7. АППРОКСИМАЦИЯ И ИНТЕРПОЛЯЦИЯ ФУНКЦИЙ

Из математического анализа известно, что в окрестности точки x_0 любую n раз непрерывно дифференцируемую функцию можно аппроксимировать (приблизить) ее многочленом Тейлора:

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)(x - x_0)^k}{k!},$$

причем

$$f(x_0) = P_n(x_0),$$
$$f'(x_0) = P_n'(x_0),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$f^{(n)}(x_0) = P_n^{(n)}(x_0).$$

Очевидно, такая аппроксимация во многих отношениях является очень хорошей, но она имеет локальный характер, т.е. хорошо аппроксимирует функцию только вблизи точки x_0. Это главный недостаток аппроксимации с помощью многочлена Тейлора.

Если речь идет об аппроксимации функции на отрезке, применяются другие методы.

Пусть $f(x) \in C[a,b]$ – непрерывная функция. Рассмотрим задачу аппроксимации (приближения) ее более простой функцией (обычно многочленом).

Известно из математического анализа, что в силу теоремы Вейерштрасса, любую функцию можно с какой угодно точностью приблизить многочленом по норме $\|f(x)\| = \max\limits_{a \le x \le b} |f(x)|$ пространства C[a, b], т. е. в смысле равномерной сходимости. Но существуют и другие нормы:

$$\|f(x)\| = \int_a^b |f(x)|dx \quad \text{или} \quad \|f(x)\| = \sqrt{\int_b^a |f(x)|^2 dx}.$$

Тогда $\|f(x) - P(x)\| < \varepsilon$ означает, что площадь или усредненная площади фигуры, заключенной между графиками функции *f(x)* и многочлена *P(x)*, должна быть меньше ε (заданной точности).

Возможен и другой подход, когда в качестве аппроксимирующей функции берут многочлен или другую достаточно простую функцию, значения которых совпадают со значениями исходной функции в заданных заранее точках, так называемых узлах. Такого рода приближение функций имеет свое собственное название - интерполяция.

7.1. Интерполяционный многочлен

Пусть *f(x)* – функция, непрерывная на отрезке [a,b].

Выберем на этом отрезке точки, называемые *узлами интерполяции*:

$a \le x_0 < x_1 < ... < x_n \le b$.

Предположим, что известны значения функции в узлах интерполяции: $f(x_k) = y_k, \quad k = 0,1,...,n$.

Ставится задача найти многочлен $P_n(x)$ такой, что

$$P_n(x_k) = y_k, \qquad \forall k = 0,1,...,n. \tag{7.1}$$

Такой многочлен $P_n(x)$ называется *интерполяционным многочленом*, а задача его нахождения – *задачей интерполяции.*

Покажем, что задача интерполяции имеет решение, причем единственное.

Пусть $P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^{n-k}$.

Тогда для определения коэффициентов многочлена из условия (7.1) получаем систему:

$$\begin{cases} a_0 x_0^n + a_1 x_0^{n-1} + ... + a_n = y_0 \\ a_0 x_1^n + a_1 x_1^{n-1} + ... + a_n = y_1 \\ .... \\ a_0 x_n^n + a_1 x_n^{n-1} + ... + a_n = y_n . \end{cases}$$

Ее определитель Δ с точностью до знака совпадает с так называемым определителем Вандермонда.

$$W(x_0,...,x_n) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & ... & 1 \\ x_0 & x_1 & ... & x_n \\ x_0^2 & x_1^2 & ... & x_n^2 \\ ... & ... & ... & ... \\ x_0^n & x_1^n & ... & x_n^n \end{vmatrix} = \prod_{i<j}(x_j - x_i) \ne 0 .$$

Поскольку все x_i различны, определитель Δ отличен от нуля, и, следовательно, система имеет единственное решение. Отсюда вытекает существование и единственность интерполяционного многочлена.

Погрешность интерполяции.

Обозначим

$R_n(x) = f(x) - P_n(x)$ и будем искать ее оценку.

Пусть $f(x) \in C^{n+1}[a,b]$. Положим $R_n(x) = \omega(x) r(x)$,

где $\omega(x) = (x - x_0)(x - x_1) \cdot ... \cdot (x - x_n)$.

Зафиксируем произвольную точку x, отличную от узлов интерполяции x_i, $i = \overline{0,n}$, и построим вспомогательную функцию:

$$F(t) = P_n(t) + \omega(t) r(x) - f(t), \qquad a \le t \le b . \tag{7.2}$$

Очевидно, $F(x) = 0$ и, кроме того $F(x_k) = 0, \qquad k = \overline{0,n}$.

Таким образом, функция $F(t)$ имеет по крайней мере $(n+2)$ нуля на отрезке $[a,b]$. Применим теорему Ролля, по которой между каждой парой нулей функции находится по крайней мере один нуль производной этой функции.

Тогда производная $F'(t)$ имеет по крайней мере ($n+1$) нулей на данном интервале (a,b). Продолжая рассуждение, получим в итоге, что $F^{(n)}(t)$ имеет, по крайней мере, два нуля, а $F^{(n+1)}(t)$ − один нуль в некоторой точке ξ на (a,b).

