Метод отражений нахождения обратной матрицы

Сикерин Данила

27 сентября 2024г.

Постановка задачи

Найти обратную к матрице:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

1 Метод хранения

Блочный: $A = a^{11}_{11}, \dots, a^{11}_{1m}, \dots, a^{11}_{mm}, a^{12}_{11}, \dots, a^{1k}_{mm}, a^{1,k+1}_{11}, \dots, a^{1,k+1}_{ml}, \dots, a^{k,k+1}_{ml}, a^{k+1,1}_{11}, \dots, a^{k+1,k+1}_{ll}$

2 Функции Извлечения, Вставки блоков и Присоединения вектора к блоку

Функции Извлечения, Вставки блоков:
Доступ на элемент a^{ij}_{11} блоку A_{ij} достигается обращением к указателю $*(a+(i-1)*(k*m*m+m*l)+(j-1)*(m*m))$ Присоединение вектора к блоку "сверху"Присоединям вектор(строчку матрицы) к матрице.

```
void ConcatBlockWithVector(double * block, double* vec, double* result ,int matrix
{
    int i;
    for (i = 0; i < vec_size; i++)
    {
        result[i] = vec[i];
    }
    for (i = 0; i < matrix_size; i++)
    {
        result[vec_size+i] = block[i];
    }
}
```

3 Формулы алгоритма

Матрица отражения

Определим матрицу отражения $U(x) = I - 2xx^*$. $U(x)y = y - 2(x,y)x$ Обозначим a_i - i-тый столбец матрицы А, $A^{(1)} = U(x^{(1)})A$, а $A^{(k)} = U_k A^{(k-1)}$, где

$$U_k = \begin{pmatrix} I_{k-1} & 0 \\ 0 & U(x^{(k)}) \end{pmatrix}$$

А матрица $A^{(k)}$ имеет вид:

$$A^{(k-1)} = \begin{pmatrix} \|a_1\| & c_{12} & c_{13} & \dots & c_{1,k-1} & c_{1,k} & \dots & c_{1,n} \\ 0 & \|a_2^{(1)}\| & c_{23} & \dots & c_{2,k-1} & c_{2,k} & \dots & c_{2,n} \\ 0 & 0 & \|a_3^{(2)}\| & \dots & c_{2,k-1} & c_{3,k} & \dots & c_{3,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \|a_1^{(k-2)}\| & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a_{kk}^{(k-1)} & \dots & a_{kn}^{(k-1)} \\ \dots & & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a_{nk}^{(k-1)} & \dots & a_{nn}^{(k-1)} \end{pmatrix}$$

Реализуем функцию Triangulize(матрицы $s \times s$), которая будет возвращать матрицу векторов:

$$U = \begin{pmatrix} x_1^{(1)} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ x_2^{(1)} & x_1^{(2))} & 0 & \dots & 0 \\ x_3^{(1)} & x_2^{(2)} & x_1^{(3)} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ x_s^{(1)} & x_{s-1}^{(2)} & x_{s-2}^{(3)} & \dots & x_1^{(s)} \end{pmatrix}$$

Где $U(x^{(k)})a_1^{(k-1)} = \|a_1^{(k-1)}\|e_1$; $x^{(k)} = \frac{a_1 - \|a_1^{(k-1))}\|e_1}{\|a_1^{(k-1)} - \|a_1^{(k-1)}\|\|}$, а вектор $e_1 = (1,0,\dots,0)^t$ пространства $\mathbb{R}^{s-k+1}$
Матрицу А будет приводить к треугольному виду:

$$A^{(s)} = \begin{pmatrix} \|a_1\| & c_{12} & c_{13} & \dots & c_{1s} \\ 0 & \|a_2^{(1)}\| & c_{23} & \dots & c_{2s} \\ 0 & 0 & \|a_3^{(2)}\| & \dots & c_{2s} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \|a_s^{(s-1)}\| \end{pmatrix}$$

Формулы для вычисления $x^{(k)}$:

$$s_k = \sum_{j=k+1}^{n} (a_{jk}^{(k-1)})^2 \tag{1}$$

$$\|a_1^{(k-1)}\| = \sqrt{s_k + (a_{kk}^{(k-1)})^2} \tag{2}$$

$$x^{(k)} = (a_{kk}^{(k-1)} - \|a_1^{(k-1)}\|;\ a_{k+1,k}^{(k-1)};\dots;\ a_{n,k}^{(k-1)})^t \tag{3}$$

$$\|x^{(k)}\| = \sqrt{s_k + (x_1^{(k)})^2} \tag{4}$$

$$x^{(k)} = \frac{x^{(k)}}{\|x^{(k)}\|} \tag{5}$$

Формулы для нахождения образа y:
$U(x)y = y - 2(x,y)x$. Обозначим образ y - вектором z.

