5. ПРИНЦИП СЖИМАЮЩИХ ОТОБРАЖЕНИЙ

5.1. Полные метрические пространства

Метрическим пространством называется множество X элементов $x, y, \ldots$ произвольной природы, на котором определена так называемая функция расстояния или метрика $\rho = \rho(x, y)$, т. е. функция, для которой выполнены следующие аксиомы:

1) $\rho(x, y) \geq 0 \quad \forall x, y$, причем $\rho(x, y) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = y$;

2) $\rho(x, y) = \rho(y, x) \quad \forall x, y, z$;

3) $\rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(z, y)$ для всех x, y, z.

Пример. Пусть $C_{[a,b]}$ − пространство непрерывных на отрезке [a,b] функций, тогда $\rho(f, g) = \max\limits_{a \leq t \leq b} \left| f(t) - g(t) \right|$ − расстояние в этом пространстве.

Очевидно, если X – нормированное пространство с нормой $\| \ \|$, то можно принять $\rho(x, y) = \| x - y \|$.

Обычно элементы метрического пространства называются точками этого пространства. Введем некоторые определения.

Последовательность $\{x^n\}$ в метрическом пространстве называется сходящейся к x, если $\lim\limits_{n \to \infty} \rho(x^n, x) = 0$. Сходимость последовательности $\{x^n\}$ к x обозначается $x^n \underset{n \to \infty}{\to} x$ или $\lim\limits_{n \to \infty} x^n = x$.

Окрестностью точки x^0 в пространстве X называется множество:

$U_\varepsilon(x^0) = \left\{ x \in X \middle| \rho(x, x^0) < \varepsilon \right\}$.

Предельной точкой множества $M \subset X$ называется такая точка, в любой окрестности которой находится бесконечно много элементов из множества M.

Замыканием множества $\overline{M}$ называется объединение множества M с множеством всех его предельных точек.

Множество замкнуто, если $M = \overline{M}$, т. е. когда оно совпадает со своим замыканием.

Пусть в метрическом пространстве X дана последовательность $\left\{x^n\right\} \subset X$. Эту последовательность будем называть *фундаментальной*, если для любого числа $\varepsilon > 0$ существует число $n_0 = n_0(\varepsilon)$ такое, что $\rho(x^n, y^m) < \varepsilon$ при любых $n, m > n_0$. Легко видеть, что всякая сходящаяся последовательность является фундаментальной.

Метрическое пространство называется *полным* (ПМП), если в нем любая фундаментальная последовательность сходится. Примерами ПМП являются пространства R, R^n, $C_{[a,b]}$.

Очевидно, любое замкнутое подмножество из ПМП в свою очередь тоже является ПМП. Действительно, так как метрика сохраняется и подмножество замкнуто, то любая фундаментальная последовательность сходится в нем.

5.2. Принцип сжимающих отображений

Пусть X – метрическое пространство. Рассмотрим отображение $A: X \to X$ пространства X в себя. Образ элемента x при отображении A обозначается:

$y = A(x)$ *или* $y = Ax$.

Отображение A называется *сжимающим*, если существует такое число α $(0 \le \alpha < 1)$, что

$$\rho(Ax, Ay) \le \alpha\rho(x, y) \quad \forall x, y \in X,$$

иными словами расстояние между образами точек меньше, чем расстояние между самими точками.

Убедимся, что всякое сжимающее отображение непрерывно.

Действительно, по определению отображение A является непрерывным, если для любой сходящейся последовательности $x^k \to x$ выполняется $Ax^k \to Ax$. Пусть $x^k \to x$, т. е. $\rho\left(x^k, x\right) \to 0$ при $k \to \infty$.

Тогда $\rho(Ax^k, Ax) \le \alpha\rho(x^k, x)$, откуда получаем $\lim\limits_{k\to\infty}\rho(Ax^k, Ax) \le 0$, что означает $\lim\limits_{x\to\infty}\rho(Ax^k, Ax) = 0$ или $\lim\limits_{x\to\infty} Ax^k = Ax$. Последнее равносильно непрерывности отображения A.