Продифференцируем равенство (7.2) ($n+1$) раз и подставим $t = \xi$. Получим

$$F^{(n+1)}(\xi) = (n+1)! \cdot r(x) - f^{(n+1)}(\xi) = 0.$$

Откуда $r(x) = \dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}$.

Тогда

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\omega(x),$$

где $\xi \in [a,b]$ (очевидно формула напоминает остаток формулы Тейлора в форме Лагранжа). В итоге имеем оценку погрешности интерполяции:

$$|R_n(x)| \le \frac{M_{n+1}}{(n+1)!}|\omega(x)|, \qquad \text{где} \quad M_{n+1} = \max_{a \le x \le b}\left|f^{(n+1)}(x)\right|.$$

Интерполяционный многочлен Лагранжа

Пусть даны узлы на отрезке $[a,b]$, $a \le x_0 < x_1 < ... < x_n \le b$, и значения функции $F(x)$ в узлах

$$f(x_i) = y_i, \qquad i = \overline{0,n}.$$

Пусть $\omega(x) = (x - x_0)(x - x_1) \cdot ... \cdot (x - x_n)$,

$$\omega_j(x) = (x - x_0) \cdot ... \cdot (x - x_{j-1})(x - x_{j+1}) \cdot ... \cdot (x - x_n),$$

т. е. $\omega_j(x) = \dfrac{\omega(x)}{x - x_j}$.

Положим $l_j(x) = \dfrac{\omega_j(x)}{\omega_j(x_j)}$,

т. е. $$l_j(x) = \frac{(x - x_0) \cdot ... \cdot (x - x_{j-1})(x - x_{j+1}) \cdot ... \cdot (x - x_n)}{(x_j - x_0) \cdot ... \cdot (x_j - x_{j-1})(x_j - x_{j+1}) \cdot ... \cdot (x_j - x_n)}.$$

Очевидно $l_j(x_i) = \begin{cases} 0, & при\ i \ne j \\ 1, & при\ i = j. \end{cases}$

Построим многочлен $L_n(x) = \sum_{j=0}^{n} l_j(x) y_j$.

Легко видеть, что $L_n(x_i) = l_i(x_i) y_i = 1 \cdot y_i = y_i$, $i = \overline{0,n}$, т.е. это интерполяционный многочлен. Его называют интерполяционным многочленом Лагранжа.

Пример. Рассмотрим задачу интерполяции для функции

$f(x) = \sin\frac{\pi}{2}x$, на $[0,1]$.

Выберем в качестве узлов точки $x_0 = 0$, $x_1 = 1/3$, $x_2 = 1$. Тогда значения функции: $y_0 = 0$, $y_1 = 1/2$, $y_2 = 1$.

Получим

$$L_2(x) = \frac{(x-1/3)\cdot(x-1)}{(-1/3)\cdot(-1)} + \frac{x\cdot(x-1)\cdot\frac{1}{2}}{1/3\cdot(-2/3)} + \frac{(x-1/3)\cdot x}{2/3\cdot 1} = -3/4\cdot x^2 + 7/4\cdot x.$$

Оценим погрешность. Поскольку можно показать, что $|\omega(x)| \le 0{,}079$, то

$$R_2(x) \le \frac{\pi^3}{3!\cdot 8}\max_{0\le x\le 1}|\varpi(x)| \le \frac{\pi^3}{3!\cdot 8}\cdot 0{,}079.$$

Линейная интерполяция

Пусть $n=1$, т. е. даны два узла x_0, x_1 справа и слева от точки x:

$x_0 \le x \le x_1$.

Построим интерполяционный многочлен первой степени по этим узлам.

Значения функции $f(x)$ в этих узлах y_0, y_1.

Получаем:

$$L_1(x) = \frac{x-x_1}{x_0-x_1}\cdot y_0 + \frac{x-x_0}{x_1-x_0}\cdot y_1 = y_0 + \frac{y_1-y_0}{x_1-x_0}\cdot(x-x_0).$$

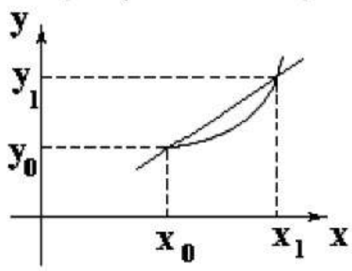

Рис. 7.1.

т. е. графически интерполяционный многочлен представляет собой хорду, соединяющую точки (x_0, y_0) и (x_1, y_1) (рис. 7.1).

Оценим погрешность линейной интерполяции.

Пусть $h = x_1 - x_0$.

Тогда $\max\limits_{x_0\le x\le x_1}|\omega(x)| = \max|(x-x_0)\cdot(x-x_1)| = \frac{h^2}{4}$,

так как функция $|\omega(x)|$ достигает максимума на $[x_0, x_1]$ в точке $x_m = \frac{x_0+x_1}{2}$.

(рис. 7.2).

