# Лабораторная работа №3.1
# Выполнил студент группы 153501
# Бычко Василий

**Задание 1**
**Для данного дифференциального уравнения методом изоклин постройте интегральную кривую проходящую через точку М**
**Вариант 3**
$y' = 2 + y^2$, $M(1, 2)$.

Метод изоклин позволяет получить нам приблизительное представление об интегральной кривой не инетгрируя дифференциальное
уравнение

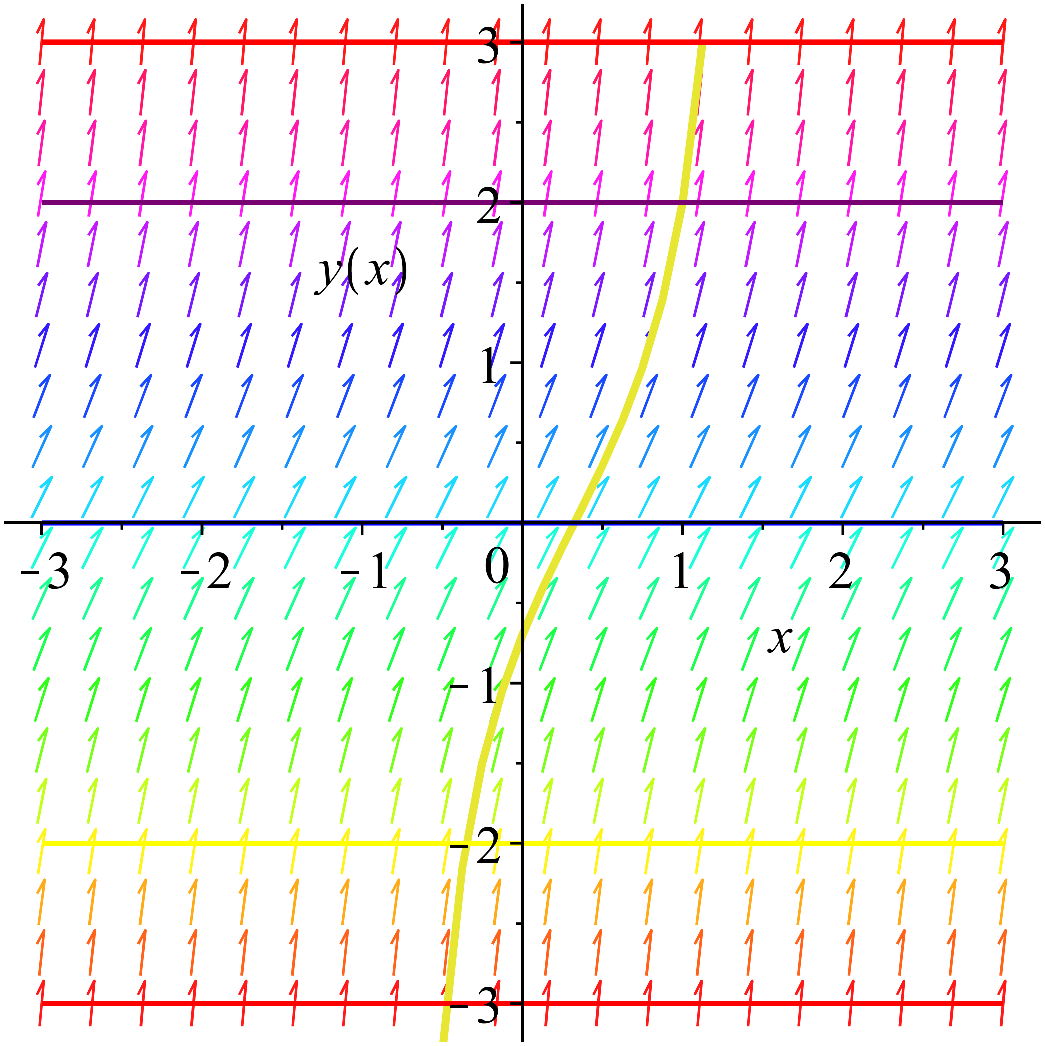
Алгоритм метода Изоклин:
Пускай у нас есть уравнение $y' = f(x, y)$.
Шаг 0. Для удобство превратим его в такое уравнение: $y = f(x, y')$.
Шаг 1. Возьмем некоторые значения для $y'$. Например 1, 0, -1.
Шаг 2. Значение $y'$ подставим в уравнение полученное на шаге 0. Полученное уравнение будет уравнением изоклины
Шаг 3. Для значений $y'$ найдем соответсвующий им угол α = arctg($y'$). Угол α - угол наклона касательных (или отрезков, задающих
поле направлений) к положительной оси Ox
Шаг 4. Далее через точки изколины проведем отрезки небольшой длинны, под углом α к оси Ox. Полученный чертеж будет полем
направлений
Шаг 5. Проводим линии, руководствуюясь полем направлений

Данный метод применяется при выполнении условий теоремы Коши: если функция $f(x, y)$ непрерывна и имеет непрерывную
частную производную $\frac{\partial f}{\partial y}$ в области D, то решение ДУ $y' = f(x, y)$, при начальном условии $y(x_0) = y_0$, $(x_0, y_0) \in$ D, существует и
единственно

```
> with(DEtools) :
```
задаем начальное уравнение
$de := diff(y(x), x) = 2 + (y(x))^2 :$

чертим поле направлений и интегральную кривую, проходящую через точку (1,2)

создаем отображение изоклин
```
iz1 := plot(0, x = -3 ..3, y = -3 ..3, color = blue, thickness = 2) :
iz2 := plot(-2, x = -3 ..3, y = -3 ..3, color = yellow, thickness = 2) :
iz3 := plot(2, x = -3 ..3, y = -3 ..3, color = purple, thickness = 2) :
iz4 := plot(-3, x = -3 ..3, y = -3 ..3, color = red, thickness = 2) :
iz5 := plot(3, x = -3 ..3, y = -3 ..3, color = red, thickness = 2) :
plots[display](integrCurve, iz1, iz2, iz3, iz4, iz5);
```




> *restart*;

**Задание 2.1 ;**
**Найдите линию, проходящую через точку $M_0$ и обладающую тем свойством, что в любой ее точке *M***
**нормальный вектор *MN* с концом на оси *Oy* имеет длину, равную *a*, и образует острый угол с положительным направлением оси *Oy* . Сделайте чертеж**
**Вариант 3**

