3.3. Метод Зейделя

Рассмотрим модификацию метода итераций, называемую *методом Зейделя.* Пусть дана система линейных уравнений

$$A\overline{x} = \overline{b},$$

в которой $A_{n\times n}$ − матрица с диагональными элементами $a_{ii} \neq 0, \quad \forall i = \overline{1,n}$.

Каким-либо способом приведем систему к виду (3.2): $\overline{x} = \overline{B}\overline{x} + \overline{c}$. Перепишем систему покоординатно:

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} b_{ij} x_j + c_i, \quad i = 1,...,n.$$

Если бы применялся метод простых итераций, итерационная последовательность выглядела бы следующим образом:

$$x_i^k = \sum_{j=1}^{n} b_{ij} x_j^{k-1} + c_i, \qquad (i = 1,2,...,n; \quad k = 1,2,....).$$

При этом алгоритм позволял бы вычислять координаты x_i^k независимо, в любом порядке. Идея метода Зейделя заключается в том, чтобы использовать уже найденные координаты для улучшения значения последующих и проводить вычисления по правилу

$$x_i^k = \sum_{j=1}^{i-1} b_{ij} x_j^k + \sum_{j=i}^{n} b_{ij} x_j^{k-1} + c_i, \qquad i = 1,...,n. \tag{3.5}$$

Метод вычисления решения на основе итерационной последовательности (3.5) называют методом Зейделя.

Можно ожидать, что метод Зейделя будет сходиться быстрее метода простых итераций. Исследуем условия его сходимости. Матрицу B разобьем на сумму матриц H и $F,$ где

$$H = \begin{pmatrix} 0 & 0 & ...0 & 0 \\ b_{21} & 0 & ...0 & 0 \\ b_{31} & b_{32} & ...0 & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ b_{n1} & b_{n2}... & b_{nn-1} & 0 \end{pmatrix}, \qquad F = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & ...b_{1n-1} & b_{1n} \\ 0 & b_{22} & ...b_{2n-1} & b_{2n} \\ 0 & 0 & ...b_{3n-1} & b_{3n} \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0... & 0 & b_{nn} \end{pmatrix}.$$

Тогда алгоритм метода Зейделя можно переписать в виде

$$\overline{x}^k = H\overline{x}^k + F\overline{x}^{k-1} + \overline{c}, \qquad k = 1,2,.....$$

Или

$$(E-H)\overline{x}^k = F\overline{x}^{k-1} + \overline{c}, \qquad k = 1, 2, \ldots .$$

Поскольку матрица (E – H) не выроождена, то последнее выражение можно записать как

$$\overline{x}^k = (E-H)^{-1} F\overline{x}^{k-1} + (E-H)^{-1}\overline{c}, \qquad k = 1, 2, \ldots \tag{3.6}$$

Таким образом, метод Зейделя эквивалентен методу простых итераций для системы линейных уравнений

$$\overline{x} = (E-H)^{-1} F\overline{x} + (E-H)^{-1}\overline{c},$$

которая, в свою очередь, равносильна исходной системе (3.2). Использование итерационной последовательности (3.6) более трудоемко по сравнению с классической последовательностью (3.5). Однако представление метода Зейделя в форме (3.6) дает возможность выяснить условия сходимости этого метода.

Теорема 3. Для того чтобы метод Зейделя сходился при любом начальном приближении $\overline{x}^0$, необходимо и достаточно, чтобы все корни уравнения

$$| F + \lambda H - \lambda E | = 0$$

были по абсолютной величине меньше единицы.

Доказательство. В силу теоремы 1 для сходимости последовательности (3.6), а значит и метода Зейделя необходимо и достаточно, чтобы все собственные значения матрицы $(E-H)^{-1}F$, то есть корни уравнения

$$| (E-H)^{-1}F - \lambda E | = 0$$

были по модулю меньше единицы. Даже вычисление коэффициентов этого уравнения представляет собой трудную задачу. Поэтому найдем более простое уравнение, корни которого совпадают с корнями данного уравнения. Действительно, поскольку определитель $| E - H |$ равен единице, то

$$| (E-H)^{-1}F - \lambda E | = | (E-H)^{-1}(E-H)[(E-H)^{-1}F - \lambda E] | =$$
$$= | (E-H)^{-1} || F - (E-H)\lambda E | = | F + \lambda H - \lambda E |.$$

И так сходимость метода Зейделя сводится к определению абсолютной величины корней уравнения $| F + \lambda H - \lambda E | = 0$.

