Метод отражений нахождения обратной матрицы

Сикерин Данила

27 сентября 2024г.

Постановка задачи

Найти обратную к матрице:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

1 Метод хранения и разделение памяти

Блочный: $A = a_{11}^{11}, \dots, a_{1m}^{11}, \dots, a_{mm}^{11}, a_{11}^{12}, \dots, a_{mm}^{1k}, a_{11}^{1,k+1}, \dots, a_{ml}^{1,k+1}, \dots, a_{ml}^{k,k+1}, a_{11}^{k+1,1}, \dots, a_{ll}^{k+1,k+1}$

Тогда матрица A имеет вид(E - единичная матрица):

$$A = \begin{pmatrix} A_{11}^{m\times m} & A_{12}^{m\times m} & \cdots & A_{1,k}^{m\times m} & A_{1,k+1}^{m\times l} & | & E_{11}^{m\times m} & 0 & \cdots & 0 \\ A_{21}^{m\times m} & A_{22}^{m\times m} & \cdots & A_{2,k}^{m\times m} & A_{2,k+1}^{m\times l} & | & 0 & E_{22}^{m\times m} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & | & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{k,1}^{m\times m} & A_{k,2}^{m\times m} & \cdots & A_{k,k}^{m\times m} & A_{k,k+1}^{m\times l} & | & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ A_{k+1,1}^{l\times m} & A_{k+1,2}^{l\times m} & \cdots & A_{k+1,k}^{l\times m} & A_{k+1,k+1}^{l\times l} & | & 0 & 0 & \cdots & E_{k+1,k+1}^{l\times l} \end{pmatrix} \tag{1}$$

Стандартные обозначения:

- n — размер матрицы;
- m — размер блока;
- k — количество блоков;
- P — количество процессов.
- $M = k//p + 1$ — количество блоков на каждый процесс.
- $H = n//P$
- $s = n(modP)$

Представим нашу матрицу в следующем виде:

$$
A=\left(\begin{array}{cccccccccc}
A_{1,1}^{m\times m} & A_{1,2}^{m\times m} & \dots & A_{1,k}^{m\times m} & A_{1,k+1}^{m\times l} & |B_{1,1}^{m\times m} & B_{1,2}^{m\times m} & \dots & B_{1,k}^{m\times m} & B_{1,k+1}^{m\times l}\\
\vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\
A_{P,1}^{m\times m} & A_{P,2}^{m\times m} & \dots & A_{P,k}^{m\times m} & A_{P,k+1}^{m\times l} & |B_{P,1}^{m\times m} & B_{P,2}^{m\times m} & \dots & B_{P,k}^{m\times m} & B_{P,k+1}^{m\times l}\\
\hline
A_{P+1,1}^{m\times m} & A_{P+1,2}^{m\times m} & \dots & A_{P+1,k}^{m\times m} & A_{P+1,k+1}^{m\times l} & |B_{P+1,1}^{m\times m} & B_{P+1,2}^{m\times m} & \dots & B_{P+1,k}^{m\times m} & B_{P+1,k+1}^{m\times l}\\
\vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\
A_{2P,1}^{m\times m} & A_{2P,2}^{m\times m} & \dots & A_{2P,k}^{m\times m} & A_{2P,k+1}^{m\times l} & |B_{2P,1}^{m\times m} & B_{2P,2}^{m\times m} & \dots & B_{2P,k}^{m\times m} & B_{2P,k+1}^{m\times l}\\
\hline
\vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\
\hline
A_{k+1-s,1}^{m\times m} & A_{k+1-s,2}^{m\times m} & \dots & A_{k+1-s,k}^{m\times m} & A_{k+1-s,k+1}^{m\times l} & |B_{k+1-s,1}^{m\times m} & B_{k+1-s,2}^{m\times m} & \dots & B_{k+1-s,k}^{m\times m} & B_{k+1-s,k+1}^{m\times l}\\
\vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\
A_{k+1,1}^{l\times m} & A_{k+1,2}^{l\times m} & \dots & A_{k+1,k}^{l\times m} & A_{k+1,k+1}^{l\times l} & |B_{k+1,1}^{l\times m} & B_{k+1,2}^{l\times m} & \dots & B_{k+1,k}^{l\times m} & B_{k+1,k+1}^{l\times l}
\end{array}\right).
$$

Для каждого процесса с номером K матрица в его памяти имеет вид(с его локальными индексами) Представим нашу матрицу в следующем виде:

$$
A=\begin{pmatrix}
A_{1,1}^{m\times m} & A_{1,2}^{m\times m} & \dots & A_{1,k}^{m\times m} & A_{1,k+1}^{m\times l} & |B_{1,1}^{m\times m} & B_{1,2}^{m\times m} & \dots & B_{1,k}^{m\times m} & B_{1,k+1}^{m\times l}\\
\vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\
A_{M,1}^{m\times m} & A_{M,2}^{m\times m} & \dots & A_{M,k}^{m\times m} & A_{M,k+1}^{m\times l} & |B_{M,1}^{m\times m} & B_{M,2}^{m\times m} & \dots & B_{M,k}^{m\times m} & B_{M,k+1}^{m\times l}
\end{pmatrix}.
$$

