> $ConstructFourierSeries := \mathbf{proc}(a, b, f, x, N) :: procedure;$

local $l, a0, an, bn, S, n;$

description "процедура возвращает частичную сумму ряда Фурье, для функции f";

$l := \dfrac{|a-b|}{2};$

$assume(n, posint):$

$$a0 := \frac{1}{l}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x :$$

$$an := n \rightarrow simplify\left(\frac{1}{l}\int_a^b f(x)\cdot\cos\left(\frac{\mathrm{Pi}\cdot n\cdot x}{l}\right)\mathrm{d}x\right) :$$

$$bn := n \rightarrow simplify\left(\frac{1}{l}\int_a^b f(x)\cdot\sin\left(\frac{\mathrm{Pi}\cdot n\cdot x}{l}\right)\mathrm{d}x\right) :$$

$$S := x \rightarrow \frac{a0}{2} + \sum_{n=1}^{N}\left(an(n)\cdot\cos\left(\frac{\mathrm{Pi}\cdot n\cdot x}{l}\right) + bn(n)\cdot\sin\left(\frac{\mathrm{Pi}\cdot x\cdot n}{l}\right)\right) :$$

return $S(x);$

end proc:

> $MyPlotFirstTask := \mathbf{proc}(A, B, l, f, a, b) :: plot;$

description

"процедура строит периодическую функцию на промежутке [A;B], основываясь на функции f, с гла

local $c;$

$$c := plot\left(f\left(x + \begin{cases} \begin{cases} -\mathrm{floor}\left(\frac{|x|}{2\cdot l}\right)\cdot 2\cdot l & x > b \\ \mathrm{floor}\left(\frac{|x|}{2\cdot l}\right)\cdot 2\cdot l & x < a \end{cases} & \mathrm{frac}\left(\frac{|x|}{2\cdot l}\right) < \frac{1}{2} \\ \begin{cases} -\mathrm{ceil}\left(\frac{|x|}{2\cdot l}\right)\cdot 2\cdot l & x > b \\ \mathrm{ceil}\left(\frac{|x|}{2\cdot l}\right)\cdot 2\cdot l & x < a \end{cases} & \mathrm{frac}\left(\frac{|x|}{2\cdot l}\right) > \frac{1}{2} \end{cases}\right), x = A..B, discont = true\right.$$

$$\Bigg) ;$$

return $c;$

end proc:

как видно, в качестве аргумента функции я передаю некое выражение. Оно позволяет из любого значения x получить соответствующее ему значение, находящееся на главном периоде функции *(промежутке [a;b])*
данная форула была получена путем логических размышлений и дальнеших уточнений формулы на примере моего графика функции

далее я узнал формулу $f\left(x-\operatorname{floor}\left(\frac{x-a}{2\cdot l}\right)\cdot 2\cdot l\right)$ и в последствии буду пользоваться ей

> $BreakPoints := \mathbf{proc}(A, B, l, f, a, b) :: plots[display];$
> $\quad \mathbf{local}\ breakPoint1, breakPoint2, c1, c2, c, points1, points2;$
> $\quad breakPoint1 := \dfrac{\lim\limits_{x\to a+} f(x) + \lim\limits_{x\to b-} f(x)}{2};$
> $\quad breakPoint2 := \dfrac{\lim\limits_{x\to a+l+} f(x) + \lim\limits_{x\to a+l-} f(x)}{2};$
> $\quad points1 := seq([x, breakPoint1], x = A..B, 2\cdot l);$
> $\quad points2 := seq([x, breakPoint2], x = A+l..B-l, 2\cdot l);$
>
> $\quad c1 := plots[pointplot](\{points1\}, color = blue);$
> $\quad c2 := plots[pointplot](\{points2\}, color = green);$
> $\quad c := plots[display](c1, c2);$
> $\quad \mathbf{return}\ c;$
> $\quad$ **end proc**:

ЗАДАНИЕ 1 ВАРИАНТ 3) Для 2π-периодической кусочно-непрерывной функции f x( ) по ее аналитическому определению на главном периоде получите разложение в тригонометрический ряд Фурье. Убедитесь в правильности результата, проведя расчеты в системе Maple.

> $f := x \to piecewise\left(-\mathrm{Pi} \le x < 0, \frac{\mathrm{Pi}+x}{2}, 0 \le x < \mathrm{Pi}, -\frac{\mathrm{Pi}}{2}\right);$

$$f := x \mapsto \begin{cases} \frac{\pi}{2}+\frac{x}{2} & -\pi \le x < 0 \\ -\frac{\pi}{2} & 0 \le x < \pi \end{cases} \qquad (1)$$

> $a0 := \frac{1}{\mathrm{Pi}} int(f(x), x = -\mathrm{Pi}..\mathrm{Pi});$

$$a0 := -\frac{\pi}{4} \qquad (2)$$

> $assume(n, integer);$

> $an := \frac{1}{\mathrm{Pi}} \int_{-\mathrm{Pi}}^{\mathrm{Pi}} f(x)\cdot\cos(n\cdot x)\,\mathrm{d}x :$

> $simplify(an);$

(3)

