

14. МНОГОМЕРНЫЕ СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ

14.1. Закон распределения многомерной случайной величины

N-мерной случайной величиной (X_1, X_2, \dots, X_n) называется совокупность одномерных величин X_i , которые принимают значение в результате проведения одного и того же опыта.

Это можно интерпретировать как случайные точки или случайные векторы в n -мерном пространстве. Например, совокупность n последовательных измерений с.в. X -система n случайных величин.

Полной характеристикой системы служит закон распределения, который может быть задан функцией распределения или плотностью вероятности.

Функцией распределения n случайных величин (X_1, X_2, \dots, X_n) называется вероятность выполнения n неравенств вида $X_i < x_i$:

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) = P((X_1 < x_1)(X_2 < x_2) \dots (X_n < x_n)).$$

Плотностью распределения системы n непрерывных с.в. называется n -я смешанная частная производная функции $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$, взятая один раз по каждому аргументу:

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{\partial^n F(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial x_1 \partial x_2 \dots \partial x_n}.$$

Плотность распределения систем случайных величин обладает следующими свойствами:

1. $\int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n = 1.$
2. $f(x_1, \dots, x_n) \geq 0.$

Зная закон распределения системы, можно определить законы распределения отдельных величин, входящих в систему. Функция распределения каждой из величин, входящих в систему можно получить, если положить все остальные аргументы равными ∞ : $F_1(x_1) = F(x_1, \infty, \dots, \infty)$ или при выделении из системы случайных величин (X_1, X_2, \dots, X_n) подсистемы случайных величин (X_1, X_2, \dots, X_k)

$$F_{1 \dots k}(x_1) = F(x_1, \dots, x_k, \infty, \dots, \infty).$$

Плотность распределения каждой из величин, входящих в систему, можно получить, интегрируя плотность распределения системы в бесконечных пределах по всем остальным аргументам:

$$f_1(x_1) = \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} f(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_2 \dots dx_n$$

Плотность распределения частной системы случайных величин (X_1, X_2, \dots, X_n) подсистемы с.в. (X_1, X_2, \dots, X_k) определяется так:

$$f_{1,2,\dots,k}(x_1, x_2, \dots, x_k) = \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} f(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_{k+1} dx_{k+2} \dots dx_n$$

Условным законом распределения системы случайных величин (X_1, X_2, \dots, X_n) называется ее закон распределения, вычисленный при условии, что остальные величины $(X_{k+1}, X_{k+2}, \dots, X_n)$ приняли значение $(x_{k+1}, x_{k+2}, \dots, x_n)$.

Условная плотность может быть вычислена по формуле:

$$f(x_1, x_2, \dots, x_k | x_{k+1}, x_{k+2}, \dots, x_n) = \frac{f(x_1, x_2, \dots, x_n)}{f_{k+1,\dots,n}(x_{k+1}, x_{k+2}, \dots, x_n)}$$

Случайные величины (X_1, X_2, \dots, X_n) называются *независимыми*, если закон распределения каждой частной системы, выделенной из системы (X_1, X_2, \dots, X_n) , не зависит от того, какие значения приняли остальные случайные величины.

Плотность распределения системы независимых случайных величин равна произведению плотностей распределения отдельных величин, входящих в систему:

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = f_1(x_1) \cdot f_2(x_2) \cdot \dots \cdot f_n(x_n).$$

Вероятность попадания случайной точки (X_1, X_2, \dots, X_n) в пределы n -мерной области D выражается n -кратным интегралом:

$$P((X_1, \dots, X_n) \in D) = \int \dots \int_{(D)} f(x_1, \dots, x_n) dx_1, \dots, dx_n$$

Эта формула является основной формулой для вычисления вероятностей событий, не сводящихся к схеме случаев. Переходят от схемы событий к схеме случайных величин (чаще всего – непрерывных) и сводят событие A к событию, состоящему в том, что система случайных величин (X_1, X_2, \dots, X_n) окажется в пределах некоторой области D . Тогда вероятность события A может быть вычислена по этой формуле.

14.2. ЧИСЛОВЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ СИСТЕМЫ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

Как и в случае одномерных случайных величин, при невозможности точно установить законы распределения, применяют приближенное описание системы случайных величин с помощью минимального количества числовых характеристик.

