Тема 3 Уравнения, не разрешенные относительно производной

3.1 Особенности решения

1. Уравнения вида $F(x, y, y') = 0$ можно решать следующими методами.

а) Разрешить уравнение относительно y', т. е. из уравнения $F(x, y, y') = 0$ выразить y' через x и y. Получится одно или несколько уравнений вида $y' = f(x, y)$. Каждое из них надо решить.

б) Метод введения параметра[1].

Пусть уравнение $F(x, y, y') = 0$ можно разрешить относительно y, т. е. записать в виде $y = f(x, y')$. Введя параметр

$$p = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = y', \tag{1}$$

получим

$$y = f(x, p). \tag{2}$$

Взяв полный дифференциал от обеих частей равенства (2) и заменив $\mathrm{d}y$ через $p\,\mathrm{d}x$ (в силу (1)), получим уравнение вида

$$M(x, p)\,\mathrm{d}x + N(x, p)\,\mathrm{d}p = 0.$$

Если решение этого уравнения найдено в виде $x = \varphi(p)$, то, воспользовавшись равенством (2), получим решение исходного уравнения в параметрической записи: $x = \varphi(p)$, $y = f(\varphi(p), p)$.

Уравнения вида $x = f(y, y')$ решаются тем же методом.

Пример. Решить уравнение $y = x + y' - \ln y'$. Вводим параметр $p = y'$:

$$y = x + p - \ln p. \tag{3}$$

Берем полный дифференциал от обеих частей равенства и заменяем $\mathrm{d}y$ на $p\,\mathrm{d}x$ в силу (1): $\mathrm{d}y = \mathrm{d}x + \mathrm{d}p - \frac{\mathrm{d}p}{p}$, $\quad p\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}x + \mathrm{d}p - \frac{\mathrm{d}p}{p}$. Решаем полученное уравнение. Переносим члены с $\mathrm{d}x$ влево, с $\mathrm{d}p$ — вправо:

$$(p-1)\,\mathrm{d}x = \frac{p-1}{p}\mathrm{d}p. \tag{4}$$

а) Если $p \neq 1$, то сокращаем на $p-1$:

$$\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}p}{p},\; x = \ln p + C.$$

Подставляя это в (3), получаем решение в параметрической записи:

$$x = \ln p + C,\; y = p + C. \tag{5}$$

В данном случае можно исключить параметр p и получить решение в явном виде. Для этого из первого из уравнений (5) выражаем p через x, т. е. $p = \mathrm{e}^{x-C}$. Подставляя это во второе уравнение, получаем искомое решение:

$$y = \mathrm{e}^{x-C} + C. \tag{6}$$

б) Рассмотрим случай, когда в (4) имеем $p = 1$. Подставляя $p = 1$ в (3), получаем еще решение

$$y = x + 1. \tag{7}$$

(Было бы ошибкой в равенстве $p = 1$ заменить p на y' и, проинтегрировав, получить $y = x + C$.)

2. Решение $y = \varphi(x)$ уравнения $F(x, y, y') = 0$ называется *особым*, если через каждую его точку, кроме этого решения, проходит и другое решение, имеющее в этой точке ту же касательную, что и решение $y = \varphi(x)$, но не совпадающее с ним в сколь угодно малой окрестности этой точки[1].

Если функция $F(x, y, y')$ и производные $\frac{\partial F}{\partial y}$ и $\frac{\partial F}{\partial y'}$ непрерывны, то любое особое решение уравнения

$$F(x, y, y') = 0 \tag{8}$$

удовлетворяет также уравнению

$$\frac{\partial F(x, y, y')}{\partial y'} = 0. \tag{9}$$

Поэтому, чтобы отыскать особые решения уравнения (3), надо исключить y' из уравнений (8) и (9). Полученное уравнение $\psi(x, y) = 0$ называется уравнением *дискриминантной* кривой. Для каждой ветви дискриминантной кривой надо проверить, является ли эта ветвь решением уравнения (8), и если является, то будет ли это решение особым, т. е. касаются ли его в каждой точке другие решения.

П р и м е р. Найти особое решение уравнения

$$y = x + y' - \ln y'. \tag{10}$$

Дифференцируем обе части равенства по y':

$$0 = 1 - \frac{1}{y'}. \tag{11}$$

Исключаем y' из уравнений (10) и (11). Из (11) имеем $y' = 1$; подставляя это в (10), получаем уравнение дискриминантной кривой

$$y = x + 1. \tag{12}$$

Проверим, будет ли кривая особым решением. Для этого сначала проверяем, является ли она решением уравнения (10). Подставляя (12) в (10), получаем тождество $x + 1 = x + 1$. Значит, кривая (12) — решение.

