

## 4. ПРОБЛЕМА СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ

Вычисление собственных значений и векторов матриц имеет исключительно важное значение для решения широкого круга задач. При этом часто требуется получение всех собственных значений и отвечающих им собственных векторов. Такую задачу принято называть *полной проблемой собственных значений*. В других случаях требуется знание лишь максимальных или минимальных по абсолютной величине собственных значений. Иногда требуется найти два самых больших по абсолютной величине собственных значений или собственные значения, ближайшие к некоторому заданному числу. Такие задачи называют *частичными проблемами собственных значений*.

Проблема собственных значений достаточно проста в теоретическом плане. Из линейной алгебры известно, что собственные значения матрицы  $A$  являются корнями  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  характеристического уравнения

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0. \quad (4.1)$$

Данный определитель является многочленом  $(-1)^n P_n(\lambda)$  степени  $n$  от  $\lambda$ , где  $P_n(\lambda) = \lambda^n + p_1 \lambda^{n-1} + \dots + p_n$ .

Собственные векторы  $\bar{x}$ , отвечающие собственному значению  $\lambda$ , представляют собой ненулевые решения системы

$$A\bar{x} = \lambda\bar{x}. \quad (4.2)$$

Таким образом, раскрывая определитель  $|A - \lambda E|$  и решая характеристическое уравнение (1), можно найти все собственные значения. Подставляя их последовательно в систему (4.2), находим собственные векторы, отвечающие данным собственным значениям.

Следует отметить, что при раскрытии определителя  $|A - \lambda E|$  возникают значительные вычислительные трудности. Поэтому применяются различные методы, позволяющие с помощью конечного числа преобразований привести матрицу  $A$  к матрице более простого вида, для которой коэффициенты характеристического уравнения легко вычисляются. При этом, как правило, получаются достаточно простые соотношения и для нахождения собственных векторов.

Применяемые методы решения проблемы собственных значений делятся на *прямые и итерационные*. Прямые методы позволяют найти коэффициенты характеристического уравнения и затем вычислить корни этого уравнения. Прямые методы отличаются простотой и высоким быстродействием. В то же время их недостатком является чувствительность к ошибкам округления результатов промежуточных вычислений в случае высокой размерности матриц. В итерационных

методах коэффициенты характеристического уравнения не вычисляются, но строятся итерационные последовательности для нахождения собственных значений. Итерационные методы более трудоемки, однако менее чувствительны к ошибкам округлений и более надежны.

#### 4.1. Решение частичной проблемы собственных значений

Рассмотрим для простоты случай, когда все собственные значения матрицы  $A$  действительны (это заведомо будет, в частности, если матрица  $A$  симметрическая). Найдем максимальное по абсолютной величине собственное значение. Для простоты будем предполагать, что

$$|\lambda_1| > |\lambda_2| \geq \dots \geq |\lambda_n|$$

и, что существует базис из собственных векторов  $\bar{u}^1, \dots, \bar{u}^n$ .

Выберем произвольный вектор  $\bar{x}^0$  такой, что

$$\bar{x}^0 = c_1 \bar{u}^1 + \dots + c_n \bar{u}^n,$$

и построим последовательность  $\bar{x}^{k+1} = A\bar{x}^k$ ,  $k = 0, 1, \dots$ .

Тогда

$$\bar{x}^k = \sum_{i=1}^n c_i A^k \bar{u}^i = \sum_{i=1}^n c_i \lambda_i^k \bar{u}^i.$$

Отсюда следует, что

$$\bar{x}^k = c_1 \lambda_1^k \bar{u}^1 + O(\lambda_2^k),$$

$$(\bar{x}^k, \bar{x}^k) = (c_1 \lambda_1^k \bar{u}^1 + O(\lambda_2^k), c_1 \lambda_1^k \bar{u}^1 + O(\lambda_2^k)) = c_1^2 \lambda_1^{2k} + O(\lambda_1^k \lambda_2^k),$$

$$(\bar{x}^{k+1}, \bar{x}^k) = (c_1 \lambda_1^{k+1} \bar{u}^1 + O(\lambda_2^{k+1}), c_1 \lambda_1^k \bar{u}^1 + O(\lambda_2^k)) = \lambda_1 c_1^2 \lambda_1^{2k} + O(\lambda_1^k \lambda_2^k).$$