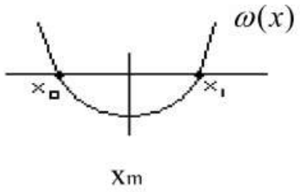

Рис.7.2.

Обозначим $M_2 = \max\limits_{x_0 \le x \le x_1} \left| f''(x) \right|$,

тогда $\left| R_n(x) \right| \le \dfrac{M_{n+1}}{(n+1)!} \max \left| \omega(x) \right| \le M_2 \dfrac{h^2}{8}$,

т. е. $\left| R_1(x) \right| \le \dfrac{M_2}{8} h^2$ в случае линейной интерполяции.

Пример. Рассмотрим функцию

$f(x) = \lg x$ на отрезке $[0,\ 1]$.

Пусть $h = 10^{-3}$ − расстояние между узлами. Оценим погрешность линейной интерполяции. Получим

$$M_2 = \max \left| -\frac{1}{x^2} \lg e \right| = \lg e = 0{,}4243,$$

следовательно,

$$\left| R_1(x) \right| \le \frac{M_2}{8} h^2 = \frac{0{,}4243}{8} \cdot 10^{-6} \approx 6 \cdot 10^{-8}.$$

Интерполяционный многочлен Ньютона

Пусть $x_0, x_1, ..., x_n$ − набор узлов интерполирования,

$y_0, y_1, ..., y_n$ − значения функции $f(x)$ в узлах.

Величину $\Delta y_k = y_{k+1} - y_k$ называют конечной разностью первого порядка в k-м узле.

Аналогично определяются конечные разности высших порядков.

$$\Delta^2 y_k = \Delta y_{k+1} - \Delta y_k = y_{k+2} - y_{k+1} - (y_{k+1} - y_k) = y_{k+2} - 2y_{k+1} + y_k$$

....

$$\Delta^i y_k = \Delta^{i-1} y_{k+1} - \Delta^{i-1} y_k = \sum_{i=0}^{n} (-1)^{n-i} C_n^i y_{k+i}\ \Delta^i y_k = \Delta^{i-1} y_{k+1} - \Delta^{i-1} y_k = \sum_{i=0}^{n} (-1)^{n-i} C_n^i y_{k+i}.$$

Конечные разности обычно считают по схеме:

x_i	y_i	Δy_i	$\Delta^2 y_i$	$\Delta^3 y_i$
x_0 x_1 x_2 x_3	y_0 y_1 y_2 y_3	$\Delta y_0 = y_1 - y_0$ $\Delta y_1 = y_2 - y_1$ $\Delta y_2 = y_3 - y_2$	$\Delta^2 y_0 = \Delta y_1 - \Delta y_0$ $\Delta^2 y_1 = \Delta y_2 - \Delta y_1$	$\Delta^3 y_0 = \Delta^2 y_1 - \Delta^2 y_0$

Разделенной разностью первого порядка называется выражение

$$f_1(x_k, x_{k+1}) = \frac{y_{k+1} - y_k}{x_{k+1} - x_k} = \frac{\Delta y_k}{\Delta x_k}.$$

Разделенной разностью второго порядка называется выражение

$f_2(x_k, x_{k+1}, x_{k+2}) = \dfrac{f_1(x_{k+1}, x_{k+2}) - f_1(x_k, x_{k+1})}{x_{k+2} - x_k}$ и т. д.

Пусть x – любая точка отрезка, не совпадающая с узлами. Тогда

$$f_1(x, x_0) = \frac{y_0 - f(x)}{x_0 - x},$$

откуда $f(x) = y_0 + f_1(x, x_0)(x - x_0)$. (7.3)

Далее $f_2(x, x_0, x_1) = \dfrac{f_1(x_0, x_1) - f_1(x, x_0)}{x_1 - x}$,

откуда $f_1(x, x_0) = f_1(x_0, x_1) + f_2(x, x_0, x_1)(x - x_1)$.

Подставляя в (7.3), получаем

$$f(x) = y_0 + f_1(x_0, x_1)(x - x_0) + f_2(x, x_0, x_1)(x - x_0)(x - x_1). \quad (7.4)$$

Далее $f_3(x, x_0, x_1, x_2) = \dfrac{f_2(x_0, x_1, x_2) - f_2(x, x_0, x_1)}{x_2 - x}$,

откуда $f_2(x, x_0, x_1) = f_2(x_0, x_1, x_2) + f_3(x, x_0, x_1, x_2)(x - x_2)$.

Подставляя в (4), имеем:

$$\begin{aligned} f(x) &= y_0 + f_1(x_0, x_1)(x - x_0) + f_2(x, x_0, x_2)(x - x_0)(x - x_1) + \\ &+ f_3(x, x_0, x_1, x_2)(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2). \end{aligned} \quad (7.5)$$

Продолжая процесс, получим:

$$f(x) = N_n(x) + f_{n+1}(x, x_0, ..., x_n)(x - x_0)...(x - x_n),$$

где $N_n(x) = y_0 + f_1(x_0, x_1)(x - x_0) + ... + f_n(x_0, ..., x_n)(x - x_0)...(x - x_{n-1})$.