Точку x будем называть *неподвижной точкой* отображения A, если $x = Ax$.

Теорема 1. В ПМП любое сжимающее отображение имеет неподвижную точку, причем единственную.

Доказательство. Пусть x^0 - произвольная точка: $x^0 \in X$. Построим последовательность $\{x^k\}$ такую, что $x^k = Ax^{k-1}$ $k = 1,2,...$ и докажем, что она фундаментальная (а значит сходящаяся). Оценим расстояние

$$\rho(x^m, x^n) = \rho(A^m x^0, A^n x^0) =$$
$$= \rho(A^n(A^{m-n}x^0), A^n x^0) \le \left|\textit{по свойству сжимающего отображения}\right|$$
$$\le \alpha^n \rho(A^{m-n}x^0, x^0) = \alpha^n \rho(x^0, x^{m-n}) \le \left|\textit{вставляем средние точки}\right|$$
$$\le \alpha^n \left[\rho(x^0, x^1) + \rho(x^1, x^2) + ... + \rho(x^{m-n-1}, x^{m-n})\right] = \alpha^n \left[\rho(x^0, x^1) + \rho(Ax^0, Ax^1) + ... +\right.$$
$$\left. + \rho(A^{m-n-1}x^0, A^{m-n-1}x^1)\right] \le \alpha^n \left[\rho(x^0, x^1) + \alpha\rho(x^0, x^1) + ... + \alpha^{m-n-1}\rho(x^0, x^1)\right]$$
$$\le \alpha^n \rho(x^0, x^1)\left[1 + \alpha + ... + \alpha^{m-n-1}\right] \le$$

$$\le \alpha^n \rho(x^0, x^1)\left[1 + \alpha + \alpha^2 + ...\right] \le$$
$$\left|\textit{используем формулу суммы бесконечной геометрической прогрессии}\right|$$
$$\le \frac{\alpha^n}{1-\alpha}\rho(x^0, x^1) < \varepsilon \quad .$$

Решая неравенство

$$\frac{\alpha}{1-\alpha}\rho(x^0,x^1)<\varepsilon,$$

найдем $n_0=n_0(\varepsilon)$, начиная с которого выполняется данное неравенство и, следовательно, неравенство $p(x^m,x^n)<\varepsilon$. Последнее означает, что последовательность $\{x^n\}$ – фундаментальная. Поскольку X – ПМП, то данная последовательность сходится, т. е. $x^n\to x\in X$.

Убедимся, что x – неподвижная точка отображения A. Действительно, переходя к пределу в равенстве $x^n=Ax^{n-1}$ и используя непрерывность отображения A, получим $x=Ax$.

Методом от противного докажем, что неподвижная точка единственная. Действительно, пусть есть две неподвижные точки. Тогда:

$$x=Ax; \qquad y=Ay.$$

В силу того, что отображение A сжимающее, получим:

$$\rho(x,y)=\rho(Ax,Ay)\le\alpha\rho(x,y), \qquad \alpha<1.$$

Откуда $\rho(x,y)=0$. Т. е. точки x и y совпадают. Теорема доказана.

Следствие. Теорема дает возможность вычислить неподвижную точку x данного отображения при любом начальном приближении x^0. При этом оценка погрешности на n-м шаге $\rho(x^n,x)\le\frac{\alpha^n}{1-\alpha}\rho(x^0,x^1)$.

Эта оценка получается, если перейти в неравенстве

$$\rho(x^n,x^m)\le\frac{\alpha^n}{1-\alpha}\rho(x^0,x^1)$$

к пределу при $m\to\infty$.

5.3. Приложения принципа сжимающих отображений

1) Решение системы линейных уравнений.

Рассмотрим систему $A\overline{x}=\overline{b}$ в пространстве R^n с некоторой нормой. Преобразуем систему к виду $\overline{x}=B\overline{x}+\overline{c}$, и будем рассматривать отображение $A(\overline{x})=B\overline{x}+\overline{c}$.