Положим

$$\lambda_1^{(k)} = (\bar{x}^{k+1}, \bar{x}^k) / (\bar{x}^k, \bar{x}^k).$$

Тогда из последних соотношений получаем (при условии, что  $c_1$  отлично от нуля):

$$\lambda_1^{(k)} = \frac{\lambda_1 c_1^2 \lambda_1^{2k} + O(\lambda_1^k \lambda_2^k)}{c_1^2 \lambda_1^{2k} + O(\lambda_1^k \lambda_2^k)} = \lambda_1 + O\left(\frac{\lambda_2^k}{\lambda_1^k}\right). \quad (4.3)$$

Из (4.3) непосредственно следует, что  $\lambda_1^{(k)} \rightarrow \lambda_1$  при  $k \rightarrow \infty$ . Кроме того,

$$\frac{\bar{x}^k}{P\bar{x}^k P} = \frac{c_1 \lambda_1^k \bar{u}^1 + c_2 \lambda_2^k \bar{u}^2 + \dots + c_n \lambda_n^k \bar{u}^n}{|c_1| |\lambda_1|^k + O(|\lambda_2|^k)} = \frac{c_1 \lambda_1^k \bar{u}^1}{|c_1| |\lambda_1|^k} + O\left(\frac{|\lambda_2|^k}{|\lambda_1|^k}\right),$$

то есть,

$$\frac{\bar{x}^k}{P\bar{x}^k P} \operatorname{sgn}(c_1 \lambda_1^k) \rightarrow \bar{u}^1 \text{ при } k \rightarrow \infty.$$

Отметим, что требование, чтобы  $c_1$  было отлично от нуля, не является жестким в виду произвольного выбора начального приближения  $\bar{x}^0$ .

Кроме того, если даже этого и не было вначале, то случайная ошибка сделает слагаемое, содержащее собственный вектор  $\bar{u}_1$ , ненулевым позже и, в конце концов, оно станет доминирующим. Мысль, что, зная наибольшее собственное значение и соответствующий собственный вектор, мы можем вычитать его на каждом шаге, и, тем самым, дать возможность проявиться второму по модулю собственному значению, очевидна. Это действительно можно сделать, но отнюдь не в точности так, как хотелось бы. На самом деле, можно найти несколько наибольших по модулю собственных значений, затем вычислительный процесс постепенно превратится в шум из-за нарастания погрешности, так что каждое следующее собственное значение будет определяться все с меньшей точностью.

Чтобы тем же методом найти наименьшее (в алгебраическом смысле) собственное значение, достаточно следующего простого наблюдения. Пусть  $\bar{x}$  — собственный вектор, т. е.  $A\bar{x} = \lambda\bar{x}$ . Тогда

$$(A - pE)\bar{x} = (\lambda - p)\bar{x}.$$

Если уже известна примерная величина наибольшего собственного значения, то можно взять  $p$  равным этой величине, и самое маленькое собственное значение станет самым большим (по модулю).

## 4.2. Метод Данилевского

Метод Данилевского относится к прямым методам и является достаточно простым и экономичным. Известно, что матрицы  $S^{-1}AS$ , полученные преобразованием подобия из  $A$ , имеют тот же характеристический многочлен, что и  $A$ . Известно так же, что любая матрица приводима преобразованием подобия к так называемой канонической форме Фробениуса

$$F = \begin{pmatrix} -p_1 & -p_2 & \dots & -p_n \\ 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

в первой строке которой стоят коэффициенты характеристического многочлена, взятые с обратным знаком. Таким образом, основная задача сводится к нахождению матрицы  $S$  такой, что  $F = S^{-1}AS$ .

Предположим, что элемент  $a_{nn-1}$  матрицы  $A$  отличен от нуля. Разделим  $(n-1)$ -й столбец этой матрицы на  $a_{nn-1}$  и вычтем его из  $i$ -го столбца, умноженного на  $a_{ni}$  (для всех  $i=1,2,\dots,n$ ). Тогда последняя строка примет такой же вид как в матрице  $F$ . Непосредственно

