Модуль 1.

1. СЛУЧАЙНЫЕ СОБЫТИЯ. ВЕРОЯТНОСТЬ СОБЫТИЯ

Теория вероятностей – математическая наука, изучающая закономерности в случайных явлениях. Одним из основных понятий теории вероятностей является понятие ***случайного события*** (или просто ***события***).

Событием называется любой факт, который в результате опыта может произойти или не произойти. Примеры случайных событий: выпадение шестерки при подбрасывании игральной кости, отказ технического устройства, искажение сообщения при передаче его по каналу связи. С событиями связываются некоторые ***числа***, характеризующие степень объективной возможности появления этих событий, называемые ***вероятностями событий***.

К понятию «вероятность» существует несколько подходов.

Современное построение теории вероятностей основывается на *аксиоматическом подходе* и опирается на элементарные понятия теории множеств. Такой подход называется теоретико-множественным.

Пусть производится некоторый опыт со случайным исходом. Рассмотрим множество Ω всех возможных исходов опыта; каждый его элемент $\varpi \in \Omega$ будем называть *элементарным событием,* а множество Ω – *пространством элементарных событий*. Любое событие A в теоретико-множественной трактовке есть некоторое подмножество множества Ω: $A \in \Omega$
.

Достоверным называется событие Ω, которое происходит в каждом опыте.

Невозможным называется событие $\varnothing$, которое в результате опыта произойти не может.

Несовместными называются события, которые в одном опыте не могут произойти одновременно.

Суммой (объединением) двух событий A и B (обозначается $A+B$, $A\cup B$) называется такое событие, которое заключается в том, что происходит хотя бы одно из событий, т.е. A или B, или оба одновременно.

Произведением (пересечением) двух событий A и B (обозначается $A\cdot B$, $A\cap B$) называется такое событие, которое заключается в том, что происходят оба события A и B вместе.

Противоположным к событию A называется такое событие $\mathrm{P}(A)=\mathrm{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} B_i\right)=1-\mathrm{P}(\overline{A})=1-\mathrm{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n}\overline{B}_i\right)=1-\prod_{i=1}^{n}(1-\mathrm{P}(B_i))=$, которое заключается в том, что событие A не происходит.

События A_k (k=1, 2, ..., n) образуют ***полную группу***, если они попарно несовместны и в сумме образуют достоверное событие.

При преобразовании выражений можно пользоваться следующими тождествами:

$$A+\overline{A}=\Omega; \qquad A\cdot\overline{A}=\varnothing; \qquad A+\Omega=\Omega; \qquad A\cdot\Omega=A; \qquad A\cdot\varnothing=\varnothing;$$

$$A+\varnothing=A; \qquad \overline{A+B}=\overline{A}\cdot\overline{B}; \qquad \overline{A\cdot B}=\overline{A}+\overline{B}; \qquad A+\overline{A}\cdot B=A+B.$$

На основе вышеизложенного сформулированы ***аксиомы теории*** *вероятностей*. Пусть каждому событию ставится в соответствие *число*, называемое *вероятностью события*. Вероятность события *A* обозначается *P(A).* Так как событие есть множество, то вероятность события есть функция множества. Вероятности событий удовлетворяют следующим аксиомам.

1. Вероятность любого события заключена между нулем и единицей:
$$0\le P(A)\le 1. \tag{1.1}$$
2. Если A и B несовместные события, то
$$P(A+B)=P(A)+P(B). \tag{1.2}$$

Вторая аксиома обобщается на любое число событий: $P\left(\sum_{i=1}^{n}A_i\right)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i),$ если события A_i и A_j попарно несовместны для всех $i\neq j$

События A_1, A_2, …, A_n называют *равновозможными* если

$$P(A_1)=P(A_2)=\ldots=P(A_n). \tag{1.3}$$

Если в каком-то опыте пространство элементарных событий Ω можно представить в виде полной группы несовместных и равновозможных событий ω_1, ω_2, …, ω_n, то такие события называются *случаями*, а сам опыт сводится к *схеме случаев*.