Очевидно, при $x = x_i$, $\forall i = \overline{0, n}$, $f(x_i) = N_n(x_i)$, $i = \overline{0, n}$,

т. е. $N_n(x)$ − интерполяционный многочлен. Его называют интерполяционным многочленом Ньютона.

Достоинство интерполяционного многочлена Ньютона: он удобен при расширении интерполяции и добавлении узлов.

Недостаток: в какой-то степени он сложнее в подсчете конечных разностей по сравнению с многочленом Лагранжа.

Интерполяционный многочлен Ньютона - Грегори

Рассмотрим случай задачи интерполяции с равноотстоящими узлами, т. е. пусть

$h = x_{i+1} - x_i$, для всех $i = \overline{0, n}$.

Будем искать интерполяционный многочлен Ньютона в форме

$$N(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1) + ... + a_n(x - x_0) \cdot ... \cdot (x - x_{n-1}),$$

где коэффициенты многочлена не определены.

Используем условие

$N(x_i) = y_i, \qquad i = \overline{0,n}$.

Получим:

$N(x_0) = y_0 = a_0$

$N(x_1) = y_1 = a_0 + a_1 h$

$N(x_2) = y_2 = a_0 + 2ha_1 + 2h^2 a_2$

....

Откуда $a_0 = y_0$,

$$a_1 = \frac{y_1 - y_0}{h} = \frac{\Delta y_0}{h},$$

$$y_2 = y_0 + 2h\frac{y_1 - y_0}{h} + 2h^2 a_2,$$

$$a_2 = \frac{y_2 - y_0 - 2(y_1 - y_0)}{2h^2} = \frac{y_2 - 2y_1 + y_0}{2h^2} = \frac{\Delta^2 y_0}{2h^2}.$$

Продолжая, можем по индукции получить формулу

$$a_k = \frac{\Delta^k y_0}{k!\ h^k}, \qquad k = 1,...,n.$$

В итоге получаем интерполяционный многочлен Ньютона - Грегори:

$$N(x) = y_0 + \frac{\Delta y_0}{h}(x - x_0) + \frac{\Delta^2 y_0}{2!\,h^2}(x - x_0)(x - x_1) + ... + \frac{\Delta^n y_0}{n!\,h^n}(x - x_0)(x - x_1)...(x - x_{n-1}).$$

Пример. Пусть требуется найти интерполяционный многочлен для функции $f(x)$, имеющей в узлах $x_0 = 0$, $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$, $x_4 = 4$ значения $y_0 = 5$, $y_1 = 3$, $y_2 = 2$, $y_3 = 4$, $y_4 = 6$. Вычислим конечные разности:

x_i	y_i	Δy_i	$\Delta^2 y_i$	$\Delta^3 y_i$	$\Delta^4 y_i$
0	5				
		-2			
1	3		1		
		-1		2	
2	2		3		-5
		2		-3	
3	4		0		
		2			
4	6				

Подставляя их значения в формулу для интерполяционного многочлена Ньютона - Грегори, в итоге получаем

$$N(x) = 5 - 2x + 0{,}5x(x-1) + \frac{1}{3}x(x-1)(x-2) - \frac{5}{24}x(x-1)(x-2)(x-3).$$

7.2. Аппроксимация по средне квадратичному отклонению

Пусть есть пространство непрерывных функций $C_{[a,b]}$.

Введем в нем скалярное произведение и новую норму

$$(f,g)=\int_a^b f(x)g(x)dx,$$

$$\|f\|=\sqrt{\int_a^b f^2(x)dx} \quad .$$

Система функций

$$f_1,...,f_n \tag{7.6}$$

называется линейно-независимой, если равенство $\alpha_1 f_1(x)+...+\alpha_n f_n(x)=0$ возможно, тогда и только тогда, когда $\alpha_1=...=\alpha_n=0$. В противном случае система функций называется линейно зависимой.

Известно, что система попарно-ортогональных ненулевых функций всегда линейно независима. Чтобы найти критерий линейной независимости в общем случае, построим определитель, состоящий из скалярных произведений функций:

$$\Gamma(f_{1,\,...,}f_n)=\begin{vmatrix} (f_{1,}\,f_1) & (f_{1,}\,f_2) & ... & (f_{1,}\,f_n) \\ (f_{2,}\,f_1) & (f_{2,}\,f_2) & ... & (f_{2,}\,f_n) \\ ... & ... & ... & ... \\ (f_{n,}\,f_1) & (f_{n,}\,f_2) & ... & (f_{n,}\,f_n) \end{vmatrix}.$$

Определитель $\Gamma(f_{1,\,...,}f_n)$ называется определителем Грамма.

Теорема 1: (Критерий линейной независимости). Для того чтобы система функций (7.6) была линейно независима, необходимо и достаточно, чтобы $\Gamma(f_1,...,f_n)\neq 0$.

Доказательство: Докажем утверждение равносильное теореме, т. е. докажем, что система (7.6) линейно зависима тогда и только тогда, когда $\Gamma(f_{1,\,...,}f_n)$=0.