$s=\sum\limits_{j=1}^{n} x_j y_j \;\; z_i = y_i - 2sx_i$
Применение матрицы U(x) к матрице A:

$$U(x)A = (U(x)a_1; ...; U(x)a_n) \tag{6}$$

$$s_i = \sum_{j=1}^{n} x_j a_{ji} \tag{7}$$

$$U(x)a_i = (a_{1,i} - 2s_i x_1; ...; a_{n,i} - 2s_i x_n) \tag{8}$$

Применение матрицы $U = U(x^{(1)}, ..., x^{(n)})$ к матрице A:

$$U * A = U(x^{(1)}, ..., x^{(n)})A = U_n * ... * U_1 A = U_n * ... * U_k A^{(k-1)} \;\; k = 1, ..., n \tag{9}$$

Рассмотрим $U_k A^{(k-1)}$: $a_{kk}^{(k-1)} = \|a_k^{(k-1)}\|$; $a_{rk}^{(k-1)} = 0$; $r = k+1, ..., n$
$a_r = U(x^{(k)})a_r$;

Внутренность функции Triangulize

Получаем матрицу

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mm} \end{pmatrix}$$

Находим $\|a_1\|$, находим $x^{(1)}$ Записываем на место $a_{1,1}$ число $\|a^{(1)}\|$, числа $a_{s,1} = 0$, $s = 2, ..., m$,а на столбцы a_i вектора $U(x^{(1)})a_i$ $i = 2, ..., m$. (по формулам выше). Записываем вектор $x^{(1)}$ в матрицу U. В матрице A, получаем матрицу $A^{(1)}$

На к-том ($k = 1, ..., m$) шаге считаем $\|a_k^{(k-1)}\|$, находим $x^{(k)}$ Записываем на место $a_{k,k}^{(k-1)}$ число $\|a_k^{(k-1)}\|$ числа $a_{s,k} = 0$, $s = k+1, ..., m$, а на столбцы $a_i^{(k-1)}$ вектора $U(x^{(k)})a_i^{(k-1)}$ $i = k+1, ..., m$ (по формулам выше). Записываем вектор $x^{(k)}$ в матрицу U. В матрице A, получаем матрицу $A^{(k)}$.

Описание блочного алгоритма

Представим матрицу в виде:

$$A = \begin{pmatrix} A_{11}^{m\times m} & A_{12}^{m\times m} & \cdots & A_{1,k}^{m\times m} & A_{1,k+1}^{m\times l} & | & E_{11}^{m\times m} & 0 & \cdots & 0 \\ A_{21}^{m\times m} & A_{22}^{m\times m} & \cdots & A_{2,k}^{m\times m} & A_{2,k+1}^{m\times l} & | & 0 & E_{22}^{m\times m} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & | & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{k,1}^{m\times m} & A_{k,2}^{m\times m} & \cdots & A_{k,k}^{m\times m} & A_{k,k+1}^{m\times l} & | & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ A_{k+1,1}^{l\times m} & A_{k+1,2}^{l\times m} & \cdots & A_{k+1,k}^{l\times m} & A_{k+1,k+1}^{l\times l} & | & 0 & 0 & \cdots & E_{k+1,k+1}^{l\times l} \end{pmatrix}$$

где m - число на 1 меньше, чем обычно(оставляем возможность загружать в кэш память матрицы размера $(m+1)\times(m+1)$) $n = k*m + l$; $l < m$. И обозначим правую часть за блоки B:

$$A = \begin{pmatrix} A_{11}^{m\times m} & A_{12}^{m\times m} & \cdots & A_{1,k}^{m\times m} & A_{1,k+1}^{m\times l} & | & B_{11}^{m\times m} & B_{12}^{m\times m} & \cdots & B_{1,k+1}^{m\times l} \\ A_{21}^{m\times m} & A_{22}^{m\times m} & \cdots & A_{2,k}^{m\times m} & A_{2,k+1}^{m\times l} & | & B_{21}^{m\times m} & B_{22}^{m\times m} & \cdots & B_{2,k+1}^{m\times l} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & | & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{k,1}^{m\times m} & A_{k,2}^{m\times m} & \cdots & A_{k,k}^{m\times m} & A_{k,k+1}^{m\times l} & | & B_{k,1}^{m\times m} & B_{k,2}^{m\times m} & \cdots & B_{k,k+1}^{m\times l} \\ A_{k+1,1}^{l\times m} & A_{k+1,2}^{l\times m} & \cdots & A_{k+1,k}^{l\times m} & A_{k+1,k+1}^{l\times l} & | & B_{k+1,1}^{l\times m} & B_{k+1,2}^{l\times m} & \cdots & B_{k+1,k+1}^{l\times l} \end{pmatrix} \tag{10}$$

Шаг 1:

а)Берем блок $A_{1,1}^{m\times m}$ Применяем функцию Triangulize $A_{1,1}^{m\times m}$. получаем матрицу $U^{m\times m}$. Далее, применяем матрицу $U^{m\times m}$ к блокам $A_{1,j}^{m\times m}$ $j=2,...,k$; $A_{1,k+1}^{m\times l}$; $E_{1,1}^{m\times m}$ (Применение матрицы U(x) к нулевому блоку - дает нулевой блок)

б)Берем блок $A_{i,1}^{m\times m}$ и строчку $d^{(p_1)}=(a_{p,p};...;a_{p,m})$ $p=1,...,m$ (p-тая строка $A_{1,1}^{m\times m}$ без $(m-p+1)$ первых элементов) $(i=2,...,k)$. и для остатка $A_{k+1,1}^{l\times m}$ получаем матрицу $U^{(l+1)\times m}$

D = ConcatBlockWithString($A_{i,1}^{m\times(m-p)}$, $d^{(p_1)}$).
(в случае остатка D = ConcatBlockWithString($A_{k+1,1}^{l\times(m-p)}$, $d^{(p_1)}$))
$A_{i,1}^{m\times(m-p)}=A_{i,1}^{m\times m}$ - без первых p - столбцов. (Для остатка $A_{k+1,1}^{l\times(m-p)}=A_{k+1,1}^{l\times m}$)
По полученному блоку находим $x^{(p)}$, обнуляющий 1-ый столбец полученной матрицы, и применяем U($x^{(p)}$) к матрице D. После p=m получаем матрицу $U_{i,1}^{(m+1)\times m}$ $(U^{(l+1)\times m})$.
$A_{i,1}^{m\times m}=0$ $(A_{k+1,1}^{l\times m}=0)$ занеляем весь блок
Проходимся по всем правым блокам:

$A_{i,j}^{d^{(p_j)}}$ = ConcatBlockWithVector($A_{i,j}^{m\times m}$, $d^{(p_j)}$) ($A_{i,k+1}^{d^{(p_{k+1})}}$ = ConcatBlockWithVector($A_{i,k+1}^{m\times l}$, $d^{(p_{k+1})}$))

$B_{i,j}^{d^{(p_j)}}$ = ConcatBlockWithVector($B_{i,j}^{m\times m}$, $d^{(p_j)}$) ($B_{i,k+1}^{d^{(p_{k+1})}}$ = ConcatBlockWithVector($B_{i,k+1}^{m\times l}$, $d^{(p_{k+1})}$))

$A_{i,j}^{(1)}=U_{i,1}^{(m+1)\times m}A_{i,j}^{d^{(p_j)}}$ $j=2,...,k$; $A_{i,k+1}^{(1)}=U_{i,1}^{(m+1)\times l}A_{i,k+1}^{d^{(p_k)}}$
$B_{i,j}^{(1)}=U_{i,1}^{(m+1)\times m}B_{i,j}^{d^{(p_j)}}$ $j=2,...,k$; $B_{i,k+1}^{(1)}=U_{i,1}^{(m+1)\times l}B_{i,k+1}^{d^{(p_k)}}$