1) $M_0(12, 2)$ , a = 20

Для решения данной задачи нам понадобятся следующие формулы:

уравнение касательной в точке *x:* $y(x) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)$

уравнение нормальной прямой в точке *x:* $y(x) = f(x_0) - \dfrac{1}{f'(x_0)}(x - x_0)$

Для начала найдем в какой точке нормальная прямая будет пересекать ось *Oy*. Эта точка $N\left(0,\ f(x_0) + \dfrac{x_0}{f'(x_0)}\right)$

Далее, зная длинну нормального вектора составим уравнение:

$a = \text{sqrt}\left( \left(M_x - N_x\right)^2 + \left(M_y - N_y\right)^2 \right).$

Подставляя значения M и N получим $a = \text{sqrt}\left( x^2 + \left( f\left(x_0\right) - f\left(x_0\right) - \frac{x_0}{f'\left(x_0\right)} \right)^2 \right)$

Возведем обе части в квадрат и выразим производную получим:

$f'\left(x_0\right) = \frac{x_0}{\text{sqrt}\left(a^2 - x_0^2\right)} \cdot I$, *где* $I = +-\ 1$

Поскольку нормальный вектор $MN$ образует острый угол с положительным направлением оси $Oy$, то I берем равным единице.

Решим полученное ДУ. Его решение - уравнение искомой

$du := diff(y(x), x) = \frac{x}{\text{sqrt}\left(400 - x^2\right)}$ :

$e := dsolve(\{du, y(12) = 2\}, y(x));$

при помощи функции rhs мы беремм правую часть от решения данного ДУ

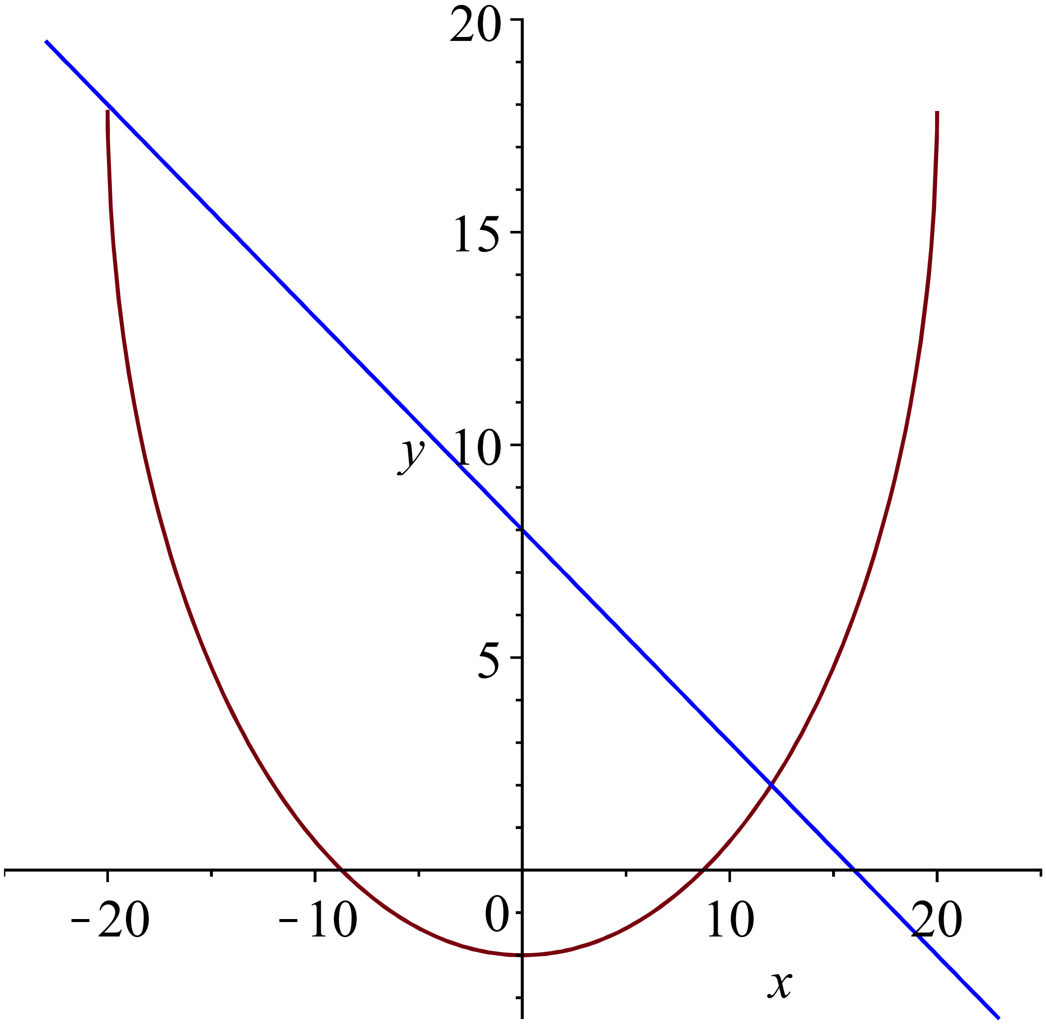
$func := rhs(e)$ :

$curve := plot(func, x = -25..25, y = -3..20)$ :

$normal1 := plot\left(2 - \frac{x - 12}{subs(x = 12, func)}, x = -23..23, color = blue\right)$ :

$plots[display](curve, normal1);$

$$e := y(x) = \frac{(x - 20)\ (x + 20)}{\sqrt{-x^2 + 400}} + 18$$




> *restart*;

**Задание 2.2**
**Найдите линию, проходящую через точку $M_0$, и обладающую тем свойством, что в любой ее точке $M$ касательный вектор**
**$MN$ с концом на оси $Ox$ имеет проекцию на ось $Ox$, обратно пропорциональную абсциссе точки $M$. Коэффициент пропорциональности равен $a$ . Сделайте чертеж.**

2) $M_0(-1, \mathrm{sqrt}(e))$, $a = -1$

Для решения этой задачи нам понадобится формула уравнения касательной в некоторой точке:

$y(x) = f(x_0) + f\,'(x_0) \cdot (x - x_0)$

Касательный вектор пересекает ось $Ox$ в точе $N(0, x_1)$

Из условия задачи можно получить следующую формулу:

$(x - x_1) = \dfrac{a}{x}$

Т.к. точка $N$ лежит на касательной, то подставив ее в уравнение касательной можем найти $x_1$

