Метод отражений нахождения обратной матрицы

Сикерин Данила

27 сентября 2024г.

Постановка задачи

Найти обратную к матрице:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

1 Метод хранения и разделение памяти

Блочный: $A = a_{11}^{11}, \dots, a_{1m}^{11}, \dots, a_{mm}^{11}, a_{11}^{12}, \dots, a_{mm}^{1k}, a_{11}^{1,k+1}, \dots, a_{ml}^{1,k+1}, \dots, a_{ml}^{k,k+1}, a_{11}^{k+1,1}, \dots, a_{ll}^{k+1,k+1}$

Тогда матрица A имеет вид(E - единичная матрица):

$$A = \left(\begin{array}{ccccc|cccc} A_{11}^{m\times m} & A_{12}^{m\times m} & \cdots & A_{1,k}^{m\times m} & A_{1,k+1}^{m\times l} & E_{11}^{m\times m} & 0 & \cdots & 0 \\ A_{21}^{m\times m} & A_{22}^{m\times m} & \cdots & A_{2,k}^{m\times m} & A_{2,k+1}^{m\times l} & 0 & E_{22}^{m\times m} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{k,1}^{m\times m} & A_{k,2}^{m\times m} & \cdots & A_{k,k}^{m\times m} & A_{k,k+1}^{m\times l} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ A_{k+1,1}^{l\times m} & A_{k+1,2}^{l\times m} & \cdots & A_{k+1,k}^{l\times m} & A_{k+1,k+1}^{l\times l} & 0 & 0 & \cdots & E_{k+1,k+1}^{l\times l} \end{array}\right) \tag{1}$$

Стандартные обозначения:

- n — размер матрицы;
- m — размер блока;
- P — количество потоков.
- $H = n//P$
- $s = n(modP)$

Представим нашу матрицу в следующем виде:

$$A = \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} A_{1,1}^{m\times m} & A_{1,2}^{m\times m} & \dots & A_{1,k}^{m\times m} & A_{1,k+1}^{m\times l} & B_{1,1}^{m\times m} & B_{1,2}^{m\times m} & \dots & B_{1,k}^{m\times m} & B_{1,k+1}^{m\times l} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{P,1}^{m\times m} & A_{P,2}^{m\times m} & \dots & A_{P,k}^{m\times m} & A_{P,k+1}^{m\times l} & B_{P,1}^{m\times m} & B_{P,2}^{m\times m} & \dots & B_{P,k}^{m\times m} & B_{P,k+1}^{m\times l} \\ \hline A_{P+1,1}^{m\times m} & A_{P+1,2}^{m\times m} & \dots & A_{P+1,k}^{m\times m} & A_{P+1,k+1}^{m\times l} & B_{P+1,1}^{m\times m} & B_{P+1,2}^{m\times m} & \dots & B_{P+1,k}^{m\times m} & B_{P+1,k+1}^{m\times l} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{2P,1}^{m\times m} & A_{2P,2}^{m\times m} & \dots & A_{2P,k}^{m\times m} & A_{2P,k+1}^{m\times l} & B_{2P,1}^{m\times m} & B_{2P,2}^{m\times m} & \dots & B_{2P,k}^{m\times m} & B_{2P,k+1}^{m\times l} \\ \hline \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \hline A_{k+1-s,1}^{m\times m} & A_{k+1-s,2}^{m\times m} & \dots & A_{k+1-s,k}^{m\times m} & A_{k+1-s,k+1}^{m\times l} & B_{k+1-s,1}^{m\times m} & B_{k+1-s,2}^{m\times m} & \dots & B_{k+1-s,k}^{m\times m} & B_{k+1-s,k+1}^{m\times l} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{k+1,1}^{l\times m} & A_{k+1,2}^{l\times m} & \dots & A_{k+1,k}^{l\times m} & A_{k+1,k+1}^{l\times l} & B_{k+1,1}^{l\times m} & B_{k+1,2}^{l\times m} & \dots & B_{k+1,k}^{l\times m} & B_{k+1,k+1}^{l\times l} \end{array}\right).$$

