Exercise 1.

证明：

若 $\sin \pi z = 0$，则必然有

$$0 = \sin \pi z = \frac{e^{i\pi z} - e^{-i\pi z}}{2i}$$

即 $e^{2i\pi z} = 1$，进而可推知 $z \in \mathbb{Z}$。

任取整数 n，$\sin \pi z$ 在 n 附近有级数展开式

$$\sin \pi z = \sum_{k \geq 0} \frac{(-1)^{k+n}}{(2k+1)!} \pi^{2k+1} (z-n)^{2k+1}$$

因此零点 n 的次数是 1。进而有

$$\operatorname{res}_n \frac{1}{\sin \pi z} = \lim_{z \to n} \frac{z-n}{\sin \pi z} = 1$$

□

Exercise 2.

解：

易知 $f(z) = \dfrac{1}{1+x^4}$ 有四个单极点

$$\pm \frac{1}{\sqrt{2}}(1 \pm i)$$

令 γ_R 表示复平面上以 0 为圆心 $R > 1$ 为半径的上半圆周，则有两个 $f(z)$ 的极点

$$z_{1,2} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\pm 1 + i)$$

落在上半圆内部，进而有

$$2\pi i(\operatorname{res}_{z_0} f + \operatorname{res}_{z_1} f) = \int_{\gamma_R} f(z) \mathrm{d}z + \int_{-R}^{R} f(x) \mathrm{d}x \tag{2.1}$$

由于在 γ_R 上有 $|f(z)| = O(R^{-4})$，故当 R 充分大时式 (2.1) 右端第一项趋于 0。对式 (2.1) 两端同时在 $R \to +\infty$ 下取极限可得

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^4} \mathrm{d}x &= 2\pi i(\operatorname{res}_{z_0} f + \operatorname{res}_{z_1} f) \\ &= 2\pi i \left(\lim_{z \to z_0} \frac{z-z_0}{1+z^4} + \lim_{z \to z_1} \frac{z-z_1}{1+z^4} \right) = \frac{\pi}{\sqrt{2}}\end{aligned}$$

□

Exercise 3.

证明：

取 $f(z)=\dfrac{e^{iz}}{z^2+a^2}$，则 $f(z)$ 有两个单极点 $\pm ai$。记 γ_R 表示以 0 为圆心，$R>a$ 为半径的上半圆，则有

$$\int_{-R}^{R} f(x)\mathrm{d}x+\int_{\gamma_R} f(z)\mathrm{d}z=2\pi i\cdot \operatorname{res}_{ai} f=\pi\cdot\frac{e^{-a}}{a} \tag{3.1}$$

又由

$$\lim_{R\to+\infty}\frac{1}{z^2+a^2}=0$$

可知式 (3.1) 左端第二项积分当 $R\to+\infty$ 时趋于 0，此时有

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x=\pi\cdot\frac{e^{-a}}{a}$$

比较等式两边的实部即可得到所求的结论。

□

Exercise 4.

证明：

取 $f(z)=\dfrac{ze^{iz}}{z^2+a^2}$，则 $f(z)$ 有两个单极点 $\pm ai$。记 γ_R 表示以 0 为圆心，$R>a$ 为半径的上半圆，则有

$$\int_{-R}^{R} f(x)\mathrm{d}x+\int_{\gamma_R} f(z)\mathrm{d}z=2\pi i\cdot \operatorname{res}_{ai} f=\pi i\cdot e^{-a} \tag{4.1}$$

又由

$$\lim_{R\to+\infty}\frac{z}{z^2+a^2}=0$$

可知式 (4.1) 左端第二项积分当 $R\to+\infty$ 时趋于 0，此时有

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x=\pi i\cdot e^{-a}$$

比较等式两边的虚部即可得到所求的结论。

□

Exercise 5.