После 1-го шага матрица будет иметь вид:

$$A=\begin{pmatrix} T_{11}^{m\times m} & A_{12}^{m\times m} & \cdots & A_{1,k}^{m\times m} & A_{1,k+1}^{m\times l} & | & B_{11}^{m\times m} & B_{12}^{m\times m} & \cdots & B_{1,k+1}^{m\times l} \\ 0 & A_{22}^{m\times m} & \cdots & A_{2,k}^{m\times m} & A_{2,k+1}^{m\times l} & | & B_{21}^{m\times m} & B_{22}^{m\times m} & \cdots & B_{2,k+1}^{m\times l} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & | & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & A_{k,2}^{m\times m} & \cdots & A_{k,k}^{m\times m} & A_{k,k+1}^{m\times l} & | & B_{k,1}^{m\times m} & B_{k,2}^{m\times m} & \cdots & B_{k,k+1}^{m\times l} \\ 0 & A_{k+1,2}^{l\times m} & \cdots & A_{k+1,k}^{l\times m} & A_{k+1,k+1}^{l\times l} & | & B_{k+1,1}^{l\times m} & B_{k+1,2}^{l\times m} & \cdots & B_{k+1,k+1}^{l\times l} \end{pmatrix} \tag{11}$$

Где, T - треугольная матрица типа $A^{(m)}$

Шаг s:

а) Берем блок матрицы $A_{s,s}^{m\times m}$ $s=1,...,k$
Применяем функцию Triangulize к блоку $A_{s,s}^{m\times m}$ получаем матрицу $U^{m\times m}$.
Далее, применяем матрицу $U^{m\times m}$ к блокам $A_{i,j}^{m\times m}$; $A_{l,k+1}^{m\times l}$; $B_{s,j}^{m\times m}$ $B_{s,k+1}^{m\times l}$ $j=s+1,...,k$

б) Берем блок $A_{i,s}^{m\times m}$ $(i = s+1,...,k)$ и строку $d^{(p_1)} = (a_{p,p};...;a_{p,m})$ $p = 1,...,m$ (p-тая строчка матрицы $A_{l,l}^{m\times m}$ без первых m-p+1 элементов)
D = ConcatBlockWithString($A_{i,s}^{m\times(m-p)}$, $d^{(p_1)}$).(соеденили) $A_{i,s}^{m\times(m-p)} = A_{i,s}^{m\times m}$ - без первых p - столбцов.
Получаем матрицу $U^{(m+1)\times m}$ и применяем ее к правой части:
$A_{i,j}^{d^{(p_j)}}$ = ConcatBlockWithVector($A_{i,j}^{m\times m}$, $d^{(p_j)}$) ($A_{i,k+1}^{d^{(p_{k+1})}}$ = ConcatBlockWithVector($A_{i,k+1}^{m\times l}$, $d^{(p_{k+1})}$))

$B_{i,j}^{d^{(p_j)}}$ = ConcatBlockWithVector($B_{i,j}^{m\times m}$, $d^{(p_j)}$) ($B_{i,k+1}^{d^{(p_{k+1})}}$ = ConcatBlockWithVector($B_{i,k+1}^{m\times l}$, $d^{(p_{k+1})}$))

$A_{i,j}^{(s)} = U_{i,1}^{(m+1)\times m} A_{i,j}^{d^{(p_j)}}$ $j = 2,...,k$ $A_{i,k+1}^{(s)} = U_{i,1}^{(m+1)\times l} A_{i,k+1}^{d^{(p_k)}}$
$B_{i,j}^{(s)} = U_{i,1}^{(m+1)\times m} B_{i,j}^{d^{(p_j)}}$ $j = 2,...,k; B_{i,k+1}^{(s)} = U_{i,1}^{(m+1)\times l} B_{i,k+1}^{d^{(p_k)}}$

После s-го шага матрица А, имеет вид:

$$A = \left(\begin{array}{ccccc|cccc} T_{11}^{m\times m} & A_{12}^{m\times m} & \cdots & A_{1,k}^{m\times m} & A_{1,k+1}^{m\times l} & B_{11}^{m\times m} & B_{12}^{m\times m} & \cdots & B_{1,k+1}^{m\times l} \\ 0 & T_{22}^{m\times m} & \cdots & A_{2,k}^{m\times m} & A_{2,k+1}^{m\times l} & B_{21}^{m\times m} & B_{22}^{m\times m} & \cdots & B_{2,k+1}^{m\times l} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & T_{k,k}^{m\times m} & A_{k,k+1}^{m\times l} & B_{k,1}^{m\times m} & B_{k,2}^{m\times m} & \cdots & B_{k,k+1}^{m\times l} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & T_{k+1,k+1}^{l\times l} & B_{k+1,1}^{l\times m} & B_{k+1,2}^{l\times m} & \cdots & B_{k+1,k+1}^{l\times l} \end{array}\right) \tag{12}$$