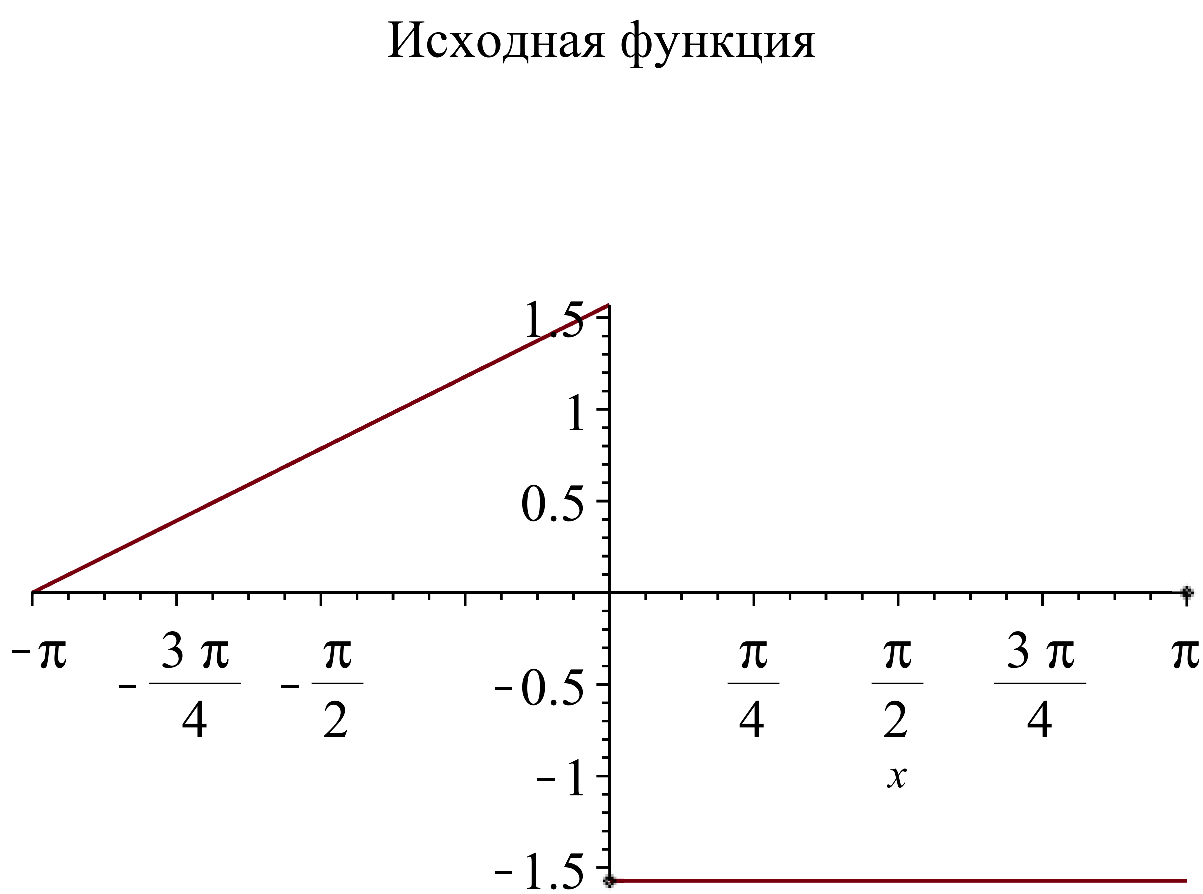
$$\frac{(-1)^{1+n\sim}+1}{2\,\pi\,n\sim^{2}} \tag{3}$$

> $bn := \frac{1}{\mathrm{Pi}}\int_{-\mathrm{Pi}}^{\mathrm{Pi}} f(x)\cdot\sin(n\cdot x)\,\mathrm{d}x :$

> $simplify(bn);$

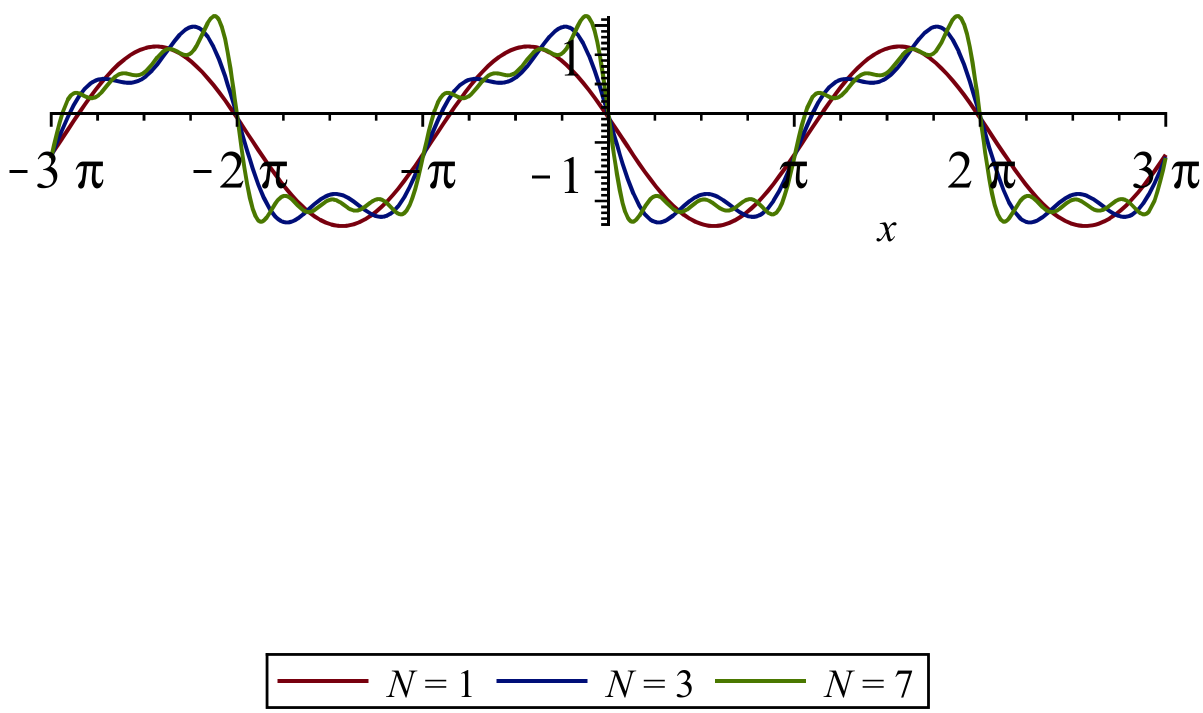
$$\frac{(-1)^{n\sim}-2}{2\,n\sim} \tag{4}$$