В качестве основных числовых характеристик используем следующие:

1. *Вектор математических ожиданий* $M = (m_1, m_2, \dots, m_n)$ – характеризующих средние значения величин

$$m_i = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} x_i f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n$$

2. Вектор дисперсий $\mathbf{D}=(D_1, D_2, \dots, D_n)$ – характеризующих их рассеивание

$$D_i = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} (x_i - m_i)^2 f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n$$

3. Корреляционная матрица

$$K_{ij} = M \left[\overset{\circ}{X}_i \overset{\circ}{X}_j \right],$$

где $\overset{\circ}{X}_i = X_i - m_i$ $\overset{\circ}{X}_j = X_j - m_j$ или матрица коэффициентов корреляции

$$r_{ij} = \frac{K_{ij}}{\sigma_x \sigma_y},$$

характеризующих попарную корреляцию всех величин, входящих в систему.

Дисперсия каждой из случайных величин X_i есть, по существу, не что иное, как корреляционный момент X_i и той же величины X_i :

$D_i = K_{ii} = M[\overset{\circ}{X}_i^2] = M[\overset{\circ}{X}_i \cdot \overset{\circ}{X}_i]$, поэтому корреляционная матрица и матрица коэффициентов корреляции принимает вид:

$$\|K_{ij}\| = \begin{vmatrix} D_1 & K_{12} & \dots & K_{1n} \\ K_{21} & D_2 & \dots & K_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ K_{n1} & K_{n2} & \dots & D_n \end{vmatrix},$$

где

$$K_{ij} = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} (x_i - m_i)(x_j - m_j) f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n$$

В случае, когда случайные величины не коррелированы, все элементы, кроме диагональной, равны 0 и корреляционная матрица принимает вид диагональной матрицы:

$$\|K_{ij}\| = \begin{vmatrix} D_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & D_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & D_n \end{vmatrix}$$

Помимо корреляционной матрицы для описания систем случайных величин может быть использована матрица коэффициентов корреляции. Это

матрица, составленная не из корреляционных моментов, а из коэффициентов корреляции (нормированная корреляционная матрица):

$$\|r_{ij}\| = \begin{vmatrix} 1 & r_{12} & \dots & r_{1n} \\ r_{21} & 1 & \dots & r_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{n1} & r_{n2} & \dots & 1 \end{vmatrix},$$

где

$$R_{ij} = \frac{K_{ij}}{\sigma_i \sigma_j} = \frac{K_{ij}}{\sqrt{D_i D_j}}$$

Для некоррелированных случайных величин матрица коэффициентов корреляции вырождается в единичную матрицу:

$$\|r_{ij}\| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix}.$$

14.3. ЧИСЛОВЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ФУНКЦИЙ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Пусть $Y = \varphi(x_1, x_2, \dots, x_n)$, где X_1, X_2, \dots, X_n - случайные величины с известной совместной n -мерной плотностью вероятностей $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Начальные моменты:

$$\alpha_k(y) = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \varphi^k(x_1, \dots, x_n) f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n$$

Центральные моменты:

$$\mu_k(y) = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} (\varphi(x_1, \dots, x_n) - m_y)^k f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n$$

Основные числовые характеристики:

- Математическое ожидание функции от произвольного числа случайных аргументов. Для непрерывных величин:

$$m_y = M[\varphi(X_1, X_2, \dots, X_n)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x_1, x_2, \dots, x_n) f(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 dx_2 \dots dx_n,$$

где

$f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ - плотность распределения системы (X_1, X_2, \dots, X_n) .

- Дисперсия функции от произвольного числа аргументов для непрерывных случайных величин

$$D_y = D[\varphi(X_1, X_2, \dots, X_n)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} [\varphi(x_1, x_2, \dots, x_n) - m_\varphi]^2 f(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 dx_2 \dots dx_n$$

или аналогичная форма

$$D[\varphi(X_1, X_2, \dots, X_n)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} [\varphi(x_1, x_2, \dots, x_n)]^2 f(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 dx_2 \dots dx_n - m_\varphi^2$$

На практике редко известна совместная плотность вероятности; известны лишь числовые характеристики. Определение числовых характеристик функций по заданным числовым характеристикам аргументам значительно упрощает решение задач теории вероятностей. Чаще всего такие упрощенные функции относятся к линейным функциям, однако некоторые элементарные нелинейные функции также подразумевают подобный подход.

