3. Кубический сплайн

Пусть функция $f(x)$ определена и дважды непрерывно-дифференцируема на $[a, b]$. Введем сетку

$$\Delta : \quad a = x_0 < x_1 < \ldots < x_N = b$$

и вычислим значения функции $f(x)$ в узлах сетки $\Delta : f(x_j)$, $j = \overline{0, N}$.

Определение. *Функция $s(x)$, $x \in [a, b]$ называется кубическим сплайном на сетке Δ, если*

1) $s(x)$ *– многочлен третьей степени на каждой ячейке $\Delta_j = [x_{j-1}, x_j]$, $j = \overline{1, N}$;*

2) $s(x)$ *дважды непрерывно–дифференцируема на $[a, b]$;*

3) $s(x_j) = f(x_j)$, $j = \overline{0, N}$.

В данном случае узлы сплайна совпадают с узлами интерполяции.

Число параметров: $4N$, общее число условий: $4N - 2$. Необходимо дополнительно задать два краевых условия аналогично параболическому случаю.

§6. Наилучшее приближение функций в классе полиномов

1. Наилучшее равномерное приближение (чебышевская аппроксимация)

Пусть функция $y = f(x)$, $x \in [a, b]$ задана таблицей своих значений

$$y_i = f(x_i), \quad i = \overline{0, N} \tag{1}$$

в точках (узлах) $x_0, x_1, \ldots, x_N$, упорядоченных по возрастанию

$$a \leq x_0 < x_1 < \ldots < x_N \leq b.$$

Проведем аппроксимацию функции $f(x)$ по таблице (1) в классе алгебраических полиномов $P_n(x, \alpha)$ степени не выше n ($n \leq N$) с набором коэффициентов $\alpha = (a_0, a_1, \ldots, a_n)$

$$P_n(x, \alpha) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n.$$

В качестве критерия аппроксимации выберем величину максимального отклонения

$$\varphi_n(\alpha) = \max_{0 \le i \le N} |y_i - P_n(x_i, \alpha)|.$$

Положим

$$\rho_n = \inf_{\{\alpha\}} \varphi_n(\alpha)$$

(точная нижняя грань по всем наборам коэффициентов).

Задача наилучшего приближения функции $f(x)$ по таблице (1) (задача чебышевской аппроксимации) состоит в построении многочлена $P_n(x, \alpha^*)$, для которого

$$\varphi_n(\alpha^*) = \rho_n.$$

При этом $P_n(x, \alpha^*)$ – полином наилучшего приближения для функции $f(x)$ по таблице (1).

Решение задачи наилучшего приближения существенно зависит от соотношения между n и N (при общем условии $n \le N$).

Если $n = N$, то $P_n(x, \alpha^*)$ есть, очевидно, интерполяционный полином функции $f(x)$ по таблице (1), удовлетворяющий условиям

$$P_n(x_i, \alpha^*) = y_i, \quad i = \overline{0, n}.$$

В этом случае $\rho_n = 0$, и задача о наилучшем приближении переходит в обыкновенную задачу интерполирования функции $f(x)$ по таблице (1).

При $n = N - 1$ задача о наилучшем приближении называется задачей чебышевской интерполяции. Сформулируем основной результат для этого случая.

Теорема 1. *В случае $n = N - 1$ полином наилучшего приближения существует и является единственным. Для того, чтобы полином $P_n(x, \alpha)$ был полиномом наилучшего приближения необходимо и достаточно, чтобы для некоторого числа h выполнялись соотношения*

$$y_i - P_n(x_i, \alpha) = (-1)^i h, \quad i = \overline{0, n+1}. \tag{2}$$

На основании этой теоремы задача чебышевской интерполяции эквивалентна решению системы линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных h, $a_0, \ldots, a_n$

$$
\begin{aligned}
h + a_0 + a_1 x_0 + \ldots + a_n x_0^n &= y_0, \\
-h + a_0 + a_1 x_1 + \ldots + a_n x_1^n &= y_1, \\
\ldots\ldots\ldots \\
(-1)^{n+1} h + a_0 + a_1 x_{n+1} + \ldots + a_n x_{n+1}^n &= y_{n+1}.
\end{aligned}
\tag{2'}
$$

При этом $\rho_n = |h|$.

Рассмотрим общий случай, когда $n < N - 1$. Справедливо следующее утверждение.

Теорема 2. *В случае $n < N - 1$ полином наилучшего приближения существует и является единственным. Для того, чтобы полином $P_n(x, \alpha)$ решал задачу о наилучшем приближении необходимо и достаточно, чтобы он осуществлял чебышевскую интерполяцию на некоторой совокупности из $(n + 2)$ узлов $x_{i_0} < x_{i_1} < \ldots < x_{i_{n+1}}$ исходного набора $(x_0, x_1, \ldots, x_N)$.*

Итак, общая задача о наилучшем приближении сводится к последовательности задач чебышевской интерполяции для всевозможных наборов $\{x_{i_0}, \ldots, x_{i_{n+1}}\}$.