> $plot(f(x), x=-\mathrm{Pi}..\mathrm{Pi}, discont=true, title=$"Исходная функция"$);$



> $plot([ConstructFourierSeries(-\mathrm{Pi}, \mathrm{Pi}, f, x, 1), ConstructFourierSeries(-\mathrm{Pi}, \mathrm{Pi}, f, x, 3),$
$ConstructFourierSeries(-\mathrm{Pi}, \mathrm{Pi}, f, x, 7)], x=-3\,\mathrm{Pi}..3\,\mathrm{Pi}, title$
$=$"Графики частичных сумм"$, legend=[typeset(N=1), typeset(N=3), typeset(N=7)]);$

Графики частичных сумм



\>

\>

\> $c1 := MyPlotFirstTask(-3 \cdot \mathrm{Pi}, 3 \cdot \mathrm{Pi}, \mathrm{Pi}, f, -\mathrm{Pi}, \mathrm{Pi})$:

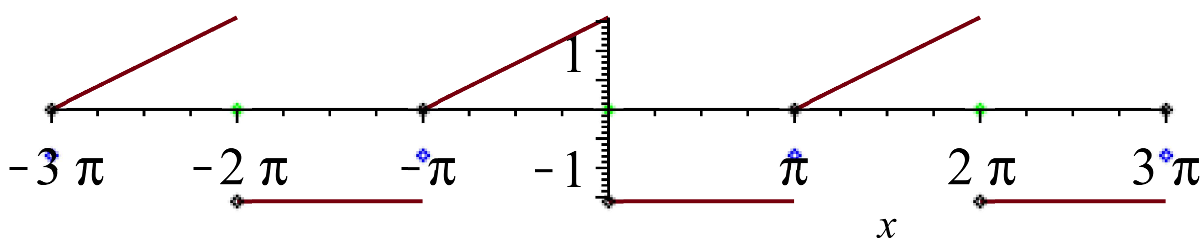
\> $c2 := BreakPoints(-3 \cdot 3.1415, 3 \cdot 3.1415, 3.1415, f, -3.1415, 3.1415)$:

написание вместо Pi его числого эквивалента имеет под собой практический смысл - при передаче в функцию Pi невозможно построить
по непонятным мне причинам последовательность, а так же, поскольку у меня используется задание последовательности с некоторым шагом, а это эквивалентно циклу for согласно maple help, передача Pi также невозможна

поскольку график суммы при N → ∞ будет эквивалентен графику исходной функции, то для упрощения програмы
воспользуемся программой, достраивающей исходную функций на период, и совместим полученный график, с графиком точек разрыва

\> $plots[display](c1, c2, title = $"График частичной суммы при N = ∞");

График частичной суммы при N = ∞



> $restart;$

> ***Задание* 2. *Разложите* в *ряд Фурье* 2 *x* –*периодическую функцию* *y* = *f* (*x*),**
> ***заданную на промежутке*** $(\mathbf{0, 2})$
> ***формулой*** $\boldsymbol{y = 3\,x + 1}$**, а *на*** $[\mathbf{2, 4}]$ – ***формулой*** $\boldsymbol{y = -2}$

Построить в одной системе координат на промежутке [-8,8] графики частичных сумм S1(x), S3(x), S7(x) ряда и его суммы S(x).

> $a := 3:$

> $b := 1:$

> $c := -2:$

> $x1 := 2:$

> $x2 := 4:$

> $l := 2:$

$$l := 2 \tag{5}$$

> $f := x \rightarrow \begin{cases} 3\cdot x + 1 & 0 < x < 2 \\ -2 & 2 \le x \le 4 \end{cases} :$

> $a0 := \dfrac{1}{l}\displaystyle\int_{0}^{x2} f(x)\,\mathrm{d}x;$

$$a0 := 2 \tag{6}$$

$$> assume(n, integer);$$

$$> an := \frac{1}{l}\int_0^{x2} f(x)\cdot\cos\left(\frac{n\cdot x\cdot \mathrm{Pi}}{l}\right)\mathrm{d}x :$$

$$> simplify(an);$$

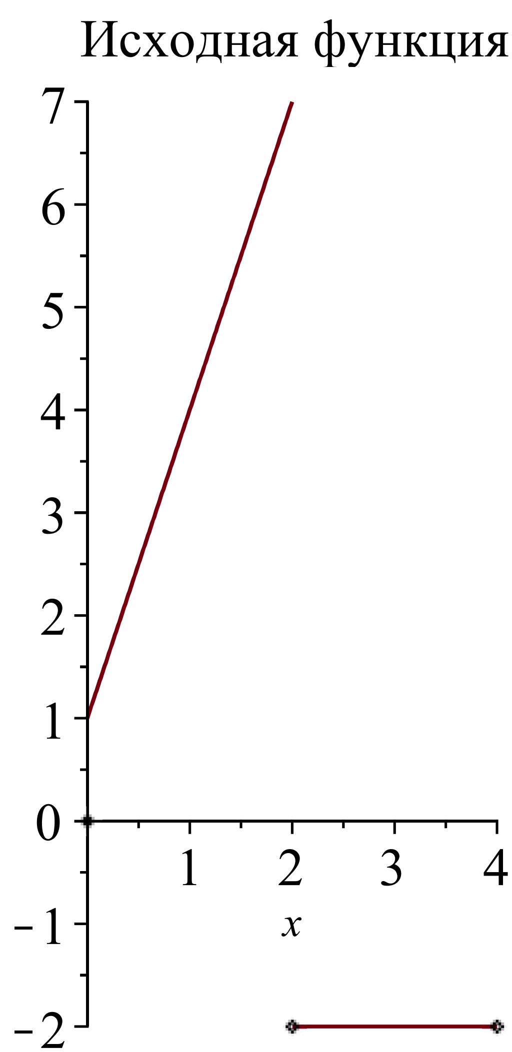
$$\frac{6\,(-1)^{n\sim}-6}{n\sim^2\,\pi^2} \tag{7}$$

$$> bn := \frac{1}{l}\int_0^{x2} f(x)\cdot\sin\left(\frac{n\cdot x\cdot \mathrm{Pi}}{l}\right)\mathrm{d}x :$$

