3. Приближенное нахождение определенного интеграла

Для приближенного нахождения интеграла $\int\limits_a^b f(x)dx$ можно так же, как и для производной, исходить из определения. По определению интеграл есть предел интегральных сумм:

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \lim_{\delta \to 0} \sum f(\xi_i)\Delta x_i. \tag{8}$$

Здесь $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$, $\delta = \max(\Delta x_i)$, $x_i \leqslant \xi_i \leqslant x_{i+1}$. В анализе доказывается, что от того, как именно разбит отрезок (a, b) на отрезки (x_i, x_{i+1}) и где выбраны ξ_i — предел не зависит *.

Чтобы получить приближенное значение интеграла, можно не совершать предельный переход и записать при малом δ:

$$\int\limits_a^b f(x)dx \approx \sum f(\xi_i)\Delta x_i. \tag{9}$$

Остается большой произвол в том, какие взять отрезочки Δx_i и где взять точки ξ_i. Проще всего, все отрезки (x_i, x_{i+1}) взять одинаковыми и ξ_i — в серединах этих отрезков. Обозначив

$\Delta x = h = \dfrac{b-a}{n}$, можно написать:

$$\int\limits_a^b f(x)dx \approx h\sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k), \quad \xi_k = a + kh + \frac{h}{2}. \tag{10}$$

Это и есть простейшая формула для приближенного вычисления интегралов, или простейшая *квадратурная формула*.

Формула (10) имеет простой геометрический смысл. Написав

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \sum_{k=0}^{n-1} \int\limits_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)dx \quad (x_0 = a,\ x_n = b),,$$

мы можем считать, что в (10) произведена замена $\int\limits_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)dx$ на $f(\xi_k)\cdot h$. Это означает, что площадь криволинейной фигуры на каждом участке заменена площадью прямоугольника высоты $f(\xi_k)$.

Чтобы оценить ошибку формулы (10), напишем формулу Тэйлора в окрестности ξ_k:

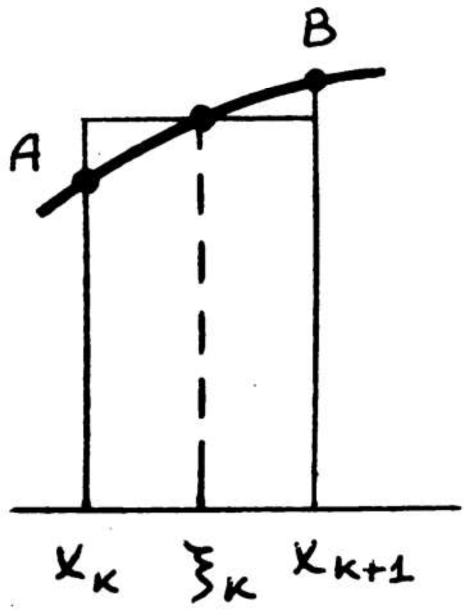
$$f(x) = f(\xi_k) + f'(\xi_k)(x - \xi_k) + r(x)$$

---

* В предположении, что $f(x)$ — непрерывна.

$$|r(x)| \leqslant \frac{1}{2} M_2 (x-\xi_k)^2;$$

$$M_2 = \max |f''(x)|.$$



Теперь имеем:

$$\int_{x_k}^{x_k+h} f(x)dx = f(\xi_k)h + \int_{x_k}^{x_k+h} r(x)dx$$

(интеграл от второго слагаемого равен нулю в силу симметрии!).

Отсюда:

$$\left| \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)dx - f(\xi_k)\cdot h \right| \leqslant \frac{M_2}{24} h^3.$$

Суммируя, получаем:

$$\left| \int_a^b f(x)dx - \sum_k f(\xi_k)\cdot h \right| \leqslant \frac{M_2}{24}(b-a)h^2. \qquad (11)$$

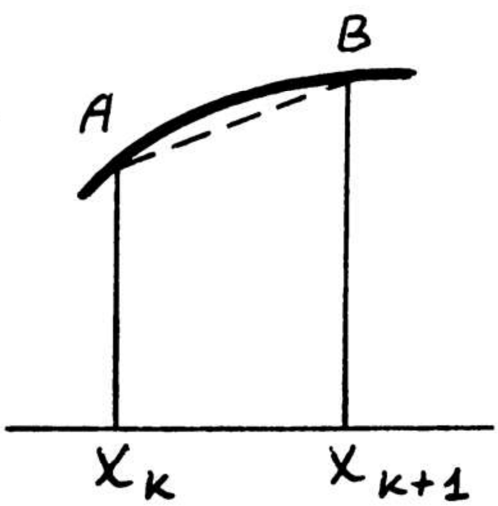
Таким образом, при $h \to 0$ ошибка при вычислении интеграла по формуле (10) для дважды дифференцируемой функции стремится к 0 со скоростью h^2, или как говорят, эта квадратурная формула имеет *2 порядок точности*.