Представим непрерывный вариант задачи о наилучшем приближении. Пусть $f(x)$ – непрерывная функция, заданная на $[a, b]$. Проведем её аппроксимацию в классе алгебраических многочленов $P_n(x, \alpha)$ по критерию

$$\varphi_n(\alpha) = \max_{a \le x \le b} |f(x) - P_n(x, \alpha)|.$$

Положим $\rho_n = \inf_{\{\alpha\}} \varphi_n(\alpha)$.

Задача наилучшего равномерного приближения функции $f(x)$ на $[a, b]$ состоит в построении многочлена $P_n(x, \alpha^*)$, для которого $\varphi_n(\alpha^*) = \rho_n$. При этом $P_n(x, \alpha^*)$ – полином наилучшего равномерного приближения для функции $f(x)$ на $[a, b]$.

Решение задачи дается следующим утверждением.

Теорема 3. (П.Л. Чебышев) *Полином наилучшего равномерного приближения для функции $f(x)$ на $[a, b]$ существует и является единственным. Для того, чтобы полином $P_n(x, \alpha)$ был полиномом наилучшего равномерного приближения необходимо и достаточно, чтобы он осуществлял чебышевскую интерполяцию на некотором наборе из $(n + 2)$ точек $x_0, x_1, \ldots, x_{n+1}$ отрезка $[a, b]$.*

Точки $x_0, x_1, \ldots, x_{n+1}$, удовлетворяющие условиям теоремы, называют *точками чебышевского альтернанса.*

2. Наилучшее среднеквадратичное приближение (метод наименьших квадратов)

Пусть для функции $f(x)$, $x \in [a,b]$ вычислены её значения $f(x_i)$, $i = \overline{0,N}$ в точках $x_0, \ldots, x_N$ отрезка $[a,b]$. В рамках этой информации поставим задачу аппроксимации функции $f(x)$, $x \in [a,b]$ в классе алгебраических полиномов $P_n(x,\alpha)$ степени не выше n $(n \leq N)$ по критерию среднеквадратичного отклонения

$$\varphi_n(\alpha) = \sum_{i=0}^{N} [f(x_i) - P_n(x_i, \alpha)]^2.$$

Задача наилучшего среднеквадратичного приближения состоит в отыскании набора коэффициентов $\alpha^* = (a_0^*, \ldots, a_n^*)$, который минимизирует функцию $\varphi_n(\alpha)$

$$\varphi_n(\alpha^*) = \min_{\{\alpha\}} \varphi_n(\alpha).$$

Соответствующий многочлен $P_n(x, \alpha^*)$ называют многочленом наилучшего среднеквадратичного приближения по таблице значений. Такой способ аппроксимации называют *методом наименьших квадратов.*

Заметим, что при $n = N$ $P_n(x, \alpha^*)$ есть интерполяционный полином для функции $f(x)$ по заданной таблице, причем $\varphi_n(\alpha^*) = 0$.

Теорема 4. *При $n < N$ полином наилучшего среднеквадратичного приближения существует и является единственным. Для того, чтобы полином $P_n(x,\alpha)$ решал задачу о наилучшем среднеквадратичном приближении необходимо и достаточно, чтобы выполнялись соотношения*

$$\sum_{i=0}^{N} [f(x_i) - P_n(x_i, \alpha)] x_i^k = 0, \quad k = \overline{0,n}. \tag{3}$$

Таким образом, поставленная задача эквивалентна решению системы линейных алгебраических уравнений (3) относительно коэффициентов a_0, $\ldots, a_n$ искомого многочлена.

Заметим, что применительно к функции $\varphi_n(\alpha)$ соотношения (3) имеют смысл условий стационарности

$$\frac{1}{2} \, \frac{\partial \varphi_n(\alpha)}{\partial a_k} = 0, \quad k = \overline{0,n}.$$

Сохраняя терминологию, укажем набор соотношений, характеризующих непрерывную задачу о наилучшем среднеквадратичном приближении:

$$f(x), \quad x \in [a, b]$$

– аппроксимируемая функция;

$$P_n(x, \alpha) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$$

– аппроксимирующий многочлен;

$$\varphi_n(\alpha) = \int_a^b [f(x) - P_n(x, \alpha)]^2 dx$$

– критерий аппроксимации;

$$\varphi_n(\alpha^*) = \min_{\{\alpha\}} \varphi_n(\alpha)$$

– задача о наилучшем приближении;

$$\int_a^b [f(x) - P_n(x, \alpha)] x^k dx = 0, \quad k = \overline{0, n}$$

– необходимые и достаточные условия минимума.