Решить систему – значит найти неподвижную точку $\overline{x}=A\overline{x}$ отображения A. Проверим, когда отображение будет сжимающим:

$$\rho(A\overline{x},A\overline{y})=\|A\overline{x}-A\overline{y}\|=\|B\overline{x}+\overline{c}-B\overline{y}-\overline{c}\|=\|B(\overline{x}-\overline{y})\|=$$
$$(\textit{применяем свойство матричной нормы})=$$
$$=\|B\|\cdot\|\overline{x}-\overline{y}\|=\|B\|\cdot\rho(\overline{x},\overline{y}).$$

Таким образом, A будет сжимающим отображением тогда и только тогда, когда $\|B\|<1$. Следовательно, в этом случае можно построить сходящуюся итерационную последовательность.

2) Нахождение корней уравнения.

Рассмотрим уравнение:

$f(x)=0 \Leftrightarrow x=\varphi(x)$, где $\varphi(x)=x-f(x)$ или $\varphi(x)=x+f(x)$.

Очевидно, найти корень уравнения равносильно тому, чтобы найти неподвижную точку отображения $x=\varphi(x)$.

Пусть выполнены условия:

а) $|\varphi(x)-\varphi(y)| \le M|x-y| \quad \forall x,y$, где $M<1$ (условие Липшица)

(очевидно, данное условие всегда выполняется, если $|\varphi'(x)| \le M<1 \quad \forall x \in [a,b]$);

б) $\varphi:[a,b] \to [a,b]$.

Тогда итерационная последовательность $x^n=\varphi(x^{n-1})$ сходится в силу принципа сжимающих отображений (см. рис. 5.1 и 5.2).

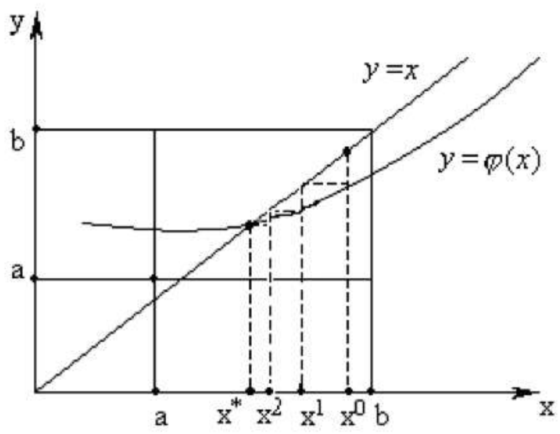

Рис. 5.1.

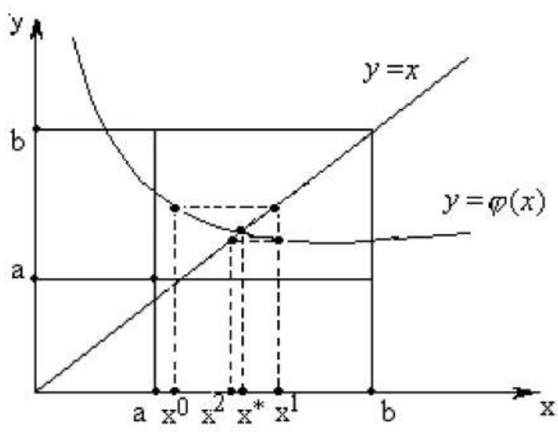

Рис. 5.2.

3) Решение задачи Коши.

Рассмотрим задачу Коши для дифференциального уравнения:

$$\begin{cases} y'=f(x,y) \\ y(x_0)=y_0. \end{cases}$$

Будем предполагать, что *f(x,y)* – непрерывна по *(x,y)* и липшицева по *y*, т. е.

$$|f(x,y_1)-f(x,y_2)| \le M|y_1-y_2| \ \ \forall (x,y_1) \ \ и \ \ (x,y_2) \in G,$$

где G − двумерная область, содержащая точку (x_0,y_0).