Для потока с номером $q = 1, 2, \ldots, P$ "его"блочными строчками будут с номерами: $q + j * p$, где $j = 0, \ldots, H$

2 Алгоритм

Первый шаг:

1) Каждый поток работает с подматрицами как в последовательном случае. То есть приводит к виду:

$$A = \left(\begin{array}{cccc|cccc}
T_{1,1}^{m\times m} & A_{1,2}^{m\times m} & \ldots & A_{1,k}^{m\times m} & A_{1,k+1}^{m\times l} & |B_{1,1}^{m\times m} & B_{1,2}^{m\times m} & \ldots & B_{1,k}^{m\times m} & B_{1,k+1}^{m\times l} \\
\vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
T_{p,1}^{m\times m} & A_{p,2}^{m\times m} & \ldots & A_{p,k}^{m\times m} & A_{p,k+1}^{m\times l} & |B_{p,1}^{m\times m} & B_{p,2}^{m\times m} & \ldots & B_{p,k}^{m\times m} & B_{p,k+1}^{m\times l} \\
\hline
O_{p+1,1}^{m\times m} & A_{p+1,2}^{m\times m} & \ldots & A_{p+1,k}^{m\times m} & A_{p+1,k+1}^{m\times l} & |B_{p+1,1}^{m\times m} & B_{p+1,2}^{m\times m} & \ldots & B_{p+1,k}^{m\times m} & B_{p+1,k+1}^{m\times l} \\
\vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
O_{2p,1}^{m\times m} & A_{2p,2}^{m\times m} & \ldots & A_{2p,k}^{m\times m} & A_{2p,k+1}^{m\times l} & |B_{2p,1}^{m\times m} & B_{2p,2}^{m\times m} & \ldots & B_{2p,k}^{m\times m} & B_{2p,k+1}^{m\times l} \\
\hline
\vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
\hline
O_{k+1-s,1}^{m\times m} & A_{k+1-s,2}^{m\times m} & \ldots & A_{k+1-s,k}^{m\times m} & A_{k+1-s,k+1}^{m\times l} & |B_{k+1-s,1}^{m\times m} & B_{k+1-s,2}^{m\times m} & \ldots & B_{k+1-s,k}^{m\times m} & B_{k+1-s,k+1}^{m\times l} \\
\vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
O_{k+1,1}^{l\times m} & A_{k+1,2}^{l\times m} & \ldots & A_{k+1,k}^{l\times m} & A_{k+1,k+1}^{l\times l} & |B_{k+1,1}^{l\times m} & B_{k+1,2}^{l\times m} & \ldots & B_{k+1,k}^{l\times m} & B_{k+1,k+1}^{l\times l}
\end{array}\right).$$

Где $T_{i,j}$ - врехне-треугольная мтарица. $O_{i,j}$ - нулевая матрица.

Формулы для потока q:

а)Берем блок $A_{q,1}^{m\times m}$ Применяем функцию Triangulize $A_{q,1}^{m\times m}$. получаем матрицу $U^{m\times m}$. Далее, применяем матрицу $U^{m\times m}$ к блокам $A_{q,j}^{m\times m}$ $j = 2, ..., k$; $A_{q,k+1}^{m\times l}$; $E_{q,1}^{m\times m}$

б)Берем блок $A_{i,1}^{m\times m}$ и строчку $d^{(p_1)} = (a_{p,p}; ...; a_{p,m})$ $p = 1, ..., m$ (р-тая строка $A_{1,1}^{m\times m}$ без $(m - p + 1)$ первых элементов) $(i = q + p, q + 2p, ..., q + Hp)$. и для остатка $A_{k+1,1}^{l\times m}$ получаем матрицу $U^{(l+1)\times m}$

