой производной достаточно формул (2), (3) и (4).

Замечание. То, что формула (3) точнее, чем (2), можно выразить еще несколько иначе. Запишем разностное отношение

$$\frac{1}{h}(f(x+h) - f(x)) \quad \text{в виде} \quad \frac{1}{h}\left(f\left(\xi + \frac{h}{2}\right) - f\left(\xi - \frac{h}{2}\right)\right),$$

где $\xi = x + \dfrac{h}{2}$.

Тогда:

$$\frac{1}{h}(f(x+h)-f(x))=f'\left(x+\frac{h}{2}\right)+O(h^2). \tag{5}$$

Таким образом, правая часть формулы (2) гораздо точнее дает $f'\left(x+\frac{h}{2}\right)$, чем $f'(x)$.

2. Вычисление второй производной

Чтобы получить приближенную формулу для второй производной, можно поступить так же, как при выводе формулы (4): а именно, записать выражение f_0'' с неопределенными коэффициентами через f_0, f_1, f_2 и подобрать эти коэффициенты. Если это проделать, то получится следующая формула:

$$f_0'' \approx \frac{1}{h^2}(f_2-2f_1+f_0) \quad \text{или}$$

$$f''(x) \approx \frac{1}{h^2}(f(x+2h)-2f(x+h)+f(x)). \tag{6}$$

Такая формула имеет первый порядок точности. Если эту формулу «сдвинуть», используя симметрично расположенные точки, то получится более точное выражение:

$$f''(x) \approx \frac{1}{h^2}(f(x+h)-2f(x)+f(x-h)). \tag{7}$$

Формула (7) имеет 2 порядок точности и является самой употребительной формулой для приближенного вычисления второй производной. Если точности этой формулы нехватает (что бывает сравнительно редко), то применяются формулы, использующие большее число значений функции и имеющие 3 или 4 порядок точности. Такие формулы легко выводятся тем же способом неопределенных коэффициентов.

Замечание. В анализе вторая производная определяется посредством двух предельных переходов. Сначала находится

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}(f(x+h)-f(x))$$

и затем

$$f''(x)=\lim_{\alpha\to 0}\frac{1}{\alpha}(f'(x+\alpha)-f'(x)).$$

Формула (7) (или (6)) позволяет совершить оба предельных перехода одновременно:

$$f''(x)=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h^2}(f(x+h)-2f(x)+f(x-h)).$$