Обратный ход

Теперь нужно найти обратные матрицы к треугольным матрицам на диагонали и свести матрицу к виду:

$$A = \left(\begin{array}{ccccc|cccc} E_{11}^{m\times m} & A_{12}^{m\times m} & \cdots & A_{1,k}^{m\times m} & A_{1,k+1}^{m\times l} & B_{11}^{m\times m} & B_{12}^{m\times m} & \cdots & B_{1,k+1}^{m\times l} \\ 0 & E_{22}^{m\times m} & \cdots & A_{2,k}^{m\times m} & A_{2,k+1}^{m\times l} & B_{21}^{m\times m} & B_{22}^{m\times m} & \cdots & B_{2,k+1}^{m\times l} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & E_{k,k}^{m\times m} & A_{k,k+1}^{m\times l} & B_{k,1}^{m\times m} & B_{k,2}^{m\times m} & \cdots & B_{k,k+1}^{m\times l} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & E_{k+1,k+1}^{l\times l} & B_{k+1,1}^{l\times m} & B_{k+1,2}^{l\times m} & \cdots & B_{k+1,k+1}^{l\times l} \end{array}\right) \tag{13}$$

Чтобы найчать обратный ход Гаусса.
А) Находим обратную матрицу к треугольной матрице $T^{n\times n}$:

$$T^{n\times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Записываем матрицу $T^{n\times n}$ в виде:

$$T^{n\times n} = \left(\begin{array}{cccc|cccc} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} & 0 & 0 & \dots & 1 \end{array}\right)$$

Обозначим матрицу справа, за мартицу B:

$$T^{n\times n} = \left(\begin{array}{cccc|cccc} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} & b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{array}\right)$$

Формулы:
$b_{ij} = b_{ij}/a_{ii}$; $a_{ik} = a_{ik}/a_{ii}$ $j = 1,...,n$ $i = 1,...,n$; $k = i+1,...,n$
$b_{n-1,j} = b_{n-1,j} - a_{n-1,n}b_{nj}$
$j = 1,...,n$ $i = 1,...,n$; $b_{ij} = b_{ij} - \sum\limits_{s=i+1}^{n} a_{it}b_{tj}$
В итоге финальная матрица $B = T^{-1}$

Б)Введем вспомогательную блочную мартицу C, куда мы будем записывать получающийся ответ. Преобразуем треугольную матрицу:

$C^{l\times m}_{k+1,j} = (T^{l\times l}_{k+1,k+1})^{-1} * B^{l\times m}_{k+1,j}$ $j = 1,...,k$ $C^{l\times l}_{k+1,k+1} = (T^{l\times l}_{k+1,k+1})^{-1} * B^{l\times l}_{k+1,k+1}$
$i = 1,...,k$; $j = i+1,...,k$ $A^{m\times m}_{ij} = (A^{m\times m}_{ii})^{-1} * A^{m\times m}_{ij}$, $A^{m\times l}_{i,k+1} = (A^{m\times m}_{ii})^{-1} * A^{m\times l}_{i,k+1}$;
$s = 1,...,k$ $B^{m\times m}_{is} = (A^{m\times m}_{ii})^{-1} * B^{m\times m}_{is}$, $B^{m\times l}_{i,k+1} = (A^{m\times m}_{ii})^{-1} * B^{m\times l}_{i,k+1}$

В)Теперь реализуем обратный ход.

$j = 1,...,k$; $C^{m\times m}_{kj} = B^{m\times m}_{kj} - A^{m\times l}_{k,k+1}C^{l\times m}_{k+1,j}$
$C^{m\times l}_{k,k+1} = B^{m\times l}_{k,k+1} - A^{m\times l}_{k,k+1}C^{l\times l}_{k+1,k+1}$
$i = k-1,...1$ $j = 1,...,k$ $C^{m\times m}_{ij} = B^{m\times m}_{ij} - \sum\limits_{t=i+1}^{k} A^{m\times m}_{it}C^{m\times m}_{tj} - A^{m\times l}_{i,k+1}C^{l\times m}_{k+1,j}$
$i = k-1,...,1$; $C^{m\times l}_{i,k+1} = B^{m\times l}_{i,k+1} - \sum\limits_{t=i+1}^{k} A^{m\times m}_{it}C^{m\times l}_{t,k+1} - A^{m\times l}_{i,k+1}C^{l\times 1}_{k+1,k+1}$
Матрица C является нашим ответом.