1) Необходимость. Пусть система линейно зависима, т. е. существуют $\alpha_1 , ... , \alpha_n$ такие, что

$\alpha_1 f_1(x)+...+\alpha_n f_n(x)=0$, и $\alpha_1^2+...+\alpha_n^2>0$.

Будем последовательно умножать это тождество на $f_1, f_2,..., f_n$. Получим систему

$$\begin{cases} \alpha_1(f_{1,}\,f_1)+...+\alpha_n(f_{1,}\,f_n)=0 \\ \alpha_1(f_{2,}\,f_1)+...+\alpha_n(f_{2,}\,f_n)=0 \\ .... \\ \alpha_1(f_{n,}\,f_1)+...+\alpha_n(f_{n,}\,f_n)=0. \end{cases} \tag{7.7}$$

Это однородная система линейных уравнений относительно неизвестных коэффициентов $a_1, a_2, ..., a_n$ и ее определитель $\Delta = \Gamma(f_1, ..., f_n)$.

Поскольку система (7.7) имеет ненулевые решения, то $\Delta = 0$, т. е. $\Gamma(f_1, ..., f_n) = 0$.

2) Достаточность. Пусть $\Gamma(f_1, ..., f_n) = 0$. Из этого следует, что система (7.7) имеет ненулевые решения $\alpha_1, ..., \alpha_n$. Подставим эти решения в систему (7.7) и получим систему тождеств. Перепишем систему в виде

$$\left.\begin{array}{l} (f_1, \alpha_1 f_1 + ... + \alpha_n f_n) = 0 \\ (f_2, \alpha_1 f_1 + ... + \alpha_n f_n) = 0 \\ .... \\ (f_n, \alpha_1 f_1 + ... + \alpha_n f_n) = 0 \end{array}\right| \begin{array}{l} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ ... \\ \alpha_n . \end{array}$$

и умножим равенства последовательно на α_i, а затем просуммируем:

$$(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i f_i, \sum_{j=1}^{n} \alpha_j f_j) = 0.$$

Последнее означает, что $(g(x), g(x)) = 0,$

где $g(x) = \alpha_1 f_1 + ... + \alpha_n f_n$.

Но тогда, поскольку функция g(x) непрерывна,

$$g(x) = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i f_i(x) = 0$$

при $\alpha_1^2 + ... + \alpha_n^2 > 0$, т. е. система функций (7.6) линейно зависима.

Теорема доказана.

Рассмотрим функцию *f(x)* на отрезке [*a,b*]. Пусть

$f_1(x), f_2(x), ..., f_n(x)$ − линейно независимые непрерывные функции. Построим их линейную комбинацию $T_n(x) = \alpha_1 f_1(x) + ... + \alpha_n f_n(x)$, называемую обобщенным многочленом по системе функций $f_1, f_2, ..., f_n$.

Ставится задача: найти такие коэффициенты $\alpha_1, ..., \alpha_n$ обобщенного многочлена, чтобы выполнялось условие:

$$\| f(x) - T_n(x) \| = \min \| f(x) - T_n(x) \|,$$

где минимум берется по всевозможным значениям $\alpha_1, ..., \alpha_n$ и

$$\| f(x) - T_n(x) \| = \sqrt{\int_b^a [f(x) - T_n(x)]^2 dx} .$$

Такой обобщенный многочлен называется многочленом наилучшего средне квадратичного отклонения.

Теорема 2. Решение задачи аппроксимации функции по средне квадратичному отклонению существует и единственно.

Доказательство. Рассмотрим функцию от $\alpha_1, ..., \alpha_n$.

$$Q(\alpha_1, ..., \alpha_n) = \| f(x) - T_n(x) \|^2 =$$

$$= (f - T_n(x), f - T_n(x)) = (f - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f_i, f - \sum_{j=1}^{n} \alpha_j f_j) =$$

$$= (f, f) - 2\sum_{i=0}^{n} \alpha_i (f, f_i) + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \alpha_i \alpha_j (f_i, f_j).$$

Очевидно, Q $(\alpha_1,...,\alpha_n)$ принимает наименьшее значение тогда и только тогда, когда $T_n(x)$ − наилучшее приближение в средне квадратичном для функции *f(x)*. Но для того чтобы Q достигло минимума по $\alpha_1,...,\alpha_n$, необходимо, чтобы

$$\frac{\partial Q}{\partial \alpha_1} = -2(f, f_1) + 2\sum_{i=1}^{n} \alpha_i (f_i, f_1) = 0,$$

$$\frac{\partial Q}{\partial \alpha_2} = -2(f, f_2) + 2\sum_{i=1}^{n} \alpha_i (f_i, f_2) = 0,$$

....

$$\frac{\partial Q}{\partial \alpha_n} = -2(f, f_n) + 2\sum_{i=1}^{n} \alpha_i (f_i, f_n) = 0.$$

Перепишем систему в виде следующей системы, называемой нормальной системой:

$$\begin{cases} \alpha_1(f_1, f_1) + \alpha_2(f_1, f_2) + ... + \alpha_n(f_1, f_n) = (f, f_1) \\ \alpha_1(f_2, f_1) + \alpha_2(f_2, f_2) ... + \alpha_n(f_2, f_n) = (f, f_2) \\ .... \\ \alpha_1(f_n, f_1) + \alpha_2(f_n, f_2) ... + \alpha_n(f_n, f_n) = (f, f_n). \end{cases}$$

Ее определитель $\Delta = \Gamma(f_1,..., f_n) \neq 0$, т. к. система функций $(f_1,..., f_n)$ линейно независима. Но тогда нормальная система имеет единственное решение $\alpha_1,...,\alpha_n$.