D = ConcatBlockWithString($A_{i,1}^{m\times(m-p)}$, $d^{(p_1)}$).
(в случае остатка D = ConcatBlockWithString($A_{k+1,1}^{l\times(m-p)}$, $d^{(p_1)}$))
$A_{i,1}^{m\times(m-p)} = A_{i,1}^{m\times m}$ - без первых р - столбцов. (Для остатка $A_{k+1,1}^{l\times(m-p)} = A_{k+1,1}^{l\times m}$)
По полученному блоку находим $x^{(p)}$, обнуляющий 1-ый столбец полученной матрицы, и применяем U($x^{(p)}$) к матрице D. После p=m получаем матрицу $U_{i,1}^{(m+1)\times m}$ $(U^{(l+1)\times m})$.
$A_{i,1}^{m\times m} = 0$ $(A_{k+1,1}^{l\times m} = 0)$ занеляем весь блок
Проходимся по всем правым блокам:

$A_{i,j}^{d^{(p_j)}}$ = ConcatBlockWithVector($A_{i,j}^{m\times m}$, $d^{(p_j)}$) ($A_{i,k+1}^{d^{(p_{k+1})}}$ = ConcatBlockWithVector($A_{i,k+1}^{m\times l}$, $d^{(p_{k+1})}$))

$B_{i,j}^{d^{(p_j)}}$ = ConcatBlockWithVector($B_{i,j}^{m\times m}$, $d^{(p_j)}$) ($B_{i,k+1}^{d^{(p_{k+1})}}$ = ConcatBlockWithVector($B_{i,k+1}^{m\times l}$, $d^{(p_{k+1})}$))

$A_{i,j}^{(1)} = U_{i,1}^{(m+1)\times m} A_{i,j}^{d^{(p_j)}}$ $j = 2, ..., k$; $A_{i,k+1}^{(1)} = U_{i,1}^{(m+1)\times l} A_{i,k+1}^{d^{(p_k)}}$
$B_{i,j}^{(1)} = U_{i,1}^{(m+1)\times m} B_{i,j}^{d^{(p_j)}}$ $j = 2, ..., k$; $B_{i,k+1}^{(1)} = U_{i,1}^{(m+1)\times l} B_{i,k+1}^{d^{(p_k)}}$

ТОЧКА СИНХРОНИЗАЦИИ

2.1) $P = 2^a + b$, где $a = int(log_2(p))$ (целая часть), соответственно $b = P - 2^a$.

Берем первые b потоков. Зануляем каждым потоком паралельно Матрицами $T_{1,1}^{m\times m}, \dots, T_{b,1}^{m\times m}$ матрицы $T_{2^a+1,1}^{m\times m}, \dots, T_{2^a+b,1}^{l\times m}$ как показано ниже.
Для потока $q = 0, \dots, b$:

- Объединяем матрицы $T_{q,1}^{m\times m}$ (если $q = m$, то, $T_{q,1}^{l\times m}$); с $T_{2^a+q,1}^{m\times m}$ ($q = m$ $T_{2^a+1,q}^{l\times m}$) и зануляем с помощью Triungulize. Получам матрицу $U^{(m+1)\times m}$ хранящую векторы преобразований. Заметим, что матрицы триугольные и у зануляющего вектора $x^{(k)}$ нужно считать только первые $k+1$ координату, остальные будут нулями.

- Применям матрицу $U^{(m+1)\times m}$ к матрицам $T_{q,j}^{m\times m}$ $T_{2^a+q,j}^{m\times m}$, где $j = 2, ..., k$

- Применям матрицу $U^{(m+1)\times m}$ к матрицам $B_{q,j}^{m\times m}$ $B_{2^a+q,j}^{m\times m}$, где $j = 1, ..., k$