То есть каждому процессу отводятся свои блочные строки исходной матрицы A

Формулы глобальной и локальной нумерации

Пусть у нас есть номер блочной строки в локальной нумерации i_l в процессе с номером k. Тогда i_g глобальный блочный номер строчки.
$i_g = i_l * p + k$
Если есть глобальный номер блочной строки i_g, то она будет лежать в памяти процесса с номером $k = i_g(mod\ p)$ и будет обладать локальным номером $i_l = [i_g/p]$

2 Алгоритм

Первый шаг:

1) Каждый процесс работает с подматрицами как в последовательном случае. То есть приводит к виду:

$$
A=\left(\begin{array}{cccccccccc}
T_{1,1}^{m\times m} & A_{1,2}^{m\times m} & \dots & A_{1,k}^{m\times m} & A_{1,k+1}^{m\times l} & |B_{1,1}^{m\times m} & B_{1,2}^{m\times m} & \dots & B_{1,k}^{m\times m} & B_{1,k+1}^{m\times l}\\
\vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\
T_{p,1}^{m\times m} & A_{p,2}^{m\times m} & \dots & A_{p,k}^{m\times m} & A_{p,k+1}^{m\times l} & |B_{p,1}^{m\times m} & B_{p,2}^{m\times m} & \dots & B_{p,k}^{m\times m} & B_{p,k+1}^{m\times l}\\
\hline
O_{p+1,1}^{m\times m} & A_{p+1,2}^{m\times m} & \dots & A_{p+1,k}^{m\times m} & A_{p+1,k+1}^{m\times l} & |B_{p+1,1}^{m\times m} & B_{p+1,2}^{m\times m} & \dots & B_{p+1,k}^{m\times m} & B_{p+1,k+1}^{m\times l}\\
\vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\
O_{2p,1}^{m\times m} & A_{2p,2}^{m\times m} & \dots & A_{2p,k}^{m\times m} & A_{2p,k+1}^{m\times l} & |B_{2p,1}^{m\times m} & B_{2p,2}^{m\times m} & \dots & B_{2p,k}^{m\times m} & B_{2p,k+1}^{m\times l}\\
\hline
\vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\
\hline
O_{k+1-s,1}^{m\times m} & A_{k+1-s,2}^{m\times m} & \dots & A_{k+1-s,k}^{m\times m} & A_{k+1-s,k+1}^{m\times l} & |B_{k+1-s,1}^{m\times m} & B_{k+1-s,2}^{m\times m} & \dots & B_{k+1-s,k}^{m\times m} & B_{k+1-s,k+1}^{m\times l}\\
\vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\
O_{k+1,1}^{l\times m} & A_{k+1,2}^{l\times m} & \dots & A_{k+1,k}^{l\times m} & A_{k+1,k+1}^{l\times l} & |B_{k+1,1}^{l\times m} & B_{k+1,2}^{l\times m} & \dots & B_{k+1,k}^{l\times m} & B_{k+1,k+1}^{l\times l}
\end{array}\right).
$$

Где $T_{i,j}$ - врехне-треугольная мтарица. $O_{i,j}$ - нулевая матрица.
Т.е. в каждом процессе матрица имеет вид:

$$A = \begin{pmatrix} T_{1,1}^{m\times m} & T_{1,2}^{m\times m} & \dots & T_{1,k}^{m\times m} & T_{1,k+1}^{m\times l} & |B_{1,1}^{m\times m} & B_{1,2}^{m\times m} & \dots & B_{1,k}^{m\times m} & B_{1,k+1}^{m\times l} \\ O_{1,1}^{m\times m} & O_{1,2}^{m\times m} & \dots & O_{1,k}^{m\times m} & O_{1,k+1}^{m\times l} & |B_{1,1}^{m\times m} & B_{1,2}^{m\times m} & \dots & B_{1,k}^{m\times m} & B_{1,k+1}^{m\times l} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ O_{M,1}^{m\times m} & O_{M,2}^{m\times m} & \dots & O_{M,k}^{m\times m} & O_{M,k+1}^{m\times l} & |B_{M,1}^{m\times m} & B_{M,2}^{m\times m} & \dots & B_{M,k}^{m\times m} & B_{M,k+1}^{m\times l} \end{pmatrix}.$$

Формулы для процесса q (Все формулы указанны в локальных индексахб для написания программы MPI):