Убедимся, что $\dfrac{\partial^2 Q}{\partial \alpha^2} > 0$, т. е. выполнены достаточные условия минимума. Очевидно,

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial \alpha^2} = [\Gamma(f_1,..., f_n)] = \begin{pmatrix} (f_1, f_1) & (f_1, f_2) & ... & (f_1, f_n) \\ (f_2, f_1) & (f_2, f_2) & ... & (f_2, f_n) \\ ... & ... & ... & ... \\ (f_n, f_1) & (f_n, f_2) & ... & (f_n, f_n) \end{pmatrix} \text{ − матрица Грамма.}$$

Матрица положительно определена, когда положительно определена соответствующая ей квадратичная форма.

Квадратичная форма $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \alpha_i \alpha_j (f_i, f_j)$, построенная по данной матрице, называется квадратичной формой Грамма.

Но

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \alpha_i \alpha_j (f_i, f_j) = (\sum_{i=1}^{n} \alpha_i f_i, \sum_{j=1}^{n} \alpha_j f_j) = \left\| \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f_i \right\|^2 \geq 0,$$

причем, поскольку функции $f_1,...,f_n$ линейно независимы, квадратичная форма равна нулю только тогда, когда все $\alpha_1,...,\alpha_n$ нулевые.

Следовательно, решение нормальной системы доставляет минимум функции $Q(\alpha_1,...,\alpha_n)$.

Теорема доказана.

Следствие. Чтобы численно решить задачу построения среднеквадратичного многочлена, надо составить и решить нормальную систему, а ее решение взять в качестве коэффициентов обобщенного многочлена.

Пример. Пусть $f(x)=\sqrt{x},\ x\in[0,\ 1]$. Построим многочлен наилучшего средне квадратичного отклонения по системе линейно независимых функций: *1, x*. Обозначим его $T_2(x)=a+b\cdot x$.

Получаем:

$$[\Gamma(1,x)]=\begin{pmatrix}(1,1) & (1,x)\\ (x,1) & (x,x)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 1/2\\ 1/2 & 1/3\end{pmatrix},$$

$$(\sqrt{x},1)=\int_0^1\sqrt{x}dx=\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\Big|_0^1=\frac{2}{3},$$

$$(\sqrt{x},x)=\int_0^1\sqrt{x}\cdot xdx=\frac{2}{5}\ .$$

Записываем нормальную систему:

$$\begin{cases}a+\dfrac{1}{2}b=\dfrac{2}{3}\\ \dfrac{1}{2}a+\dfrac{1}{3}b=\dfrac{2}{5},\end{cases}$$

решая ее, находим:

$$a=\frac{4}{15},\qquad b=\frac{4}{5},\qquad T_2(x)=\frac{4}{15}+\frac{4}{5}x\ .$$

7.3. Аппроксимация методом наименьших квадратов

Пусть дана функция $f(x)$ на отрезке $[a,\ b]$.

Разобьем отрезок с помощью узлов

$a\le x_0<x_1<...<x_n\le b$.

Пусть $y_0,y_1,...,y_n$ − значение функции *f(x)* в узлах.

Если n − большое число, то интерполяционный $L_n(x)$ − многочлен высокой степени. Зачастую неудобно использовать многочлены очень высокой степени. Очевидно, мы можем отказаться от использования части узлов и тем самым понизить степень интерполяционного многочлена, но тогда теряется часть информации. Поэтому вместо интерполяционного многочлена будем искать многочлен $P_m(x)$ меньшей степени $(m<n)$, такой что сумма

$$\sum_{i=0}^{n}[f(x_i)-P_m(x_i)]^2$$

принимает наименьшее значение. Данный многочлен называется многочленом наилучшего приближения по методу наименьших квадратов.