证明：

取 $f(z)=\dfrac{e^{-2\pi iz\xi}}{(1+z^2)^2}$，则 $f(z)$ 有两个极点 $\pm i$，且次数均为 2。

对于 $\xi>0$ 的情形，记 γ_R 表示以 0 为圆心，$R>1$ 为半径的下半圆，则有

$$\int_{R}^{-R} f(x)\mathrm{d}z+\int_{\gamma_R} f(z)\mathrm{d}z=2\pi i\cdot \operatorname{res}_{-i} f=-\frac{\pi}{2}(1+2\pi\xi)e^{-2\pi\xi}$$

又由于

$$\begin{aligned}\left|\int_{\gamma_R} f(z)\mathrm{d}z\right| &= \left|\int_{-\pi}^{0} f(Re^{i\theta}) \cdot iRe^{i\theta}\mathrm{d}\theta\right| \\ &\le \int_{-\pi}^{0} \left|f(Re^{i\theta}) \cdot iRe^{i\theta}\right| \mathrm{d}\theta \\ &= \int_{-\pi}^{0} \frac{R \cdot \exp(2\pi\xi R\sin\theta)}{|1+z^2|^2}\mathrm{d}\theta\end{aligned}$$

由于当 $\theta \in [-\pi, 0]$ 时有 $\sin\theta \le 0$，因此上式右端积分当 $R \to \infty$ 时趋于 0，进而

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}(1+2\pi\xi)e^{-2\pi\xi}$$

对于 $\xi < 0$ 的情况，取上半圆即可同理推出。$\xi = 0$ 的情况平凡。

□

Exercise 6.

证明：

取 $f(z) = \dfrac{1}{(1+z^2)^{n+1}}$，则 $f(z)$ 有两个极点 $\pm i$，且次数均为 $n+1$。记 γ_R 表示以 0 为圆心，$R > 1$ 为半径的上半圆，则有

$$\int_{-R}^{R} f(x)\mathrm{d}x + \int_{\gamma_R} f(z)\mathrm{d}z = 2\pi i \cdot \mathrm{res}_i\, f \tag{6.1}$$

又由

$$\lim_{R\to+\infty} zf(z) = 0$$

可知式 (6.1) 左端第二项积分当 $R \to +\infty$ 时趋于 0，此时有

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x &= 2\pi i \cdot \mathrm{res}_i\, f = \frac{2\pi i}{n!} \lim_{z\to i} \frac{\partial^n}{\partial z^n}(x-i)^{n+1} f \\ &= \frac{2\pi i}{n!} \lim_{z\to i} \frac{\partial^n}{\partial z^n}(x+i)^{-(n+1)} = \pi \cdot \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\end{aligned}$$

□

Exercise 7.

证明：

由已知，记 C 表示单位圆周，则有

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}\theta}{(a+\cos\theta)^2} &= \int_0^{2\pi} \left(a + \frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}\right)^{-2} \frac{\mathrm{d}e^{i\theta}}{ie^{i\theta}} \\ &= -4i \int_C \frac{z}{(z^2+2az+1)^2}\mathrm{d}z\end{aligned}$$

由于函数 $f(z)=\dfrac{z}{(z^2+2az+1)^2}$ 在 C 内部仅有一个 2 次极点 $z_0=\sqrt{a^2-1}-a$，故

$$\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{d}\theta}{(a+\cos\theta)^2}=8\pi\cdot\operatorname{res}_{z_0}f=\frac{2\pi a}{(a^2-1)^{3/2}}$$

□

Exercise 8.

证明：

由已知，记 C 表示单位圆周，则有

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{d}\theta}{a+b\cos\theta}&=\int_0^{2\pi}\left(a+\frac{b}{2}(e^{i\theta}+e^{-i\theta})\right)^{-1}\frac{\mathrm{d}e^{i\theta}}{ie^{i\theta}}\\&=-2i\int_C\frac{1}{bz^2+2az+b}\mathrm{d}z\end{aligned}$$

由于函数 $f(z)=\dfrac{1}{bz^2+2az+b}$ 在复平面上有两个 1 阶极点 $z_\pm=\dfrac{-a\pm\sqrt{a^2-b^2}}{b}$，仅有 z_+ 在 C 内部，故

$$\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{d}\theta}{a+b\cos\theta}=4\pi\cdot\operatorname{res}_{z_+}f=\frac{2\pi}{(a^2-b^2)^{1/2}}$$

□

Exercise 9.