а)Берем блок $A_{1,1}^{m\times m}$ Применяем функцию Triangulize $A_{1,1}^{m\times m}$. получаем матрицу $U^{m\times m}$. Далее, применяем матрицу $U^{m\times m}$ к блокам $A_{1,j}^{m\times m}$ $j = 2,...,k$; $A_{1,k+1}^{m\times l}$; $E_{1,1}^{m\times m}$

б)Берем блок $A_{i,1}^{m\times m}$ и строчку $d^{(p_1)} = (a_{p,p};...;a_{p,m})$ $p = 1,...,m$ (р-тая строка $A_{1,1}^{m\times m}$ без $(m-p+1)$ первых элементов) $(i = 2,...,M)$. и для остатка(Если он попал в процесс q, здесь нумер глобальный) $A_{k+1,1}^{l\times m}$ получаем матрицу $U^{(l+1)\times m}$

D = ConcatBlockWithString($A_{i,1}^{m\times(m-p)}$, $d^{(p_1)}$).
(в случае остатка D = ConcatBlockWithString($A_{k+1,1}^{l\times(m-p)}$, $d^{(p_1)}$))
$A_{i,1}^{m\times(m-p)} = A_{i,1}^{m\times m}$ - без первых р - столбцов. (Для остатка $A_{k+1,1}^{l\times(m-p)} = A_{k+1,1}^{l\times m}$)
По полученному блоку находим $x^{(p)}$, обнуляющий 1-ый столбец полученной матрицы, и применяем U($x^{(p)}$) к матрице D. После p=m получаем матрицу $U_{i,1}^{(m+1)\times m}$ $(U^{(l+1)\times m})$.
$A_{i,1}^{m\times m} = 0$ $(A_{k+1,1}^{l\times m} = 0)$ занеляем весь блок
Проходимся по всем правым блокам:

$A_{i,j}^{d^{(p_j)}}$ = ConcatBlockWithVector($A_{i,j}^{m\times m}$, $d^{(p_j)}$) ($A_{i,k+1}^{d^{(p_{k+1})}}$ = ConcatBlockWithVector($A_{i,k+1}^{m\times l}$, $d^{(p_{k+1})}$))

$B_{i,j}^{d^{(p_j)}}$ = ConcatBlockWithVector($B_{i,j}^{m\times m}$, $d^{(p_j)}$) ($B_{i,k+1}^{d^{(p_{k+1})}}$ = ConcatBlockWithVector($B_{i,k+1}^{m\times l}$, $d^{(p_{k+1})}$))

$A_{i,j}^{(1)} = U_{i,1}^{(m+1)\times m} A_{i,j}^{d^{(p_j)}}$ $j = 2,...,k$; $A_{i,k+1}^{(1)} = U_{i,1}^{(m+1)\times l} A_{i,k+1}^{d^{(p_k)}}$
$B_{i,j}^{(1)} = U_{i,1}^{(m+1)\times m} B_{i,j}^{d^{(p_j)}}$ $j = 2,...,k$; $B_{i,k+1}^{(1)} = U_{i,1}^{(m+1)\times l} B_{i,k+1}^{d^{(p_k)}}$

ОБМЕН ДАННЫМИ

Далее нужно занулять главные блоки.
2.1) $P = 2^a + b$, где $a = int(log_2(p))$ (целая часть), соответственно $b = P - 2^a$.
"Берем"первые b процессов. Каждый процесс паралельно зануляет Матрицами $T_{1,1}^{m\times m}, \dots, T_{b,1}^{m\times m}$ матрицы $T_{2^a+1,1}^{m\times m}, \dots, T_{2^a+b,1}^{l\times m}$ как показано ниже.
Для процесса $q = 0, \dots, b$:

- Если номер процесса $q \le b$, то он отправляет свою главную строку:

$$\begin{pmatrix} T_{1,1}^{m\times m} & T_{1,2}^{m\times m} & \dots & T_{1,k}^{m\times m} & T_{1,k+1}^{m\times l} & |B_{1,1}^{m\times m} & B_{1,2}^{m\times m} & \dots & B_{1,k}^{m\times m} & B_{1,k+1}^{m\times l} \end{pmatrix}$$

  процессу с номером $2^a + q$ и получает от него его главную строку. В свою очередь, если номер процесса $q > 2^a$, то он должен получить строку от процесса с номером $q - 2^a$ и отправить ему свою главную строку.