Теперь проверим, является ли это решение особым, т. е. касаются ли его в каждой точке другие решения. В п. 1 было найдено, что другие решения выражаются формулой (6). Пишем условия касания кривых $y = y_1(x)$ и $y = y_2(x)$ в точке с абсциссой x_0:

$$y_1(x_0) = y_2(x_0),\ y_1'(x_0) = y_2'(x_0). \tag{13}$$

Для решений (6) и (12) эти условия принимают вид $\mathrm{e}^{x_0 - C} + C = x_0 + 1$, $\mathrm{e}^{x_0 - C} = 1$. Из второго равенства имеем $C = x_0$; подставляя это в первое равенство, получаем $1 + x_0 = x_0 + 1$. Это равенство справедливо при всех x_0. Значит, при каждом x_0 решение (12) в точке с абсциссой x_0 касается одной из кривых семейства (6), а именно той кривой, для которой $C = x_0$.

Итак, в каждой точке решение (12) касается другого решения (6), не совпадающего с ним. Значит, решение (12) — особое.

Если семейство решений записано в параметрическом виде, как в (5), то выполнение условий касания проверяется аналогично. При этом надо учесть, что $y' = p$.

3. Если семейство кривых $\Phi(x, y, C) = 0$, являющихся решениями уравнения $F(x, y, y') = 0$, имеет огибающую $y = \varphi(x)$, то эта огибающая является особым решением того же уравнения. Если функция Φ имеет непрерывные первые производные, то для отыскания огибающей надо исключить C из уравнений

$$\Phi(x, y, C) = 0, \qquad \frac{\partial\Phi(x, y, C)}{\partial C} = 0$$

и проверить, будет ли полученная кривая огибающей, т. е. касаются ли ее в каждой точке кривые семейства. Эту проверку можно провести изложенным в конце п. 2 методом, используя условия касания (13).

3.2 Уравнения Лагранжа и Клеро

Уравнение Лагранжа: $y = xf(y') + g(y'),\ f(y') \neq y'$

Введем параметр $p = y'$:

$$\begin{cases} y' = p, \\ y = xf(p) + g(p) \equiv F(x, p) \end{cases}$$

Первое уравнение перепишем $dy = pdx$ и продифференцируем второе:

$$dy = F'_x dx + F'_p dp \Rightarrow dy = f(p)dx + (xf'(p) + g'(p))dp\,.$$

Приравняем правые части двух выражений для dy:

$$pdx = f(p)dx + (xf'(p) + g'(p))dp$$

$$(p - f(p))dx = (xf'(p) + g'(p))dp$$

Перепишем последнее уравнение в предположении $p - f(p) \neq 0$ в виде:

$$\frac{dx}{dp} - \frac{f'(p)}{p - f(p)}x = \frac{g'(p)}{p - f(p)}\,.$$

Это линейное неоднородное уравнение относительно функции $x = x(p)$. Пусть $x = \Phi(p, C)$ − его общее решение. Тогда общее решение уравнения Лагранжа можно записать в параметрическом виде:

$$\begin{cases} x = \Phi(p, C), \\ y = \Phi(p, C)f(p) + g(p). \end{cases}$$

Исследуем случай, когда $p - f(p) = 0$. Если $\exists p_0 : p_0 - f(p_0) = 0$, то $y = xf(p_0) + g(p_0)$ − возможное особое решение. Необходимо проверить.

Уравнение Клеро: $y = xy' + g(y'),\ g(y') \neq ay' + b$.

Это частный случай уравнения Лагранжа. Особый практический интерес предсталяет особое решение (огибающая семейства интегральных кривых).

Вводим параметр:

$$\begin{cases} y' = p, \\ y = xp + g(p). \end{cases}$$

Дифференцируя второе уравнение системы, получаем:

$$dy = pdx + (x + g'(p))dp.$$

Тогда, поскольку $dy = pdx$, имеем: $pdx = pdx + (x + g'(p))dp$.

Последнее уравнение распадается на два:

$$\left[\begin{array}{l} x + g'(p) = 0 \to x = -g'(p) - \text{особое решение} \\ dp = 0 \to p = C \to y = xC + g(C) - \text{общее решение} \end{array}\right.$$

Пример. Решить уравнение $y = xy' + y'^2$.

Решение. Вводим параметр $y' = p$ и получаем систему:

$$\begin{cases} y' = p, \\ y = xp + p^2 \end{cases}$$

Из нее получаем уравнение $pdx = pdx + (x + 2p)dp \Rightarrow (x + 2p)dp = 0$, которое распадается на два: $p = C$ или $x = -2p$. Первое из них приводит к общему решению $-$ $y = xC + C^2$, а второе – к особому $y = -\dfrac{x^2}{4}$. Особое решение получается исключением параметра из системы

$$\begin{cases} x = -2p \to p = -\dfrac{x}{2} \\ y = -2p \cdot p + p^2 = -p^2 \end{cases} \Rightarrow y = -\left(-\frac{x}{2}\right)^2 = -\frac{x^2}{4}.$$