证明：

根据定义，有

$$\sin\pi z=\frac{e^{i\pi z}-e^{-i\pi z}}{2i}=\frac{e^{2i\pi z}-1}{2ie^{i\pi z}}$$

考察 $f(z)=\log(1-e^{2\pi iz})$，并取 log 的单值分支使得 $\arg z\in(-\pi,\pi]$。易知 f 在 $\mathbb{C}-\mathbb{Z}$ 上全纯。

考虑 $f(z)$ 在矩形 $E_R=\{z\in\mathbb{C}:\operatorname{Re}z\in[0,1],\operatorname{Im}z\in[0,R]\}$ 边界上的积分。由于 f 在 0 和 1 处没有定义，故需要用一个半径为 ϵ 的圆弧代替。

在 0 点附近的小圆弧 $\gamma_r:z=re^{i\theta},\left(0\le\theta\le\frac{\pi}{2}\right)$ 上有

$$\lim_{r\to0}zf(z)=0$$

当 $r\to0^+$ 时 $f(z)$ 在 γ_r 上的积分收敛于 0。类似可知在 1 附近的圆弧上的积分也收敛到 0。

由柯西定理，有

$$\int_0^1f(x)\mathrm{d}x+\int_{\gamma_1}f(z)\mathrm{d}z+\int_{\gamma_2}f(z)\mathrm{d}z+\int_{\gamma_3}f(z)\mathrm{d}z=0\tag{9.1}$$

其中 $[0,1],\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3$ 顺次为矩形 E_R 的四条边。

又由于

$$\int_{\gamma_1} f(z)\mathrm{d}z = \int_{\epsilon}^{R} f(1+ri)\cdot i\mathrm{d}r = \int_{\epsilon}^{R} f(ri)\cdot i\mathrm{d}r = -\int_{\gamma_3} f(z)\mathrm{d}z \tag{9.2}$$

以及

$$\int_{\gamma_2} f(z)\mathrm{d}z = \int_{1}^{0} f(x+2Ri)\mathrm{d}x = -\int_{0}^{1} \log(1-e^{2\pi i(x+2Ri)})\mathrm{d}x \tag{9.3}$$

当 $R\to+\infty$ 时 $e^{2\pi i(x+2Ri)}\to 0$，进而上述积分收敛于 0。

将 (9.2) 和 (9.3) 代入 (9.1)，并对 $R\to+\infty$ 取极限，得

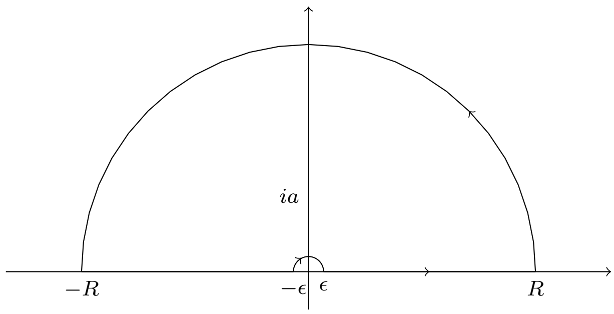
$$\begin{aligned} 0 &= \int_0^1 \log(1-e^{2\pi i x})\mathrm{d}x = \int_0^1 \log(-2ie^{i\pi x}\sin\pi x)\mathrm{d}x \\ &= \log 2 + \int_0^1 \log\sin\pi x \mathrm{d}x \end{aligned}$$

□

Exercise 10.