Случай ω_i называется благоприятным событием A, если он является элементом множества A: $\varpi_i\in A$.

Классическое определение вероятности: вероятность события определяется по формуле

$$P(A)=\frac{m}{n}\quad, \tag{1.4}$$

где n - число элементарных равновозможных исходов данного опыта;
m - число равновозможных исходов, приводящих к появлению события.

Геометрическое определение вероятности. Пусть в некоторую область случайным образом бросается точка *T*, причем все точки области Ω равноправны в отношении попадания точки *T*. Тогда за вероятность попадания точки *T* в область *A* принимается отношение

$$\mathrm{P}(A)=\frac{S(A)}{S(\Omega)}\quad, \tag{1.5}$$

где *S*(*A*) и *S*(Ω) — геометрические меры (длина, площадь, объем и т.д.) областей *A* и Ω соответственно.

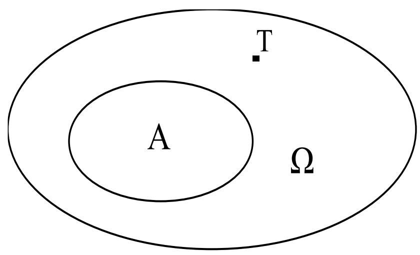

Рис. 1.1

Основные комбинаторные формулы

Пусть имеется множество $X = \{x_1, x_2, .., x_n\}$, состоящее из n различных элементов. (n, r) - *выборкой* называется множество, состоящее из r элементов, взятых из множества X.

Упорядоченной называется выборка, для которой важен порядок следования элементов. Если каждый элемент множества X может извлекаться несколько раз, то выборка называется *выборкой с повторениями*.

Число упорядоченных (n, r) - выборок (*перестановок*) с повторениями $\hat{P}(n,r)$ и без повторений $P(n,r)$ равно

$$\hat{P}(n,r) = n^r, \tag{1.6}$$

$$P(n,r) = \frac{n!}{(n,r)!} \tag{1.7}$$

Число неупорядоченных (n, r) - выборок (*сочетаний*) с повторениями $\hat{C}_n^r$ и без повторений C_n^r равно

$$\hat{C}_n^r = \frac{(n+r-1)!}{r!(n,r)!},$$

(1.8)

$$C_n^r = \frac{n!}{r!(n,r)!} \tag{1.9}$$

Число различных разбиений множества из n элементов на k непересекающихся подмножеств, причем в 1-м подмножестве r_1 элементов, во 2-м r_2 элементов и т.д., а $n = r_1 + + r_2 +... + r_k$ равно

$$P_n(r_1, r_2, ..., r_k) = \frac{n!}{r_1! r_2! .. r_k!} \tag{1.10}$$

Пример 1.1. В партии транзисторов n стандартных и m бракованных. При контроле оказалось, что первые k транзисторов стандартны. Найти вероятность p того, что следующий транзистор будет стандартным.

Решение. Всего осталось для проверки $n+m-k$ транзисторов, из которых стандартных $n-k$. По формуле классического определения вероятности

$$p = \frac{n-k}{n+m-k}.$$

Пример 1.2. Банковский сейф имеет кодовый замок, состоящий из шести дисков с восьмью буквами на каждом. Сейф открывается при наборе единственной комбинации букв. Злоумышленник пытается открыть сейф, причем на проверку одной кодовой комбинации у него уходит 10 секунд. Какова вероятность того, что злоумышленник успеет открыть сейф, если в его распоряжении 1 час?