$y = y'(x - x_1) \Rightarrow x_1 = x - \dfrac{y}{y'}$

Подставим данное выражение в формулу полученную выше:

$$x - x + \frac{y}{y'} = \frac{a}{x};$$

$$y' = \frac{y \cdot x}{a}$$

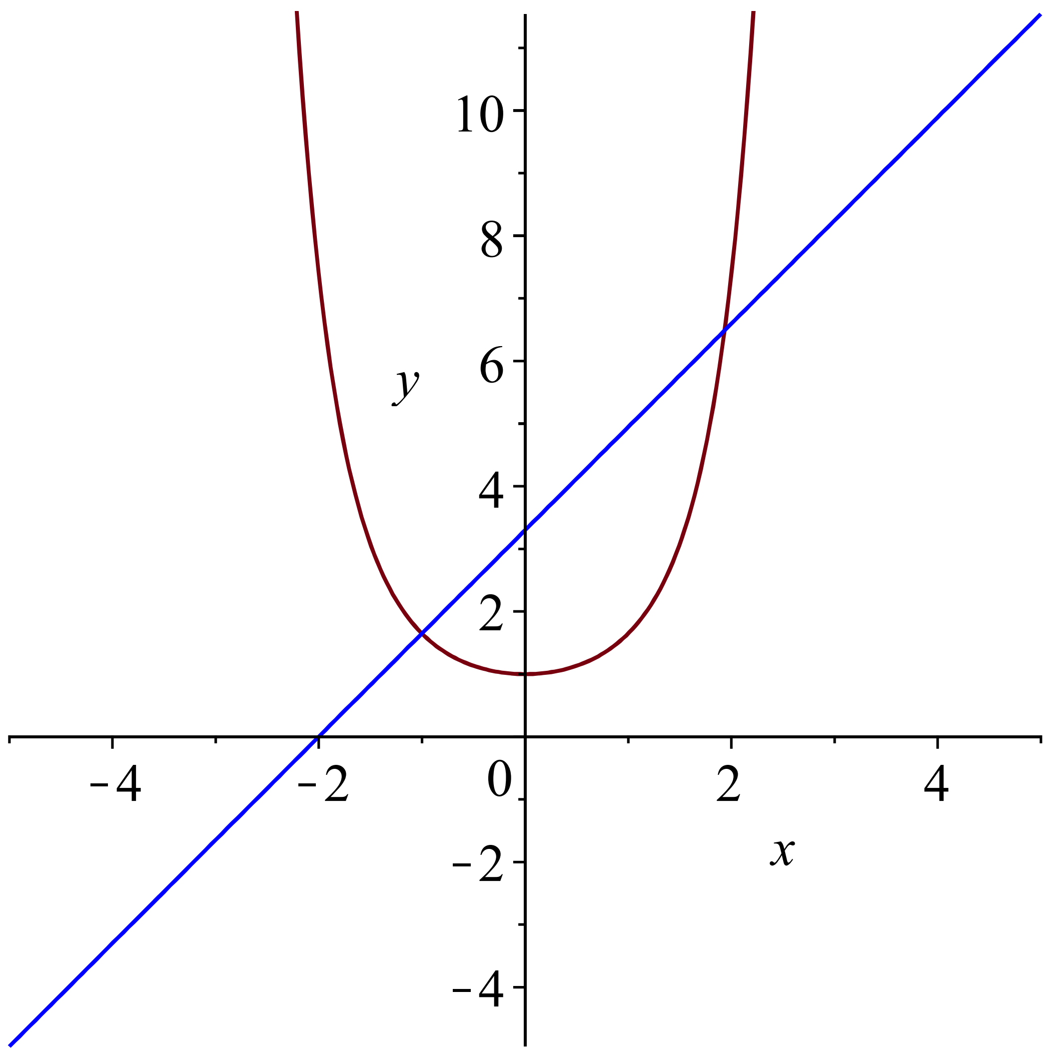
Важное замечание - мы возьмем а по модулю, так как в ином случае не выпоняется условие начальное условие

$$du := diff(y(x), x) = \frac{y(x) \cdot x}{1} :$$

$$e := dsolve(\{du, y(-1) = \mathrm{sqrt}(\mathrm{e})\}, y(x));$$

*func* := *rhs*(*e*) :
*curve* := *plot*(*func*, *x* =−3 ..3, *y* = 0 ..5) :
*kasatel* := *plot*(sqrt(e) + *subs*(*x* =−1, *func*) · (*x* + 1), *x* =−5 ..5, *color* = *blue*) :
*plots*[*display*](*curve*, *kasatel*);

$$e := y(x) = \mathrm{e}^{\frac{x^2}{2}}$$




> *restart*;

> *Задание* **3**

**Найдите общий интеграл уравнения.**
**Постройте на одном чертеже вблизи особой точки уравнения поле направлений и**
**какую-либо интегральную кривую.**
**Сделайте вывод о типе особой точки.**

***Вариант* 3**

$$y' = \frac{-10\,x + 26\,y - 16}{37\,x + y - 38}$$

$du := diff(y(x), x) = \dfrac{-10\,x + 26\,y(x) - 16}{37\,x + y(x) - 38};$

$$du := \frac{d}{dx}\,y(x) = \frac{-10\,x + 26\,y(x) - 16}{37\,x + y(x) - 38} \quad (1)$$

>

Для ручного решения данного уравнения необходимо выполнить следующие действия:
Проверим является ли данное уравнение сводящимся к однородному. Для этого проверим на равенство нулю определителя матрицы
составленной из коэффицентов при $x$ и $y$. Для этого используем специальный пакет **linalg**

$with(linalg):$
$A := matrix([[37, 1], [-10, 26]]);$
$\textit{определитель}\ \mathrm{A} = det(A);$

$$A := \begin{bmatrix} 37 & 1 \\ -10 & 26 \end{bmatrix}$$

$$\textit{определитель}\ A = 972 \quad (2)$$

>

как мы видим,определитель не равен нулю, занчит данное уравнение является уравнением сводящимся к однородному.
Далее необходимо найти такие значения $\alpha$ и $\beta$, чтобы при их подстановке на место $x$ и $y$ свободные члены исчезли. Для этого составим
систему уравнений и решим её

$$\begin{cases} -10\,\alpha + 26\,\beta - 16 = 0 \\ 37\,\alpha + \beta - 38 = 0 \end{cases}$$

$sys1 := \{-10\,\alpha + 26\,\beta - 16 = 0, 37\,\alpha + \beta - 38 = 0\}:$
$a1 := solve(sys1, \{\alpha, \beta\});$

$$a1 := \{\alpha = 1, \beta = 1\} \quad (3)$$

>

осуществим проверку
$subs(a1, sys1);$

$$\{0 = 0\} \quad (4)$$

>

далее произведем замену $x = u+\alpha,\ y=v+\beta$. После упрощения полученного выражения поучим однородное

уравнения, для решения которого осуществим замену $w = \frac{v}{u}$

в Maple же достаточно прописать команду **dsolve**

$s := dsolve(du);$

$$s := 3\ln\left(-\frac{-11 + y(x) + 10x}{x-1}\right) - 4\ln\left(-\frac{-2 + y(x) + x}{x-1}\right) - \ln(x-1) - \_C1 = 0 \quad \textbf{(5)}$$

>

особая точка будет полчуна из системы уравнений

$$\begin{cases} 37x + y - 38 = 0 \\ -10x + 26y - 16 = 0 \end{cases}$$

данную систему мы уже решали, только для других переменных, поэтому сразу скажем, что особая точка  имеет координаты (1,1)

Для нахождения типа особой точки, необходимо составить характеристическое уравнение и решить его.

Для составления характеристического уравнения надо составить матрицу коэффициентов при $x$ и $y$ и найдем ее собственные значения.

Поскольу данная матрица мной уже была составлена(матрица А), то остается найти ее собственные значения.

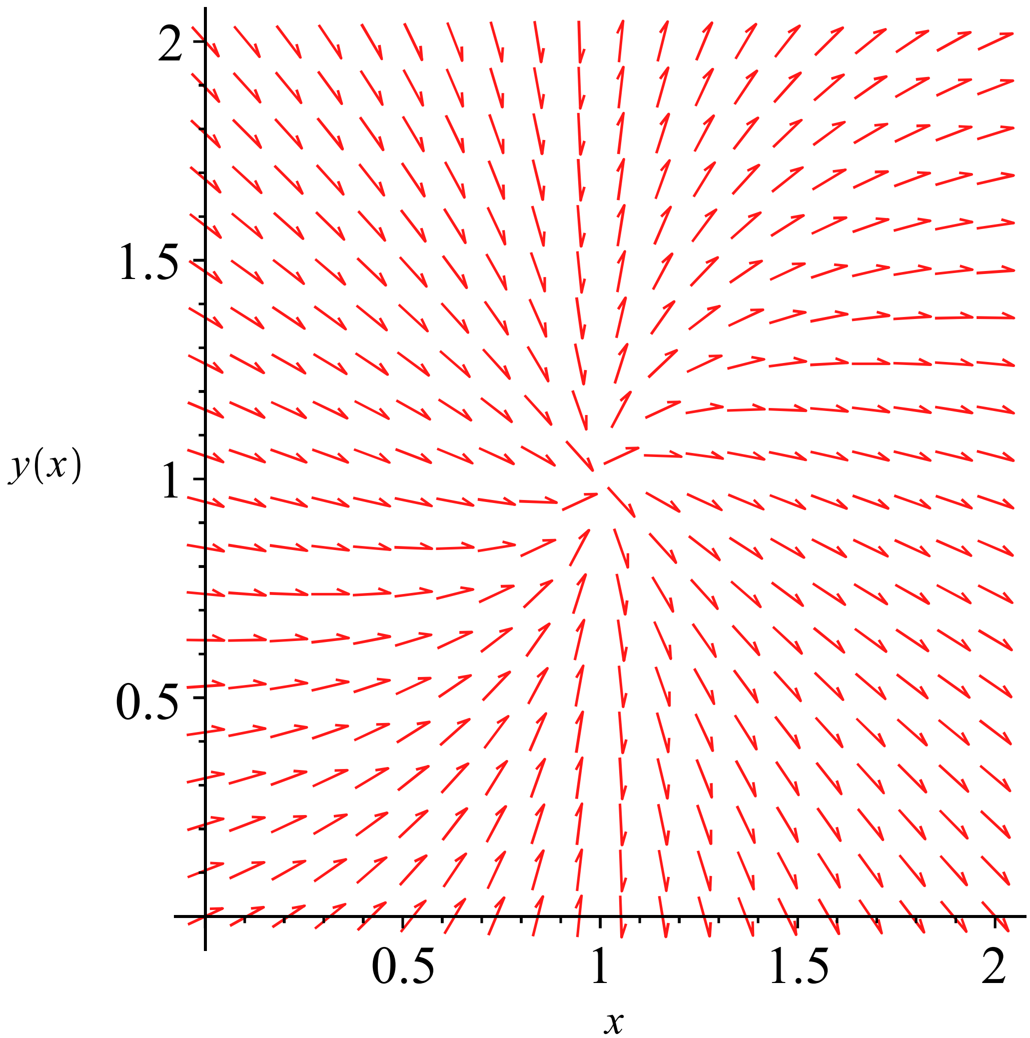
*собственные значения* $= eigenvalues(A);$

$$\textit{собственные значения} = (36, 27) \quad \textbf{(6)}$$

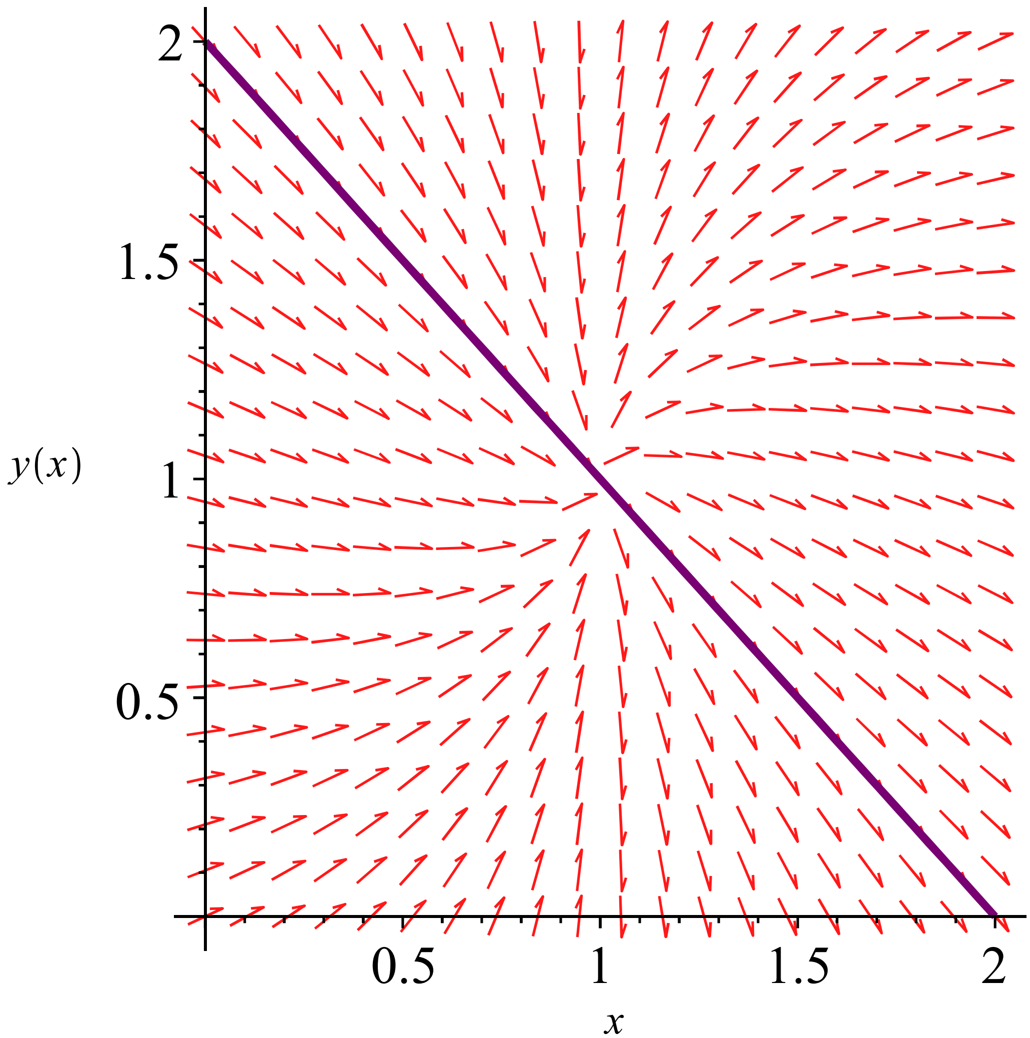
>

Поскольу данные значения вещественные и разных знаков, то **тип особой точки - узел**

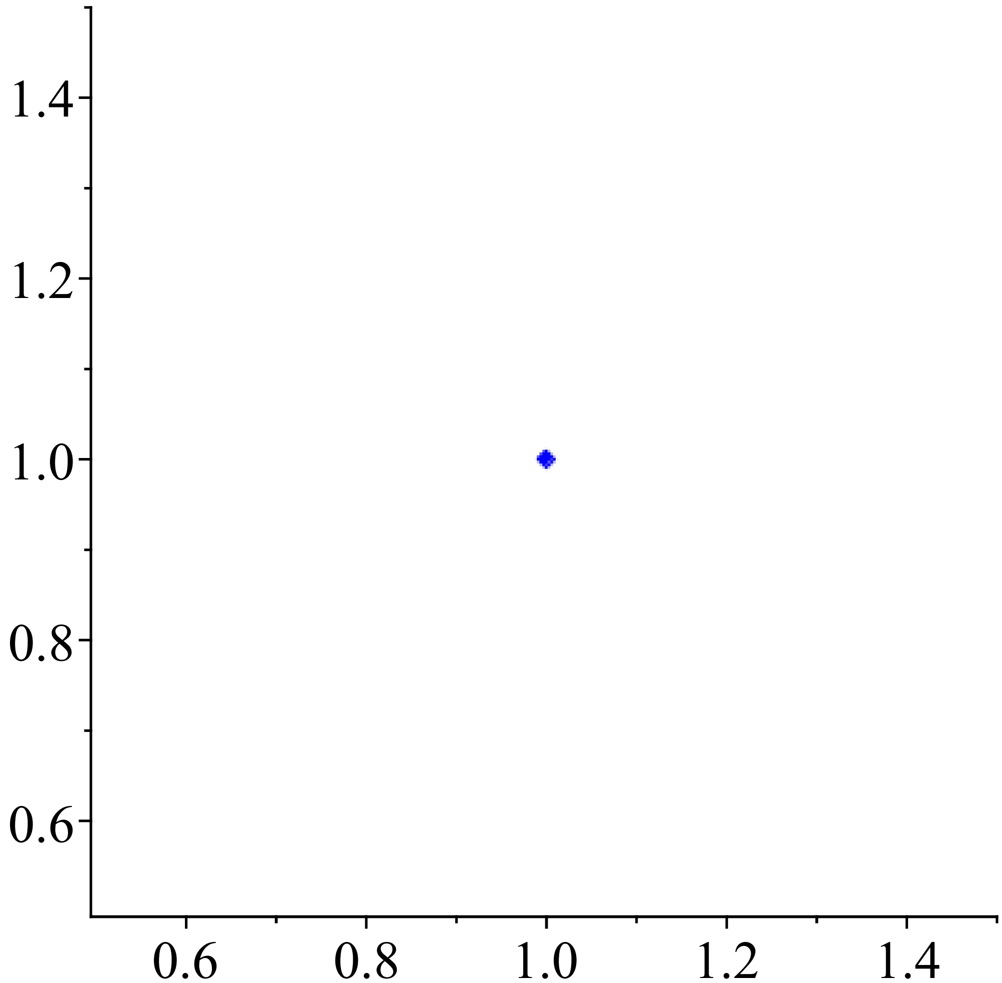
> $g1 := DEtools[dfieldplot](du, y(x), x = 0..2, y = 0..2);$



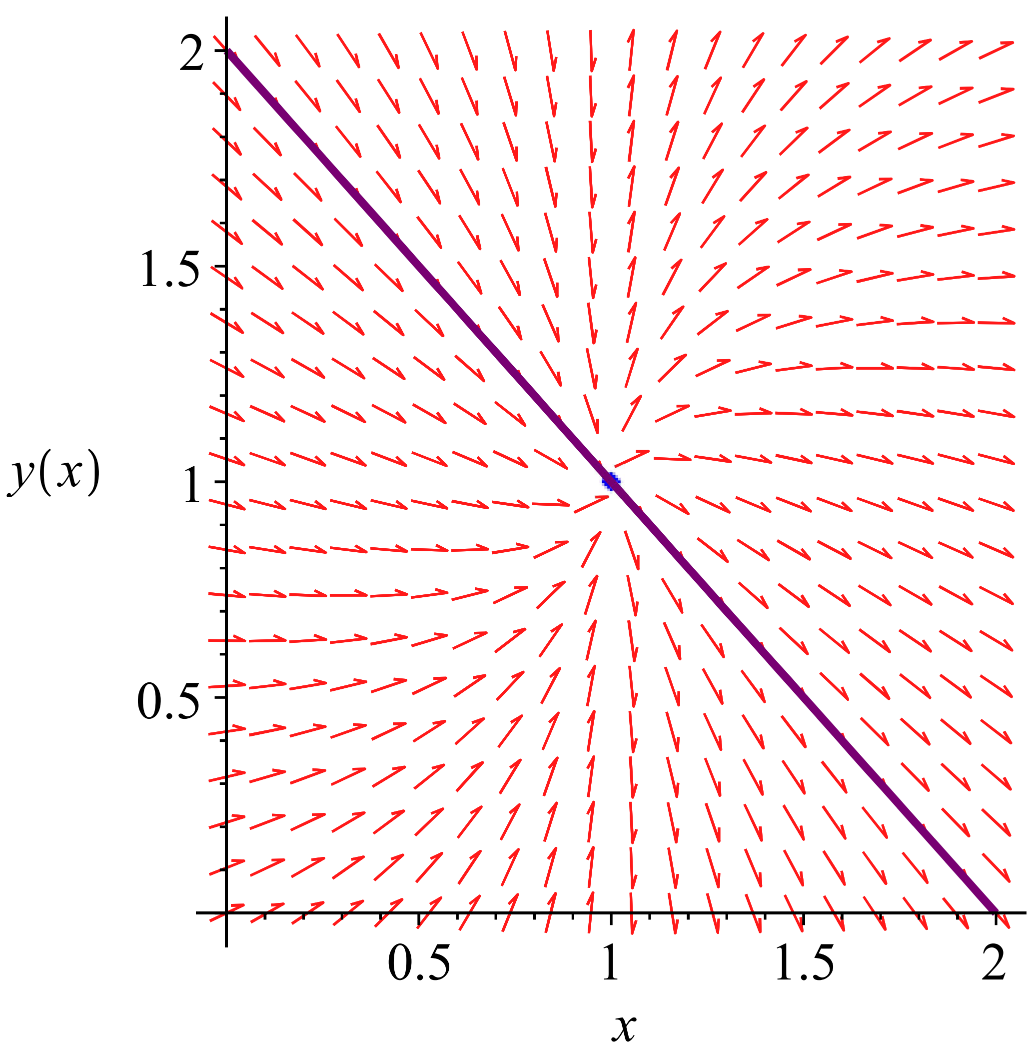

> $line := DEtools[DEplot](du, y(x), x = 0 ..2 , y = 0 ..2 , [y(0) = 2], linecolor = purple );$




> $pointe := plot(\,[seq(\,[\,[1, 1\,]\,]\,)\,], style = POINT, color = blue, symbol = soliddiamond, symbolsize = 15\,);$




> $plots[display](g1, pointe, line, plot(33\,x + 32, x = 0\,..2\,, color = green))$;




> *restart*;

> ***Задание* 4**

**Найдите решение задачи Коши. Сделайте чертеж интегральной кривой**

**Вариант 3**

$2(xy'+y)=xy^2, y(1)=2$

Задача коши состоит в том, чтобы найти решения дифференциального уравнения, удовлетвояющего начальным условиям.

Maple позволяет нам решить данную задачу одной комндой **dsolve**

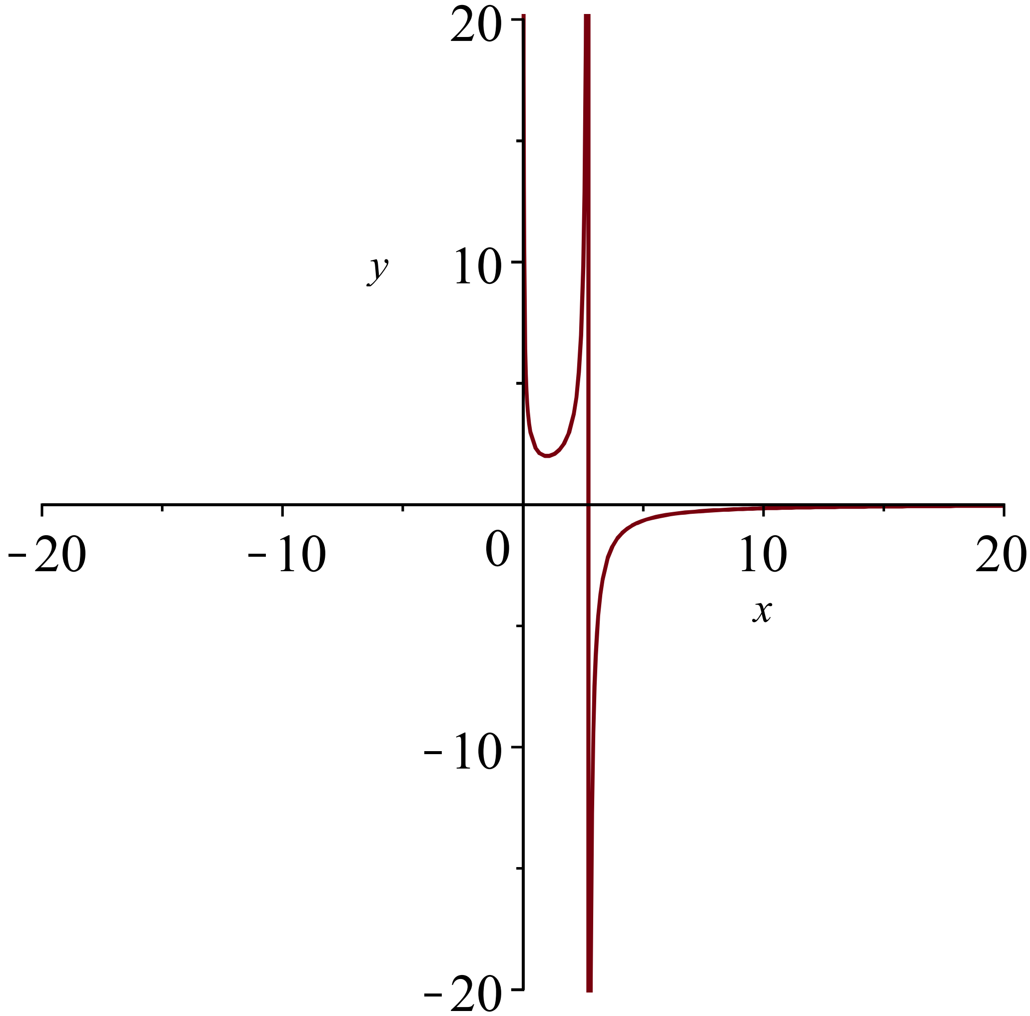
$du := 2\cdot(x\cdot diff(y(x),x)+y(x))=x\cdot y^2(x)$ :

$dsolve(\{du, y(1)=2\}, y(x))$;

$func := rhs(\%)$ :

$plot(func, x=-20..20, y=-20..20)$;

$$y(x) = -\frac{2}{(\ln(x)-1)\,x}$$




> *restart*;

> ***Задание* 5**

**Вариант 3**

$1)\ x = y' \arccos y' + \mathrm{sqrt}(1 - y'^2)$

$2)\ y = (y'^2 + 2)\, sh\, y' - 2\, y'\, ch\, y'$

**Решите дифференцальные ураавенения. Постройте в одной системе координат интегральные кривые**
**при целых значениях произвольной постоянной от -1 до 1.**

$1)\ x = y' \arccos y' + \mathrm{sqrt}(1 - y'^2)$

Уравнение неразрешимо относительно $y'$.

Для решения введем замену и получим систему:

$$\begin{cases} y' = t \\ x = x(t) \end{cases}$$

После чего получим $dy = t \cdot x'(t) \cdot dt$

В результате получим систему:

$$\begin{cases} y = \int t \cdot x'(t) \cdot dt \quad + C \\ x = x(t) \end{cases}$$

> $dx := t \cdot \arccos(t) + \mathrm{sqrt}(1 - t^2);$

$$dx := t \arccos(t) + \sqrt{-t^2 + 1} \qquad \textbf{(7)}$$

> $dfx := diff(dx, t);$

$$dfx := \arccos(t) - \frac{2\,t}{\sqrt{-t^2 + 1}} \qquad \textbf{(8)}$$

> $y := rhs(dsolve(diff(y(t), t) = t \cdot dfx));$

$$y := \frac{t^2 \arccos(t)}{2} + \frac{3\,t\sqrt{-t^2 + 1}}{4} - \frac{3 \arcsin(t)}{4} + \_C1 \qquad \textbf{(9)}$$

> $Cn1 := subs(\_C1 = -1, y):$
> $Cn1plot := plot([dx, Cn1, t = -2..2], color = red):$
> $C0 := subs(\_C1 = 0, y):$
> $C0plot := plot([dx, C0, t = -2..2], color = green):$
> $C1 := subs(\_C1 = 1, y):$
> $C1plot := plot([dx, C1, t = -2..2], color = blue):$
> $plots[display](Cn1plot, C0plot, C1plot);$
> $restart;$
>

$2)\, y = (y'^2 + 2)\, sh\, y' - 2\, y'\, ch\, y'$

Решаем аналоично первому, но получаем систему

$$\begin{cases} y = y(t) \\ x = \int \frac{y'(t)\,dt}{t} dt + C \end{cases}$$

> $du := (t^2 + 2)\sinh(t) - 2 \cdot t \cdot \cosh(t);$

$$du := (t^2 + 2)\,\sinh(t) - 2\,t\cosh(t) \qquad \textbf{(10)}$$

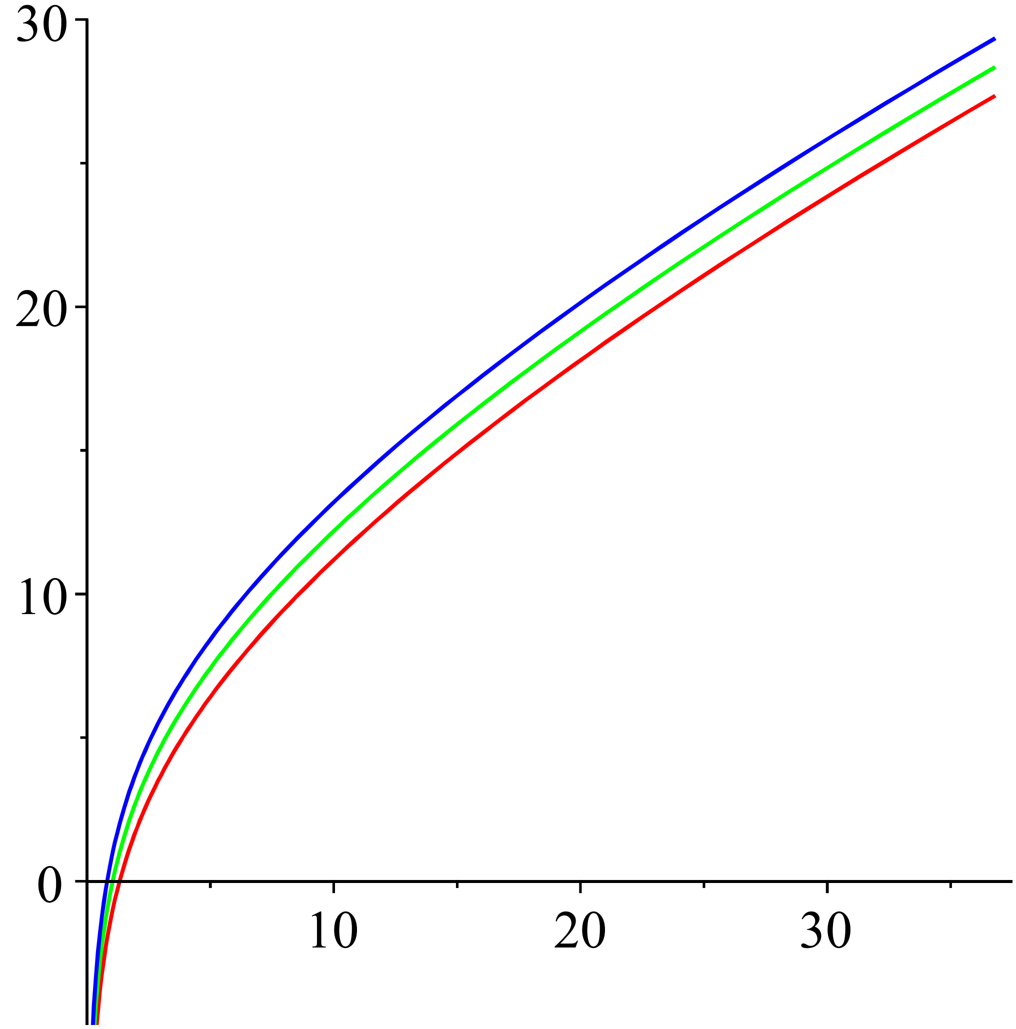
> $dift := simplify(diff(du, t));$

$$dift := \cosh(t)\, t^2 \qquad \textbf{(11)}$$

> $r := rhs\left(dsolve\left(diff(y(t), t) = \frac{dift}{t}\right)\right);$

$$r := t\sinh(t) - \cosh(t) + \_C1 \qquad \textbf{(12)}$$

> $Cn1 := subs(\_C1 = -1, r):$
> $Cn1plot := plot([du, Cn1, t = -2..2], color = red):$
> $C0 := subs(\_C1 = 0, r):$
> $C0plot := plot([du, C0, t = -2..2], color = green):$
> $C1 := subs(\_C1 = 1, r):$
> $C1plot := plot([du, C1, t = -2..2], color = blue):$
> $plots[display](Cn1plot, C0plot, C1plot);$




> ***Задание* 6**
***Найдите все решения уравнения.***
***Постройте* в *одной системе координат график особого решения* и *интегральных кривых при целых значениях произвольной***
***постоянной от*  $-3$ *до* 3**

Вариант 3

6.3 $y\ = xy' + y'^2 + 1$

Производим замену y' = t и получаем систему:

$$\begin{cases} y = f(x, t) \\ \quad y' = t \end{cases}$$

Из этого слуедует, что dy = $\frac{\partial}{\partial x} f(x, t) + \frac{\partial}{\partial t} f(x, t) = t dx$

Следоваетльно, решая систему, получим результат:

$$\begin{cases} x = x(t, C) \\ y = f(y, t) \end{cases}$$

> $du := y(x) = x \cdot diff(y(x), x) + diff(y(x), x)^2 + 1;$

$$du := y(x) = x\left(\frac{d}{dx}\,y(x)\right) + \left(\frac{d}{dx}\,y(x)\right)^2 + 1 \quad \textbf{(13)}$$

> *result* := *dsolve*(*du*, *y*(*x*));

$$result := y(x) = -\frac{x^2}{4} + 1, y(x) = \_C1^2 + x\,\_C1 + 1 \quad \textbf{(14)}$$

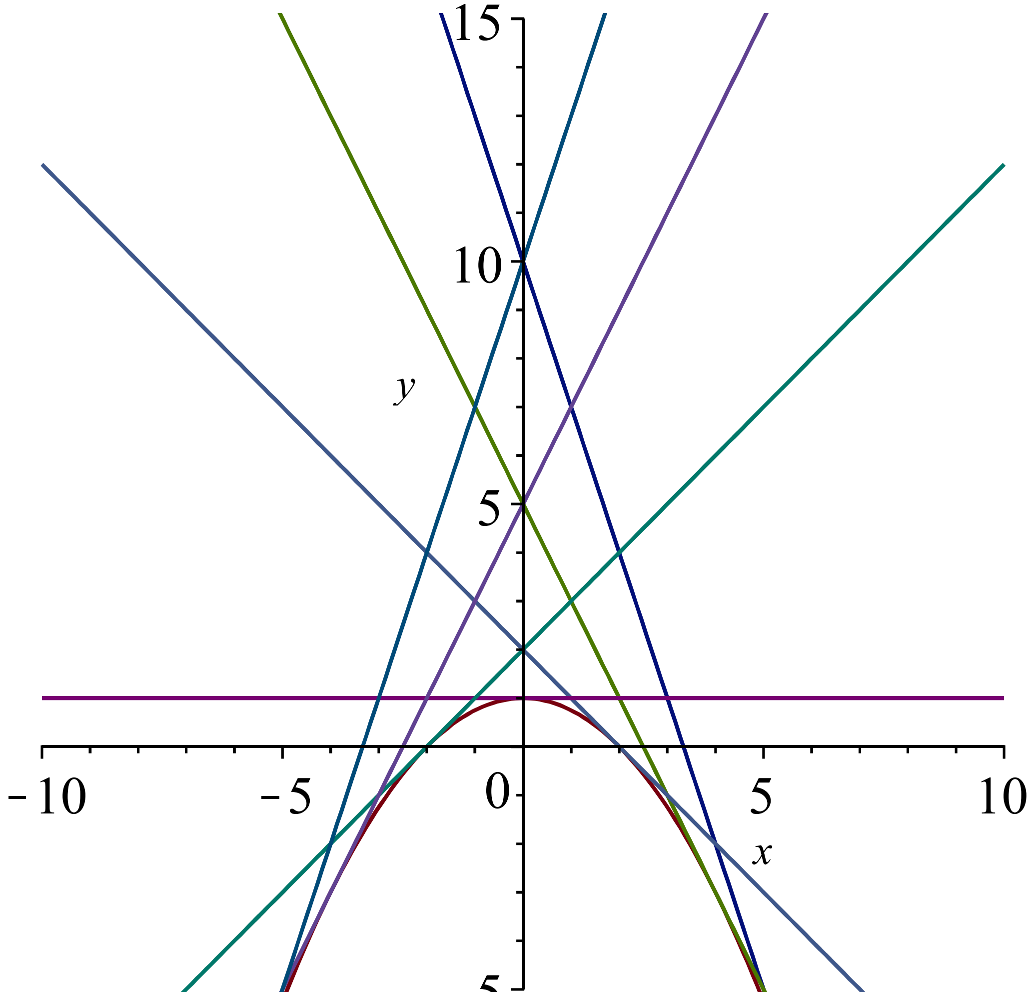
> *right* := *rhs*(*result*[2]);

$$right := \_C1^2 + x\,\_C1 + 1 \quad \textbf{(15)}$$

> *lines* := *seq*(*subs*(_C1 = *i*, *right*), *i* = -3 ..3);

$$lines := -3\,x + 10, -2\,x + 5, -x + 2, 1, x + 2, 2\,x + 5, 3\,x + 10 \quad \textbf{(16)}$$

> *plot*([*rhs*(*result*[1]), *lines*], *x* = -10 ..10, *y* = -5 ..15);




> *restart*;

>

>