4 Сложность алгоритма

Вычисление сложности функции Triangulize:

По формулам из книги мы получаем:
1) На вычисление $U(x^{(k)})$ требуется $3(n-k)+7$ действий (считаем операцию умножения и сложения равностоящими).
2) $U(x^{(k)}A^{(k-1)})$ стоит $4(n-k)^2+2(n-k)$.
Итог: $\sum\limits_{k=1}^{n}(4(n-k)^2+7(n-k)+O(1)) = \frac{4n^3}{3} + \frac{3n^2}{2} + O(n)$

Применения матрицы U, к блокам:

3)Применение матрицы к вектору $4(n-k+1)$.
4) Применения матрицы к правой части $4n(n-k+1)$.
Не блочный алгорит нахождения обратной матрицы стоит:
$4\sum\limits_{k=1}^{n}(4n^2-8nk+2k^2) = \frac{8n^3}{3} - 12n^2 + O(n)$

Приведение матрицы к треугольному виду:

Будем считать(как на лекциях), что матрица поделилась нацело.
Тогда на Шаге 1) получается: $Triangulize$ + $(k-1)+k$ применеий мтарицы U к правой части $= \frac{4m^3}{3} + \frac{3m^2}{2} + O(m) + (2k-1)\sum\limits_{k=1}^{m}(4m(m-k+1)) = (2\frac{n}{m}-1)(2m^3+2m^2) + \frac{4m^3}{3} + \frac{3m^2}{2} + O(m) = \frac{4m^3}{3} + \frac{3m^2}{2} + O(m) + 4nm^2 - 2m^3 - 2m^2 + 4mn = 4nm^2 - \frac{2m^3}{3} - \frac{m^2}{2} + O(mn)$

Далее $(k-1)$(m подсчетов вектора $x^{(m)}$ и s применеий его к матрице $A^{(m+1)\times s}$ $s=1,...,m$) + (k-1 + k)(m применений вектора к блоку $(m+1)\times m$))) $= (k-1)(m(3m-m)+m*m(m-1)/2) + (2k-1)(4mm(m)) = \frac{5nm^2}{2} - \frac{3m^3}{2} + \frac{3mn}{2}$
Итог: $13nm^2/2 - 13m^3/6 - 2m^2 + 3m/2$

За l шагов: получается:

$Triangulize + (k-l)+k$ применеий мтарицы U к правой части $= \frac{4m^3}{3} - \frac{1m^2}{2} + O(m) + (2k-l)\sum_{k=1}^{m}(4m(m-k+1)) = \frac{4m^3}{3} - \frac{1m^2}{2} + 2(\frac{n}{m}-s)(m^3+m^2)$
Далее $(k-l)$(m подсчетов вектора $x^{(m)}$ и s применеий его к матрице $A^{(m+1)\times s}$ $s=1,...,m$) + (k-l + k)(m применений вектора к блоку $(m+1)\times m$))) $= (k-l)(\frac{3}{2}m(m*m+m) + (2k-l)(\sum_{s=1}^{m}(m*m*(m-s))) = (k-l)(3(m^3+m^2)/2 + (2k-s)(2(m^3-m^2)))$
В итоге суммируя по l получается :

$$\frac{5n^3}{3} + \frac{7}{4}n^2m - \frac{1}{12}m^2n + O(n^2+m^2) \tag{14}$$

При обратном ходе по формулам получаем: $(2m^3-m^2)*k*\sum_{s=1}^{k-1}(2m^3-m^2)*\frac{n}{m}*\sum_{s=1}^{k-1}s = (m^3-m^2) * \frac{n}{m} * \frac{\frac{n}{m}(\frac{n}{m}-1)}{2} = n^3 - n^2m + O(n^2)$
Чтобы из треугольной мтарицы получить хорошую:
$m^3*k + \frac{3(n^2)}{2} = nm^2 + O(n^2)$
В итоге:

$$S(n,m) = \frac{8}{3}n^3 + \frac{9}{4}n^2m + \frac{5}{12}nm^2 + O(n^2+m^2) \tag{15}$$

$S(n,1) = 8n^3/3 + O(n^2)$ $S(n,n) = 16n^3/3 + O(n^2)$