Пусть G' − замкнутая ограниченная область, лежащая в G и содержащая точку (x_0,y_0). Тогда $f(x,y)$ ограничена в G', т.е. $|f(x,y)| \le K$ для всех $(x,y) \in G'$.

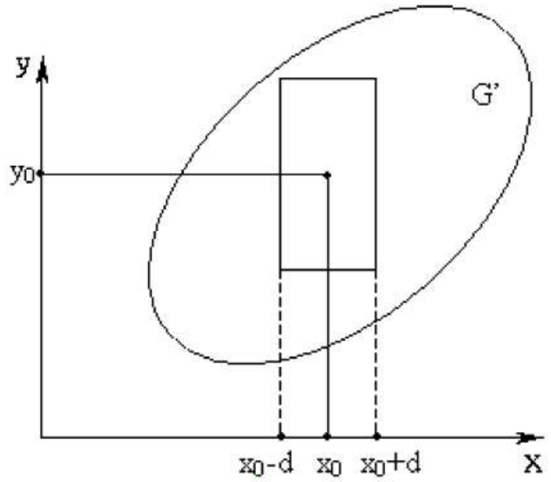

Рис. 5.3.

Выберем число d так, что для прямоугольника

$$P = \{(x,y): |x - x_0| \le d, \quad |y - y_0| \le Kd\}$$

выполняются условия $P \subset G'$ и $Md < 1$.

Рассматриваемая задача Коши равносильна интегральному уравнению:

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))dt.$$

Построим отображение $A: C_{[x_0-d, x_0+d]} \to C_{[x_0-d, x_0+d]}$ и положим

$$A(\varphi) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, \varphi(t))dt,$$

где $\varphi \in C_{[x_0-d, x_0+d]}$.

Покажем, что отображение A – сжимающее в пространстве непрерывных на данном отрезке функций $C^* \subset C_{[x_0-d, x_0+d]}$, которые дополнительно удовлетворяют условию $|\varphi(x) - y_0| \le Kd$.

Другими словами докажем, что отображение A:

1) не выводит за пределы пространства C^*, $A: C^* \to C^*$;

2)является сжимающим отображением.

Действительно, $\rho(f,g) = \max\limits_{x_0-d \le x \le x_0+d} |f(x) - g(x)|$ – расстояние в C^*.

Если φ непрерывная функция, то $A\varphi$ – тоже непрерывная функция и для $\forall \varphi \in C^*$

$$|A\varphi(x) - y_0| = \max\left| y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t,\varphi(t))dt - y_0 \right| \le \max_x \int_{x_0}^{x} |f(t,\varphi(t))dt| \le \int_{x_0}^{x_0+d} |f(t,\varphi(t))dt| \le$$

$$\le \int_{x_0}^{x_0+d} Kdt = Kd,$$

т. е. действительно $A\varphi(x) \in C^*$.

Пусть теперь $\varphi, \psi \in C^*$. Тогда

$$\rho(A\varphi, A\psi) = \max_{x_0 \le x \le x_0+d} \left| y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t,\varphi(t))\,dt - y_0 - \int_{x_0}^{x} f(t,\psi(t))\,dt \right| \le$$

$$\le \max_{x_0 \le x \le x_0+d} \left| \int_{x_0}^{x} \left[f(t,\varphi(t)) - f(t,\psi(t)) \right] dt \right| \le$$

$$\le \max_{x_0 \le x \le x_0+d} \int_{x_0}^{x} \left| f(t,\varphi(t)) - f(t,\psi(t)) \right| dt \le \int_{x_0}^{x_0+d} M \left| \varphi(t) - \psi(t) \right| dt \le$$

$$\le M \int_{x_0}^{x_0+d} \max_{x_0 \le x \le x_0+d} \left| \varphi(t) - \psi(t) \right| dt = Md\,\rho(\varphi,\psi),$$

где $Md<1$.

Следовательно, отображение A – сжимающее и в силу принципа сжимающих отображений при сделанных предположениях существует единственное решение интегрального уравнения

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))dt,$$

а значит и задачи Коши.