Лекция 4

4. ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ СИСТЕМ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Дана система n нелинейных уравнений с n неизвестными:

$$\begin{aligned} & f_1(x_1,...,x_n)=0, \\ & f_2(x_1,...,x_n)=0, \\ & \vdots \\ & f_n(x_1,...,x_n)=0, \end{aligned} \qquad (4.1)$$

где $f_i(x_1,...,x_n): R^n \to R$, $i=1,...,n$, – нелинейные функции, определенные и непрерывные в некоторой области $G \subset R^n$, или в векторном виде

$$F(x)=0,$$

где $x=(x_1,...,x_n)^T$, $F(x)=[f_1(x),...,f_n(x)]^T$.

Требуется найти такой вектор $x_* = (x_{*1},...,x_{*n})^T$, который при подстановке в систему превращает каждое уравнение в верное числовое равенство.

Замечания.

1. Для всех рассматриваемых далее методов требуется находить начальное приближение $x^{(0)}$. В случае $n=2$ это можно сделать графически, определив координаты точки пересечения кривых, описываемых уравнениями $f_1(x_1,x_2)=0$ и $f_2(x_1,x_2)=0$.

2. Задача решения системы может быть сведена к задаче поиска минимума функции $\Psi(x)=\sum\limits_{i=1}^{n} f_i^2(x_1,...,x_n)$. Так как функция $\Psi(x)$ неотрицательная, ее минимальное значение, равное нулю, достигается в точке x_*, являющейся решением системы. Для поиска минимума функции $\Psi(x)$ можно применить различные методы поиска безусловного экстремума функций многих переменных (первого, второго, нулевого порядков).

А. МЕТОД ПРОСТЫХ ИТЕРАЦИЙ

Для применения метода требуется привести систему (4.1) к равносильному виду:

$$\begin{aligned} & x_1=\varphi_1(x_1,...,x_n), \\ & x_2=\varphi_2(x_1,...,x_n), \\ & \vdots \\ & x_n=\varphi_n(x_1,...,x_n), \end{aligned} \qquad (4.2)$$

или в векторной форме

$$x=\Phi(x),$$

где $x = (x_1, ..., x_n)^T$, $\Phi(x) = [\varphi_1(x), ..., \varphi_n(x)]^T$, функции $\varphi_i(x)$ определены и непрерывны в окрестности изолированного решения x_* системы.

Методика решения задачи

Шаг 1. Задать начальное приближение $x^{(0)} = (x_{10}, x_{20}, ..., x_{n0})^T$ и малое положительное число ε (точность). Положить $k = 0$.

Шаг 2. Вычислить $x^{(k+1)}$ по формуле

$$x^{(k+1)} = \Phi(x^{(k)}),$$

или

$$\begin{aligned} x_1^{(k+1)} &= \varphi_1(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, ..., x_n^{(k)}), \\ x_2^{(k+1)} &= \varphi_2(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, ..., x_n^{(k)}), \\ &\vdots \\ x_n^{(k+1)} &= \varphi_n(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, ..., x_n^{(k)}). \end{aligned}$$

Шаг 3. Если $\Delta^{(k+1)} = \max\limits_i \left| x_i^{(k+1)} - x_i^{(k)} \right| \le \varepsilon$, процесс завершен и $x_* \cong x^{(k+1)}$. Если $\Delta^{(k+1)} > \varepsilon$, то положить $k = k + 1$ и перейти к п.2.

З а м е ч а н и я. Итерационный процесс соответствует *параллельному итерированию,* так как для вычисления $(k+1)$-го приближения всех неизвестных учитываются вычисленные ранее их k-е приближения.

Теорема (о достаточном условии сходимости метода простых итераций).

Пусть функции $\varphi_i(x)$ и $\varphi_i'(x)$, $i = 1, ..., n$, непрерывны в области G, причем выполнено неравенство

$$\max_{x \in G} \max_i \sum_{j=1}^{n} \left| \frac{\partial \varphi_i(x)}{\partial x_j} \right| \le q < 1,$$

где q – некоторая постоянная.

Если последовательные приближения $x^{(k+1)} = \Phi(x^{(k)})$, $k = 0,1,...,$ не выходят из области G, то процесс последовательных приближений сходится: $x_* = \lim\limits_{k \to \infty} x^{(k)}$ и вектор x_* является в области G единственным решением системы.

Б. МЕТОД ЗЕЙДЕЛЯ

Метод Зейделя предназначен для решения систем, записанных в форме (4.2). Этот метод является модификацией метода простых итераций, где после задания начального приближения $x^{(0)}$ вместо параллельного итерирования производится *последовательное итерирование*, причем на каждой итерации в каждое последующее уравнение подставляются значения неизвестных, полученных из предыдущих уравнений.

Методика решения задачи

Шаг 1. Задать начальное приближение $x^{(0)}$ и малое положительное число ε (точность). Положить $k = 0$.