Решение. Обозначим искомую вероятность через P(A). Общее число исходов, равное числу кодовых комбинаций замка определяется по формуле (1.6) и равно 8^6. Число благоприятствующих исходов, в данном случае равное числу комбинаций, которые успеет испробовать злоумышленник за 1 час, равно 360. Таким образом, искомая вероятность будет равна

$$P(A) = \frac{360}{8^6} \approx 1,4 \cdot 10^{-3}$$

2. ПРАВИЛА СЛОЖЕНИЯ И УМНОЖЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Несколько событий называются ***несовместимыми***, если появление одного из них исключает возможность появления остальных.

Вероятность суммы двух несовместных событий равна сумме вероятностей этих событий

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B). \tag{2.1}$$

Если имеется счетное множество несовместных событий $A_1, \ldots, A_n$, то

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i). \tag{2.2}$$

Из правила сложения вероятностей вытекает, что если события A_1, A_2, …, A_n несовместны и образуют полную группу, то сумма их вероятностей равна единице; т.е. если

$$\sum_{i=1}^{n} A_i = \Omega, \quad A_iA_j = O \text{ при } i \neq j,$$

то

$$P\left(\sum_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) = P(\Omega) = 1. \tag{2.3}$$

В частности, если два события A и $\overline{A}$ противоположны, то они образуют полную группу несовместных событий и

$$P(A) + P(\overline{A}) = 1. \tag{2.4}$$

Тогда

$$P(A) = 1 - P(\overline{A}). \tag{2.5}$$

Вероятность суммы двух совместных событий равна сумме вероятностей каждого из событий минус вероятность их совместного появления:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B). \tag{2.6}$$

Вероятность суммы трех совместных событий

$$P(A \cup B \cup C = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) -$$
$$-P(B \cap C) - P(A \cap C) + P(A \cap B \cap C) \tag{2.7}$$

Событие А называется независимым от события В, если возможность наступления события А не зависит от того, произошло событие В или нет.

В противном случае события являются зависимыми. *Условной вероятностью* события В при наличии А называется величина

$$P(B/A) = P(A \cap B)/P(A) \tag{2.8}$$

(при этом полагается, что Р(А) не равно 0).

Условную вероятность события *P(B/A)* можно трактовать как вероятность события В, вычисленная *при условии, что событие А произошло*.

На практике формулу (2.8) записывают в виде:

$$P(A \cup B) = P(A) \cdot P(B/A) = P(B) \cdot P(B/A) \tag{2.9}$$

Вероятность произведения (пересечения, совмещения) двух событий равна вероятности одного из них, умноженной на условную вероятность второго при наличии первого (правило умножения вероятностей).

Правило умножения вероятностей может быть обобщено на случай произвольного числа событий

$$\begin{gathered} P(A_1 \cdot A_2 \cdot \ldots \cdot A_n) = \\ P(A_1) \cdot P(A_2 / A_1) \cdot P(A_3 / A_1 A_2) \cdot \ldots \cdot P(A_n / A_1 \ldots A_n), \end{gathered} \tag{2.10}$$

т.е. *вероятность произведения нескольких событий равна произведению вероятностей этих событий, причем вероятность каждого последующего события вычисляется при условии, что все предыдущие имели место*.

Событие *A* называется ***независимым*** от события *B*, если его вероятность не зависит от того, произошло событие *B* или нет, т.е. P(*B*/*A*)=P(*B*).

Для независимых событий правило произведения вероятностей принимает вид:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) \tag{2.11}$$

Несколько событий $\mathbf{A_1, A_2, \ldots, A_n}$ называются независимыми, если любое из них не зависит от любой комбинации (произведения) любого числа других. Для независимых событий правило умножения принимает вид:

$$P(A_1 \cdot A_2 \cdot \ldots \cdot A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot \ldots \cdot P(A_n), \tag{2.12}$$

или

$$P\left(\prod_{i=1}^{n} A_i\right) = \prod_{i=1}^{n} P(A_i), \tag{2.13}$$

т.е. *вероятность произведения нескольких независимых событий равна произведению вероятностей этих событий*.

