Раздел II. ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ

1. ИТЕРАЦИОННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ СИСТЕМ ЛИНЕЙН АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассматривается проблема решения систем линейных алгебраических урав (СЛАУ), записываемых в виде

$$Ax = b \quad \text{или} \quad \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix},$$

где $A = (a_{ij}) \in R^{n \times n}$ – действительная матрица размеров $(n \times n)$, i, j – переменные, ветствующие номерам строк и столбцов (целые числа); $b = (b_1, ..., b_n)^T \in R^n$ – ве столбец размеров $(n \times 1)$, $x = (x_1, ..., x_n)^T \in R^n$ – вектор-столбец неизвестных, R^n мерное евклидово пространство, верхний индекс "T" здесь и далее обозначает опер транспонирования.

Требуется найти решение $x_* = (x_{*1}, ..., x_{*n})^T \in R^n$ системы, подстановка кот в систему приводит к верному равенству $A x_* = b$.

Замечания.

1. Из курса линейной алгебры известно, что решение задачи существует и ед венно, если определитель (детерминант) матрицы A отличен от нуля, т.е. $\det A \equiv |A$ (A – невырожденная матрица, называемая также неособенной).

Классификация численных методов решения СЛАУ

При решении СЛАУ используются два класса численных методов:

1. *Прямые методы*, позволяющие найти решение за определенное число опер К прямым методам относятся: метод Гаусса и его модификации (в том числе метод гонки), метод LU – разложения и др. Изучаются в курсе линейной алгебры.

2. *Итерационные методы,* основанные на использовании повторяющегося (ц ческого) процесса и позволяющие получить решение в результате последовател приближений. Операции, входящие в повторяющийся процесс, составляют *итер* К итерационным методам относятся: метод простых итераций, метод Зейделя и др.

ИТЕРАЦИОННЫЕ МЕТОДЫ

А. МЕТОД ПРОСТЫХ ИТЕРАЦИЙ

Альтернативой прямым методам являются итерационные методы, основанн многократном уточнении $x^{(0)}$ – приближенно заданного решения задачи $A x = b$.

Методика решения задачи

Шаг 1. Исходная задача $A\,x = b$ преобразуется к равносильному виду:

$$x = \alpha\, x + \beta ,$$

где $\alpha = \left\{ \alpha_{ij} \right\}$ – квадратная матрица, $\beta = \left\{ \beta_i \right\}$ – вектор, $i, j = 1,\ldots, n$. Это преобразо может быть выполнено различными путями, но для обеспечения сходимости ите (см. процедуру 2) нужно добиться, чтобы $\|\alpha\| < 1$ (чтобы норма α была меньше еди Понятие нормы вводится ниже.)

Шаг 2. Вектор β принимается в качестве начального приближения $x^{(0)} = \beta$ лее многократно выполняются действия по уточнению решения согласно рекуррент соотношению

$$x^{(k+1)} = \alpha\, x^{(k)} + \beta, \qquad k = 0,1,\ldots$$

или в развернутом виде

$$\begin{aligned}
x_1^{(k+1)} &= \alpha_{11} x_1^{(k)} + \alpha_{12} x_2^{(k)} + \ldots + \alpha_{1n} x_n^{(k)} + \beta_1 ,\\
x_2^{(k+1)} &= \alpha_{21} x_1^{(k)} + \alpha_{22} x_2^{(k)} + \ldots + \alpha_{2n} x_n^{(k)} + \beta_2 ,\\
&\vdots\\
x_n^{(k+1)} &= \alpha_{n1} x_1^{(k)} + \alpha_{n2} x_2^{(k)} + \ldots + \alpha_{nn} x_n^{(k)} + \beta_n .
\end{aligned}$$

Шаг 3. Итерации прерываются при выполнении условия

$$\left\| x^{(k+1)} - x^{(k)} \right\| < \varepsilon ,$$

где $\varepsilon > 0$ – заданная точность, которую необходимо достигнуть при решении задач

З а м е ч а н и я.