ТОЧКА СИНХРОНИЗАЦИИ
2.2) 1)Далее зануляем каждым потокм следующий по ноиеру за ним. То есть, поток с номером $i = 1, 3, 5, ..., 2^a - 1$ зануляет поток с номером $j = 2, 4, 6, ..., 2^a$ ТОЧКА СИНХРОНИЗАЦИИ
2)Зныляем потоком с номером $i = 1, 5, 9, ..., 2^a - 3$ следующий с ненулевым блоком за ним, то есть с номером с номером $j = 3, 7, 11, ..., 2^a - 1$ ТОЧКА СИНХРОНИЗАЦИИ
$\vdots$
ТОЧКА СИНХРОНИЗАЦИИ
k) на k-том шаге мы зануляем поток с номером $i = 2^k(n-1)+1$ зануляет поток с номером $j = 2^{k-1}(2n-1)+1$, где $n = 1, 2, ..., 2^{a-k}$ $k = 1, ..., a$; ТОЧКА СИНХРОНИЗАЦИИ
В итоге после a преобразований имеем матрицу вида:

$$A = \left(\begin{array}{ccccc|cccc}
T_{1,1}^{m\times m} & A_{1,2}^{m\times m} & \dots & A_{1,k}^{m\times m} & A_{1,k+1}^{m\times l} & B_{1,1}^{m\times m} & B_{1,2}^{m\times m} & \dots & B_{1,k}^{m\times m} & B_{1,k+1}^{m\times l} \\
O_{2,1}^{m\times m} & A_{2,2}^{m\times m} & \dots & A_{2,k}^{m\times m} & A_{2,k+1}^{m\times l} & B_{2,1}^{m\times m} & B_{2,2}^{m\times m} & \dots & B_{2,k}^{m\times m} & B_{2,k+1}^{m\times l} \\
\vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
O_{p,1}^{m\times m} & A_{p,2}^{m\times m} & \dots & A_{p,k}^{m\times m} & A_{p,k+1}^{m\times l} & B_{p,1}^{m\times m} & B_{p,2}^{m\times m} & \dots & B_{p,k}^{m\times m} & B_{p,k+1}^{m\times l} \\
\hline
O_{p+1,1}^{m\times m} & A_{p+1,2}^{m\times m} & \dots & A_{p+1,k}^{m\times m} & A_{p+1,k+1}^{m\times l} & B_{p+1,1}^{m\times m} & B_{p+1,2}^{m\times m} & \dots & B_{p+1,k}^{m\times m} & B_{p+1,k+1}^{m\times l} \\
\vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
O_{2p,1}^{m\times m} & A_{2p,2}^{m\times m} & \dots & A_{2p,k}^{m\times m} & A_{2p,k+1}^{m\times l} & B_{2p,1}^{m\times m} & B_{2p,2}^{m\times m} & \dots & B_{2p,k}^{m\times m} & B_{2p,k+1}^{m\times l} \\
\hline
\vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
\hline
O_{k+1-s,1}^{m\times m} & A_{k+1-s,2}^{m\times m} & \dots & A_{k+1-s,k}^{m\times m} & A_{k+1-s,k+1}^{m\times l} & B_{k+1-s,1}^{m\times m} & B_{k+1-s,2}^{m\times m} & \dots & B_{k+1-s,k}^{m\times m} & B_{k+1-s,k+1}^{m\times l} \\
\vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
O_{k+1,1}^{l\times m} & A_{k+1,2}^{l\times m} & \dots & A_{k+1,k}^{l\times m} & A_{k+1,k+1}^{l\times l} & B_{k+1,1}^{l\times m} & B_{k+1,2}^{l\times m} & \dots & B_{k+1,k}^{l\times m} & B_{k+1,k+1}^{l\times l}
\end{array}\right).$$

Шаг s:

1)У каждого потока q хранится матрица вида(здесь не получается изобразить присоеденную матрицу, т.к. он не влезает, и картинка становится нечитаемой):

$$A_q = \begin{pmatrix} T^{m\times m}_{q,1} & A^{m\times m}_{q,2} & \dots & A^{m\times m}_{q,s} & A^{m\times m}_{q,s+1} & \dots & A^{m\times m}_{q,k} & A^{m\times l}_{q,k+1} \\ 0 & T^{m\times m}_{q+P,2} & \dots & A^{m\times m}_{q+P,s} & A^{m\times m}_{q+P,s+1} & \dots & A^{m\times m}_{q+P,k} & A^{m\times l}_{q+P,k+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & A^{m\times m}_{q+(s-1)P,s} & A^{m\times m}_{q+(s-1)P,s+1} & \dots & A^{m\times m}_{q+(s-1)P,k} & A^{m\times l}_{q+(s-1)P,k+1} \\ 0 & 0 & \dots & A^{m\times m}_{q+s*P,s} & A^{m\times m}_{q+s*P,s+1} & \dots & A^{m\times m}_{q+s*P,k} & A^{m\times l}_{q+s*P,k+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & A^{l\times m}_{k+1-(P-q),s} & A^{l\times m}_{k+1-(P-q),s+1} & \dots & A^{l\times m}_{k+1-(P-q),k} & A^{l\times l}_{k+1-(P-q),k+1} \end{pmatrix}$$

а) Берем блок матрицы $A^{m\times m}_{q+(s-1)P,s}$ $s=1,...,k$
Применяем функцию Triangulize к блоку $A^{m\times m}_{q+(s-1)P,s}$ получаем матрицу $U^{m\times m}$.
Далее, применяем матрицу $U^{m\times m}$ к блокам $A^{m\times m}_{q+(s-1)P,j}$; $A^{m\times l}_{q+(s-1)P,k+1}$; $B^{m\times m}_{q+(s-1)P,j}$ $B^{m\times l}_{q+(s-1)P,k+1}$ $j=s+1,...,k$

б)(Зануляем нижние) Берем блок $A^{m\times m}_{i,s}$ $(i=q+sP,...,k+1-(P-q))$ и строку $d^{(p_1)}=(a_{p,p};...;a_{p,m})$ $p=1,...,m$ (р-тая строчка матрицы $A^{m\times m}_{l,l}$ без первых m-p+1 элементов)
D = ConcatBlockWithString($A^{m\times(m-p)}_{i,s}$, $d^{(p_1)}$).(соеденили) $A^{m\times(m-p)}_{i,s}=A^{m\times m}_{i,s}$ - без первых p - столбцов.
Получаем матрицу $U^{(m+1)\times m}$ и применяем ее к правой части:
$A^{d^{(p_j)}}_{i,j}$ = ConcatBlockWithVector($A^{m\times m}_{i,j}$, $d^{(p_j)}$) ($A^{d^{(p_{k+1})}}_{i,k+1}$ = ConcatBlockWithVector($A^{m\times l}_{i,k+1}$, $d^{(p_{k+1})}$))

$B^{d^{(p_j)}}_{i,j}$ = ConcatBlockWithVector($B^{m\times m}_{i,j}$, $d^{(p_j)}$) ($B^{d^{(p_{k+1})}}_{i,k+1}$ = ConcatBlockWithVector($B^{m\times l}_{i,k+1}$, $d^{(p_{k+1})}$))

$A^{(s)}_{i,j}=U^{(m+1)\times m}_{i,1}A^{d^{(p_j)}}_{i,j}$ $j=2,...,k$ $A^{(s)}_{i,k+1}=U^{(m+1)\times l}_{i,1}A^{d^{(p_k)}}_{i,k+1}$
$B^{(s)}_{i,j}=U^{(m+1)\times m}_{i,1}B^{d^{(p_j)}}_{i,j}$ $j=2,...,k;B^{(s)}_{i,k+1}=U^{(m+1)\times l}_{i,1}B^{d^{(p_k)}}_{i,k+1}$