Пусть известны векторы $M[x_i] = m_i$, $D[x_i] = D_i$ системы случайных величин (X_1, X_2, \dots, X_n) - с известной совместной n -мерной плотностью вероятностей $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, $||K_{ij}||$ - корреляционная матрица

Задача определения числовых характеристик Y в таком случае разрешима только для определения классов функций φ .

14.4. Числовые характеристики суммы случайных величин

1. Математическое ожидание суммы случайных величин.

Пусть случайная величина $Y = \sum_{i=1}^n X_i$. Тогда математическое ожидание суммы $M[Y]$ равно сумме математических ожиданий слагаемых

$$M[Y] = M\left[\sum_{i=1}^n X_i\right] = \sum_{i=1}^n M[X_i].$$

2. Математическое ожидание линейной функции нескольких случайных величин $Y = \sum_{i=1}^n a_i X_i + b$, (a_i, b - неслучайные коэффициенты) равно линейной функции их математических ожиданий:

$$m_y = M\left[\sum_{i=1}^n a_i X_i + b\right] = \sum_{i=1}^n a_i m_{x_i} + b, \quad m_{x_i} = M[X_i].$$

2. Дисперсия суммы случайных величин определяется так:

$$D[X + Y] = D[X] + D[Y] + 2K_{xy}.$$

или

$$D\left[\sum_{i=1}^n X_i\right] = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n K_{ij},$$

где двойная сумма распространяется на все элементы корреляционной матрицы системы случайных величин (X_1, X_2, \dots, X_n) .

Докажем это соотношение.

$$D\left[\sum_{i=1}^n X_i\right] = M\left[\left(\sum_{i=1}^n X_i - \sum_{i=1}^n m_{xi}\right)^2\right] = M\left[\left(\sum_{i=1}^n (X_i - m_{xi})\right)^2\right] =$$

$$M\left[\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (X_i - m_{xi})(X_j - m_{xj})\right] = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n M[(X_i - m_{xi})(X_j - m_{xj})] = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n K_{ij}.$$

Если все случайные величины (X_1, X_2, \dots, X_n) , входящие в систему, некоррелированы, т.е. $K_{ij} = 0, i \neq j$, то формула (12.7) принимает вид:

$$D\left[\sum_{i=1}^n X_i\right] = \sum_{i=1}^n D[X_i],$$

т.е. дисперсия суммы некоррелированных случайных величин равна сумме дисперсий слагаемых.

4. *Дисперсия линейной функции* случайных величин определяется соотношением

$$D\left[\sum_{i=1}^n a_i X_i + b\right] = \sum_{i=1}^n a_i^2 D[X_i] + 2 \sum_{i < j} a_i a_j K_{ij}.$$

Доказательство: Рассмотрим дисперсию случайной величины $Y = \sum_{i=1}^n (a_i X_i) + b$. Согласно свойствам дисперсий можно записать:

$$D\left[\sum_{i=1}^n a_i X_i + b\right] = D\left[\sum_{i=1}^n a_i X_i\right].$$

Дисперсия этой случайной величины

$$D\left[\sum_{i=1}^n a_i X_i\right] = M\left[\left(\sum_{i=1}^n a_i X_i - \sum_{i=1}^n a_i m_{xi}\right)^2\right] = M\left[\left(\sum_{i=1}^n a_i (X_i - m_{xi})\right)^2\right] =$$

$$M\left[\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_i a_j (X_i - m_{xi})(X_j - m_{xj})\right] = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_i a_j M[(X_i - m_{xi})(X_j - m_{xj})] =$$

$$= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_i a_j K_{ij} = \sum_{i=1}^n a_i^2 D[X_i] + 2 \sum_{i < j} a_i a_j K_{ij}.$$

Дисперсия суммы некоррелированных случайных величин равна сумме дисперсий:

$$D\left[\sum_{i=1}^n a_i X_i\right] = \sum_{i=1}^n a_i^2 D[X_i].$$

14.3. Числовые характеристики произведения случайных величин.