1. Процесс называется *параллельным итерированием*, так как для вычис $(k+1)$-го приближения всех неизвестных учитываются вычисленные ранее их k-е ближения.

2. Начальное приближение $x^{(0)}$ может выбираться произвольно, или из неко соображений, например $x^{(0)} = \beta$. При этом может использоваться априорная инф ция о решении или просто «грубая» прикидка.

Наиболее употребительными являются следующие формулы для вычислени
чений норм матриц и векторов, образованных действительными компонентами.

Нормы матрицы A ***Нормы вектора*** x

1) $\| A \|_1 = \max\limits_i \sum\limits_{j=1}^{n} |a_{ij}|$; $\| x \|_1 = \max\limits_i |x_i|$;

2) $\| A \|_2 = \max\limits_j \sum\limits_{i=1}^{n} |a_{ij}|$; $\| x \|_2 = \sum\limits_{i=1}^{n} |x_i|$;

3) $\| A \|_3 = \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}^2}$; $\| x \|_3 = \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2}$.

Скорость сходимости

Рассмотрим последовательность $\left\{x^{(k)}\right\}$, сходящуюся к x_*. Предположим, ч
ее элементы различны и ни один из них не совпадает с x_*. Наиболее эффективный
соб оценивания скорости сходимости состоит в сопоставлении расстояния между
и x_* с расстоянием между $x^{(k)}$ и x_*.

Последовательность $\left\{x^{(k)}\right\}$ называется *сходящейся с порядком* p, если p –
симальное число, для которого

$$0 \le \lim_{k \to \infty} \frac{\left\| x^{(k+1)} - x_* \right\|}{\left\| x^{(k)} - x_* \right\|^p} < \infty .$$

Поскольку величина p определяется предельными свойствами $\left\{x^{(k)}\right\}$, она
вается *асимптотической скоростью сходимости*.

Если последовательность $\left\{x^{(k)}\right\}$ – сходящаяся с порядком p, то число

$$c = \lim_{k \to \infty} \frac{\left\| x^{(k+1)} - x_* \right\|}{\left\| x^{(k)} - x_* \right\|^p}$$

называется *асимптотическим параметром ошибки*.

Если $p = 1$, $c < 1$, то сходимость *линейная*, если $p = 2$ – *квадратичная*, если
– *кубичная* и т.д. Если $p > 1$ или $p = 1, c = 0$, то сходимость *сверхлинейная*. Лин
сходимость является синонимом сходимости со скоростью геометрической прогр
Сверхлинейная сходимость является более быстрой, чем определяемая любой геом
ческой прогрессией.

Теорема (о достаточном условии сходимости метода простых итераций). *М*
простых итераций, реализующийся в процессе последовательных приближений, сх
ся к единственному решению исходной системы $Ax = b$ *при любом начальном пр*
жении $x^{(0)}$ *со скоростью не медленнее геометрической прогрессии, если какая*
норма матрицы α *меньше единицы, т.е.* $\|\alpha\|_s < 1$ ($s \in \{1,2,3\}$).

З а м е ч а н и я.

1. Сходящийся процесс обладает свойством *самоисправляемости*, т.е. отде
ошибка в промежуточных вычислениях не отразится на окончательном результат
как ошибочное приближение можно рассматривать как новое начальное.

2. Условия сходимости выполняются, если в матрице A диагональные элем
преобладают, т.е.

$$|a_{ii}| \ge |a_{i1}| + \ldots + |a_{i,i-1}| + |a_{i,i+1}| + \ldots + |a_{in}|, \quad i = 1,\ldots,n,$$

и хотя бы для одного i неравенство строгое. Иначе, модули диагональных коэффи
тов в каждом уравнении системы больше суммы модулей недиагональных коэффи
тов (свободные члены не рассматриваются).

3. Чем меньше величина нормы $\|\alpha\|$, тем быстрее сходимость метода.