Заметим, что если имеется несколько событий A_1, A_2, …, A_n, то их попарная независимость (т.е. независимость любых двух событий A_i и A_j, $i \neq j$) еще не означает их независимости в совокупности.

Пример 2.1. Сообщение передается одновременно по *n* каналам связи, причем для надежности по каждому каналу оно повторяется *k* раз. При одной передаче сообщение (независимо от других) искажается с вероятностью *p* . Каждый канал связи (независимо от других) «забивается» помехами с вероятностью *q*; «забитый» канал не может передавать сообщения. Найти вероятность того, что адресат получит сообщение без искажений.

Решение. Обозначим события:

A = {хотя бы один раз сообщение передано без искажений};

B_i = {по i-му каналу сообщение хотя бы один раз было передано без искажений}.

Для выполнения события B_i i-й канал, во-первых, не должен быть забит помехами и, во-вторых, хотя бы одно сообщение по нему не должно быть искажено.

Вероятность того, что канал не «забит» помехами равна 1-q.

Вероятность того, что хотя бы одно сообщение передано без помех – равна 1-p^k (p – вероятность того, что все сообщения переданы с искажениями).

Тогда $P(B) = (1 - q) \cdot (1 - p^k)$.

Вероятность события A, состоящего в том, что хотя бы на одном канале произойдет событие, равна

$$\mathrm{P}(A)=\mathrm{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} B_i\right)=1-\mathrm{P}(\overline{A})=1-\mathrm{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n}\overline{B}_i\right)=1-\prod_{i=1}^{n}(1-\mathrm{P}(B_i))=1-[1-(1-q)(1-p^k)]^n.$$

Пример 1.5. Какова вероятность угадать в спортлото “5 из 36” не менее трех номеров?

Решение. Событие А - угадать не менее трех номеров в спортлото, разбивается на сумму трех несовместных событий:

A_3 - угадать ровно три номера;

A_4 - угадать ровно четыре номера;

A_5 - угадать ровно пять номеров.

При этом $P(A)=P(A_3)+P(A_4)+P(A_5)$, так как события несовместны.

Найдем вероятность $P(A_3)$. Для этого воспользуемся формулой (1.1). Здесь общее число комбинаций n по формуле (1.6) будет равно числу возможных заполнений карточек:

$$n = C_{36}^5 = \frac{36!}{5!(36-5)!} = 376992.$$

Число благоприятствующих комбинаций m в этом случае определяется следующим образом. Выбрать три номера из пяти выигравших можно $C_5^3 = 10$ способами. Однако каждый выбор трех правильных номеров сочетается с выбором двух неправильных номеров.

Число таких выборок равно $C_{31}^2 = 465$. Таким образом, число благоприятствующих событий равно произведению найденных чисел:

$$m = C_5^3 \cdot C_{31}^2 = 10 \cdot 465 = 4650.$$

Тогда

$$P(A_3) = \frac{m}{n} = \frac{4650}{376992} \approx 0{,}123 \cdot 10^{-1}.$$

Аналогично вычисляются $P(A_4) = 0{,}478 \cdot 10^{-3}$, $P(A_5) = 0{,}265 \cdot 10^{-5}$. Таким образом, искомая вероятность будет равна

$$P(A) = 0{,}123 \cdot 10^{-1} + 0{,}478 \cdot 10^{-3} + 0{,}265 \cdot 10^{-5} = 0{,}128 \cdot 10^{-1}.$$

3. ФОРМУЛА ПОЛНОЙ ВЕРОЯТНОСТИ. ФОРМУЛА БАЙЕСА

Формула полной вероятности является следствием основных правил теории вероятностей: теорем сложения и умножения вероятностей.