Пусть $Z=XY$, где X и Y – случайные величины с известными числовыми характеристиками.

1. Математическое ожидание произведения двух случайных величин равно произведению их математических ожиданий плюс их ковариация:

$$M[XY] = M[X]M[Y] + K_{xy}. \quad (12.20)$$

Доказательство:

$$K_{xy} = M[\dot{X}\dot{Y}] = M[(X - m_x)(Y - m_y)] = M[XY] - m_x M[Y] - m_y M[X] + m_x m_y = M[XY] - M[Y]M[X]$$

Математическое ожидание произведения некоррелированных (независимых) величин равно произведению математических ожиданий

$$M[X_i \cdot X_j] = m_j \cdot m_i$$

2. Дисперсия произведения независимых случайных величин X_1, X_2, \dots, X_n выражается формулой:

$$D\left[\prod_{i=1}^n X_i\right] = \prod_{i=1}^n (D[X_i] - m_{xi}^2) - \prod_{i=1}^n m_{xi}^2. \quad (12.21)$$

Пример 12.1. Случайная величина X равномерно распределена от -1 до +1. Определить математическое ожидание и дисперсию величины $Y = X^2$. Вычислить корреляционный момент величин X и Y .

Решение. Плотность вероятности X равна:

Вычислим математическое ожидание Y

$$f(x) = \begin{cases} 0,5, & -1 \leq x \leq 1 \\ 0, & x < -1, x > 1 \end{cases}$$

$$m_y = \int_{-1}^1 x^2 \cdot 0,5 dx = \frac{1}{3}$$

и дисперсию D_y

$$D_y = \int_{-1}^1 (x^2)^2 0,5 dx - m_y^2 = \frac{4}{45}$$

Вычислим корреляционный момент K_{xy} по формуле (11.11):

$$K_{xy} = M[XY] - m_x m_y = M[X \cdot X^2] - m_x m_y = M[X^3] - m_x m_y.$$

Так как $m_x = (a + b)/2 = (-1 + 1)/2 = 0$, то

$$K_{xy} = M[X^3] = \int_{-1}^1 x^3 0,5 dx = 0.$$

Пример 12.2. Величины X_1, X_2, X_3 независимы и имеют следующие числовые характеристики:

$$m_1 = 2, m_2 = -3, m_3 = 0, D_1 = 4, D_2 = 13, D_3 = 9.$$

Определить коэффициент корреляции r_{zy} величин Y и Z :

$$Y = 3X_1 - X_2,$$

$$Z = X_3 - 2X_1.$$

Решение. Вычислим математические ожидания Y и Z по формуле (12.5):

$$m_y = 3 \cdot m_1 - 1 \cdot m_2 = 9,$$

$$m_z = m_3 - 2 \cdot m_1 = -4.$$

Вычислим дисперсию D_y и D_z по формуле (12.9)

$$D_y = (3)^2 \cdot D_1 + (-1)^2 \cdot D_2 = 49,$$

$$D_z = D_3 + (-2)^2 D_1 = 25.$$

Рассчитаем корреляционный момент K_{yz} . Для этого определим $M[YZ]$

$$\begin{aligned} M[YZ] &= M[(3X_1 - X_2)(X_3 - 2X_1)] = M[3X_1X_3 - 6X_1^2 - \\ &\quad - X_2X_3 + 2X_2X_1] = 3m_1m_3 - 6M[X_1^2] - \\ &\quad - m_2m_3 + 2m_2m_1 = -6M[X_1^2] - 12. \end{aligned}$$

Так как $D_1 = M[X_1^2] - m_1^2$, то $M[X_1^2] = D_1 + m_1^2 = 8$.

Таким образом $M[YZ] = -60$. Тогда

$$K_{yz} = M[YZ] - m_y m_z = -60 - 9(-4) = -24.$$

Величину r_{yz} определим так:

$$r_{yz} = \frac{K_{yz}}{\sqrt{D_y D_z}} = -\frac{24}{35}.$$