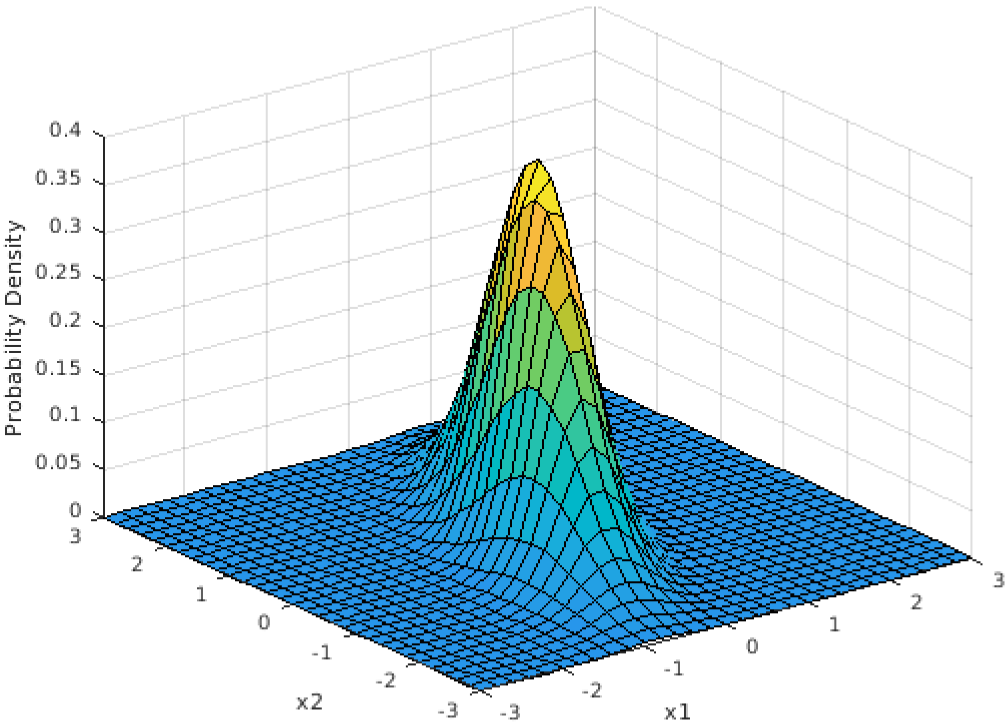
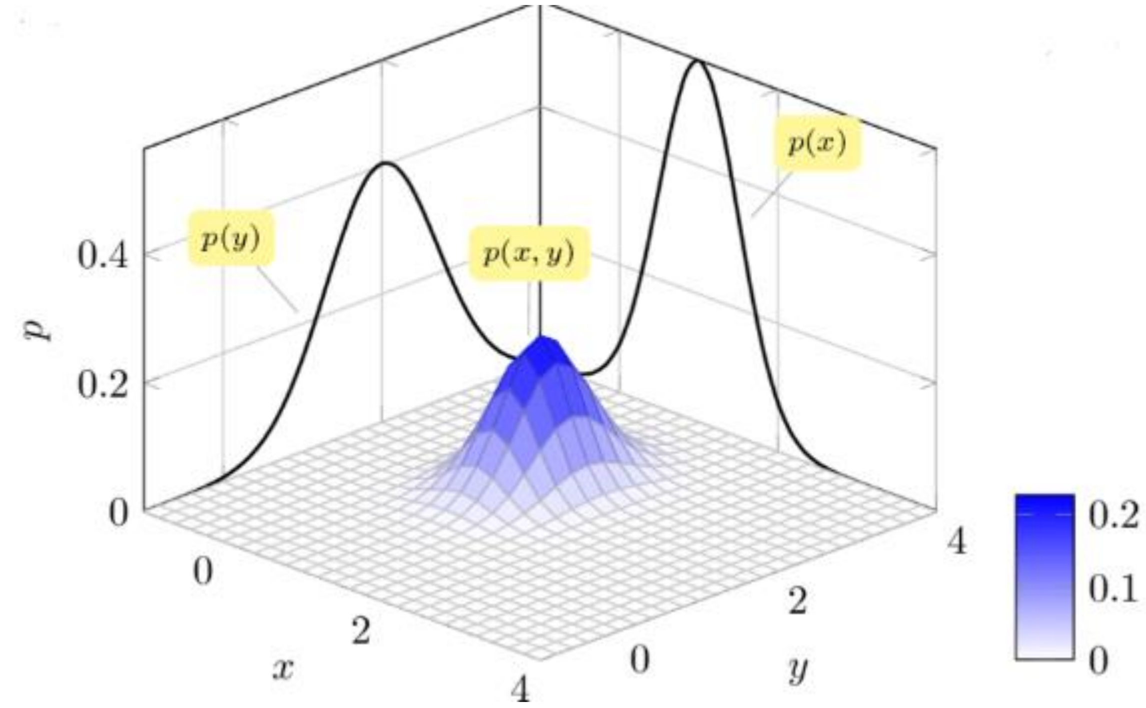
12. НОРМАЛЬНЫЙ ЗАКОН РАСПРЕДЕЛЕНИЯ НА ПЛОСКОСТИ