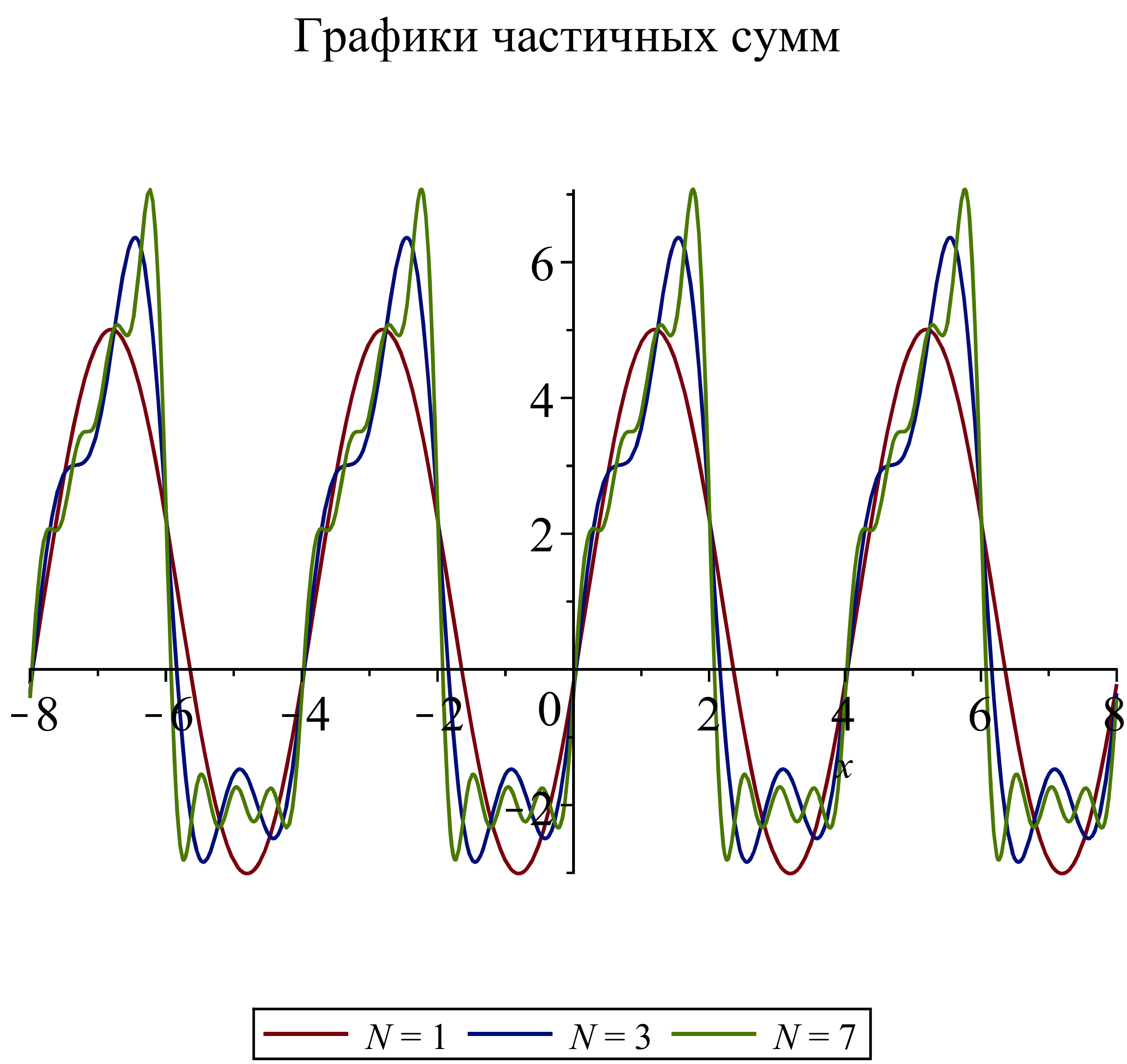
$$> simplify(bn);$$

$$\frac{3+9\,(-1)^{1+n\sim}}{n\sim\,\pi} \tag{8}$$

> *plot*(*f*(*x*), *x* = 0 ..4, *discont* = *true*, *title* = "Исходная функция");