证明：

由已知，函数 $f(z)=\dfrac{\log z}{z^2+a^2}$ 在如下图所示的曲线围成的区域内亚纯，并有单极点 ia。



由留数公式，有

$$\int_{\epsilon}^{R} f(x)\mathrm{d}x + \int_{\gamma_R} f(z)\mathrm{d}z + \int_{-R}^{-\epsilon} f(x)\mathrm{d}x + \int_{\gamma_\epsilon} f(z)\mathrm{d}z = 2\pi i\cdot \mathrm{res}_{ia} f = \frac{\pi\log a}{a} + i\cdot\frac{\pi^2}{2a} \tag{10.1}$$

由于 $zf(z)$ 在 $|z|\to+\infty$ 和 $|z|\to 0$ 时均收敛至 0，故式 (10.1) 左端第二项和第四项均收敛至 0。

对于等号左边第三项，有

$$\int_{-R}^{-\epsilon} f(x)\mathrm{d}x = \int_{\epsilon}^{R} f(-x)\mathrm{d}x = \int_{\epsilon}^{R} \frac{\log x}{x^2+a^2}\mathrm{d}x + i\pi\int_{\epsilon}^{R}\frac{1}{x^2+a^2}\mathrm{d}x$$

且当 $R\to+\infty$ 以及 $\epsilon\to 0$ 时最后一个积分收敛至 $\dfrac{\pi}{2a}$。

将上述结论代入式 (10.1)，有

$$\int_0^\infty \frac{\log x}{x^2+a^2} = \frac{\pi}{2a}\log a$$

□

Exercise 11.

证明：

由已知，当 $|a|<1$ 时，$f(z)=\log(1-az)$ 在单位圆周 γ 及其内部全纯，因此

$$\int_\gamma \log(1-az)\mathrm{d}z = 0$$

观察等式两边的实部即可得到需要证明的式子。

记单位圆盘为 $\mathbb{D}$ 考虑定义在 $\mathbb{D}\times[0,2\pi]$ 上的函数 $F(a,\theta)=\log(1-ae^{i\theta})$。显然 F 连续且对于给定的 $\theta_0\in[0,2\pi]$，$F(a,\theta_0)$ 作为 a 的函数在 $\mathbb{D}$ 上全纯。因此

$$g(a) = \int_0^{2\pi} F(a,\theta)\mathrm{d}\theta$$

是 $\mathbb{D}$ 上的全纯函数。

对于给定的 $\theta_0\in[0,2\pi]$，显然 $F(a,\theta_0)$ 作为 a 的函数在单位圆周 $\partial\mathbb{D}$ 上的不连续点有且仅有 $a=e^{-i\theta_0}$ 一个，因此 g 在 $\partial\mathbb{D}$ 上也连续，即 g 在 $\overline{\mathbb{D}}$ 上连续。进而由 g 在 $\mathbb{D}$ 内取值恒为 0 可知其连续延拓至 $\partial\mathbb{D}$ 上后取值也为 0。

□

Exercise 12.

证明：

由已知，函数 $f(z)=\dfrac{\pi\cot\pi z}{(z+u)^2}$ 有单极点 $\mathbb{Z}$ 以及一个二阶极点 $-u$，进而有

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C_R} f(z)\mathrm{d}z = \operatorname{res}_{-u} f + \sum_{k\in\mathbb{Z}} \operatorname{res}_k f$$

易证当 $|z|=R$ 时 $|\cot\pi z|$ 有界。此时

$$|f(z)| = |\cot\pi z|\frac{\pi}{|u+z|^2} = O(R^{-2})$$

因此当 $R\to\infty$ 时上式左端积分趋于 0。

故有

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} \operatorname{res}_k f = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{1}{(k+u)^2} = -\operatorname{res}_{-u} f = \frac{\pi^2}{\sin^2\pi u}$$

□

Exercise 13.

证明：

只需证明

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{C_R(z_0)}\frac{f(\xi)}{\xi-z}\mathrm{d}\xi \qquad \forall z\in D_R(z_0)\backslash\{z_0\} \tag{13.1}$$

其中 $0<R<r$ 是一个给定的实数。

与可去奇点的 Riemann 定理的证明过程类似，我们有

$$\int_{C_R}\frac{f(\xi)}{\xi-z}\mathrm{d}\xi=\int_{\gamma_\delta}\frac{f(\xi)}{\xi-z}\mathrm{d}\xi+\int_{\gamma'_\delta}\frac{f(\xi)}{\xi-z}\mathrm{d}\xi$$