Допустим, что проводится некоторый опыт, об условиях которого можно сделать n исключающих друг друга предположений (***гипотез***):

$$\{ H_1, H_2, \ldots, H_n\}, H_i \cap H_j = \varnothing \text{ при } i \neq j. \quad (3.1)$$

Каждая гипотеза осуществляется случайным образом и представляет собой некоторые *события*, вероятности которых известны:

$$P(H_1); P(H_2); \ldots; P(H_n). \quad (3.2)$$

Рассматривается некоторое событие *A*, которое может появиться только совместно с одной из гипотез (3.2). Заданы условные вероятности события *A* при каждой из гипотез:

$$P(A/H_1); P(A/H_2); \ldots; P(A/H_n). \quad (3.3)$$

Требуется найти вероятность события *A*. Для этого представим событие A как сумму n несовместных событий

$$A = (A \cap H_1) \cup (A \cap H_2) \cup \ldots \cup (A \cap H_n). \quad (3.4)$$

По правилу сложения вероятностей $P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(H_i \cap A)$.

По правилу умножения вероятностей $P(H_i \cap A) = P(H_i) \cdot P(A/H_i)$. Тогда полная вероятность события *A*:

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(H_i) \cdot P(A/H_i), \quad (3.5)$$

т.е. полная вероятность события A вычисляется как *сумма произведений вероятности каждой гипотезы на условную вероятность события при этой гипотезе*.

Формула (3.5) называется ***формулой полной вероятности***. Она применяется в тех случая, когда опыт со случайным исходом распадается на два этапа: на первом "разыгрываются" условия опята, а на втором – его результаты.

Следствием правила умножения, и формулы полной вероятности является теорема гипотез или ***формула Байеса***.

По условиям опыта известно, что гипотезы $H_1, H_2, \ldots, H_n$ несовместны, образуют полную группу событий:

$$H_i \cap H_j = \varnothing \text{ при } i \neq j \text{ и } H_1 \cup H_2, \cup \ldots, \cup H_n = \Omega.$$

Вероятности гипотез до опыта (так называемые «априорные вероятности») известны и равны

$$\mathrm{P(H_1), P(H_2), \ldots, P(H_n)}; \ \sum_{i=1}^{n} P(H_i) = 1.$$

Предположим, что опыт произведен и в результате появилось событие *A*. Спрашивается, как нужно пересмотреть вероятность гипотез с учетом этого факта, или, другими словами, какова вероятность того, что наступлению события А предшествовала гипотеза $\mathrm{H_k}$ (послеопытные вероятности называются апостериорными):

$$\mathrm{P(H_1/A), P(H_2/A), \ldots, P(H_n/A)}.$$

Вероятность наступления события *A* совместно с гипотезой H_k определяется с использованием теоремы умножения вероятностей:

$$\mathrm{P}(A \cap H_k) = \mathrm{P}(H_k) \cdot \mathrm{P}(A/H_k) = \mathrm{P}(A) \cdot \mathrm{P}(H_k/A). \tag{3.6}$$

Таким образом, можно записать:

$$\mathrm{P}\,(H_k/A) = \mathrm{P}\,(H_k) \cdot \mathrm{P}\,(A/H_k)/\mathrm{P}\,(A). \tag{3.7}$$

С использованием формулы полной вероятности

$$\mathrm{P(H_k/A)} = \frac{\mathrm{P(H_k) \cdot P(A/H_k)}}{\sum_{i=1}^{n} P(H_i) \cdot P(A/H_i)}. \tag{3.8}$$

Формула (3.8) называется *формулой Байеса*. Она позволяет пересчитывать вероятности гипотез в свете новой информации, состоящей в том, что опыт дал результат *A*

Пример 3.1. На вход радиоприемного устройства с вероятностью 0,9 поступает смесь полезного сигнала с помехой, а с вероятностью 0,1 только помеха. Если поступает полезный сигнал с помехой, то приемник с вероятностью 0,8 регистрирует наличие сигнала, если поступает только помеха, то регистрируется наличие сигнала с вероятностью 0,3. Известно, что приемник показал наличие сигнала. Какова вероятность того, что сигнал действительно пришел?