Часто вместо значений f в серединах отрезков используют полусумму значений в концах. Просуммировав по всем отрезкам длины h, получим:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{2}(f_0 + 2f_1 + 2f_2 + \ldots + 2f_{n-1} + f_n); \quad f_k = f(x_k). \qquad (12)$$

Эта формула называется обычно «формулой трапеций»: здесь на каждом участке площадь криволинейной фигуры $\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)dx$ заменяется на площадь трапеции:

$$\frac{1}{2}(f_k + f_{k+1})\cdot h.$$



Формула трапеций имеет тот же, второй порядок точности и (при малых h) дает приблизительно вдвое большую ошибку.

Заметим, что формула (10), где $f(x)$ на каждом участке приближенно заменяется константой и формула (12), где для замены используется линейная функция, дают одинаковый порядок точности (и даже (10) несколько точнее!). Эта неожиданно высокая точность формулы (10) объясняется тем, что точки ξ_k расположены точно в серединах интервалов (x_k, x_{k+1}). Снова симметрия повышает точность!

Заметим, далее, что формулу трапеций тоже можно рассматривать как некоторую интегральную сумму. Для этого достаточно разбить отрезок (a, b) на $(n+1)$ частей: два участка длины $\frac{h}{2}$ по краям, остальные длины h. После этого: $\xi_0=a$; $\xi_{n+1}=b$, все остальные $\xi_k=a+kh$ расположатся в серединах своих отрезков.

Однако, полезнее другая точка зрения на формулу трапеций, легко допускающая обобщения. В формуле трапеций мы на каждом участке $x_k \leqslant x \leqslant x_{k+1}$ функцию $f(x)$ заменили линейной функцией, а $\int\limits_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)dx$ на интеграл от этой линейной функции. Если вместо линейной функции, т. е. многочлена *первой* степени, рассмотреть многочлены более высокой степени, получатся более точные квадратурные формулы. Реализуем эту идею.

4. Формула Симпсона

Разобьем участок интегрирования (a, b) на n равных частей. Для каждого из полученных отрезков подберем квадратный многочлен, так чтобы он совпал с функцией в концах отрезка и в его середине. В качестве приближенного значения интеграла на этом отрезке примем значение интеграла от квадратного многочлена. Таким образом, нам понадобятся значения $f(x_k)$ в точках x_k с интервалом $h=\frac{b-a}{2n}$.

Вычисления мы проведем для одного интервала, расположив его симметрично относительно 0. (Ясно, что от положения интервала на оси x результат не зависит). Итак, должно быть: $f(x)=\alpha x^2+\beta x+\gamma$ при $x=-h, 0, h$. Отсюда

$$\gamma=f(0), \quad \beta=\frac{1}{2h}(f(h)-f(-h)), \quad \alpha=\frac{1}{2h^2}(f(h)-2f(0)+f(-h))$$

$$\int\limits_{-h}^{h}(\alpha x^2+\beta x+\gamma)dx=\frac{1}{3}h\,[f(-h)+4f(0)+f(h)].$$

Написав такие формулы для каждого из n отрезков длины $2h$ и просуммировав, получим

$$\int\limits_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{3}[(f_0+4f_1+f_2)+(f_2+4f_3+f_4)+\ldots+(f_{2n-2}+4f_{2n-1}+f_{2n})$$

$$\int\limits_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{3}[f_0+4f_1+2f_2+4f_3+\ldots+2f_{2n-2}+4f_{2n-1}+f_{2n}]. \tag{13}$$

Это и есть квадратурная формула Симпсона; она является одной из самых употребительных.

5. Свойства формулы Симпсона

Если $f(x)$ — многочлен второй степени, то формула Симпсона (при любом h) дает точный ответ. Это, конечно, не удивительно, так как при выводе этой формулы мы $f(x)$ заменяли многочленом второй степени *.

Замечательно, что и для многочлена 3 степени эта формула является тоже точной! Это легко может быть проверено прямым вычислением, однако поучительно получить результат без вычислений. Если участок интегрирования расположен симметрично относительно 0, то для $f(x)=x^3$ точное значение интеграла $\int\limits_{-c}^{c} x^3 dx$ и значение по формуле Симпсона равны 0 (оба в силу симметрии). Значит, на таком участке формула Симпсона точна для любого многочлена 3 степени. Осталось заметить, что любой отрезок $[a, b]$ при замене $x \to x - r$, $r = \dfrac{a+b}{2}$ переходит в симметричный отрезок, а многочлен 3 степени снова переходит в многочлен 3 степени. Теперь ясно, что формула Симпсона имеет 4 порядок точности: на каждом участке длины $2h$ функцию можно заменить некоторым многочленом 3 степени ** с ошибкой $\sim h^4$, а для полученной кусочномногочленной функции формула, очевидно, является точной.