- В нашей будет дополнительная буферная строчка, в которую будут приниматься данные из других процессов, она будет стоять на последнем месте, и матрица вместе с ней будет иметь вид:

$$\begin{pmatrix} T^{m\times m}_{1,1} & T^{m\times m}_{1,2} & \dots & T^{m\times m}_{1,k} & T^{m\times l}_{1,k+1} & |B^{m\times m}_{1,1} & B^{m\times m}_{1,2} & \dots & B^{m\times m}_{1,k} & B^{m\times l}_{1,k+1} \\ O^{m\times m}_{1,1} & O^{m\times m}_{1,2} & \dots & O^{m\times m}_{1,k} & O^{m\times l}_{1,k+1} & |B^{m\times m}_{1,1} & B^{m\times m}_{1,2} & \dots & B^{m\times m}_{1,k} & B^{m\times l}_{1,k+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ O^{m\times m}_{M,1} & O^{m\times m}_{M,2} & \dots & O^{m\times m}_{M,k} & O^{m\times l}_{M,k+1} & |B^{m\times m}_{M,1} & B^{m\times m}_{M,2} & \dots & B^{m\times m}_{M,k} & B^{m\times l}_{M,k+1} \\ Buf^{m\times m}_{M+1,1} & Buf^{m\times m}_{M+1,2} & \dots & Buf^{m\times m}_{M+1,k} & Buf^{m\times l}_{M+1,k+1} & |Buf^{m\times m}_{M+1,1} & Buf^{m\times m}_{M+1,2} & \dots & Buf^{m\times m}_{M+1,k} & Buf^{m\times l}_{M+1,k+1} \end{pmatrix}.$$

- Если $q \le b$, объединяем матрицы $T^{m\times m}_{1,1}$ и $Buf^{m\times m}_{M+1,1}$; зануляем с помощью Triungulize. Получаем матрицу $U^{(m+1)\times m}$, хранящую векторы преобразований. Заметим, что матрицы треугольные, и у зануляющего вектора $x^{(k)}$ нужно считать только первые $k+1$ координат, остальные будут нулями. Если $q > 2^a$, то считаем строку Buf главной и зануляем ею главную строку.

- Применяем матрицу $U^{(m+1)\times m}$ к матрицам $T^{m\times m}_{1,j}$ и $Buf^{m\times m}_{M+1,j}$, где $j = 2, ..., k$.

- Применяем матрицу $U^{(m+1)\times m}$ к матрицам $B^{m\times m}_{q,j}$ и $Buf^{m\times m}_{M+1,j}$, где $j = 1, ..., k$.

ТОЧКА КОММУНИКАЦИИН 2.2) 1)Далее зануляем каждым процессом следующий по номеру за ним. То есть, процесс с номером $i = 1, 3, 5, ..., 2^a - 1$ зануляет процесс с номером $j = 2, 4, 6, ..., 2^a$ ТОЧКА КОММУНИКАЦИИН

2)Зануляем процесс с номером $i = 1, 5, 9, ..., 2^a - 3$ следующий с ненулевым блоком за ним, то есть с номером с номером $j = 3, 7, 11, ..., 2^a - 1$

ТОЧКА КОММУНИКАЦИИН

$\vdots$

ТОЧКА КОММУНИКАЦИИН

k) на k-том шаге мы зануляем процесс с номером $i = 2^k(n-1) + 1$ зануляет процесс с номером $j = 2^{k-1}(2n-1) + 1$, где $n = 1, 2, ..., 2^{a-k} \quad k = 1, ..., a$;

ТОЧКА КОММУНИКАЦИИ

В итоге после a преобразований имеем матрицу вида(в глобальной нумерации):

$$A = \left(\begin{array}{cccccccccc} T^{m\times m}_{1,1} & A^{m\times m}_{1,2} & \dots & A^{m\times m}_{1,k} & A^{m\times l}_{1,k+1} & |B^{m\times m}_{1,1} & B^{m\times m}_{1,2} & \dots & B^{m\times m}_{1,k} & B^{m\times l}_{1,k+1} \\ O^{m\times m}_{2,1} & A^{m\times m}_{2,2} & \dots & A^{m\times m}_{2,k} & A^{m\times l}_{2,k+1} & |B^{m\times m}_{2,1} & B^{m\times m}_{2,2} & \dots & B^{m\times m}_{2,k} & B^{m\times l}_{2,k+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ O^{m\times m}_{p,1} & A^{m\times m}_{p,2} & \dots & A^{m\times m}_{p,k} & A^{m\times l}_{p,k+1} & |B^{m\times m}_{p,1} & B^{m\times m}_{p,2} & \dots & B^{m\times m}_{p,k} & B^{m\times l}_{p,k+1} \\ \hline O^{m\times m}_{p+1,1} & A^{m\times m}_{p+1,2} & \dots & A^{m\times m}_{p+1,k} & A^{m\times l}_{p+1,k+1} & |B^{m\times m}_{p+1,1} & B^{m\times m}_{p+1,2} & \dots & B^{m\times m}_{p+1,k} & B^{m\times l}_{p+1,k+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ O^{m\times m}_{2p,1} & A^{m\times m}_{2p,2} & \dots & A^{m\times m}_{2p,k} & A^{m\times l}_{2p,k+1} & |B^{m\times m}_{2p,1} & B^{m\times m}_{2p,2} & \dots & B^{m\times m}_{2p,k} & B^{m\times l}_{2p,k+1} \\ \hline \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \hline O^{m\times m}_{k+1-s,1} & A^{m\times m}_{k+1-s,2} & \dots & A^{m\times m}_{k+1-s,k} & A^{m\times l}_{k+1-s,k+1} & |B^{m\times m}_{k+1-s,1} & B^{m\times m}_{k+1-s,2} & \dots & B^{m\times m}_{k+1-s,k} & B^{m\times l}_{k+1-s,k+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ O^{l\times m}_{k+1,1} & A^{l\times m}_{k+1,2} & \dots & A^{l\times m}_{k+1,k} & A^{l\times l}_{k+1,k+1} & |B^{l\times m}_{k+1,1} & B^{l\times m}_{k+1,2} & \dots & B^{l\times m}_{k+1,k} & B^{l\times l}_{k+1,k+1} \end{array}\right).$$