проверяется, что проделанная операция равносильна умножению  $A$  справа на матрицу

$$M_{n-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -\frac{a_{n1}}{a_{nn-1}} & \dots & -\frac{a_{nn-2}}{a_{nn-1}} & \frac{1}{a_{nn-1}} & -\frac{a_{nn}}{a_{nn-1}} \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Непосредственно проверяется также, что  $M_{n-1}$  не вырождена и, следовательно, существует

$$M_{n-1}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & \dots & \dots & a_{nn} \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Очевидно, что умножение  $AM_{n-1}$  слева на матрицу  $M_{n-1}^{-1}$  не меняет последней строки матрицы  $AM_{n-1}$ . Таким образом,

$$M_{n-1}^{-1}AM_{n-1} = A^{(1)} = \begin{pmatrix} a_{11}^{(1)} & \dots & a_{1n}^{(1)} \\ a_{21}^{(1)} & \dots & a_{2n}^{(1)} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n-11}^{(1)} & \dots & a_{n-1n-1}^{(1)} & a_{n-1n}^{(1)} \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Заметим, что матрицы  $M_{n-1}$  и  $M_{n-1}^{-1}$ , умножением на которые мы переходим от матрицы  $A$  к матрице  $A^{(1)}$ , выписываются непосредственно по виду матрицы  $A$ . Предположим далее, что элемент  $a_{n-1n-2}^{(1)}$  тоже отличен от нуля. Делаем второй шаг, полностью аналогичный предыдущему, и приводим вторую снизу строку матрицы к виду необходимому для формы Фробениуса (сохраняя последнюю строку без изменений). Получаем

$$M_{n-2}^{-1} M_{n-1}^{-1} AM_{n-1} M_{n-2} = M_{n-2}^{-1} A^{(1)} M_{n-2} =$$

$$= A^{(2)} = \begin{pmatrix} a_{11}^{(2)} & \dots & a_{1n}^{(2)} \\ a_{21}^{(2)} & \dots & a_{2n}^{(2)} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n-21}^{(2)} & \dots & a_{n-2n-1}^{(2)} & a_{n-2n}^{(2)} \\ 0 & \dots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

где

$$M_{n-2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -\frac{a_{n-11}^{(1)}}{a_{n-1n-2}^{(1)}} & \dots & -\frac{a_{n-1n-3}^{(1)}}{a_{n-1n-2}^{(1)}} & \frac{1}{a_{n-1n-2}^{(1)}} & -\frac{a_{n-1n-3}^{(1)}}{a_{n-1n-2}^{(1)}} & -\frac{a_{n-1n}^{(1)}}{a_{n-1n-2}^{(1)}} \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$M_{n-2}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n-11}^{(1)} & \dots & a_{n-1n-1}^{(1)} & a_{n-1n}^{(1)} \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Правило построения матриц  $M_{n-2}$  и  $M_{n-2}^{-1}$  по виду матрицы  $A^{(1)}$ , как видим, полностью сохраняется. Оно сохраняется и на следующих шагах метода. Таким образом, если имеет место так называемый регулярный случай, когда

$$a_{nn-1} \neq 0, a_{n-1n-2}^{(1)} \neq 0, a_{n-2n-3}^{(2)} \neq 0, \dots, a_{21}^{(n-2)} \neq 0,$$

то после  $(n-1)$  шагов метода Данилевского получим следующий результат

$$A^{(n-1)} = M_{n-2}^{-1} \dots M_{n-1}^{-1} A M_{n-1} \dots M_1 =$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11}^{(n-1)} & a_{12}^{(n-1)} & \dots & a_{1n}^{(n-1)} \\ 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -p_1 & -p_2 & \dots & -p_n \\ 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = F = S^{-1} A S.$$

В таком случае мы можем непосредственно выписать характеристическое уравнение

$$\lambda^n + p_1 \lambda^{n-1} + \dots + p_n = 0$$

и, решая его, найти собственные значения  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ .

Для нахождения собственных векторов в регулярном случае нет необходимости решать систему (4.2). Как уже говорилось выше, матрицы  $F$  и  $A$  имеют одни и те же собственные значения. Собственные векторы, отвечающие одному и тому же собственному значению, вообще говоря, будут разными. Однако они связаны между собой преобразованием подобия. Так, если  $\bar{u}$  собственный вектор матрицы  $F$ , отвечающий собственному значению  $\lambda$ , то вектор  $S\bar{u}$  будет

собственным вектором матрицы  $A$ , отвечающим тому же собственному значению.