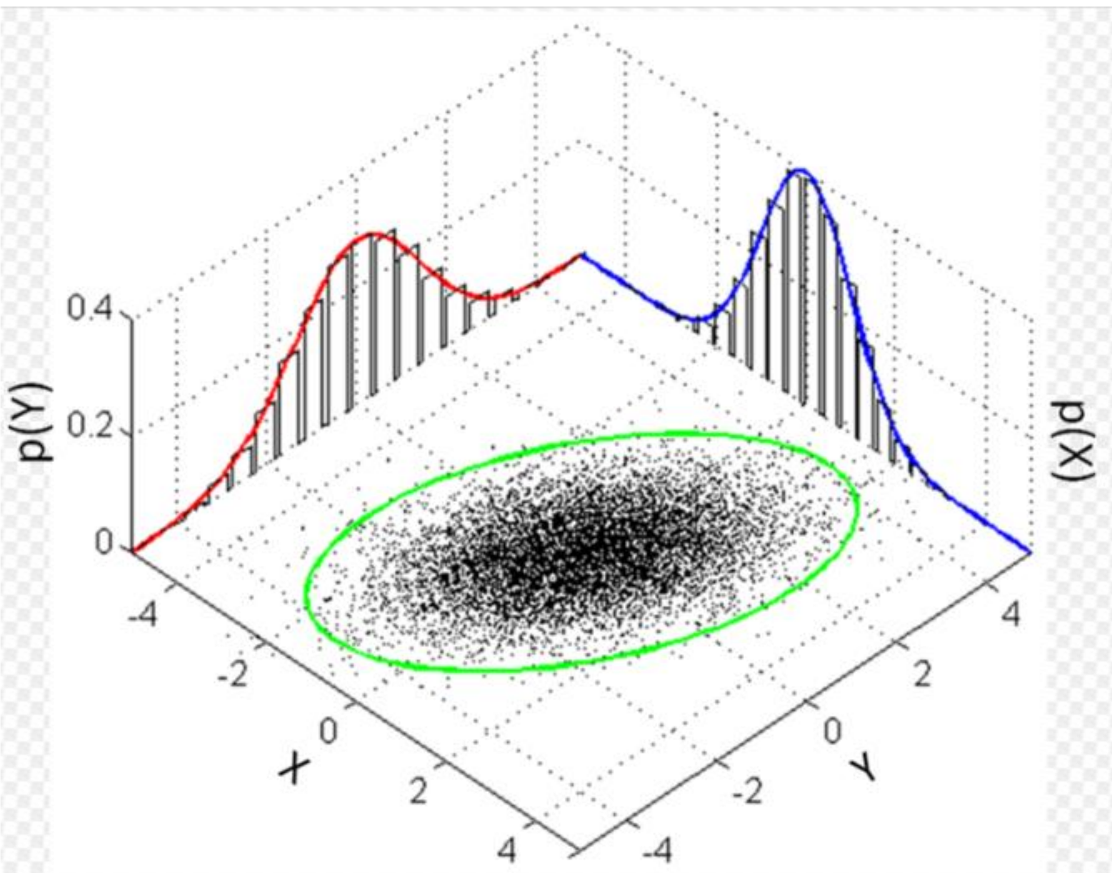
Непрерывная двумерная случайная величина (X,Y) имеет нормальное распределение, если ее совместная плотность вероятности имеет вид

$$f(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y\sqrt{1-r_{xy}^2}}e^{-\frac{1}{2(1-r_{xy}^2)}\left[\frac{(x-m_x)^2}{\sigma_x^2}-\frac{2r_{xy}(x-m_x)(y-m_y)}{\sigma_x\sigma_y}+\frac{(y-m_y)^2}{\sigma_y^2}\right]}, \qquad (12.1)$$

m_x – математическое ожидание случайной величины X.
m_y – математическое ожидание случайной величины Y.
σ_x – средне квадратичное отклонение СВ X.
σ_y – средне квадратичное отклонение СВY.
r_{xy} -- коэффициент корреляции.