Шаг s:

1) Общая матрица будет иметь вид в глобальной нумерации(здесь не получается изобразить присоеденную матрицу, т.к. он не влезает, и картинка становится нечитаемой):

$$A_q = \begin{pmatrix} T^{m\times m}_{q,1} & A^{m\times m}_{q,2} & \dots & A^{m\times m}_{q,s} & A^{m\times m}_{q,s+1} & \dots & A^{m\times m}_{q,k} & A^{m\times l}_{q,k+1} \\ 0 & T^{m\times m}_{q+P,2} & \dots & A^{m\times m}_{q+P,s} & A^{m\times m}_{q+P,s+1} & \dots & A^{m\times m}_{q+P,k} & A^{m\times l}_{q+P,k+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & A^{m\times m}_{q+(s-1)P,s} & A^{m\times m}_{q+(s-1)P,s+1} & \dots & A^{m\times m}_{q+(s-1)P,k} & A^{m\times l}_{q+(s-1)P,k+1} \\ 0 & 0 & \dots & A^{m\times m}_{q+s*P,s} & A^{m\times m}_{q+s*P,s+1} & \dots & A^{m\times m}_{q+s*P,k} & A^{m\times l}_{q+s*P,k+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & A^{l\times m}_{k+1-(P-q),s} & A^{l\times m}_{k+1-(P-q),s+1} & \dots & A^{l\times m}_{k+1-(P-q),k} & A^{l\times l}_{k+1-(P-q),k+1} \end{pmatrix}$$

а) Берем блок матрицы $A^{m\times m}_{t,s}$ $s = 1,...,k$, где t - наименьший номер строки, в глобальной нумерации $>=$ s(Он не вычисляется по формулам, а просто идет счетчик, когда процесс с номером q был главным, и когда его статус меняется с главного на неглавный, он увеличивается на + 1)
Применяем функцию Triangulize к блоку $A^{m\times m}_{t,s}$ получаем матрицу $U^{m\times m}$.
Далее, применяем матрицу $U^{m\times m}$ к блокам $A^{m\times m}_{t,j}$; $A^{m\times l}_{t,k+1}$; $B^{m\times m}_{t,j}$ $B^{m\times l}_{t,k+1}$ $j = s+1,...,k$

б)(Зануляем нижние) Берем блок $A^{m\times m}_{i,s}$ $(i = t+1,...,M)$ и строку $d^{(p_1)} = (a_{p,p};...;a_{p,m})$ $p = 1,...,m$ (p-тая строчка матрицы $A^{m\times m}_{l,l}$ без первых m-p+1 элементов)
D = ConcatBlockWithString($A^{m\times(m-p)}_{i,s}$, $d^{(p_1)}$).(соеденили) $A^{m\times(m-p)}_{i,s} = A^{m\times m}_{i,s}$ - без первых p - столбцов.
Получаем матрицу $U^{(m+1)\times m}$ и применяем ее к правой части:
$A^{d^{(p_j)}}_{i,j}$ = ConcatBlockWithVector($A^{m\times m}_{i,j}$, $d^{(p_j)}$) ($A^{d^{(p_{k+1})}}_{i,k+1}$ = ConcatBlockWithVector($A^{m\times l}_{i,k+1}$, $d^{(p_{k+1})}$))

$B^{d^{(p_j)}}_{i,j}$ = ConcatBlockWithVector($B^{m\times m}_{i,j}$, $d^{(p_j)}$) ($B^{d^{(p_{k+1})}}_{i,k+1}$ = ConcatBlockWithVector($B^{m\times l}_{i,k+1}$, $d^{(p_{k+1})}$))