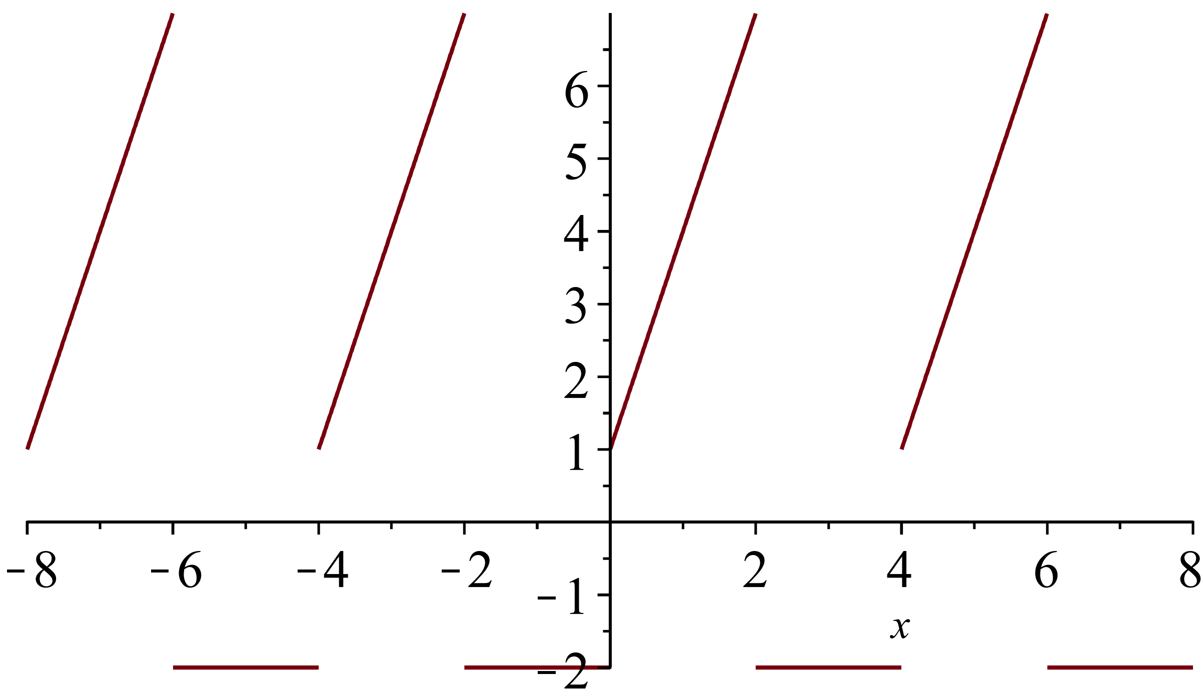
> *plot*([*ConstructFourierSeries*(0, 4, *f*, *x*, 1), *ConstructFourierSeries*(0, 4, *f*, *x*, 3), *ConstructFourierSeries*(0, 4, *f*, *x*, 7)], *x* = -8 ..8, *title* = "Графики частичных сумм", *legend* = [*typeset*(*N* = 1), *typeset*(*N* = 3), *typeset*(*N* = 7)]);



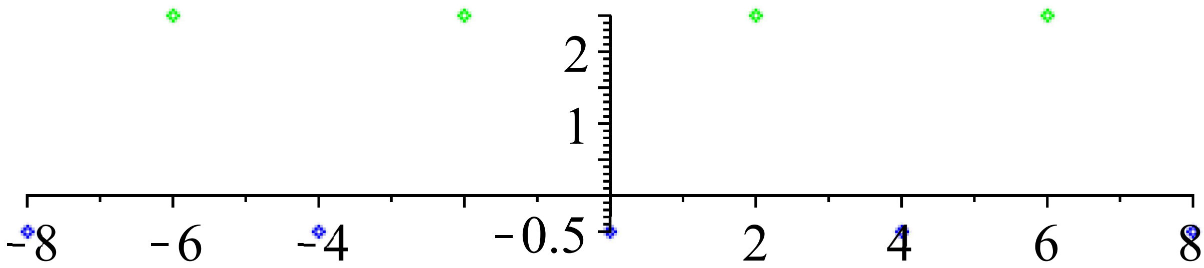
> $plot(ConstructFourierSeries(0, 4, f, x, \text{infinity}), x = -8..8);$

> $c1 := plot\left(f\left(x - \text{floor}\left(\frac{x}{4}\right)\cdot 4\right), x = -8..8, discont = true, title = \text{"График частичной суммы при N -> ∞"}\right);$