Положим

$$P_m(x)=a_0x^m+...+a_m$$

и будем искать решение задачи

$$S(a_0,...,a_m)=\sum_{i=0}^{n}[a_0x_i^m+...+a_{m-1}x_i\ +a_m-y_i]^2\to\min.$$

Приравнивая к нулю производные S, получим систему линейных уравнений для определения коэффициентов a_i:

$$\frac{\partial S}{\partial a_0}=2\sum_{i=0}^{n}[a_0x_i^m+...+a_m-y_i]\cdot x_i^m=0$$

$$\frac{\partial S}{\partial a_1}=2\sum_{i=0}^{n}[a_0x_i^m+...+a_m-y_i]\cdot x_i^{m-1}=0$$

....

$$\frac{\partial S}{\partial a_{m-1}}=2\sum_{i=0}^{n}[a_0x_i^m+...+a_m-y_i]\cdot x_i\ =0$$

$$\frac{\partial S}{\partial a_m}=2\sum_{i=0}^{n}[a_0x_i^m+...+a_m-y_i]\cdot 1=0\ .$$

Отсюда получается

$$\begin{cases} a_0(\sum_{i=0}^{n}x_i^{2m})+a_1\sum_{i=0}^{n}x_i^{2m-1}+...+a_m\sum_{i=0}^{n}x_i^m=\sum_{i=0}^{n}y_ix_i^m \\ a_0(\sum_{i=0}^{n}x_i^{2m-1})+...+a_m\sum_{i=0}^{n}x_i^{m-1}=\sum_{i=0}^{n}y_ix_i^{m-1} \\ .... \\ a_0(\sum_{i=0}^{n}x_i^{n})+...+a_m\sum_{i=0}^{n}1=\sum_{i=0}^{n}y_i \end{cases}$$

− нормальная система для определения коэффициентов $a_0,a_1,...,a_n$.

Когда $m\le n$, можно показать, что нормальная система имеет единственное решение, которое действительно дает минимальное значение для функции *S*. Получив решения нормальной системы $a_0,...,a_n$, строим многочлен наилучшего приближения по методу наименьших квадратов.

В частном случае, когда *m=n*, многочлен $P_n(x)$ переходит в интерполяционный многочлен.

Для решения нормальной системы обычно используется следующая таблица:

i	x_i	x_i^2	………	x_i^{2m}	y_i	$y_i x_i$	………	$y_i x_i^m$
0	x_0	x_0^2		x_0^{2m}	y_0	$y_0 x_0$		$y_0 x_0^m$
1	x_1	x_1^2		x_1^{2m}	y_1	$y_1 x_1$		$y_1 x_1^m$
.	.	.		.	.	.		.
.	.	.		.	.	.		.
.	.	.		.	.	.		.
n	x_n	x_n^2		x_n^{2m}	y_n	$y_n x_n$		$y_n x_n^m$
	$\sum_{i=0}^{n} x_i$	$\sum_{i=0}^{n} x_i^2$	…	$\sum_{i=0}^{n} x_i^{2m}$	$\sum_{i=0}^{n} y_i$	$\sum_{i=0}^{n} y_i x_i$	…	$\sum_{i=0}^{n} y_i x_i^m$

7.4. Интерполяция сплайнами

Рассмотрим задачу интерполяции функции *f(x)* на отрезке [*a, b*]. Пусть мы имеем узлы $a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b$ и значения функции $y_0, ..., y_n$ в данных узлах. Отрезок разбивается узлами на *n* элементарных отрезков $[x_{i-1}, x_i]$, где $h_i = x_i - x_{i-1}$ – длина элементарного отрезка, $i = \overline{1, n}$.

Сплайном называется функция *S(x)*, которая на каждом элементарном отрезке является многочленом и непрерывна на всем отрезке [*a, b*], вместе со своими производными до некоторого порядка.

Степенью сплайна называется наивысший порядок степени многочлена.

Дефектом сплайна называется разность между его степенью и наивысшим порядком непрерывной на [*a, b*] производной.

Пример. Рассмотрим функцию

$$S(x) = \begin{cases} x^2, & 0 \le x < 1 \\ -x^2 + 4x - 2, & 1 \le x < 2 \\ 2, & 2 \le x < 3 \\ \dfrac{x^3}{27} - x + 4, & 3 \le x < 4. \end{cases}$$

Очевидно, функция $S(x)$ является кубическим сплайном на отрезке [*0, 4*], так как она непрерывна в узловых точках.

Действительно,

$$S(1-0) = S(1+0) = 1,\ S(2-0) = S(2+0) = 2,\ S(3-0) = S(3+0) = 2.$$

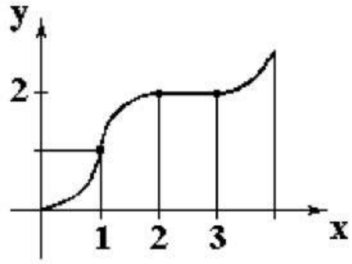

Рис. 7.3.

Найдем дефект сплайна.

$S'(1-0)=S'(1+0)=2,\ S'(2-0)=S'(2+0)=0,\ S'(3-0)=S'(3+0)=0.$

В то же время $S''(2-0)=-2,\ \ S''(2+0)=0.$

Таким образом, наибольший порядок непрерывной производной функции S на отрезке $[0,4]$ равен 1 и, следовательно, дефект сплайна равен 2. (См. рис. 7.3).

Отметим, что в общем случае сам сплайн многочленом не является. Чтобы он был многочленом, необходимо и достаточно, чтобы его дефект равнялся нулю.

Будем рассматривать кубические сплайны, у которых непрерывны первая и вторая производные.

