Модуль 4 Дифференциальные уравнения первого порядка.

Дифференциальное уравнение − это уравнение, связывающее две или более функционально зависящих друг от друга величин и их дифференциалы или производные. Если искомая функция зависит от одного аргумента, то дифференциальное уравнение называется обыкновенным; в противном случае оно называется уравнением в частных производных. Модули 4-6 посвящены изучению только обыкновенных дифференциальных уравнений.

Наивысший порядок производной от искомой функции, входящий в уравнение, называется порядком этого уравнения. Процесс решения дифференциального уравнения называется интегрированием дифференциального уравнения, а график его решения – интегральной кривой.

Тема 1 Основные понятия

Пусть x – независимая переменная, $y(x)$ – функция от переменной x, заданная на некотором промежутке. Дифференциальное уравнение 1-го порядка в общем виде может быть записано следующим образом:

$$F(x,\ y,\ y')=0,$$

где $F:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ − непрерывная функция, определенная в области $D\subseteq\mathbb{R}^3$.

Если дифференциальное уравнение может быть разрешено относительно производной от искомой функции, то его можно представить в виде $y'=f(x,\ y)$,где f – некоторая непрерывная функция относительно x и y, $(x,\ y)\in D\subset\mathbf{R}^2$. В таком случае говорят, что дифференциальное уравнение записано в нормальной форме.

Непрерывно дифференцируемая функция $y=y(x)$, которая при подстановке обращает уравнение в тождество на некотором множестве, называется его решением на этом множестве. Дифференциальное уравнение имеет обычно бесконечное множество решений. Запись всего многообразия решений дифференциального уравнения 1-го порядка включает произвольную постоянную C и называется общим решением дифференциального уравнения 1-го порядка в области $D\ni(x,\ y)$. Это функция, которая может быть определена явно − $y=\varphi(x,\ C)$, неявно − $\Phi(x,y,C)=0$, параметрически − $x=x(t,C), y=y(t,C)$. Общее решение, заданное в неявном виде, часто называют общим интегралом дифференциального уравнения.

Для выделения из общего решения частного вводятся дополнительные ограничения на искомую функцию. Обычно это начальное условие: $y(x_0) = y_0$ $\left(x_0,\ y_0 \in \mathbb{R}\right)$. В этом случае говорят о задаче Коши, то есть задаче отыскания частного решения дифференциального уравнения, удовлетворяющего заданному начальному условию.

Таким образом, функция $y = \varphi(x,\ C)$ является общим решением, если:

1) $\varphi(x, C)$ является решением данного дифференциального уравнения при любом значении произвольной постоянной C;

2) для любого начального условия $y(x_0) = y_0$, такого, что $(x_0,\ y_0) \in D$, существует единственное значение $C = C_0$, при котором решение $y = \varphi(x, C_0)$ удовлетворяет начальному условию.

Частным решением дифференциального уравнения называется всякое решение, полученное из общего при конкретном значении $C = C_0$.

Геометрически общему решению на координатной плоскости соответствует семейство однопараметрических интегральных кривых $y = \varphi(x,\ C)$, а частному решению – интегральная кривая этого семейства, проходящая через точку $(x_0,\ y_0)$.

Теорема Коши (о существовании и единственности решения дифференциального уравнения 1-го порядка**)**. Если функция $f(x, y)$ непрерывна и имеет непрерывную частную производную $\frac{\partial f}{\partial y}$ в области D, то решение дифференциального уравнения $y' = f(x,\ y)$ при начальном условии $y(x_0) = y_0$, $(x_0,\ y_0) \in D$, существует и единственно.

Решение дифференциального уравнения, во всех точках которого нарушается условие единственности, называется особым решением. Особое решение не может быть получено из общего решения дифференциального уравнения ни при каком значении произвольной постоянной C.

Пример. Доказать, что функция $y = \dfrac{2}{3x} + \dfrac{x^2}{3}$ является решением дифференциального уравнения $(2y - xy')x = 2$.

Решение. Найдем производную $y' = -\frac{2}{3x^2} + \frac{2x}{3}$ заданной функции и подставим ее в дифференциальное уравнение:

$$\left(2\left(\frac{2}{3x} + \frac{x^2}{3}\right) - x\left(-\frac{2}{3x^2} + \frac{2x}{3}\right)\right)x = 2; \ \left(\frac{4}{3x} + \frac{2x^2}{3} + \frac{2}{3x} - \frac{2x^2}{3}\right)x = 2.$$

В итоге получим тождество $\frac{2}{x} \cdot x = 2$ или $2 = 2$, которое доказывает, что функция $y = \frac{2}{3x} + \frac{x^2}{3}$ является решением заданного дифференциального уравнения.