График частичной суммы при N -> ∞

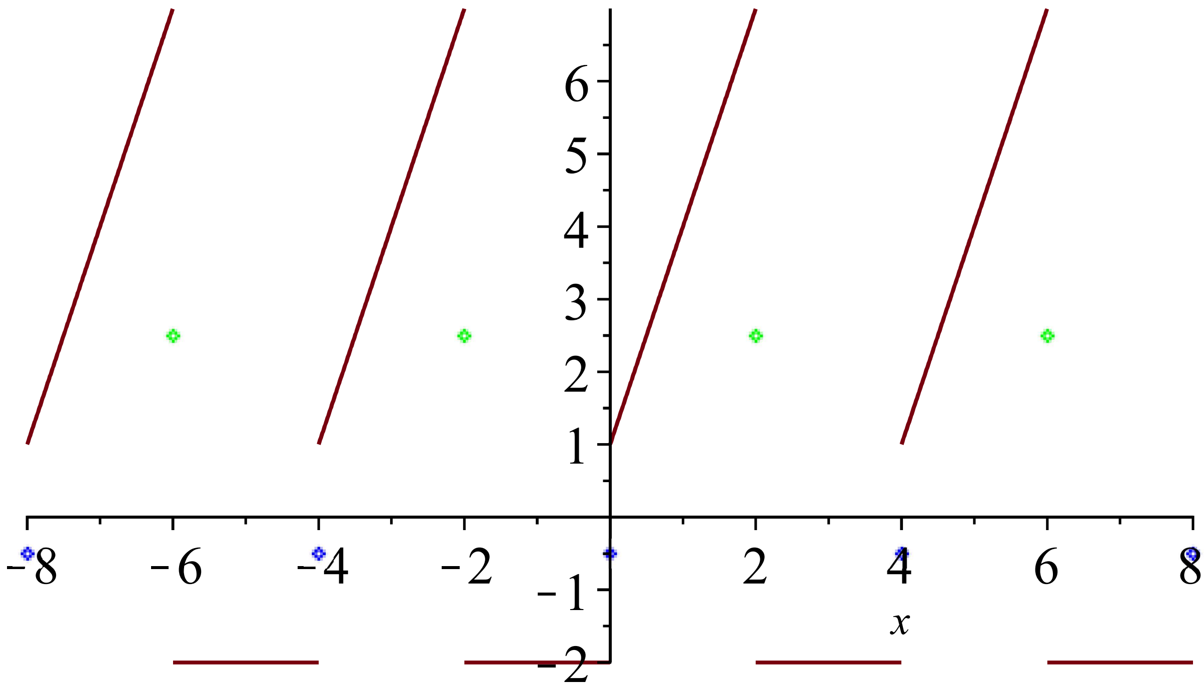


> $c2 := BreakPoints(-8, 8, 2, f, 0, 4)$:



> *plots*[*display*](*c1*, *c2*);

График частичной суммы при N -> ∞



> *restart*;

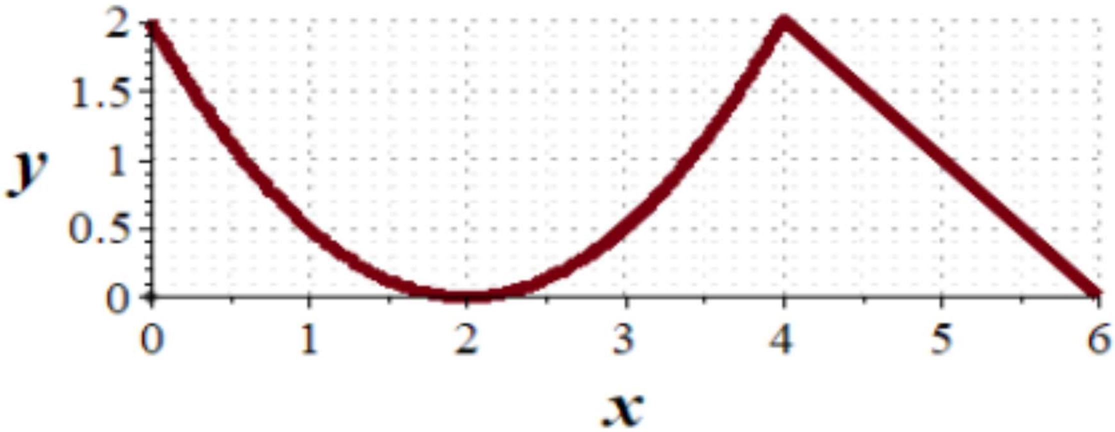
> *Задание* 3

Для функции постройте три разложения в тригонометрический ряд Фурье, считая, что функция определена:

1)на полном периоде.

2)на полупериое(является четной).

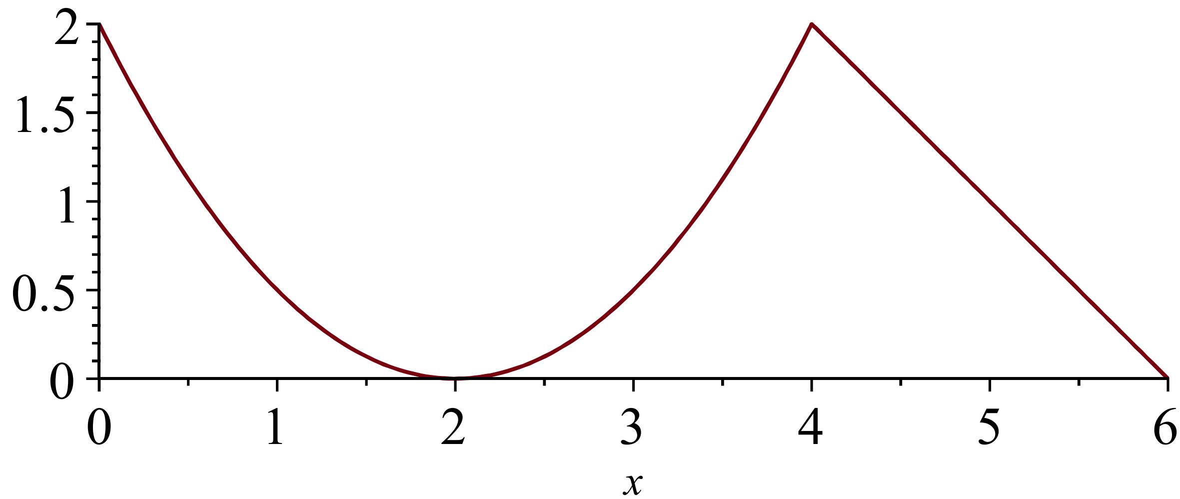
3)на полупериоде(является нечетной).



> $f := x \rightarrow \begin{cases} \frac{1}{2}(x-2)^2 & 0 \leq x \leq 4 \\ 6-x & 4 < x < 6 \end{cases};$

$$f := x \mapsto \begin{cases} \frac{(x-2)^2}{2} & 0 \leq x \leq 4 \\ 6-x & 4 < x < 6 \end{cases} \tag{9}$$

> $plot(f(x), x = 0..6);$



1)функция определена на полном периоде

> $a0 := \frac{1}{3}\int_{0}^{6} f(x)\,\mathrm{d}x;$

$$a0 := \frac{14}{9} \tag{10}$$

> $assume(n, posint);$

> $an := \frac{1}{3}\int_{0}^{6} f(x)\cdot\cos\left(\frac{n\cdot x\cdot \mathrm{Pi}}{3}\right)\mathrm{d}x:$