ТОЧКА СИНХРОНИЗАЦИИ
Теперь у каждого из q потоков матрица имеет вид:

$$A_q = \begin{pmatrix} T^{m\times m}_{q,1} & A^{m\times m}_{q,2} & \dots & A^{m\times m}_{q,s} & A^{m\times m}_{q,s+1} & \dots & A^{m\times m}_{q,k} & A^{m\times l}_{q,k+1} \\ 0 & T^{m\times m}_{q+P,2} & \dots & A^{m\times m}_{q+P,s} & A^{m\times m}_{q+P,s+1} & \dots & A^{m\times m}_{q+P,k} & A^{m\times l}_{q+P,k+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & T^{m\times m}_{q+(s-1)P,s} & A^{m\times m}_{q+(s-1)P,s+1} & \dots & A^{m\times m}_{q+(s-1)P,k} & A^{m\times l}_{q+(s-1)P,k+1} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & A^{m\times m}_{q+s*P,s+1} & \dots & A^{m\times m}_{q+s*P,k} & A^{m\times l}_{q+s*P,k+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & A^{l\times m}_{k+1-(P-q),s+1} & \dots & A^{l\times m}_{k+1-(P-q),k} & A^{l\times l}_{k+1-(P-q),k+1} \end{pmatrix}$$

2.1) $P=2^a+b$, где $a=int(log_2(p))$ (целая часть), соответственно $b=P-2^a$.
Берем первые b потоков. Зануляем каждым потоком паралельно Матрицами $T^{m\times m}_{1+(s-1)P,s},\dots,T^{m\times m}_{q+(s-1)P,s},\dots,T^{m\times m}_{b+(s-1)P,s}$
матрицы $T^{m\times m}_{2^a+1,s},\dots,T^{l\times m}_{2^a+b,s}$ как показано ниже.
Для потока $q=0,\dots,b$:

- Объединяем матрицы $T^{m\times m}_{q+(s-1)P,s}$ (если $q=m$, то, $T^{l\times m}_{q+(s-1)P,s}$); с $T^{m\times m}_{2^a+q,s}$ ($q=m$ $T^{l\times m}_{2^a+q,s}$) и зануляем с помощью Triungulize. Получам матрицу $U^{(m+1)\times m}$ хранящую векторы преобразований. Заметим, что матрицы триугольные и у зануляющего вектора $x^{(k)}$ нужно считать только первые $k+1$ координату, остальные будут нулями.

- Применям матрицу $U^{(m+1)\times m}$ к матрицам $T^{m\times m}_{q+(s-1)P,s,j}$ $T^{m\times m}_{2^a+q,j}$, где $j=s+1,...,k$

- Применям матрицу $U^{(m+1)\times m}$ к матрицам $B^{m\times m}_{q,j}$ $B^{m\times m}_{2^a+q,j}$, где $j=1,...,k$

ТОЧКА СИНХРОНИЗАЦИИ
2.2) 1)Далее зануляем каждым потокм следующий по ноиеру за ним. То есть, поток с номером $i=1,3,5,....,2^a-1$ зануляет поток с номером $j=2,4,6,...,2^a$ ТОЧКА СИНХРОНИЗАЦИИ
2)Зануляем потоком с номером $i=1,5,9,...,2^a-3$ следующий с ненулевым блоком за ним, то есть с номером с номером $j=3,7,11,...,2^a-1$ ТОЧКА СИНХРОНИЗАЦИИ
$\vdots$
ТОЧКА СИНХРОНИЗАЦИИ
k) на k-том шаге мы зануляем поток с номером $i=2^k(n-1)+1$ зануляет поток с номером $j=2^{k-1}(2n-1)+1$, где $n=1,2,...,2^{a-k}$ $k=1,...,a$; ТОЧКА СИНХРОНИЗАЦИИ
В итоге всех действий матрица имеет вид:

$$A=\left(\begin{array}{ccccc|cccc}
T^{m\times m}_{11} & A^{m\times m}_{12} & \cdots & A^{m\times m}_{1,k} & A^{m\times l}_{1,k+1} & B^{m\times m}_{11} & B^{m\times m}_{12} & \cdots & B^{m\times l}_{1,k+1}\\
0 & T^{m\times m}_{22} & \cdots & A^{m\times m}_{2,k} & A^{m\times l}_{2,k+1} & B^{m\times m}_{21} & B^{m\times m}_{22} & \cdots & B^{m\times l}_{2,k+1}\\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\
0 & 0 & \cdots & T^{m\times m}_{k,k} & A^{m\times l}_{k,k+1} & B^{m\times m}_{k,1} & B^{m\times m}_{k,2} & \cdots & B^{m\times l}_{k,k+1}\\
0 & 0 & \cdots & 0 & T^{l\times l}_{k+1,k+1} & B^{l\times m}_{k+1,1} & B^{l\times m}_{k+1,2} & \cdots & B^{l\times l}_{k+1,k+1}
\end{array}\right) \qquad (2)$$

Обратный ход

Для начала необходимо на диагонале получить единичные блоки. Каждый поток q обращает свои треугольнык мтарицы и умножает на них оставшуюся строку:

А) Находим обратную матрицу к треугольной матрице $T^{n\times n}$:

$$T^{n\times n}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n}\\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \dots & a_{nn}\end{pmatrix}$$

Записываем матрицу $T^{n\times n}$ в виде:

$$T^{n\times n}=\left(\begin{array}{cccc|cccc} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & 1 & 0 & \dots & 0\\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} & 0 & 1 & \dots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots\\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} & 0 & 0 & \dots & 1\end{array}\right)$$

Обозначим матрицу справа, за мартицу B:

$$T^{n\times n}=\left(\begin{array}{cccc|cccc} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n}\\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots\\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} & b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn}\end{array}\right)$$

Формулы:
$b_{ij}=b_{ij}/a_{ii}$; $a_{ik}=a_{ik}/a_{ii}$ $j=1,...,n$ $i=1,...,n$; $k=i+1,...,n$
$b_{n-1,j}=b_{n-1,j}-a_{n-1,n}b_{nj}$
$j=1,...,n$ $i=1,...,n$; $b_{ij}=b_{ij}-\sum\limits_{s=i+1}^{n} a_{it}b_{tj}$

В итоге финальная матрица $B = T^{-1}$

Получаем матрицу

$$A = \begin{pmatrix} E_{11}^{m\times m} & A_{12}^{m\times m} & \cdots & A_{1,k}^{m\times m} & A_{1,k+1}^{m\times l} & | & B_{11}^{m\times m} & B_{12}^{m\times m} & \cdots & B_{1,k+1}^{m\times l} \\ 0 & E_{22}^{m\times m} & \cdots & A_{2,k}^{m\times m} & A_{2,k+1}^{m\times l} & | & B_{21}^{m\times m} & B_{22}^{m\times m} & \cdots & B_{2,k+1}^{m\times l} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & | & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & E_{k,k}^{m\times m} & A_{k,k+1}^{m\times l} & | & B_{k,1}^{m\times m} & B_{k,2}^{m\times m} & \cdots & B_{k,k+1}^{m\times l} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & E_{k+1,k+1}^{l\times l} & | & B_{k+1,1}^{l\times m} & B_{k+1,2}^{l\times m} & \cdots & B_{k+1,k+1}^{l\times l} \end{pmatrix} \tag{3}$$

ТОЧКА СИНХРОНИЗАЦИИ

Обратный ход Гаусса не является параллельным.
Б)Введем вспомогательную блочную мартицу C, куда мы будем записывать получающийся ответ. Преобразуем треугольную матрицу:

$C_{k+1,j}^{l\times m} = (T_{k+1,k+1}^{l\times l})^{-1} * B_{k+1,j}^{l\times m} \quad j = 1,...,k \quad C_{k+1,k+1}^{l\times l} = (T_{k+1,k+1}^{l\times l})^{-1} * B_{k+1,k+1}^{l\times l}$
$i = 1,...,k; \; j = i+1,...,k \quad A_{ij}^{m\times m} = (A_{ii}^{m\times m})^{-1} * A_{ij}^{m\times m} \;, \; A_{i,k+1}^{m\times l} = (A_{ii}^{m\times m})^{-1} * A_{i,k+1}^{m\times l};$
$s = 1,...,k \quad B_{is}^{m\times m} = (A_{ii}^{m\times m})^{-1} * B_{is}^{m\times m} \;, \; B_{i,k+1}^{m\times l} = (A_{ii}^{m\times m})^{-1} * B_{i,k+1}^{m\times l}$