$A^{(s)}_{i,j} = U^{(m+1)\times m}_{i,1} A^{d^{(p_j)}}_{i,j}$ $j = 2,...,k$ $A^{(s)}_{i,k+1} = U^{(m+1)\times l}_{i,1} A^{d^{(p_k)}}_{i,k+1}$
$B^{(s)}_{i,j} = U^{(m+1)\times m}_{i,1} B^{d^{(p_j)}}_{i,j}$ $j = 2,...,k; B^{(s)}_{i,k+1} = U^{(m+1)\times l}_{i,1} B^{d^{(p_k)}}_{i,k+1}$

ТОЧКА КОММУНИКАЦИИ
Теперь у каждого из q процессов матрица имеет вид(в глобальной нумерации):

$$A_q = \begin{pmatrix} T^{m\times m}_{q,1} & A^{m\times m}_{q,2} & \dots & A^{m\times m}_{q,s} & A^{m\times m}_{q,s+1} & \dots & A^{m\times m}_{q,k} & A^{m\times l}_{q,k+1} \\ 0 & T^{m\times m}_{q+P,2} & \dots & A^{m\times m}_{q+P,s} & A^{m\times m}_{q+P,s+1} & \dots & A^{m\times m}_{q+P,k} & A^{m\times l}_{q+P,k+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & T^{m\times m}_{q+(s-1)P,s} & A^{m\times m}_{q+(s-1)P,s+1} & \dots & A^{m\times m}_{q+(s-1)P,k} & A^{m\times l}_{q+(s-1)P,k+1} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & A^{m\times m}_{q+s*P,s+1} & \dots & A^{m\times m}_{q+s*P,k} & A^{m\times l}_{q+s*P,k+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & A^{l\times m}_{k+1-(P-q),s+1} & \dots & A^{l\times m}_{k+1-(P-q),k} & A^{l\times l}_{k+1-(P-q),k+1} \end{pmatrix}$$

В локальной нумерации имеет вот такой вид:

$$A_q = \begin{pmatrix} T^{m\times m}_{1,1} & A^{m\times m}_{1,2} & \dots & A^{m\times m}_{1,s} & A^{m\times m}_{1,s+1} & \dots & A^{m\times m}_{1,k} & A^{m\times l}_{1,k+1} \\ 0 & T^{m\times m}_{2,2} & \dots & A^{m\times m}_{2,s} & A^{m\times m}_{2,s+1} & \dots & A^{m\times m}_{2,k} & A^{m\times l}_{2,k+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & T^{m\times m}_{t,s} & A^{m\times m}_{t,s+1} & \dots & A^{m\times m}_{t,k} & A^{m\times l}_{t,k+1} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & A^{m\times m}_{t+1,s+1} & \dots & A^{m\times m}_{t+1,k} & A^{m\times l}_{t+1,k+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & A^{l\times m}_{M,s+1} & \dots & A^{l\times m}_{M,k} & A^{l\times l}_{M,k+1} \end{pmatrix}$$

2.1) $P = 2^a + b$, где $a = int(log_2(p))$ (целая часть), соответственно $b = P - 2^a$.

Каждый процесс паралельно зануляет Матрицами $T_{1,1}^{m\times m}, \dots, T_{b,1}^{m\times m}$ матрицы $T_{2^a+1,1}^{m\times m}, \dots, T_{2^a+b,1}^{l\times m}$ как показано ниже.

Для процесса q:

- Если номер процесса $q \le b$, то он отправляет свою главную строку:

$$\begin{pmatrix} T_{t,s}^{m\times m} & T_{t,s+1}^{m\times m} & \dots & T_{t,k}^{m\times m} & T_{t,k+1}^{m\times l} & |B_{t,1}^{m\times m} & B_{t,2}^{m\times m} & \dots & B_{t,k}^{m\times m} & B_{t,k+1}^{m\times l} \end{pmatrix}$$

  процессу с номером $2^a + q$ и получает от него его главную строку. В свою очередь, если номер процесса $q > 2^a$, то он должен получить строку от процесса с номером $q - 2^a$ и отправить ему свою главную строку.

- Если $q \le b$, объединяем матрицы $T_{t,s}^{m\times m}$ и $Buf_{M+1,s}^{m\times m}$; зануляем с помощью Triungulize. Получаем матрицу $U^{(m+1)\times m}$, хранящую векторы преобразований. Заметим, что матрицы треугольные, и у зануляющего вектора $x^{(k)}$ нужно считать только первые $k+1$ координаты, остальные будут нулями. Если $q > 2^a$, то считаем строку Buf главной и зануляем ею главную строку.

- Применяем матрицу $U^{(m+1)\times m}$ к матрицам $T_{t,j}^{m\times m}$ и $Buf_{M+1,j}^{m\times m}$, где $j = s+1, ..., k$.

- Применяем матрицу $U^{(m+1)\times m}$ к матрицам $B_{q,j}^{m\times m}$ и $Buf_{M+1,j}^{m\times m}$, где $j = 1, ..., k$.