其中 γ_δ 和 γ'_δ 分别为以 z 和 z_0 为圆心，δ 为半径的圆圈。

对 γ_δ 及其内部应用 Riemann 积分公式，有

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_\delta}\frac{f(\xi)}{\xi-z}\mathrm{d}\xi=f(z)$$

另一方面，当 $\delta\to 0$ 时有

$$\left|\int_{\gamma'_\delta}\frac{f(\xi)}{\xi-z}\mathrm{d}\xi\right|\le\int_{\gamma'_\delta}\frac{|f(\xi)|}{|\xi-z|}\mathrm{d}\xi\le A\int_{\gamma'_\delta}\frac{\delta^{-1+\epsilon}}{|\xi-z|}\mathrm{d}\xi\le 2\pi A\delta^{\epsilon}\cdot\sup|\xi-z|^{-1}\to 0$$

综上，式 (13.1) 成立，进而由解析延拓的唯一性可知原命题成立。

□

Exercise 14.

证明：

考虑函数 $f(1/z)$，显然 $z=0$ 是一个奇点。

若 $z=0$ 是本性奇点，则由 Casorati-Weierstrass 定理可知 $f(1/z)$ 在 0 附近的某个去心圆盘 $D_r^*(0)$ 内取值稠密，则任取开集 $\Omega\subset(D_r(0))^C$，$f(1/z)$ 在 Ω 上的取值不可能为开集，进而 $f(1/z)$ 不是开映射，与 $f(1/z)$ 在 $\mathbb{C}\backslash\{0\}$ 上全纯矛盾。

若 $z=0$ 是可去奇点，则由可去奇点的 Riemann 定理可知 $f(1/z)$ 在 0 附近的某个去心圆盘 $D_r^*(0)$ 内有界，进而可知 f 在平面区域

$$\left\{z:|z|>\frac{1}{r}\right\}$$

取值有界。与此同时 f 在紧集 $\overline{D_{1/r}(0)}$ 上显然有界，故由 Liouville 定理可知 f 取常值，这与 f 是单射矛盾。

因此 $z=0$ 只能是极点，故 $f(1/z)$ 在 0 附近可表示为

$$f(1/z)=\sum_{-k\ge -m}a_{-k}z^k$$

此时有

$$f(z)=\sum_{k\le m}a_kz^k$$

由 f 在 $\mathbb{C}$ 上全纯可知当 $k<0$ 时有 $a_k=0$，即 f 是多项式。又由 f 是单射及代数基本定理可知当 $k>1$ 时也有 $a_k=0$。故 f 必然有 $f(z)=az+b$ 的形式。

□

Exercise 15.

证明：

(a). 由 Cauchy 不等式可知，当 $n>k$ 时有

$$|f^{(n)}(0)|\le\frac{n!||f||_C}{R^n}\le n!\cdot\frac{AR^k+B}{R^n}$$

当 $R\to+\infty$ 可知 $f^{(n)}(0)=0$。

又由于 f 是整函数，故 f 在 0 附近可展开为

$$f(z)=\sum_{r=0}^{k}f^{(k)}(0)\frac{z^k}{k!}$$

由解析延拓的唯一性可知上式在整个复平面上成立。

(b). 不妨设 $\theta=0$，并记 $n=\left\lceil\frac{2\pi}{\varphi}\right\rceil$。令

$$F(z)=\prod_{k=0}^{N}f(z\cdot e^{ik\varphi})$$

则对任意 $z\in\mathbb{D}$，总存在一个 k 使得 $z\cdot e^{ik\varphi}$ 落在扇形 $\{z:0<\arg z<\varphi\}$ 中，因此 $F(z)$ 在整个单位圆圈 $\partial\mathbb{D}$ 上一致收敛至 0，因此可以将 F 连续地延拓到 $\overline{\mathbb{D}}$ 上，且 F 在 $\partial\mathbb{D}$ 上取值为 0。

注意到 $\partial\mathbb{D}$ 紧致，由最大模原理，F 的最大模只能在 $\partial\mathbb{D}$ 取到，故 F 恒等于 0。进而可知对任意 $z\in\mathbb{Z}$，所有 $z\cdot e^{ik\varphi}$ 中至少有一个是 f 的零点，因此 f 有不可数个零点，进而由零点的孤立性可知 f 在 $\mathbb{D}$ 上恒为 0。