Пример. Доказать, что равенство $(1+y^2)(1+x^2) = C$ является общим интегралом дифференциального уравнения $(x + xy^2)dx + (y + yx^2)dy = 0$.

Решение. Вычислим производную неявной функции $F(x, y) = (1+y^2)(1+x^2) - C$ по формуле $y'_x = -\frac{F'_x}{F'_y}$. Поскольку $F'_x = 2x(1+y^2)$, $F'_y = 2y(1+x^2)$, то $y'_x = -\frac{2x(1+y^2)}{2y(1+x^2)} = -\frac{x(1+y^2)}{y(1+x^2)}$.

Подставим y'_x и $dy = y'_x dx$ в заданное дифференциальное уравнение:

$$(x + xy^2)dx + (y + yx^2)\left(-\frac{x(1+y^2)}{y(1+x^2)}\right)dx = (x + xy^2 - x - xy^2)dx = 0\,.$$

Полученное тождество $0 = 0$ доказывает утверждение.

Геометрический смысл дифференциального уравнения $y' = f(x,\ y)$.

Для геометрической интерпретации решения дифференциального уравнения 1-го порядка рассмотрим плоскость *xOy*; на которой каждое частное решение уравнения изображается в виде пока неизвестной линии (интегральной кривой). Однако можно вычислить в любой точке *M*(*x*; *y*) плоскости значение *f*(*x*, *y*), которое в силу уравнения $y' = f(x,\ y)$ равно угловому коэффициенту $k = tg\alpha = y'(x) = f(x, y(x))$ касательной в точке *M* к искомой линии, проходящей через эту точку. Таким образом, наклон касательной к интегральной кривой, проходящей через точку *M*(*x*; *y*), определяется углом α между касательной и положительным направлением оси *Ox*, для которого

$tg\alpha = f(x, y)$.

Наклоны касательных можно указать, не находя самих интегральных кривых. Для этого через любую точку *M*, где выполнены условия теоремы Коши, проводится отрезок небольшой длины с угловым коэффициентом $tg\alpha = f(x, y)$ (рис. 1). В результате получается так называемое поле направлений, определяемое уравнением $y' = f(x,\ y)$. Всякая интегральная кривая этого уравнения обладает тем свойством, что направление касательной в каждой ее точке совпадает с направлением поля, определяемым уравнением в этой точке. С другой стороны, начальное условие задает на плоскости точку $M_0(x_0,\ y_0)$, через которую должна пройти искомая интегральная линия. Геометрически ясно (рис. 2), что этим интегральная кривая определяется однозначно.

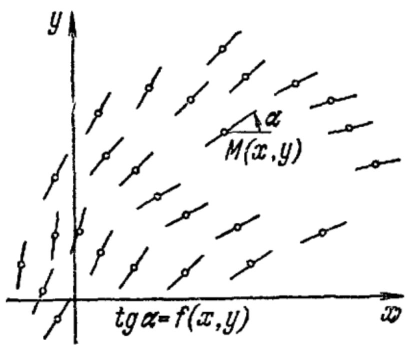

Рис. 1

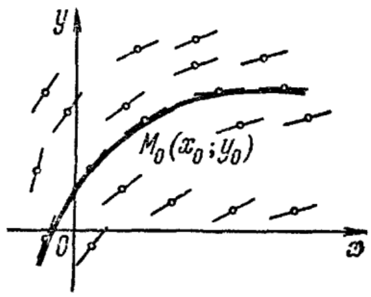

Рис. 2

Геометрический смысл уравнения $y' = f(x,\ y)$ дает возможность приближенно строить его интегральные кривые. Для этого необходимо изобразить поле направлений в возможно большем числе точек плоскости, а затем провести линии, руководствуясь этими направлениями. При построении поля на практике удобнее выбирать точки на плоскости не произвольно, а путем построения изоклин. Это кривые $f(x,\ y) = k,\ k - \text{константа}$, в каждой точке которых поле направлено одинаково. Это значит, что угол α наклона касательных (или отрезков, задающих графически поле) к интегральным кривым находится из уравнения $\mathrm{tg}\alpha = k$.

Пример. Решить графически методом изоклин уравнение $y' = x + y$.

Решение. Построим поле направлений заданного уравнения.

1.Полагая $y' = k,\ k - \mathrm{const}$, получим уравнение $x + y = k \Rightarrow y = k - x$ семейства изоклин для заданного уравнения.

2.Придавая $k = \operatorname{tg}\alpha$ разные значения, построим соответствующие прямые.

3.Проведем в точках полученных изоклин отрезки под углом α к Ox_+.