Решение. С рассматриваемым событием *A*={приемник зарегистрировал наличие сигнала} связано две гипотезы: H_1={пришел сигнал и помеха}, H_2={пришла только помеха}. Вероятности этих гипотез $\mathrm{P}(H_1)=0{,}9$, $\mathrm{P}(H_2)=0{,}1$. Условные вероятности события *A* по отношению к гипотезам H_1 и H_2 находим из условия задачи: $\mathrm{P}(A/H_1)=0{,}8$, $\mathrm{P}(A/H_2)=0{,}3$.

Требуется определить условную вероятность гипотезы H_1 по отношению к событию *A*, для чего воспользуемся формулой Байеса:

$$\mathrm{P}(H_1/A) = \frac{\mathrm{P}(H_1) \cdot \mathrm{P}(A/H_1)}{\mathrm{P}(H_1) \cdot \mathrm{P}(A/H_1) + \mathrm{P}(H_2) \cdot \mathrm{P}(A/H_2)} = \frac{0{,}9 \cdot 0{,}8}{0{,}9 \cdot 0{,}8 + 0{,}1 \cdot 0{,}3} = 0{,}96.$$

Пример 3.2. Для решения вопроса идти в кино или на лекцию студент подбрасывает монету. Если студент пойдет на лекцию, он разберется в теме с вероятностью 0,9, а если в кино - с вероятностью 0,3. Какова вероятность того, что студент разберется в теме?

Решение. Применим формулу полной вероятности (1.19). Пусть А - событие, состоящее в том, что студент разобрался в теме, событие (гипотеза) H_1 - студент идет в кино, H_2 - студент идет на лекцию. Известны из условия задачи следующие вероятности:

$$P(H_1)=P(H_2)=0.5; \; P(A/H_1)=0{,}3; \; P(A/H_2)=0{,}9.$$

Искомая вероятность события А будет равна

$$P(A) = P(H_1)\, P(A/ H_1)+ P(H_2)\, P(A/ H_2)=0{,}5\; 0{,}3+0{,}5\; 0{,}9=0{,}6.$$

4. ПОВТОРЕНИЕ НЕЗАВИСИМЫХ ОПЫТОВ

Несколько опытов называются ***независимыми***, если вероятность исхода опыта не зависит от того, какие исходы имели другие опыты. Рассмотрим случай, когда вероятности исходов опытов постоянны и не зависят от номера опыта.

Пусть один тот же опыт проводятся n раз. В каждом опыте некоторые события $A_1, A_2, \ldots, A_r$ появляется с вероятностями $p_1, p_2, \ldots, p_n$. Будем рассматривать не результат каждого конкретного опыта, а общее число появлений событий $A_1, A_2, \ldots, A_r$.

4.1. Формула Бернулли

Рассмотрим случай с двумя возможными исходами опытов, т.е. в результате каждого опыта событие A появляется с вероятностью p и не появляется с вероятностью $q=1-p$. Вероятность $P(n,k)$ того, что в последовательности из n опытов интересующее нас событие произойдет ровно k раз (безразлично, в какой последовательности), равна (***формула Бернулли***)

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k q^{n-k}. \qquad (4.1)$$

<u>Докажем это:</u> Обозначим через $B_к$ появление события A в k опытах и появление $\overline{A}$ в $(n-k)$ опытах. Событие $B_к$ представляет собой сумму несовместимых событий

$$B_k = \underbrace{A_1 \cdot A_2 \cdot \ldots\ldots A_k}_{k} \underbrace{\overline{A}_{k+1} \cdot \overline{A}_{k+2} \ldots\ldots \overline{A}_n}_{n-k} + \ldots\ldots\ldots + \underbrace{\overline{A}_1 \cdot \overline{A}_2 \ldots\ldots \overline{A}_{n-k}}_{n-k} \underbrace{\overline{A}_{n-k+1} \cdot \overline{A}_{k+2} \ldots\ldots \overline{A}_n}_{k}$$