> $simplify(an);$

$$\frac{9\,n\sim\pi\cos\left(\frac{4\,n\sim\pi}{3}\right)+3\,n\sim\pi-9\sin\left(\frac{4\,n\sim\pi}{3}\right)}{n\sim^{3}\,\pi^{3}} \tag{11}$$

> $bn := \frac{1}{3}\int_{0}^{6} f(x)\cdot\sin\left(\frac{n\cdot x\cdot \mathrm{Pi}}{3}\right)\mathrm{d}x:$

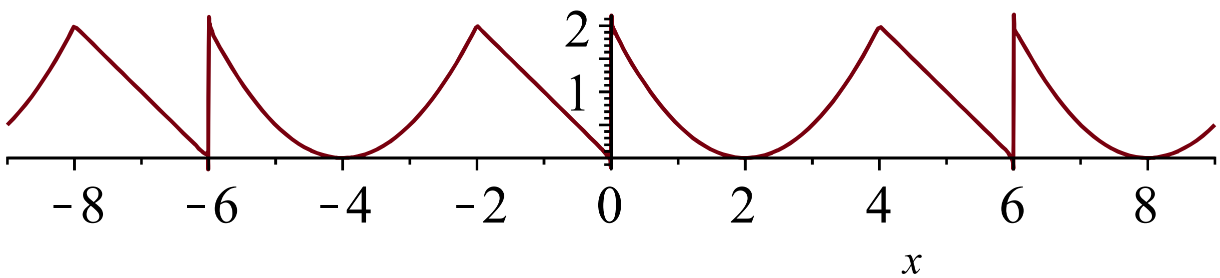
> *simplify*(*bn*);

$$\frac{2\, n\sim^{2} \pi^{2} + 9\, n\sim \pi \sin\left(\frac{4\, n\sim \pi}{3}\right) + 9 \cos\left(\frac{4\, n\sim \pi}{3}\right) - 9}{n\sim^{3} \pi^{3}} \tag{12}$$

> *plot*(*f*(*x*), *x* = 0 ..6, *discont* = *true*, *title* = "Исходная функция");

> *c1* := *plot*(*ConstructFourierSeries*(0, 6, *f*, *x*, 500), *x* =−9 ..9, *title* = "график суммы ряда для N = 500");

график суммы ряда для N = 500



> $restart;$

2)функция определена на полупериоде (является четной)

> $f := x \to \begin{cases} \frac{1}{2}(|x|-2)^2 & -4 \le x \le 4 \\ 6-|x| & -6 \le x \le -4 \textbf{ or } 4 \le x \le 6 \end{cases} :$

поскольку функция является четнной, то bn будет равен 0 и его можно не вычислять и вычисление интеграла производить по промежутку [0;6]

> $a0 := \frac{1}{3}\int_0^6 f(x)\,dx;$

$$a0 := \frac{14}{9} \tag{13}$$

> $assume(n, posint);$

> $an := \frac{1}{3}\int_0^6 f(x)\cdot\cos\left(\frac{n\cdot x\cdot \mathrm{Pi}}{6}\right)dx :$

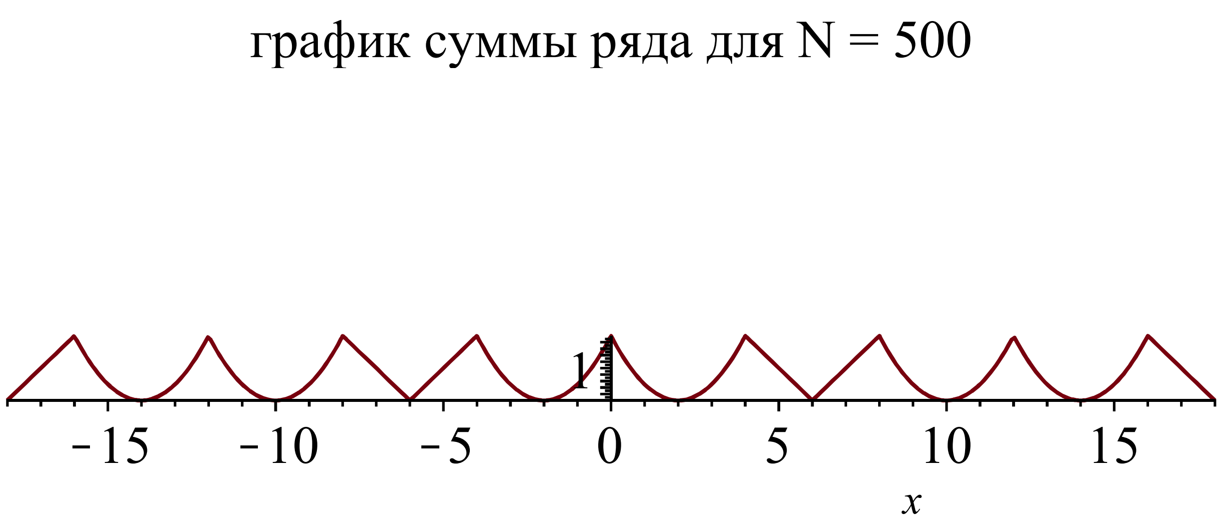
> $simplify(an);$

$$\frac{12\,(-1)^{1+n\sim}\,\pi\, n\sim + 36\, n\sim\,\pi\cos\left(\frac{2\,n\sim\,\pi}{3}\right) + 24\,n\sim\,\pi - 72\sin\left(\frac{2\,n\sim\,\pi}{3}\right)}{n\sim^3\,\pi^3} \tag{14}$$

> $S := \frac{a0}{2} + \sum_{n=1}^{500} an \cdot \cos\left(\frac{n \cdot \mathrm{Pi} \cdot x}{6}\right)$:

> *plot*($f(x)$, $x = -6..6$, *title* = "исходная функция");

