Лабораторная 2

Моисеев M33001, Муров M33011

Вариант 1

Две конкурирующие крупные торговые фирмы F_1 и F_2, планируют построить в одном из четырех небольших городов G_1, G_2, G_3, G_4, лежащих вдоль автомагистрали, по одному универсаму.

	G_1	G_2	G_3	G_4
км	0	30	40	150
тыс	30	50	40	30

Доход определяется численностью населения городов и степенью удаленности.

Пусть d_j^i - расстояния от магазина j фирмы до i города

При $d_1^i < d_2^i$ F_1 получает 75% При $d_1^i = d_2^i$ 60% При $d_1^i > d_2^i$ 45%

Матрица игры:

```python
ds, pops = data

def f(i, j, k):
    di, dj = abs(ds[i] - ds[k]), abs(ds[j] - ds[k])
    if di < dj:
        return 0.75
    elif di == dj:
        return 0.6
    else:
        return 0.45

[[sum(pops[k] * f(i, j, k) for k in range(4)) for j in range(4)] for i in range(4)]
```

$$\begin{pmatrix} 90.0 & 76.5 & 76.5 & 103.5 \\ 103.5 & 90.0 & 91.5 & 103.5 \\ 103.5 & 88.5 & 90.0 & 103.5 \\ 76.5 & 76.5 & 76.5 & 90.0 \end{pmatrix}$$

У нее есть седловая точка:

```python
max(map(min, matrix)), min(max(matrix[i][j] for i in range(4)) for j in range(4))
```

$$90.0 \quad 90.0$$

Оптимально обеим фирмам строить в G_2

Вариант 2

Двум погрузчикам разной мощности за 24 часа нужно погрузить на первой площадке 230 т, на второй - 68 т. Первый погрузчик на 1-ой площадке может погрузить 10 т в час, а на 2-ой - 12 т в час. Второй погрузчик на каждой площадке может погрузить по 13 т в час. Стоимость работ, связанных с погрузкой 1 т первым погрузчиком на первой площадке 8 руб., на второй - 7 руб., вторым погрузчиком на первой площадке - 12 руб., на второй - 13 руб. Нужно найти, какой объем работ должен выполнить каждый погрузчик на каждой площадке, чтобы стоимость всех работ по погрузке была минимальной.

Обозначим x_1, x_2, x_3, x_4 - времена работ погрузчиков в часах- 1 на 1 площадке, 1 на 2 площадке, 2 на 1 площаке, и 2 на 2 площадке

Условие в этом не четко, но будем считать, что погрузчики не могут работать одновременно.

Тогда $8 \cdot 10x_1 + 12 \cdot 13x_3 + 7 \cdot 12x_2 + 13 \cdot 13x_4 \to \min$

$$\begin{cases} 10x_1 + 13x_3 = 230 \\ 12x_2 + 13x_4 = 68 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \leq 24 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{cases}$$

Решаем симлекс методом

```
ans = solve1(
    n=4,
    objective=8 * 10 * x1 + 12 * 13 * x3 + 7 * 12 * x2 + 13 * 13 * x4,
    constraints=[
        10 * x1 + 13 * x3 - 230,
        12 * x2 + 13 * x4 - 68,
        x1 + x2 + x3 + x4 <= 24
    ],
    direction="min"
)
[round(t, 5) for t in ans]
```

$$2.77778 \quad 5.66667 \quad 15.55556 \quad 0.0$$

Объем работ:

```
[round(t * x, 3) for t, x in zip(ans, [10, 13, 12, 13])]
```

$$27.778 \quad 73.667 \quad 186.667 \quad 0.0$$

Вариант 6

$$\begin{matrix} 7 & 2 & 5 & 1 \\ 2 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 3 & 4 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 6 \end{matrix}$$

Упростим матрицу, используя доминирующие строки и столбцы

$$\begin{matrix} 7 & 5 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 6 \end{matrix}$$

```
min(map(max, matrix)), max(min(matrix[i][j] for i in range(3)) for j in range(3))
```

$$4 \quad 2$$

Седловой точки нет

Составим систему для ЛП

$x_1 + x_2 + x_3 \to \max$

$$\begin{cases} 7x_1 + 2x_2 + 3x_3 \leq 1 \\ 5x_1 + 3x_2 + x_3 \leq 1 \\ x_1 + 4x_2 + 6x_3 \leq 1 \end{cases}$$

Решаем ее

```
solve1(
    n=3,
    objective=x1 + x2 + x3,
    constraints=[
        7 * x1 + 2 * x2 + 3 * x3 <= 1,
        5 * x1 + 3 * x2 + x3  <= 1,
        x1 + 4 * x2 + 6 * x3 <= 1,
    ],
    direction="max",
)
```

$$0.07692308 \quad 0.1978022 \quad 0.02197802$$

Стратегия первого игрока:

```
total = sum(sol)
[round(x / total, 3) for x in sol]
```

$$0.259 \quad 0.667 \quad 0.074$$

Для второго игрока:

```
sol = solve1(
    n=3,
    objective=x1 + x2 + x3,
    constraints=[
        7 * x1 + 5 * x2 + x3 >= 1,
        2 * x1 + 3 * x2 + 4 * x3  >= 1,
        3 * x1 + x2 + 6 * x3 >= 1,
    ],
    direction="min",
)
[round(x /sol.sum(), 3) for x in sol]
```

$$0.074 \quad 0.481 \quad 0.444$$

Математическое ожидание проигрыша первого игрока:

```
round(sum(matrix[i][j] * ans1[i] * ans2[j] for i in range(3) for j in range(3)), 3)
```

```
3.367
```

Вариант 7

Платежная матрица:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Стратегии:

$$\begin{pmatrix} 6/13 & 3/13 & 4/13 \\ 6/13 & 4/13 & 3/13 \end{pmatrix}$$

```
strat1, strat2 = strat
round(sum(strat1[i] * sum(matrix[i][j] * strat2[j] for j in range(3)) for i in range(3)), 3)
```

```
-0.077
```

Вариант 8

$x_1 + x_2 \to \min$

$$\begin{cases} 7x_1 + 2x_2 \geq 1 \\ x_1 + 11x_2 \geq 1 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Пусть

$$\begin{cases} x_1 = \frac{x}{v} \\ x_2 = \frac{1-x}{v} \end{cases}$$

Тогда задачу можно записать как

$v = \frac{1}{x_1+x_2} \to max$

$$\begin{cases} 7x + 2(1-x) \geq v \\ x + 11(1-x) \geq v \\ 1 \geq x \geq 0 \end{cases}$$

Если рассматривать x, как вероятность выбора 1м игроком 1й стратегии, а каждую строку как случай чистой стратегии 2го игрока, это соответствует матричной игре

$$\begin{pmatrix} 7 & 1 \\ 2 & 11 \end{pmatrix}$$

Вариант 9

Матрица игры:

7	2	5	1
2	2	3	4
5	3	4	4
3	2	1	6