Действительно, поскольку  $F\bar{y} = \lambda \bar{y}$  и  $F = S^{-1}AS$ , то  $S^{-1}AS\bar{y} = \lambda \bar{y}$ . Умножая это равенство слева на матрицу  $S$ , получим  $AS\bar{y} = \lambda S\bar{y}$ . Последнее означает, что  $S\bar{y}$  будет собственным вектором матрицы  $A$ . Таким образом, собственные векторы матрицы  $A$  находятся пересчетом собственных векторов матрицы Фробениуса. Собственные же векторы  $\bar{y}$  матрицы Фробениуса определяются из системы

$$\begin{pmatrix} -p_1 & -p_2 & \dots & -p_n \\ 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ y_n \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ y_n \end{pmatrix}.$$

Покоординатная запись этой системы имеет вид

$$\begin{aligned} -p_1 y_1 - p_2 y_2 - \dots - p_n y_n &= \lambda y_1, \\ y_1 &= \lambda y_2, \\ y_2 &= \lambda y_3, \\ \dots & \\ y_{n-1} &= \lambda y_n. \end{aligned}$$

Поскольку собственный вектор определяется с точностью до постоянного множителя, можно принять  $y_n = 1$  и вычислить остальные координаты собственного вектора:

$$y_n = 1, \quad y_{n-1} = \lambda, \dots, y_1 = \lambda^{n-1}.$$

Равенство же

$$-p_1 y_1 - p_2 y_2 - \dots - p_n y_n = \lambda y_1$$

принимает при этом тривиальный вид

$$\lambda^n + p_1 \lambda^{n-1} + \dots + p_n = 0$$

и используется для контроля вычислений.

Зная матрицу  $S$ , не трудно теперь найти собственные векторы матрицы  $A$ .

Отдельно рассмотрим нерегулярный случай метода Данилевского. Пусть выполнено  $(n-k)$  шагов метода и оказалось, что в матрице  $A^{(n-k)}$  элемент  $a_{kk-1}^{(n-k)} = 0$ . Тогда, если левее этого элемента в строке есть отличные от нуля элементы (например в столбце с номером  $j$ ), то поменяем местами  $j$ -й и  $(k-1)$ -й столбцы и продолжим процесс. Заметим, что операция замены столбцов местами равносильна умножению матрицы  $A^{(n-k)}$  слева и справа на матрицу  $T$ , которая

строиться из единичной матрицы  $E$  заменой четырех ее элементов. Именно:

$$t_{jj} = t_{k-1, k-1} = 0, \quad t_{jk-1} = t_{k-1, j} = 1,$$

остальные элементы матрицы  $T$  совпадают с соответствующими элементами матрицы  $E$ . Таким образом, в цепочке преобразований матрицы на данном шаге добавится дополнительная операция

$$T A^{(n-k)} T,$$

после которой процесс пойдет, как и раньше. При этом важно, что дополнительное преобразование  $TA^{(n-k)}T$  является преобразованием подобия. Действительно, поскольку двойная перестановка столбцов дает исходную матрицу, то  $TT = T^2 = E$ , т.е.  $T^{-1} = T$ .

Если левее элемента  $a_{kk-1}^{(n-k)} = 0$  в строке матрицы  $A^{(n-k)}$  не оказалось ненулевых элементов, то матрица  $A^{(n-k)}$  очевидно имеет вид

$$A^{(n-k)} = \begin{pmatrix} B^{(n-k)} & C^{(n-k)} \\ 0 & F^{(n-k)} \end{pmatrix},$$

где  $B^{(n-k)} = \begin{pmatrix} a_{11}^{(n-k)} & \dots & a_{1, k-1}^{(n-k)} \\ a_{21}^{(n-k)} & \dots & a_{2, k-1}^{(n-k)} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{k-1, 1}^{(n-k)} & \dots & a_{k-1, k-1}^{(n-k)} \end{pmatrix},$

$$F^{(n-k)} = \begin{pmatrix} a_{kk}^{(n-k)} & \dots & a_{kn}^{(n-k)} \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$|A^{(n-k)} - \lambda E| = |B^{(n-k)} - \lambda E_{k-1}| |F^{(n-k)} - \lambda E_{n-k+1}|$$

и, следовательно, поскольку  $F^{(n-k)}$  является матрицей Фробениуса, ее характеристический многочлен можно выписать непосредственно, а к матрице  $B^{(n-k)}$  применить снова метод Данилевского. Таким образом, вычислительный процесс даже упрощается.

Подсчетом необходимых арифметических операций можно убедиться, что метод Данилевского является одним из самых экономичных методов решения полной проблемы собственных значений. Однако этот метод очень чувствителен к ошибкам в результатах промежуточных вычислений.