Ясно, далее, что ошибка зависит от величины четвертой производной функции. Однако, заранее совсем не очевидно, что в выражение для ошибки будет входить малый числовой множитель. Именно, справедлива следующая оценка

$$\left| \int\limits_a^b f(x)dx - J_h[f] \right| \leqslant \frac{M_4}{180}(b-a)h^4; \quad M_4 = \max|f^{IV}(x)|. \qquad (14)$$

Здесь $J_h[f]$ — приближенное значение интеграла по формуле Симпсона. Вы видите, что формула Симпсона оказывается гораздо точнее, чем можно было ожидать.

* 6. Старшие производные

Чтобы получить формулы для приближенного нахождения старших производных (пусь даже не очень точные), будем рас-

---

* При *фиксированном* h формула Симпсона дает точный ответ и для кусочномногочленной функции, совпадающей с разными многочленами 2 степени на каждом из участков $[x_{2k}, x_{2k+2}]$ (длины $2h$).

** Например, отрезком формулы Тэйлора.

суждать следующим образом. m-ая производная от $f(x)$ есть результат применения m раз операции дифференцирования $\frac{d}{dx}=D$:

$$f'(x)=D[f],\ f''(x)=D[D[f]]=D^2[f],\dots,\ f^{(m)}(x)=D^m[f].$$

Простейшим дискретным аналогом дифференцирования является операция D_h:

$$D_h[f]=\frac{1}{h}(f(x+h)-f(x))=\frac{1}{h}\Delta_h[f].$$

Мы обозначили здесь через Δ_h «первую разность» функции:

$$\Delta_h[f]=f(x+h)-f(x).$$

Естественно предположить, что простейшим дискретным аналогом m-й производной является результат m-кратного применения D_h. По определению производной

$$\lim_{h\to 0} D_h[f]=D[f].$$

Можно доказать, что при любом m

$$\lim_{h\to 0} D_h^m[f]=D^m[f].$$

При конечном h получаем приближенную формулу, имеющую первый порядок точности

$$f^{(m)}(x)\approx D_h^m[f]=\frac{1}{h^m}\Delta_h^m[f].$$

Выражение $\Delta_h^m[f]$ — результат m-кратного применения Δ_h — называется m-ой (правой) разностью функции f. m-ая разность f есть линейная комбинация значений: $f(x)$, $f(x+h),\dots,f(x+mh)$. При $m=1,2,3$, получается:

$$\Delta_h f(x) = f(x+h)-f(x)$$
$$\Delta_h^2 f(x) = f(x+2h)-2f(x+h)+f(x)$$
$$\Delta_h^3 f(x) = f(x+3h)-3f(x+2h)+3f(x+h)-f(x)$$

и т. д. (аналогия с биноминальной формулой очевидна).

Используя симметрично расположенные значения аргумента можно (как и в случае второй производной) получить более точные формулы. Например, для четвертой производной можно написать следующие выражения:

$$f^{\mathrm{IV}}(x)\approx\frac{1}{h^4}(f_4-4f_3+6f_2-4f_1+f_0)$$

$$f^{IV}(x) \approx \frac{1}{h^4}(f_3 - 4f_2 + 6f_1 - 4f_0 + f_{-1}); \quad f_k = f(x+kh)$$

$$f^{IV}(x) \approx \frac{1}{h^4}(f_2 - 4f_1 + 6f_0 - 4f_{-1} + f_{-2}).$$

Последняя формула имеет второй порядок точности.

7. Примеры дискретных задач, отвечающих задачам анализа

Умея заменять дифференцирование и интегрирование их дискретными аналогами, мы можем сводить к дискретным задачам различные задачи анализа. При этом линейным дифференциальным и интегральным уравнениям ставятся в соответствие системы (конечного числа) линейных алгебраических уравнений.

Пример 1. Разностная система, отвечающая дифференциальному уравнению 2 порядка.

Пусть требуется найти функцию $y(x)$ $(a \leqslant x \leqslant b)$, удовлетворяющую дифференциальному уравнению

$$y''(x) + q(x)y(x) = f(x)$$

и двум граничным условиям:

$$y(a) = \alpha, \quad y(b) = \beta.$$

Для приближенного решения этой задачи разделим отрезок $[a, b]$ на равных частей. Точки деления обозначим $x_k = a + kh$, $h = \frac{1}{n}(b-a)$. Будем искать значения функции $y(x)$ только при $x = x_k$. Записав $y''(x_k)$ при $k = 1, 2, 3, \ldots, n-1$ по формуле (7), мы получим вместо дифференциального уравнения линейные алгебраические уравнения

$$\frac{1}{h^2}(y_{k+1} - 2y_k + y_{k-1}) + q_k y_k = f_k.$$

Здесь $q_k = q(x_k)$, $f_k = f(x_k)$ $(k = 1, 2, 3, \ldots, n-1)$ — известные величины, y_k — неизвестные. Добавив уравнения $y_0 = \alpha$ и $y_n = \beta$, мы получим систему $n+1$ уравнений с $n+1$ неизвестными. Матрица коэффициентов этой системы имеет следующий «трехдиагональный» вид: