Модуль 6 Системы дифференциальных уравнений

Тема 1 Нормальные системы дифференциальных уравнений

Опредление. Система дифференциальных уравнений вида

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = f_1(x,\ y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_n), \\ \dfrac{dy_2}{dx} = f_2(x,\ y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_n), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dfrac{dy_n}{dx} = f_n(x,\ y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_n), \end{cases}$$

где $y_1, y_2, ..., y_n$ – искомые функции переменной x, называется нормальной системой.

Совокупность n функций $y_1(x), y_2(x), ..., y_n(x)$, удовлетворяющих каждому уравнению системы, называется ее решением.

Задача Коши для системы дифференциальных уравнений заключается в нахождении решения этой системы, удовлетворяющего начальным условиям: $y_1(x_0) = y_1^0,\ y_2(x_0) = y_2^0,\ \ldots,\ y_n(x_0) = y_n^0.$

Основные методы интегрирования нормальных систем дифференциальных уравнений – метод исключения и метод интегрируемых комбинаций.

Метод исключения

Этот метод позволяет свести нормальную систему из n дифференциальных уравнений к одному дифференциальному уравнению n-го порядка относительно одной неизвестной функции.

Пример. Решить систему методом исключения:

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = z^2 + \sin x, \\ \dfrac{dz}{dx} = \dfrac{y}{2z}. \end{cases}$$

Решение. Дифференцируем первое уравнение системы по x: $\dfrac{d^2y}{dx^2} = 2z\dfrac{dz}{dx} + \cos x$.

Подставив в полученное уравнение из второго уравнения системы выражение вместо $\dfrac{dz}{dx}$, имеем: $\dfrac{d^2y}{dx^2} = 2z\dfrac{y}{2z} + \cos x$ или $\dfrac{d^2y}{dx^2} - y = \cos x$.

Последнее уравнение – линейное неоднородное дифференциальное уравнение 2-

го порядка со специальной правой частью $f(x)=\cos x$, $\sigma=i$. Соответствующее ему однородное уравнение – $y''-y=0$ с характеристическим уравнением $\lambda^2-1=0$. Определив для простых действительных корней $\lambda_{1,2}=\pm 1$ порождаемые ими частные решения, получим общее решение однородного уравнения: $y_0=C_1e^{-x}+C_2e^x$.

Ищем частное решение неоднородного уравнения в виде $y_ч=A\cos x+B\sin x$, где A, B – неопределенные коэффициенты.

Вычисляем производные:

$y'_ч=-A\sin x+B\cos x,$

$y''_ч=-A\cos x-B\sin x$

Подставляем их в уравнение, группируем относительно $\sin x$ и $\cos x$, приравниваем коэффициенты.

Получаем систему

$$\begin{cases}-2A=1,\\ -2B=0,\end{cases}$$

из которой находим $A=-\frac{1}{2}, B=0$.

Общее решение дифференциального уравнения 2-го порядка: $y=C_1e^{-x}+C_2e^x-\frac{\cos x}{2}$.

Возвращаемся к первому уравнению заданной системы, из которого выражаем z^2: $z^2=\frac{dy}{dx}-\sin x$.

Подставив в это уравнение продифференцированное общее решение $y=C_1e^{-x}+C_2e^x-\frac{\cos x}{2} \Rightarrow y'=-C_1e^{-x}+C_2e^x+\frac{\sin x}{2}$, получим: $z^2=C_2e^x-C_1e^{-x}-\frac{\sin x}{2}$.

Общее решение системы: $y=C_1e^{-x}+C_2e^x-\frac{\cos x}{2}$, $z^2=C_2e^x-C_1e^{-x}-\frac{\sin x}{2}$.

Метод интегрируемых комбинаций

Метод заключается в том, что посредством арифметических операций из уравнений системы дифференциальных уравнений получают легко интегрируемые уравнения относительно новой неизвестной функции.

Пример. Методом интегрируемых комбинаций решить систему

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y - 1, \\ \dfrac{dy}{dt} = x - 1. \end{cases}$$

Решение. Сложив оба уравнения системы, получим $\dfrac{dx}{dt} + \dfrac{dy}{dt} = x + y - 2$ или $(x+y)' = x + y - 2.$

Обозначим $x + y = z,$ где $z = z(t),$ получим: $z' = z - 2$ – уравнение с разделяющимися переменными. Запишем его в виде $\frac{dz}{dt} = z - 2$ или $\frac{dz}{z-2} = dt.$ Отсюда находим $z = C_1 e^t + 2.$

Возвращаемся к старым переменным: $x + y = C_1 e^t + 2.$

Выразим теперь y через x: $y = C_1 e^t + 2 - x.$

Продифференцируем это равенство и подставим вместо $\frac{dy}{dt}$ во 2-е уравнение системы: $y' = C_1 e^t - x'.$

После подстановки: $C_1 e^t - x' = x - 1$ или $x' + x = C_1 e^t + 1$ – это линейное уравнение 1-го порядка. Решим его методом Бернулли.

Пусть $x = uv,$ тогда $u'v + uv' + uv = C_1 e^t + 1.$ Отсюда $v = e^{-t},$ $u = \frac{C_1}{2} e^{2t} + e^t + C_2,$ тогда

$$\begin{cases} x(t) = \dfrac{C_1}{2} e^t + C_2 e^{-t} + 1, \\ y(t) = \dfrac{C_1}{2} e^t - C_2 e^{-t} + 1. \end{cases}$$

Это и есть общее решение исходной системы.