

Лабораторная работа 3 «Начальная фаза симплекс-метода»

Пусть имеется задача линейного программирования в канонической форме

$$\begin{aligned} c^T x &\rightarrow \max \\ Ax &= b \\ x &\geq 0, \end{aligned} \quad (1)$$

где $c \in \mathbb{R}^n$, $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n$ — вектор переменных, $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ — матрица, в которой m строк и n столбцов, $b = (b_1, b_2, \dots, b_m)^T \in \mathbb{R}^m$. Требуется определить совместна ли задача (1) и, в случае положительного ответа, найти какой-нибудь базисный допустимый план (x, B) .

НАЧАЛЬНАЯ ФАЗА СИМПЛЕКС-МЕТОДА

Вход: $c \in \mathbb{R}^n$, $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ и $b \in \mathbb{R}^m$ — параметры задачи (1)

Выход: (x, B) — базисный допустимый план задачи (1) или сообщение о том, что задача (1) не имеет допустимых планов.

ШАГ 1. Необходимо преобразовать задачу (1) таким образом, чтобы вектор правых частей b был неотрицательным. Для этого умножим на -1 все ограничения задачи, правая часть которых отрицательна. А именно, для каждого индекса $i \in \{1, 2, \dots, m\}$ выполним следующую операцию: если $b_i < 0$, то умножим на -1 компоненту b_i и i -ю строку матрицы A ;

ШАГ 2. Составим вспомогательную задачу линейного программирования

$$\begin{aligned} \tilde{c}^T \tilde{x} &\rightarrow \max \\ \tilde{A} \tilde{x} &= b \\ \tilde{x} &\geq 0, \end{aligned} \quad (2)$$

где вектор коэффициентов при переменных в целевой функции имеет вид

$$\tilde{c}^T = (\underbrace{0, 0, \dots, 0}_n, \underbrace{-1, -1, \dots, -1}_m) \in \mathbb{R}^{n+m},$$

вектор переменных — $\tilde{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1}, x_{n+2}, \dots, x_{n+m})^T \in \mathbb{R}^{n+m}$ (переменные $x_{n+1}, x_{n+2}, \dots, x_{n+m}$ называются *искусственными*), матрица \tilde{A} получается из матрицы A присоединением к ней справа единичной матрицы порядка m .

ШАГ 3. Построим начальный базисный допустимый план (\tilde{x}, B) задачи (2)

$$\begin{aligned} \tilde{x} &= (0 \quad 0 \quad \dots \quad 0 \quad b_1 \quad b_2 \quad \dots \quad b_m) \in \mathbb{R}^{n+m}, \\ B &= \{j_1 = n+1, j_2 = n+2, \dots, j_m = n+m\}. \end{aligned}$$

ШАГ 4. Решим вспомогательную задачу (2) основной фазой симплекс-метода и получим оптимальный план

$$\tilde{x} = (\tilde{x}_1 \quad \tilde{x}_2 \quad \dots \quad \tilde{x}_n \quad \tilde{x}_{n+1} \quad \tilde{x}_{n+2} \quad \dots \quad \tilde{x}_{n+m})^T$$

и соответствующее ему множество базисных индексов B .

ШАГ 5. Проверим условия совместности: если $\tilde{x}_{n+1} = \tilde{x}_{n+2} = \dots = \tilde{x}_{n+m} = 0$, то задача (1) совместна; в противном случае, задача (1) не совместна и метод завершает свою работу.

ШАГ 6. Формируем допустимый план $x = (\tilde{x}_1 \ \tilde{x}_2 \ \dots \ \tilde{x}_n)$ задачи (1). Для него необходимо подобрать множество базисных индексов. С этой целью скорректируем множество B следующим образом.

ШАГ 7. Если $B \subseteq \{1, 2, \dots, n\}$, то метод завершает свою работу и возвращает базисный допустимый план (x, B) .