Где A_i – появление события A в i-том опыте. Определим вероятность одного из вариантов серии испытаний. Так как все опыты одинаковы, то вероятности всех вариантов одинаковы равны

$$P(A_1 \cdot A_2 \cdot \ldots\ldots A_k \overline{A}_{k+1} \cdot \overline{A}_{k+2} \ldots\ldots \overline{A}_n) = \underbrace{p \cdot p \ldots\ldots p}_{k} \underbrace{q \cdot q \ldots\ldots q}_{n-k} = p^k \cdot q^{n-k}$$

Количество вариантов таких сложных событий равно числу выборок k номеров опытов из n возможных, в которых произойдут события A, т.е. равно $C_n^к$. Тогда, согласно правилу сложения вероятностей для несовместных событий $P(B_к)$ равно

$$P_n(k) = P(n,k) = C_n^к p^к q^{(n-к)}.$$

Следствия из формулы Бернулли.

1. Вероятность того, что событие A наступит менее k раз

$$P(n,<k) = P\ (n,0) + P\ (n,1) + \ldots\ldots + P\ (n,k-1) = \sum_{i=1}^{k-1} P(n,i). \qquad (4.2)$$

2. Вероятность того, что событие наступит более k раз

$$P(n,>k)=P\ (n,k+1)+P\ (n,k+2)+.......+P\ (n,n)=\sum_{i=k+1}^{n}P(n,i). \qquad (4.3)$$

3. Вероятность того, что в n опытах схемы Бернулли, событие А появится от *k1* до *k2* раз

$$P(n,k_1\le i\le k_2)=\sum_{i=k_1}^{k_2}P_n(i)=\sum_{i=k_1}^{k_2}C_n^{ik}p^iq^{n-i}. \qquad (4.4)$$

4. Вероятность того, что в n опытах событие А появится хотя бы один раз, определяется формулой

$$P(n,\ge 1)=P_n(1\le k\le n)=1-q^n \qquad (4.5)$$

Число $\underline{k_0}$, которому соответствует максимальная биномиальная вероятность $P_n(k_0)$, называется <u>*наивероятнейшим числом*</u> появления события А. При заданных n и p это число определяется неравенствами:

$$np-q\le k_0\le np+p. \qquad (4.6)$$

4.2. Случай с несколькими исходами опытов

Пусть производится серия из n независимых опытов, в результате каждого из которых может появиться одно из событий A_1, A_2, ..., A_r с вероятностями $p_1, p_2, ..., p_r$ соответственно.

Вероятность того, что в серии из n опытов событие A_1 наступит ровно k_1 раз, событие A_2 — k_2 раз,..., событие A_r — k_r раз (k_1 + ... + k_r = n) равна

$$\mathrm{P}(n,k_1,..,k_r)=\frac{(k_1+...+k_r)!}{k_1!...k_r!}\cdot p_1^{k_1}\cdot p_2^{k_2}\cdot...\cdot p_r^{k_r}. \qquad (4.7)$$

4.3. Предельные теоремы в схеме испытаний Бернулли.

Вычисление вероятностей $P(n,k)$, при больших значениях n по формуле Бернулли проблематично. Поэтому вычисление соответствующих вероятностей проводится с помощью приближенных формул.

Теорема Пуассона. Если $(n\to\infty)$ *и* $p\to 0$, так что $np\to\lambda, 0<\lambda<\infty$, то

$$P_n(k)\approx\frac{\lambda^k}{k!}\cdot e^{-\lambda}, k=0,...,n \qquad (4.7)$$

*Теоремы Муавра-Лапласа***.** На практике приближенные формулы Муавра-Лапласа применяются в случае, когда p и q не малы , а npq>9**.**

Локальная теорема Муавра-Лапласа. Если вероятность появления события А в каждом из $n(n\to\infty)$ независимых испытаний равна одной и той же постоянной p=const (0<p<1), то вероятность $P(n,k)$ того, что во всех этих испытаниях событие A появится ровно k раз, приближенно вычисляется формулой:

$$P(n,k) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \cdot \varphi(x), \qquad (4.8)$$

где: $x = \frac{k - np}{\sqrt{npq}}$, $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$ -- кривая Гаусса.