Уже непосредственное сравнение этого уравнения с характеристическим уравнением $|B - \lambda E| = 0$ матрицы показывает, что области сходимости метода Зейделя и метода простых итераций, вообще говоря, должны быть различны. Действительно, для случая матрицы

$$B = \begin{pmatrix} 2,5 & 3 \\ 2 & -2,5 \end{pmatrix}$$

уравнение

$$|B - \lambda E| = \lambda^2 - 0,25 = 0$$

имеет корни $\lambda_1= -0,5$, $\lambda_2= 0,5$, следовательно, метод простых итераций сходится. Метод Зейделя для той же матрицы B сходиться не будет, так как у уравнения

$$| F + \lambda H - \lambda E |= \lambda^2 +6 \lambda -6,25=0$$

один из корней по модулю больше единицы.

Обратно в случае матрицы

$$B = \begin{pmatrix} 4,2 & -2 \\ 2 & -0,1 \end{pmatrix}$$

сходится метод Зейделя ($\lambda_1= -0,6$, $\lambda_2= 0,7$), а метод простых итераций расходится.

Теорема 3 неудобна для практического применения. По аналогии с методом простых итераций можно построить достаточные условия сходимости метода Зейделя. В частности, из теоремы 2 и представления итерационного процесса метода Зейделя в форме (3.6) следует, что для сходимости метода Зейделя достаточно, чтобы $\|(E-H)^{-1}F\|$ была меньше единицы. Однако проверка данного условия тоже достаточно затруднительна.

Получим более простые достаточные условия сходимости метода Зейделя, формулируемые непосредственно через элементы матрицы B.

Лемма 4. Если диагональные элементы матрицы C доминируют по строкам или по столбцам, т.е. если

$$\sum_{j=1,\, j\neq i}^{n} |c_{ij}| < |c_{ii}| \quad (i = 1,\dots,n)$$

или

$$\sum_{i=1,\, i\neq j}^{n} |c_{ij}| < |c_{jj}| \quad (j = 1,\dots,n),$$

то определитель матрицы C отличен от нуля.

Доказательство. Докажем лемму для случая доминирования диагональных элементов пол строкам (случай доминирования по столбцам рассматривается совершенно аналогично). Для доказательства утверждения достаточно показать, что однородная линейная система

$$C\overline{x} = \overline{0}$$

имеет только нулевое решение. Предположим противное, т.е. допустим, что система имеет отличное от нулевого решение $\overline{x}^*$. Среди координат вектора $\overline{x}^*$ выберем максимальную по модулю x_i^*. Положим $\overline{x} = \overline{x}^*$ в системе $C\overline{x} = \overline{0}$ и рассмотрим значение левой части i-го уравнения однородной системы:

$$| c_{i1}x^*_1 + c_{i2}x^*_2 + \dots + c_{ii}x^*_i + \dots + c_{i1}x^*_1 + \dots c_{in}x^*_n | \geq$$

$$\geq |c_{ii}||x^*_i| - \sum_{j=1,\, j\neq i}^{n} |c_{ij}||x^*_j| \geq |x_i^*|(|c_{ii}| - \sum_{j=1,\, j\neq i}^{n} |c_{ij}|) > 0,$$

так как $|x^*_i| > 0$ и $\sum_{j=1, j\neq i}^{n} |c_{ij}| < |c_{ii}|$.

Полученное противоречие доказывает справедливость утверждения леммы.

Теорема 4. Для того чтобы метод Зейделя сходился, достаточно выполнения одного из следующих условий:

1) $\max_{1\leq i\leq n} \sum_{j=1}^{n} |b_{ij}| < 1$,

2) $\max_{1\leq j\leq n} \sum_{i=1}^{n} |b_{ij}| < 1$.