В)Теперь реализуем обратный ход. Для каждого потока q перед тем как сделать строчку, строчкой еденичной мтарицы, копируем в поток нижнюю строчку матрицы B и и вычисляем по обычным формулам. Точка синхронизации ставится после вычисления каждой новой строчки.

$j = 1,...,k; \; C_{kj}^{m\times m} = B_{kj}^{m\times m} - A_{k,k+1}^{m\times l} C_{k+1,j}^{l\times m}$
$C_{k,k+1}^{m\times l} = B_{k,k+1}^{m\times l} - A_{k,k+1}^{m\times l} C_{k+1,k+1}^{l\times l}$
$i = k-1,...1 \quad j = 1,...,k \; C_{ij}^{m\times m} = B_{ij}^{m\times m} - \sum_{t=i+1}^{k} A_{it}^{m\times m} C_{tj}^{m\times m} - A_{i,k+1}^{m\times l} C_{k+1,j}^{l\times m}$
$i = k-1,...,1; \; C_{i,k+1}^{m\times l} = B_{i,k+1}^{m\times l} - \sum_{t=i+1}^{k} A_{it}^{m\times m} C_{t,k+1}^{m\times l} - A_{i,k+1}^{m\times l} C_{k+1,k+1}^{l\times 1}$

3 Сложность алгоритма

На шаге $l = 1,...,k$ поток с номером q выполняет(пользуясь формулами для последовательной программы):

1. $Tringulize+$ Применение к блокам матрицы $U^{m\times m} \; = \frac{4m^3}{3} + \frac{m^2}{2} + 2(2k-l)(m^3+m^2)$
2. Зануление нижлежащих блоков $= (H-l)(\frac{3(m^3+m^2)}{2} + (2k-l)*2*(m^4-m^3)) \approx 5*m((k-s)^2)/pm^2$
3. Зануление блоков других потоков $= log_2(p)*2(2k-l)*m^3$
   $\sum_{l=1}^{k} 4m^3/3 + (m^3+m^2)(2k-l)/2 + 5m^3(k-s)^2/p + log_2(p)*2*(2k-l)*m^3 = \frac{1}{p}(\frac{5n^3}{3} - \frac{5n^2m}{2} + \frac{5m^2n}{6}) + \frac{13m^2n}{12} + \frac{3n^2m}{4} + log_2(p)(-m^2n+3mn^2) + O(n^2+m^2+nm)$
4. Обратных ход $= \; n^3 - n^2m + \frac{m^2n}{p} + O(n^2)$

$S(n,m,p) =$
$frac1p(\frac{5n^3}{3} - \frac{5n^2m}{2} + \frac{5m^2n}{6}) + \frac{13m^2n}{12} + \frac{3n^2m}{4} + log_2(p)(-m^2n+3mn^2) + \; n^3 - n^2m + \frac{m^2n}{p} + O(n^2+m^2+nm)$ Проверка:

- $S(n,m,1) = \frac{8n^3}{3} + \frac{5m^2n}{12} + \frac{9n^2m}{4}$
- $S(n,1,1) = \frac{8n^3}{3}$
- $S(n,n,1) = \frac{16n^3}{3}$

4 Оценка числа точек синхронизации

В момент, когда каждый поток привел свою матрицу к нужному виду требется точка синхронизации, и сразу после потребуется $a = int(log_2(p))$ точек синхронизации для зануления l-того столбца. Итого: $k*(int(log_2(p))+1)$ - точка синхронизации.