Таблицы значений функции $\varphi(x)$ даны в приложениях к учебникам по теории вероятностей

Интегральная теорема Муавра-Лапласа. Пусть вероятность появления события A в каждом из n ($n \to \infty$) независимых испытаний равна одной и той же постоянной p ($0<p<1$), то вероятность $P(n,k)$ того, что во всех этих испытаниях событие A появится не менее k_1 и не более k_2 раз, приближенно вычисляется формулой:

$$P(n, k_1 \le k \le k_2) \approx (\Phi(x_2) - \Phi(x_1)), \qquad (4.9)$$

где

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx \text{ - функция Лапласа,}$$

$$x_1 = \frac{(k_1 - np)}{\sqrt{npq}}, \; x_2 = \frac{(k_2 - np)}{\sqrt{npq}}$$

Значения аргументов функции Лапласа для x $\in [0,5]$ даны в приложениях к учебникам по теории вероятностей (Приложение 2 настоящего методического пособия), для x>5 Ф(x)=1/2.Функция нечетная - Ф(x)= Ф(-x).

Пример 4.1. По каналу связи передается n = 6 сообщений, каждое из которых независимо от других, с вероятностью p = 0,2 оказывается искаженным. Найти вероятности следующих событий:

A = {ровно два сообщения из 6 искажены},

B = {не менее двух сообщений из 6 искажены},

C = {все сообщения будут переданы без искажений},

D = {все сообщения будут искажены}.

Решение. По теореме о повторении опытов

$$P(A) = C^6 \cdot p^2 \cdot (1-p)^4 = \frac{6!}{4! \cdot 2!} \cdot 0{,}2^2 \cdot 0{,}8^4 = 0{,}197,$$

$$P(B) = P(6,2) + P(6,3) + P(6,4) + P(6,5) + P(6,6) = 1 - P(6,0) -$$

$$- P(6,1) = 1 - C_6^0 p^0 (1-p)^6 - C_6^1 p^1 (1-p)^5 = 1 - 0{,}8^6 - 6 \cdot 0{,}2^1 \cdot 0{,}8^5 = 0{,}345,$$

$$P(C) = (1-p)^6 = 0.262,$$

$$P(D) = p^6 = 0{,}2^6 = 0{,}000064.$$

Пример 4.2. Вероятность появления события A за время испытаний равна 0,8. Определить вероятность того, что в 100 испытаниях событие A появится: а) 80 раз; б) не менее 75 и не более 90 раз; в) не менее 75 раз.

Решение

а) Воспользуемся локальной теоремой Муавра-Лапласа:

$$\text{P}(100,80) = \frac{\varphi(x)}{\sqrt{100 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}2}}, \quad \text{где } x = \frac{k - np}{\sqrt{npq}} = \frac{80 - 100 \cdot 0{,}8}{\sqrt{100 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}2}} = 0.$$

По таблице (приложение 1): $\varphi(0) = 0,3989$, тогда $P(100,80) = 0,0997$.

б) Согласно интегральной теореме Муавра-Лапласа

$P\ (100,75<k< 90) = \Phi\left(\dfrac{90-80}{4}\right) - \Phi\left(\dfrac{75-80}{4}\right) = (\Phi(2,5)-\Phi(-1,25)) = \Phi(2,5)+$

$+ \Phi(1,25)= \Phi(2,5)+\Phi(1,25)$.

Значение функции Лапласа определяем по таблице $\Phi(2,5)=0,4938$;$\Phi(1,25) = 0,3944$. Тогда $P\ (100,\ 75<k<90) =0,8882$.