Шаг 2. Вычислить $x^{(k+1)}$ по формулам

$$
\begin{aligned}
x_1^{(k+1)} &= \varphi_1(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_n^{(k)}),\\
x_2^{(k+1)} &= \varphi_2(\boxed{x_1^{(k+1)}}, x_2^{(k)}, \dots, x_n^{(k)}),\\
&\vdots\\
x_n^{(k+1)} &= \varphi_n(\boxed{x_1^{(k+1)}}, \boxed{x_2^{(k+1)}}, \dots, \boxed{x_{n-1}^{(k+1)}}, x_n^{(k)}),
\end{aligned}
$$

где прямоугольниками отмечены значения, которые берутся из предшествующих уравнений на текущей итерации.

Шаг 3. Если $\Delta^{(k+1)} = \max\limits_i \left| x_i^{(k+1)} - x_i^{(k)} \right| \le \varepsilon$, процесс завершить и положить $x_* \cong x^{(k+1)}$. Если $\Delta^{(k+1)} > \varepsilon$, то положить $k = k + 1$ и перейти к п.2.

B. МЕТОД НЬЮТОНА

Метод используется для решения систем вида (4.1).

Формула для нахождения решения является естественным обобщением формулы метода Ньютона для решения одного уравнения:

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - W^{-1}(x^{(k)}) \cdot F(x^{(k)}), \quad k = 0,1,\dots,$$

где

$$W(x) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1(x)}{\partial x_1} & \dots & \dfrac{\partial f_1(x)}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \dfrac{\partial f_n(x)}{\partial x_1} & \dots & \dfrac{\partial f_n(x)}{\partial x_n} \end{pmatrix} \text{ – матрица Якоби.}$$

Так как процесс вычисления обратной матрицы является трудоемким, преобразуем формулу следующим образом:

$$\Delta x^{(k)} = -W^{-1}(x^{(k)}) \cdot F(x^{(k)}), \quad k = 0,1,\dots,$$

где $\Delta x^{(k)} = x^{(k+1)} - x^{(k)}$ – поправка к текущему приближению $x^{(k)}$.

Умножим последнее выражение слева на матрицу Якоби $W(x^{(k)})$:

$$W(x^{(k)})\,\Delta x^{(k)} = -W(x^{(k)})\,W^{-1}(x^{(k)})F(x^{(k)}) = -F(x^{(k)}), \quad k = 0,1,\dots$$

В результате получена система линейных алгебраических уравнений относительно поправки $\Delta x^{(k)}$. После ее определения вычисляется следующее приближение $x^{(k+1)} = x^{(k)} + \Delta x^{(k)}$.

Методика решения задачи

Шаг 1. Задать начальное приближение $x^{(0)}$ и малое положительное число ε (точность). Положить $k=0$.

Шаг 2. Решить систему линейных алгебраических уравнений относительно поправки $\Delta x^{(k)}$: $W(x^{(k)}) \cdot \Delta x^{(k)} = -F(x^{(k)})$.

Шаг 3. Вычислить следующее приближение:

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} + \Delta x^{(k)}.$$

Шаг 4. Если $\Delta^{(k+1)} = \max\limits_i \left| x_i^{(k+1)} - x_i^{(k)} \right| \le \varepsilon$, процесс закончить и положить $x_* \cong x^{(k+1)}$. Если $\Delta^{(k+1)} > \varepsilon$, то положить $k = k+1$ и перейти к п.2.

Г. МОДИФИКАЦИИ МЕТОДА НЬЮТОНА

Г1. Упрощенный метод Ньютона. В этом методе в отличие от метода Ньютона обратная матрица ищется только один раз в начальной точке $x^{(0)}$:

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - W^{-1}(x^{(0)}) \cdot F(x^{(k)}), \qquad k = 0,1,\ldots$$

Заметим, что при решении одного уравнения $f(x)=0$ упрощенным методом Ньютона производная функции вычисляется также один раз в начальной точке.

Методика решения задачи аналогична применению метода Ньютона, где используется система $W(x^{(0)}) \cdot \Delta x^{(k)} = -F(x^{(k)}), \quad k = 0,1,\ldots$, матрица которой $W(x^{(0)})$ не изменяется от итерации к итерации.

Очевидно, сходимость упрощенного метода Ньютона в общем случае хуже.

Г2. Метод секущих. Идея метода секущих (*метода Бройдена*) заключается в аппроксимации матрицы Якоби с использованием уже вычисленных значений функций, образующих систему.

Методика решения задачи

Шаг 1. Задать начальное приближение $x^{(0)}$ и малое положительное число ε.

Шаг 2. Положить $k=0$ и $A_0 = W(x^{(0)})$, где $W(x)$ – матрица Якоби.

Шаг 3. Решить систему линейных алгебраических уравнений $A_k s_k = -F(x^{(k)})$ относительно s_k – поправки к текущему приближению.

Шаг 4. Вычислить $x^{(k+1)} = x^{(k)} + s_k$.

Шаг 5. Если $\|s_k\| \le \varepsilon$, процесс завершить и положить $x_* = x^{(k+1)}$. Если $\|s_k\| > \varepsilon$, вычислить $y_k = F(x^{(k+1)}) - F(x^{(k)}), \quad A_{k+1} = A_k + \dfrac{(y_k - A_k s_k) \cdot s_k^T}{s_k^T s_k}$, положить $k = k+1$ и перейти к п.3.