Для удобства приведем некоторые данные в таблице:

$k = \operatorname{tg}\alpha$	$\alpha = \operatorname{arctg} k$, в градусах	Уравнение изоклины
–2	≈ -63	$y = -2 - x$
–1	–45	$y = -1 - x$
0	0	$y = -x$
1	45	$y = 1 - x$
2	≈ 63	$y = 2 - x$

В результате получим:

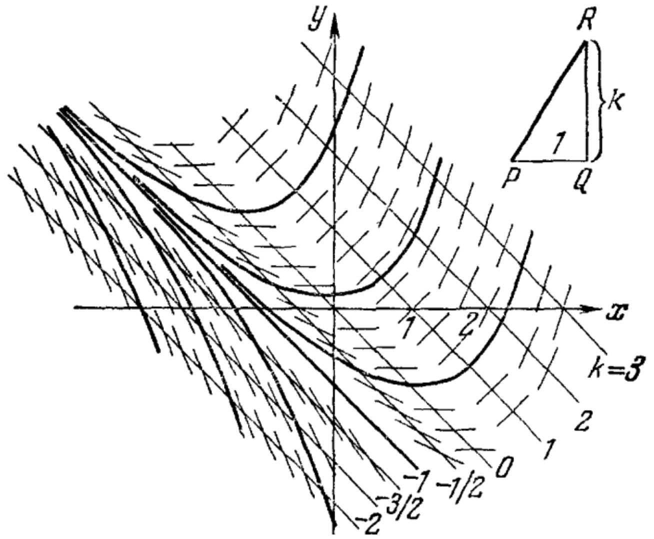

Рис. 3 Иллюстрация работы метода изоклин

Построение дифференциального уравнения заданного семейства кривых

Пусть дано семейство кривых $\Phi(x, y, C) = 0$, где C – параметр, изменяющийся в некотором промежутке, и Ф – непрерывно дифференцируемая функция. Тогда для него можно построить дифференциальное уравнение, отражающее общие свойства этих кривых.

Допустим, что уравнение $\Phi(x, y, C) = 0$ разрешимо относительно *y*:

$$y = y(x, C),\ x \in (a, b).$$

Подставив его в уравнение, получим $\Phi(x, y(x, C), C) = 0$. Продифференцируем по *x* полученное тождество:

$$\Phi'_x(x,\ y(x, C),\ C) + \Phi'_y(x,\ y(x, C),\ C)\,y'_x(x, C) = 0.$$

Исключив из полученной системы

$$\begin{cases}\Phi(x,\ y,\ C)=0,\\ \Phi'_x(x,\ y,\ C)+\Phi'_y(x,\ y,\ C)y'=0\end{cases}$$

параметр *C*, придем к уравнению $\Phi(x,\ y,\ y')=0$.

Если заданное семейство кривых уже разрешено относительно *y*, то есть $y=\varphi(x,C)$, то дифференциальное уравнение находится исключением параметра из системы

$$\begin{cases}y=\varphi(x,\ C),\\ y'=\varphi'_x(x,\ C).\end{cases}$$

Следует иметь в виду, что составленное дифференциальное уравнение может иметь и решения, не входящие в исходное семейство. Это, например, имеет место в том случае, когда существует огибающая (кривая, которая в каждой своей точке касается хотя бы одной кривой семейства и вся состоит из точек касания), не входящая в само семейство. Огибающая семейства интегральных кривых уравнения дифференциального уравнения всегда является особым решением этого уравнения. Кривую, подозрительную на огибающую семейства кривых $y=\varphi(x,\ C)$, можно найти исключением параметра *C* из системы уравнений:

$$\begin{cases}y=\varphi(x,\ C),\\ \varphi'_C(x,\ C)=0.\end{cases}$$

Пример. Построить дифференциальное уравнение семейства окружностей $x^2+y^2=C^2$.

Решение. Продифференцируем заданное равенство по *x*: $2x+2yy'=0$. Получим систему, из которой исключим параметр:

$$\begin{cases}x^2+y^2=C^2,\\ 2x+2yy'=0\end{cases}\Rightarrow y'=-\frac{x}{y}.$$

Пример. Определить дифференциальное уравнение семейства парабол $y=x^2+Cx.$

Решение. Продифференцируя равенство $y=x^2+Cx$ и получим $y'=2x+C.$

Выразим *C* из уравнения парабол: $C=\dfrac{y-x^2}{x},\ x\neq 0.$ Подставив найденное значение C в уравнение для производной, придем к уравнению $y' = 2x + \frac{y - x^2}{x}$ или $y' - \frac{1}{x} y = x$.