Доказательство. Пусть выполнено первое условие. В силу теоремы 3 достаточно показать, что в этом случае любое число λ^* такое, что $|\lambda^*| \geq 1$, не может быть корнем уравнения $|F+\lambda H-\lambda E| = 0$. Действительно, рассматривая сумму абсолютных величин недиагональных элементов любой строки определителя

$|F + \lambda H - \lambda E|$,

можно записать:

$$|\lambda^*||b_{i1}| + \ldots + |\lambda^*||b_{ii-1}|+|b_{ij+1}|+ \ldots + |b_{in}| \leq$$

$$\leq |\lambda^*| \sum_{i=1, j\neq i}^{n} |b_{ij}| = |\lambda^*|(\sum_{i=1}^{n} |b_{ij}| - |b_{ii}|) < |\lambda^*|(1 - |b_{ii}|) =$$

$$= |\lambda^*| - |\lambda^*||b_{ii}| \leq |\lambda^*| - |b_{ii}| \leq |\lambda^* - b_{ii}| = |b_{ii} - \lambda^*|.$$

Полученные неравенства

$$|\lambda^*||b_{i1}| + \ldots + |\lambda^*||b_{ii-1}|+|b_{ij+1}|+ \ldots + |b_{in}| < |b_{ii} - \lambda^*| \qquad (i = 1,\ldots,n)$$

представляют собой как раз условие доминирования диагональных элементов матрицы $F + \lambda^*H - \lambda^*E$.

Тогда по лемме 4 определитель $|F+\lambda^*H-\lambda^*E|$ отличен от нуля и, следовательно, все корни уравнения

$$|F + \lambda^* H - \lambda^*E| = 0$$

по модулю меньше единицы. Тогда в силу теоремы 3 метод Зейделя сходится.

Аналогично рассматривается случай доминирования диагональных элементов по столбцам.

Заметим, что, как и в случае метода простых итераций, при выполнении условий теоремы 4 можно получить гарантированные оценки погрешности метода Зейделя. Вообще говоря, эти оценки лучше, чем для метода простых итераций. Однако метод Зейделя не всегда оказывается лучше метода простых итераций. Он даже может расходиться при наличии сходимости метода простых итераций. Области сходимости обоих методов различны, причем очень многое зависит от способа приведения исходной системы (3.1) к виду (3.2).

Рассмотрим систему (3.1) при условии строгого доминирования диагональных элементов матрицы A. Тогда можно разделить первое уравнение на a_{11}, второе на a_{22} и т. д. и выразить соответственно неизвестные $x_1, x_{2,} \ldots$. Получим систему (3.2), в которой

$$B = \begin{pmatrix} 0 & -\dfrac{a_{12}}{a_{11}} & \ldots & -\dfrac{a_{1n}}{a_{11}} \\ -\dfrac{a_{21}}{a_{22}} & 0 & \ldots & -\dfrac{a_{2n}}{a_{22}} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ -\dfrac{a_{n1}}{a_{nn}} & \ldots & \ldots & 0 \end{pmatrix}, \qquad \bar{c} = \begin{pmatrix} \dfrac{b_1}{a_{11}} \\ \vdots \\ \dfrac{b_n}{a_{nn}} \end{pmatrix}.$$

В этом случае итерационная последовательность Зейделя имеет вид

$$\begin{cases} x_1^k = b_{11} x_2^{k-1} + \ldots + b_{1n} x_n^{k-1} + c_1 \\ x_2^k = b_{21} x_1^k + b_{23} x_3^{k-1} + \ldots + b_{2n} x_n^{k-1} + c_2 \\ \ldots \\ x_n^k = b_{n1} x_1^k + \ldots + b_{nn-1} x_{n-1}^k + c_n. \end{cases} \tag{3.7}$$

При этом из условия строгого доминирования диагональных элементов матрицы A по строкам (столбцам) следует выполнение условий теоремы 4. Таким образом, справедлива следующая теорема.

Теорема 5. Если для матрицы A в системе (3.1) выполнено условие строгого доминирования диагональных элементов по строкам или столбцам, то метод Зейделя в форме (3.7) сходится.