Тогда на отрезке $[x_{i-1}, x_i]$ сплайн *S(x)* имеет вид

$$S(x)=a_i+b_i(x-x_{i-1})+c_i(x-x_{i-1})^2+d_i(x-x_{i-1})^3, \quad i=\overline{1,n}.$$

Очевидно, $S(x_i)=y_i$, $i=\overline{0,n}$. Найдем *S(x)*. Для этого требуется определить значения *4n* неизвестных коэффициентов. Очевидно, для этого необходимо иметь *4n* уравнений для определения коэффициентов.

Подставим левый конец отрезка *(x_{i-1})* в уравнение:

$$S(x_{i-1})=y_{i-1}=a_i, \qquad i=\overline{1,n}$$

$$S(x_{i+1})=y_i=a_i+b_ih_i+c_ih_i^2+d_ih_i^3, \qquad i=\overline{1,n}.$$

В итоге получаем *2n* уравнений:

$$\begin{cases} y_{i-1}=a_i & i=\overline{1,n} \\ a_i+b_ih_i+c_ih_i^2+d_ih_i^3=y_i & i=\overline{1,n}. \end{cases}$$

Далее во всех внутренних узлах должны совпадать первая и вторая производные *S(x)*. Имеем

$$S'(x)=b_i+2c_i(x-x_{i-1})+3d_i(x-x_{i-1})^2,$$

$$S''(x)=2c_i+6d_i(x-x_{i-1}), \qquad i=\overline{1,n-1}.$$

Приравниваем во внутренних узлах значения левых и правых производных. Получим:

$$\begin{cases} b_i+2c_ih_i+3d_ih_i^2=b_{i+1} & i=\overline{1,n}, \\ c_i+3d_ih_i=c_{i+1}, \end{cases}$$

т. е. (*2n-2*) уравнений.

Недостающие два уравнения можно задать разными способами. Обычно берут $S''(x_0) = S''(x_n) = 0$.

Отсюда

$2c_1 = 0$, $\quad 2c_n + 6d_n h_n = 0$.

Для удобства положим еще $c_{n+1} = 0$.

Объединяя все уравнения, получим систему

$$\begin{cases} y_{i-1} = a_i & i = \overline{1,n} \\ a_i + b_i h_i + c_i h_i^2 + d_i h_i^3 = y_i & i = \overline{1,n} \\ b_i + 2c_i h_i + 3d_i h_i^2 = b_{i+1} & i = \overline{1,n-1} \\ c_i + 3d_i h_i = c_{i+1} & i = \overline{1,n-1} \\ c_n + 3d_n h_k = 0 & \\ c_1 = 0 & \\ c_{n+1} = 0. & \end{cases}$$

Решая систему, получим

$$\begin{cases} b_i h_i + c_i h_i^2 + d_i h_i^3 = y_i - y_{i-1} & i = \overline{1,n} \\ 2c_i h_i + 3d_i h_i^2 = b_{i+1} - b_i & i = \overline{1,n-1} \\ d =_i \dfrac{c_{i+1} - c_i}{3h_i} & \\ c_1 = c_{n+1} = 0, & \end{cases}$$

далее

$$\begin{cases} a_i = y_{i-1} & i = \overline{1,n} \\ b_i h_i + c_i h_i^2 + \left(\dfrac{(c_{i+1} - c_i) h_i^2}{3} \right) = y_i - y_{i-1} & i = \overline{1,n} \\ 2c_i h_i + (c_{i+1} - c_i) h_i = b_{i+1} - b_i & i = \overline{1,n-1} \\ d =_i \dfrac{c_{i+1} - c_i}{3h_i} & i = \overline{1,n} \\ c_1 = c_{n+1} = 0. & \end{cases}$$

Откуда

$$b_i = \frac{y_i - y_{i-1}}{h_i} - c_i h_i - \frac{(c_{i+1} - c_i) h_i}{3}, \qquad i = \overline{1,n}.$$

$$2c_i h_i + (c_{i+1} - c_i)h_i = \frac{y_{i+1} - y_i}{h_{i+1}} - c_{i+1}h_{i+1} - \frac{(c_{i+2} - c_{i+1})h_{i+1}}{3} - \frac{y_i - y_{i-1}}{h_i} + c_i h_i + \frac{(c_{i+1} - c_i)h_i}{3}.$$

Таким образом, задача определения коэффициентов сплайна свелась к решению системы

$$c_i(\frac{h_i}{3}) + c_{i+1}(\frac{2}{3}h_i + \frac{2}{3}h_{i+1}) + c_{i+2}(\frac{h_{i+1}}{3}) = \frac{y_{i+1} - y_i}{h_{i+1}} - \frac{y_i - y_{i-1}}{h_i}, \quad i = \overline{1, n-1}$$

$$c_1 = c_{n+1} = 0.$$

Система трехдиагональна. Будем решать ее методом прогонки. Поскольку для матрицы системы выполнено условие доминирования диагональных элементов

$$\frac{2}{3}h_i + \frac{2}{3}h_{i+1} > \frac{h_i}{3} + \frac{h_{i+1}}{3},$$

то задача имеет решение, причем единственное, и это решение можно найти методом прогонки.