Условные законы распределения СВ X и Y также являются нормальными:

$$f_1(x/y) = \frac{1}{\sigma_x\sqrt{2\pi(1-r_{xy}^2)}} e^{-\frac{1}{2(1-r_{xy}^2)}\left[\frac{(x-m_x)^2}{\sigma_x^2}-\frac{r_{xy}(y-m_y)}{\sigma_y}\right]^2}; \qquad (12.2)$$

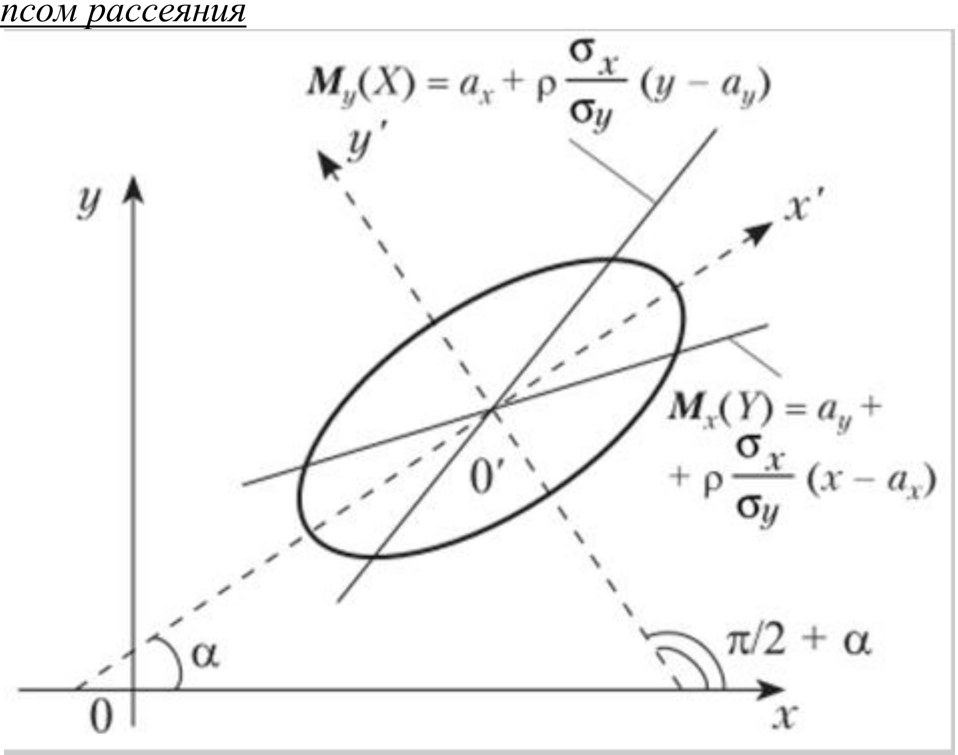
$$f(y/x)=\frac{1}{\sigma_y\sqrt{2\pi(1-r_{xy}^2)}}e^{-\frac{1}{2(1-r_{xy}^2)}\left[\frac{(y-m_y)}{\sigma_y^2}-\frac{r_{xy}(x-m_x)}{\sigma_x}\right]^2}.$$

Условные числовые характеристики имеют вид:

$$m[x/y]=m_x+r_{xy}\sigma_x(y-m_y)/\sigma_y;\quad D[x/y]=\sigma_x^2(1-r_{xy}^2);$$
$$m[y/x]=m_y+r_{xy}\sigma_y(x-m_x)/\sigma_x;\quad D[y/x]=\sigma_y^2(1-r_{xy}^2). \qquad (12.3)$$

Для системы нормально распределенных случайных величин линии регрессии m[x/y] и m[y/x] представляют собой *прямые линии*, т.е. регрессия *линейна*.

