13. ЗАКОН РАСПРЕДЕЛЕНИЯ СУММЫ ДВУХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН.

Одна из важнейших для практики частной задачи, а именно – нахождение закона распределения суммы двух случайных величин.

Пусть имеется система СВ (X,Y) с плотностью распределения $f(x,y)$. Рассмотрим сумму СВ X и Y $Z=X+Y$ и найдем закон распределения случайной величины Z. Для этого построим линию на плоскости ХОУ линию $Z=X+Y$. Она делит плоскость на две части $Z>X+Y$ и $Z<X+Y$. Согласно определению функции распределения:

$$G(Z)=P\{(X,Y)\in D\}=\iint_{(D)} f(x,y)dxdy=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{z-x} f(x,y)dxdy=\int_{-\infty}^{+\infty}\left\{\int_{-\infty}^{z-x} f(x,y)dy\right\}dx$$

Дифференцируем это выражение по переменной Z, входящей в верхний предел внутреннего интеграла, получим

$$g(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,z-x)dx \tag{13.1}$$

Это – общая формула для определения плотности распределения суммы двух случайных величин. Т.к. задача симметрична, то :

$$g(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(z-y,y)dy\,. \tag{13.2}$$

Особое практическое значение имеет случай, когда складываемые СВ (X,Y) независимы. Тогда говорят о <u>*композиции законов распределения.*</u>

Для независимых случайных величин X и Y

$$f(x, y) = f_X(x)f_Y(y) \Rightarrow \text{(13.5) и (13.6)} \Rightarrow\Rightarrow$$

$$g(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f_x(x)f_y(z-x)dx \text{ и } g(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f_x(z-y)f_y(y)dy\,.$$

Для обозначения композиции законов применяют символическую запись: $g=f_x * f_y$.

Закон распределения вероятностей называют устойчивым, если композиция таких законов есть тот же закон (отличающийся только параметрами). Нормальный закон обладает свойством устойчивости.

КОМПОЗИЦИЯ НОРМАЛЬНЫХ ЗАКОНОВ

Рассмотрим две независимые с.в. Х и У, подчиненные нормальным законам:

$$f_1(x)=\frac{1}{\sigma_x\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-m_x)^2}{2\sigma_x^2}} \text{ и}$$

$$f_2(y)=\frac{1}{\sigma_y\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(y-m_y)^2}{2\sigma_y^2}}$$

Требуется найти композицию этих законов, т.е. найти закон распределения величины $Z=X+Y$.

Применяем общую формулу для композиции законов распределения:

$$g(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f_1(x)f_2(z-x)dx=\frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-m_x)^2}{2\sigma_x^2}-\frac{(z-x-m_y)^2}{2\sigma_y^2}}dx\,. \quad (13.3)$$

Раскрываем скобки в показателе степени подынтегральной функции и приводим подобные члены, получаем

$$g(z)=\frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-Ax^2+2Bx-C}dx\,, \quad (13.4)$$

где

$$A=\frac{1}{2}\cdot\frac{\sigma_x^2+\sigma_y^2}{\sigma_x^2\sigma_y^2},\quad B=\frac{m_x}{2\sigma_x^2\sigma_y^2}+\frac{z-m_y}{2\sigma_y^2},\quad C=\frac{m_x^2}{2\sigma_x^2\sigma_y^2}+\frac{(z-m_y)^2}{2\sigma_y^2}$$

Используя интеграл Эйлера-Пуассона: $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}dt=2\int_{0}^{+\infty} e^{-t^2}dt=\sqrt{\pi}$, получаем

$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-Ax^2+2Bx-C}dx=\sqrt{\frac{\pi}{A}}e^{-\frac{AC-B^2}{A}}$ Подставляем значения A, B, C в эту формулу и после преобразований, получаем:

$g(z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{\sigma^2{}_{x+}\sigma^2{}_y}}e^{-\frac{\left[z-(m_x+m_y)\right]^2}{2(\sigma_x^2+\sigma_y^2)}}$ - это и есть нормальный закон с центром рассеивания $m_z=m_x+m_y$ и средне квадратическим отклонением

$$\sigma_z=\sqrt{\sigma_x+\sigma_y}$$

Итак, при композиции нормальных законов получается нормальный закон, причем МО и дисперсии(или квадраты с.к.о.) суммируются.

Пример 13.1. Устройство состоит из двух блоков – основного и резервного. ри отказе основного блока автоматически включается резервный блок. Определить вероятность безотказной работы устройства в течение 10 часов, если время безотказной работы блоков случайно и распределено по показательному закону, а среднее время наработки на отказ - 10 часов.

Решение. Определим закон распределения вероятностей времени Y безотказной работы устройства

$$Y=X_1+X_2,$$

где X_1, X_2 - время безотказной работы блоков.

Велечины X_1 и X_2 независимы и имеют одинаковую плотность вероятностей:

$$f_1(x)=f_2(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, x\ge 0\\ 0, x<0\end{cases}$$

Вычислим величину λ. Для показательного закона $\lambda = 1/m_X = 0{,}1$.

Определим плотность вероятности Y по формуле (13.5):

$$g(y) = \int_0^y \lambda e^{-\lambda x_1} \cdot \lambda e^{-\lambda(y-x_1)} dx_1 = \lambda^2 y e^{-\lambda y}, y > 0.$$

Вычислим вероятность того, что $Y > 10$:

$$p(Y \geq 10) = \int_{10}^{\infty} f(y) dy = \lambda^2 \int_{10}^{\infty} y e^{-\lambda y} dy \approx 0{,}736.$$