Способы преобразования системы

Преобразование системы $Ax = b$ к виду $x = \alpha x + \beta$ с матрицей α, удовлетв
щей условиям сходимости, может быть выполнено несколькими способами. При
способы, используемые наиболее часто.

1. Уравнения, входящие в систему $Ax = b$, переставляются так, чтобы вып
лось условие преобладания диагональных элементов (для той же цели можно исп
вать другие элементарные преобразования). Затем первое уравнение разрешается от
тельно x_1, второе – относительно x_2 и т.д. При этом получается матрица α с нуле
диагональными элементами.

Например, система

$$\begin{aligned} -2{,}8x_1 + x_2 + 4x_3 &= 60, \\ 10x_1 - x_2 + 8x_3 &= 10, \\ -x_1 + 2x_2 - 0{,}6x_3 &= 20 \end{aligned}$$

с помощью перестановки уравнений приводится к виду

$$\begin{aligned} 10x_1 - x_2 + 8x_3 &= 10, \\ -x_1 + 2x_2 - 0{,}6x_3 &= 20, \\ -2{,}8x_1 + x_2 + 4x_3 &= 60, \end{aligned}$$

где $|10| > |-1| + |8|$, $|2| > |-1| + |-0{,}6|$, $|4| > |-2{,}8| + |1|$, т.е. диагональные элементы п
дают.

систему

$$
\begin{aligned}
x_1 &= 0 \cdot x_1 + 0{,}1x_2 - 0{,}8x_3 + 1\,,\\
x_2 &= 0{,}5x_1 + 0 \cdot x_2 + 0{,}3x_3 + 10\,,\\
x_3 &= 0{,}7x_1 - 0{,}25x_2 + 0 \cdot x_3 + 15\,,
\end{aligned}
$$

где $\alpha = \begin{pmatrix} 0 & 0{,}1 & -0{,}8 \\ 0{,}5 & 0 & 0{,}3 \\ 0{,}7 & -0{,}25 & 0 \end{pmatrix}$, $\beta = \begin{pmatrix} 1 \\ 10 \\ 15 \end{pmatrix}$.

Заметим, что $\|\alpha\|_1 = \max\{0{,}9\,; 0{,}8\,; 0{,}95\} = 0{,}95 < 1$, т.е. условие теоремы вып

но.

Проиллюстрируем применение других элементарных преобразований. Так, с

ма

$$
\begin{aligned}
4x_1 + x_2 + 9x_3 &= -7\,,\\
3x_1 + 8x_2 - 7x_3 &= -6\,,\\
x_1 + x_2 - 8x_3 &= 7
\end{aligned}
$$

путем сложения первого и третьего уравнений и вычитания из второго уравнения т

го уравнения преобразуется к виду

$$
\begin{aligned}
5x_1 + 2x_2 + x_3 &= 0\,,\\
2x_1 + 7x_2 + x_3 &= -13\,,\\
x_1 + x_2 - 8x_3 &= 7
\end{aligned}
$$

с преобладанием диагональных элементов.

2. Уравнения преобразуются так, чтобы выполнялось условие преобладания д

нальных элементов, но при этом коэффициенты α_{ii} не обязательно равнялись нулю.

Например, систему

$$
\begin{aligned}
1{,}02\,x_1 - 0{,}15\,x_2 &= 2{,}7\,,\\
0{,}8\,x_1 + 1{,}05\,x_2 &= 4
\end{aligned}
$$

можно записать в форме

$$
\begin{aligned}
x_1 &= -0{,}02\,x_1 + 0{,}15\,x_2 + 2{,}7\,,\\
x_2 &= -0{,}8\,x_1 - 0{,}05\,x_2 + 4\,,
\end{aligned}
$$

для которой $\|\alpha\|_1 = \max\{0{,}17\,; 0{,}85\} = 0{,}85 < 1$.

3. Если $\det A \neq 0$, систему $Ax = b$ следует умножить на матрицу $D = A^{-1} -$

$\{\varepsilon_{ij}\}$ – матрица с малыми по модулю элементами. Тогда получается си