ШАГ 8. Выберем в наборе B максимальный индекс искусственной переменной

$$j_k = n + i.$$

ШАГ 9. Для каждого индекса $j \in \{1, 2, \dots, n\} \setminus B$ вычислим вектор

$$\ell(j) = \tilde{A}_B^{-1} \tilde{A}_j,$$

где \tilde{A}_j — это j -ый столбец матрицы \tilde{A} .

ШАГ 8. Если найдется индекс $j \in \{1, 2, \dots, n\} \setminus B$ такой, что $(\ell(j))_k \neq 0$, то заменим в наборе B значение j_k , равное $n + i$, на j .

ШАГ 9. Если для любого индекса $j \in \{1, 2, \dots, n\} \setminus B$ выполняется $(\ell(j))_k = 0$, то i -е основное ограничение задачи (1) линейно выражается через остальные и его необходимо удалить. В этом случае удалим i -ую строку из матрицы A и i -ую компоненту из вектора b . Удалим из B индекс $j_k = n + i$. Кроме этого, удалим i -ую строку из матрицы \tilde{A} . Переходим на ШАГ 7.

Проиллюстрируем работу метода на примере. Рассмотрим задачу (P) линейного программирования

$$\begin{aligned} x_1 &\rightarrow \max \\ x_1 + x_2 + x_3 &= 0 \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 &= 0 \\ x_1 &\geq 0 \\ x_2 &\geq 0 \\ x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

Размеры задачи $m = 2$ и $n = 3$. Вектор коэффициентов при переменных в целевом функционале

$$c^T = (1 \ 0 \ 0).$$

Матрица коэффициентов при переменных в основных ограничениях

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Вектор правых частей

$$b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Так как $b \geq 0$, то корректировать вектор b не нужно.

Составляем вспомогательную задачу линейного программирования (2), в которой вектор переменных

$$\tilde{x}^T = (x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad x_4 \quad x_5),$$

вектор коэффициентов переменных в целевом функционале

$$\tilde{c}^T = (0 \quad 0 \quad 0 \quad -1 \quad -1),$$

матрица \tilde{A} получается из матрицы A приписыванием к ней справа единичной матрицы порядка два

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Формируем начальный базисный допустимый план (x, B) задачи (2), в котором

$$\tilde{x}^T = (0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0), B = \{j_1 = 4, j_2 = 5\}.$$

Решаем вспомогательную задачу (2) основной фазой симплекс-метода и получаем оптимальный план $\tilde{x}^T = (0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0)$ с соответствующим множеством базисных индексов $B = \{j_1 = 1, j_2 = 5\}$. В плане \tilde{x} значения искусственных переменных x_4 и x_5 равны 0. Следовательно, задача (P) совместна. Значения переменных x_1, x_2, x_3 в \tilde{x} образуют допустимый план задачи (1)

$$x^T = (0 \quad 0 \quad 0).$$

В множестве B базисных индексов выбираем максимальный индекс искусственной переменной

$$j_2 = 5 = 3 + 2.$$

Таким образом, $k = 2$ и $i = 2$. Для каждого индекса $j \in \{1, 2, 3\} \setminus B = \{2, 3\}$ найдем вектор $\ell(j)$

$$\ell(2) = \tilde{A}_B^{-1} \tilde{A}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$\ell(3) = \tilde{A}_B^{-1} \tilde{A}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Заметим, что для любого индекса $j \in \{1, 2, 3\} \setminus B$ компонента $(\ell(j))_k = 0$. Стало быть, i -ое ограничение задачи (P) линейно выражается через остальные и его необходимо удалить. Из матриц A и \tilde{A} исключим вторую строку, а из вектора b вторую компоненту. Из множества B удалим выбранный индекс искусственной переменной j_2 . Получаем множество $B = \{j_1 = 1\}$. Поскольку в B нет индексов искусственных переменных, то метод завершает свою работу.

Ответ: $x^T = (0, 0, 0)$, $B = \{j_1 = 1\}$, $A = (1, 1, 1)$ и $b = (1)$!