ТОЧКА КОММУНИКАЦИИ

2.2) 1)Далее зануляем каждым процессом следующий по ноиеру за ним. То есть, процесс с номером $i = 1, 3, 5, ..., 2^a - 1$ зануляет процесс с номером $j = 2, 4, 6, ..., 2^a$

ТОЧКА КОММУНИКАЦИИ

2)Зnуляем процессом с номером $i = 1, 5, 9, ..., 2^a - 3$ следующий с ненулевым блоком за ним, то есть с номером с номером $j = 3, 7, 11, ..., 2^a - 1$

ТОЧКА КОММУНИКАЦИИ

$\vdots$

ТОЧКА КОММУНИКАЦИИ

k) на k-том шаге мы зануляем процесс с номером $i = 2^k(n-1)+1$ зануляет процесс с номером $j = 2^{k-1}(2n-1)+1$, где $n = 1, 2, ..., 2^{a-k}$ $\quad k = 1, ..., a$;

ТОЧКА КОММУНИКАЦИИ

В итоге всех действий матрица имеет вид:

$$A = \begin{pmatrix} T_{11}^{m\times m} & A_{12}^{m\times m} & \cdots & A_{1,k}^{m\times m} & A_{1,k+1}^{m\times l} & | & B_{11}^{m\times m} & B_{12}^{m\times m} & \cdots & B_{1,k+1}^{m\times l} \\ 0 & T_{22}^{m\times m} & \cdots & A_{2,k}^{m\times m} & A_{2,k+1}^{m\times l} & | & B_{21}^{m\times m} & B_{22}^{m\times m} & \cdots & B_{2,k+1}^{m\times l} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & | & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & T_{k,k}^{m\times m} & A_{k,k+1}^{m\times l} & | & B_{k,1}^{m\times m} & B_{k,2}^{m\times m} & \cdots & B_{k,k+1}^{m\times l} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & T_{k+1,k+1}^{l\times l} & | & B_{k+1,1}^{l\times m} & B_{k+1,2}^{l\times m} & \cdots & B_{k+1,k+1}^{l\times l} \end{pmatrix} \tag{2}$$

Нужно заметить, что формально, процесс с номером q не имеет таковой номер, а это номер процесса "в окне"(p-грамме которая скользит по матрице длинной P)

Обратный ход

Для начала необходимо на диагонале получить единичные блоки. Каждый процесс q обращает свои треугольнык мтарицы и умножает на них оставшуюся строку:

А) Находим обратную матрицу к треугольной матрице $T^{n\times n}$:

$$T^{n\times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Записываем матрицу $T^{n\times n}$ в виде:

$$T^{n\times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & | & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} & | & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} & | & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

Обозначим матрицу справа, за мартицу В:

$$T^{n\times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & | & b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} & | & b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} & | & b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{pmatrix}$$

Формулы:
$b_{ij} = b_{ij}/a_{ii}$; $a_{ik} = a_{ik}/a_{ii}$ $j = 1,...,n$ $i = 1,...,n;$ $k = i+1,...,n$
$b_{n-1,j} = b_{n-1,j} - a_{n-1,n}b_{nj}$
$j = 1,...,n$ $i = 1,...,n$; $b_{ij} = b_{ij} - \sum\limits_{s=i+1}^{n} a_{it}b_{tj}$
В итоге финальная матрица $B = T^{-1}$

Получаем матрицу

$$A = \begin{pmatrix} E_{11}^{m\times m} & A_{12}^{m\times m} & \cdots & A_{1,k}^{m\times m} & A_{1,k+1}^{m\times l} & | & B_{11}^{m\times m} & B_{12}^{m\times m} & \cdots & B_{1,k+1}^{m\times l} \\ 0 & E_{22}^{m\times m} & \cdots & A_{2,k}^{m\times m} & A_{2,k+1}^{m\times l} & | & B_{21}^{m\times m} & B_{22}^{m\times m} & \cdots & B_{2,k+1}^{m\times l} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & | & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & E_{k,k}^{m\times m} & A_{k,k+1}^{m\times l} & | & B_{k,1}^{m\times m} & B_{k,2}^{m\times m} & \cdots & B_{k,k+1}^{m\times l} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & E_{k+1,k+1}^{l\times l} & | & B_{k+1,1}^{l\times m} & B_{k+1,2}^{l\times m} & \cdots & B_{k+1,k+1}^{l\times l} \end{pmatrix} \tag{3}$$

Б)Введем вспомогательную блочную мартицу С, куда мы будем записывать получающийся ответ. Преобразуем треугольную матрицу:

$C_{k+1,j}^{l\times m} = (T_{k+1,k+1}^{l\times l})^{-1} * B_{k+1,j}^{l\times m}$ $j = 1,...,M$ $C_{k+1,k+1}^{l\times l} = (T_{k+1,k+1}^{l\times l})^{-1} * B_{k+1,k+1}^{l\times l}$
$i = 1,...,M;$ $j = i+1,...,M$ $A_{ij}^{m\times m} = (A_{ii}^{m\times m})^{-1} * A_{ij}^{m\times m}$, $A_{i,k+1}^{m\times l} = (A_{ii}^{m\times m})^{-1} * A_{i,k+1}^{m\times l}$;
$s = 1,...,M$ $B_{is}^{m\times m} = (A_{ii}^{m\times m})^{-1} * B_{is}^{m\times m}$, $B_{i,k+1}^{m\times l} = (A_{ii}^{m\times m})^{-1} * B_{i,k+1}^{m\times l}$

В)Теперь реализуем обратный ход. Точка коммуникации появляется, когда процессу с "нижней"строчкой нужно разослать ее остальным.

Если на шаге s, строка в (глобальной номерации) с номером s принадлежит процессу q, то он ее всем отправляет, а остальные ожидают ее. $j = 1,...,k;$ $C_{kj}^{m\times m} = B_{kj}^{m\times m} - A_{k,k+1}^{m\times l}C_{k+1,j}^{l\times m}$
$C_{k,k+1}^{m\times l} = B_{k,k+1}^{m\times l} - A_{k,k+1}^{m\times l}C_{k+1,k+1}^{l\times l}$
$i = M-1,...1$ $j = 1,...,k$ $C_{ij}^{m\times m} = B_{ij}^{m\times m} - \sum\limits_{t=i+1}^{k} A_{it}^{m\times m}C_{tj}^{m\times m} - A_{i,k+1}^{m\times l}C_{k+1,j}^{l\times m}$
$i = M-1,...,1;$ $C_{i,k+1}^{m\times l} = B_{i,k+1}^{m\times l} - \sum\limits_{t=i+1}^{k} A_{it}^{m\times m}C_{t,k+1}^{m\times l} - A_{i,k+1}^{m\times l}C_{k+1,k+1}^{l\times 1}$

3 Сложность алгоритма

На шаге $l = 1, ..., k$ процесс с номером q выполняет(пользуясь формулами для последовательной программы):

1. $Tringulize+$ Применение к блокам матрицы $U^{m \times m} \;\; = \frac{4m^3}{3} + \frac{m^2}{2} + 2(2k-l)(m^3+m^2)$

2. Зануление нижлежащих блоков $= (H-l)(\frac{3(m^3+m^2)}{2} + (2k-l)*2*(m^4-m^3)) \approx 5*m((k-s)^2)/pm^2$

3. Зануление блоков других процессов $= log_2(p)*2(2k-l)*m^3$
$\sum\limits_{l=1}^{k} 4m^3/3 + (m^3+m^2)(2k-l)/2 + 5m^3(k-s)^2/p + log_2(p)*2*(2k-l)*m^3 = \frac{1}{p}(\frac{5n^3}{3} - \frac{5n^2m}{2} + \frac{5m^2n}{6}) + \frac{13m^2n}{12} + \frac{3n^2m}{4} + log_2(p)(-m^2n+3mn^2) + O(n^2+m^2+nm)$

4. Обратных ход $= \; n^3 - n^2m + \frac{m^2n}{p} + O(n^2)$

$S(n,m,p) = \frac{1}{p}(\frac{5n^3}{3} - \frac{5n^2m}{2} + \frac{5m^2n}{6}) + \frac{13m^2n}{12} + \frac{3n^2m}{4} + log_2(p)(-m^2n+3mn^2) + \; n^3 - n^2m + \frac{m^2n}{p} + O(n^2+m^2+nm)$
Проверка:

- $S(n,m,1) = \frac{8n^3}{3} + \frac{5m^2n}{12} + \frac{9n^2m}{4}$
- $S(n,1,1) = \frac{8n^3}{3}$
- $S(n,n,1) = \frac{16n^3}{3}$

Оценка числа обменов

В момент, когда каждый процесс привел свою матрицу к нужному виду требется точка коммуникации, и сразу после потребуется $a = int(log_2(p))$ точек коммуникации для зануления l-того столбца. Итого:
$C(n,m,p) = \frac{n}{m} * (int(log_2(p)) + 1)$

Объем обменов

При каждой точки коммуникации требуется отправить $2n \times m$ данных. На каждом шаге таких $int(log_2(p)) + 1$ штук. Всего k шагов. значит обмениваемся $\frac{n}{m} \times 2n \times m \times (int(log_2(p)) + 1) = 2n^2 \times (int(log_2(p)) + 1)$ данными.
$V(n,m,p) = 2n^2 \times (int(log_2(p)) + 1)$