> *plot*(S, $x = -18..18$, *title* = "график суммы ряда для N = 500");



> *restart*;

3)функция определена на полупериоде (является нечетной)

$$> \; f := x \to \begin{cases} \begin{cases} -x-6 & -6 < x < -4 \\ -\frac{1}{2}(-x-2)^2 & -4 < x < 0 \end{cases} & -6 < x < 0 \\ \begin{cases} \frac{1}{2}(x-2)^2 & 0 < x < 4 \\ 6-x & 4 < x < 6 \end{cases} & 0 < x < 6 \end{cases} :$$

поскольку функция является нечетнной, то an будет равен 0 и его можно не вычислять и вычисление интеграла производить по промежутку [0;6]

$$> \; a0 := \frac{1}{3}\int_0^6 f(x)\,\mathrm{d}x;$$

$$a0 := \frac{14}{9} \tag{15}$$

$$> \; assume(n, posint);$$

$$> \; bn := \frac{1}{3}\int_0^6 f(x)\cdot\sin\left(\frac{n\cdot x\cdot \mathrm{Pi}}{6}\right)\mathrm{d}x :$$

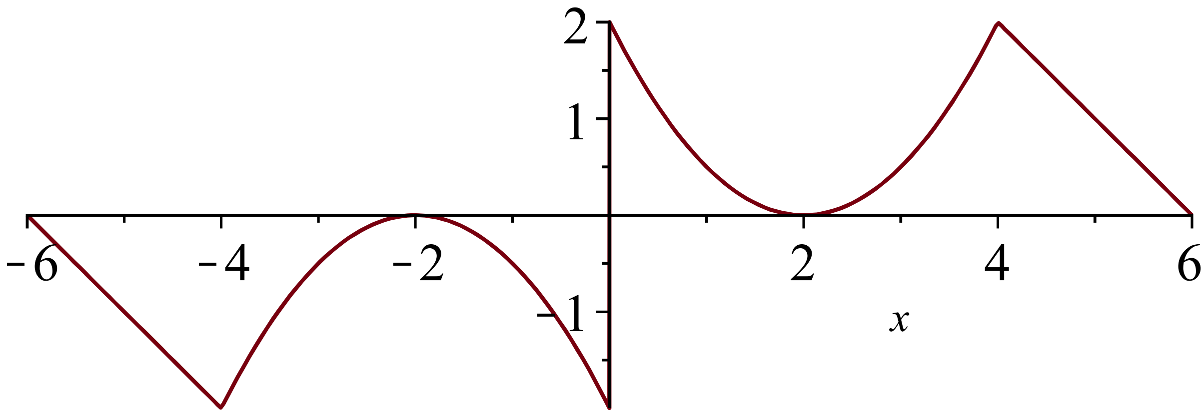
$$> \; simplify(bn);$$

$$\frac{4\,n\sim^2\pi^2 + 36\,n\sim\pi\sin\left(\frac{2\,n\sim\pi}{3}\right) + 72\cos\left(\frac{2\,n\sim\pi}{3}\right) - 72}{n\sim^3\,\pi^3} \tag{16}$$

$$> \; S := \frac{a0}{2} + \sum_{n=1}^{500} bn\cdot\sin\left(\frac{n\cdot \mathrm{Pi}\cdot x}{6}\right) :$$

$$> \; plot(f(x), x = -6..6, title = \text{"исходная функция"});$$

исходная функция




```
> breakpoint := seq( [i, 0], i =- 12 ..12, 12 ) :
> plots[display](plot(S, x =- 18 ..18, title = "график суммы ряда для N = 500"),
      plots[pointplot]( {breakpoint}, color = blue) );
```

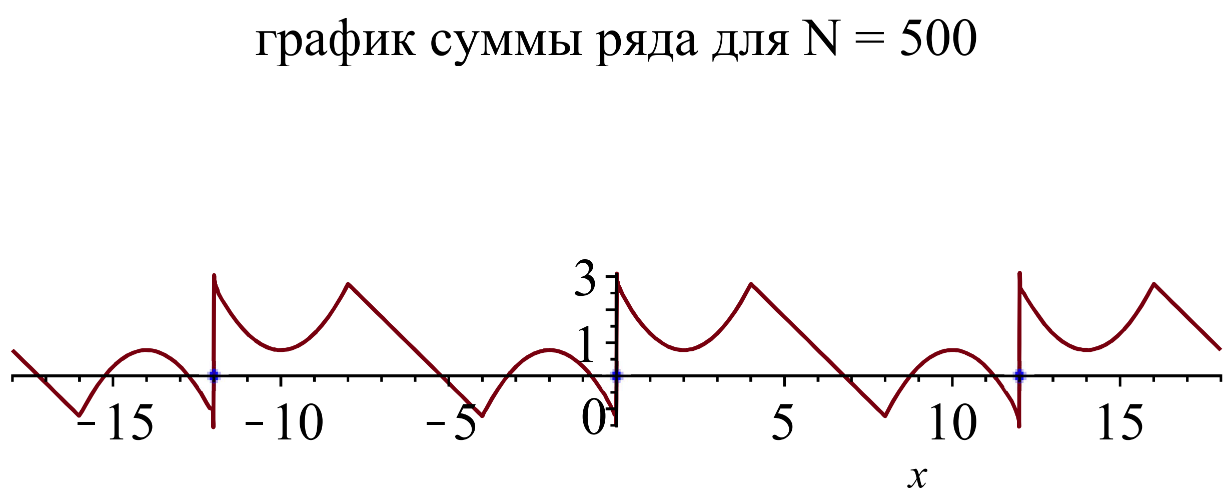


график суммы ряда для N = 500
3
1
0
−15
−10
−5
5
10
15
x

>

>