Сечение поверхности нормального распределения плоскостью, параллельной плоскости 0xy представляет собой эллипс, который называется *эллипсом рассеяния*



Центр эллипса находится в точке (m_x,m_y), а оси образуют углы с осью 0x, которые можно определить из соотношения:

$$tg(2\alpha)=\frac{2r_{xy}\sigma_x\sigma_y}{\sigma_x^2-\sigma_y^2}$$

Для двумерной нормально распределенной с.в. – если составляющие некоррелированы, то они и независимы, т.е. $r_{xy}=o\Rightarrow$

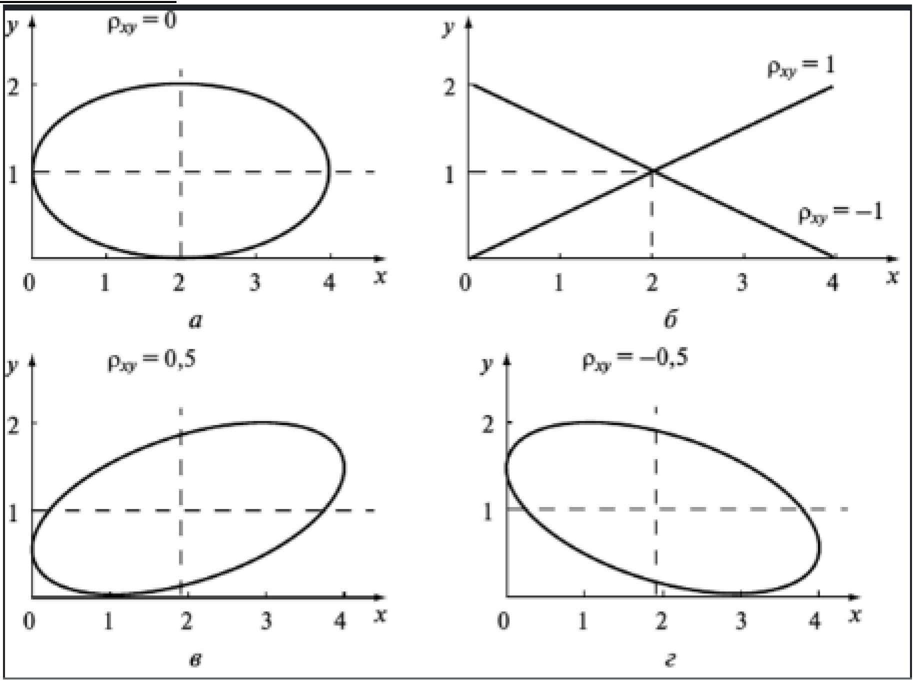
$$f(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y}e^{-\frac{1}{2}\left[\frac{(x-m_x)^2}{\sigma_x^2}+\frac{(y-m_y)^2}{\sigma_y^2}\right]}=$$

$$=\frac{1}{\sigma_x\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-m_x)^2}{2\sigma_x^2}}\cdot\frac{1}{\sigma_y\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(y-m_y)^2}{2\sigma_y^2}}=f_1(x)f_2(y)$$

В этом случае оси симметрии эллипса параллельны осям координат.

Если $\sigma_x=\sigma_y$, то эллипс рассеивания превращается в круг с центром в точке (m_x, m_y).

Если $|\, r_{xy}|=1$, то совместная плотность в виде соотношения (12.1) не существует. В этом случае распределение сосредоточено на прямой и является *выро<u>жденным</u>.*



Случайная величина $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ называется распределенной по n-мерному нормальному закону, если ее совместная плотность имеет вид:

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \frac{1}{\left((2\pi)^{n/2}\sqrt{|K|}\right)} e^{-\frac{1}{2}\sum_1^n \sum_1^n K_{ij}^{-1}(x_i - m_i)(x_j - m_j)}$$

Где m_x – математическое ожидание одномерной составляющей x_i

$|K|$ -- определитель невырожденной ковариационной матрицы

Ковариационная матрица и ее определитель, называемый обобщенной дисперсией n-мерной случайной величины, являются аналогом дисперсии одномерной случайной величины и характеризуют степень разброса как по каждой составляющей, так и в целом по случайной величине.

$$K = \begin{pmatrix} K_{11} & K_{12} & \cdots & K_{1n} \\ K_{21} & K_{22} & \cdots & K_{2n} \\ - & - & - & - \\ K_{n1} & K_{n2} & \cdots & K_{nn} \end{pmatrix},$$

Ковариационная матрица и ее определитель, называемый обобщенной дисперсией n-мерной случайной величины, являются аналогом дисперсии одномерной случайной величины и характеризуют степень разброса как по каждой составляющей, так и в целом по случайной величине.

В качестве характеристики разброса значений случайной величины используется след ковариационной матрицы, т.е. сумма ее диагональных коэффициентов.