(c). 考虑函数

$$f(z)=\prod_{i=1}^{n}(z-w_i)$$

显然其在整个复平面上全纯。进而由极大模原理可知

$$\sup_{|z|=1}|f(z)|>|f(0)|=1$$

又由于单位圆圈 $\{z:|z|=1\}$ 紧致，故上述极大值可以取到。

另一方面，在单位圆周上有 $|f(w_1)|=0$，故由介值定理可知存在 $|z_0|=1$ 使得 $|f(z_0)|=1$。

(d). 考虑函数 $g(z)=e^{f(z)}$，则有

$$|g(z)|=e^{\mathrm{Re}\, f(z)}$$

显然 g 是整函数，同时由 $\mathrm{Re}\, f$ 有界知 $|g|$ 有界，进而有 Liouville 定理可知 g 取值为常数，进而由 f 全纯可知 f 取值也是常数。

□

Exercise 16.

证明：

(a). 由已知，在单位圆圈上 f 取值不为 0，进而存在 $m>0$ 使得

$$|f(z)|>m$$

与此同时，由于单位圆圈紧致，故 g 在其上有最大值 M，进而存在 $\epsilon>0$ 使得

$$|f(z)|>\epsilon|g(z)| \qquad \forall |z|=1$$

由 Rouche 定理可知 f_ϵ 的零点个数与 f 一致，均为 1。

(b). 任取 ϵ，则对于开圆盘 $D_r(z_\epsilon)$，必然存在 δ_r 使得

$$|f_\epsilon(z)|\geq\delta_r \qquad \forall z\in\mathbb{D}\backslash D_r(z_\epsilon)$$

因此，对任意的 $d>0$，当 $|\epsilon'-\epsilon|<d$ 时有

$$|f_{\epsilon'}(z)-f_\epsilon(z)|=|\epsilon'-\epsilon||g(z)|\leq dM$$

当 $dM<\delta_r$ 时，$f_{\epsilon'}$ 的零点不可能落在 $\mathbb{D}\backslash D_r(z_\epsilon)$ 中，此时有

$$|z_{\epsilon'}-z_\epsilon|<r$$

注意到 f_ϵ 有唯一零点，故当 $\delta_r\to 0$ 时必然有 $r\to 0$，命题由此得证。

□

Exercise 17.

证明：

(a) 严格弱于 (b)，这里仅证明 (b)。

若 $f(z)$ 在 $\mathbb{D}$ 上无零点，则由 $\overline{\mathbb{D}}$ 紧致可知 $|f|$ 有极大值 M 和极小值 $0<m<1$。同时由极大模原理可知 $M\geq 1$ 且在边界 $\partial\mathbb{D}$ 上取到。

此时函数 $\dfrac{1}{f(z)}$ 在 $\mathbb{D}$ 上也全纯，而根据假设，其在紧集 $\overline{\mathbb{D}}$ 上的最大模为

$$\frac{1}{m}>1$$

但 $\dfrac{1}{f(z)}$ 在 $\partial\mathbb{D}$ 上模长不超过 1，这与极大模原理矛盾。

现任取 $w_0 \in \mathbb{D}$，有

$$|f(z)| \geq 1 > |-w_0| \qquad \forall z \in \partial\mathbb{D}$$

故由 Rouche 定理可知 $f(z) + (-w_0)$ 与 $f(z)$ 在 $\mathbb{D}$ 上有相等的零点数量，因此存在 $z_0 \in \mathbb{D}$ 使得 $f(z_0) = w_0$。

□

Exercise 18.

证明：

对于给定的 z，函数 $F(\xi) = \dfrac{f(\xi)}{\xi - z}$ 在圆圈 C 内部除 z 以外全纯，此时圆圈 C 同伦于以 z 为圆心的圆圈 $C_r(z)$，其中

$$\overline{D_r(z)} \subset \Omega$$

因此有

$$\int_C F(\xi)\mathrm{d}\xi = \int_{C_r(z)} F(\xi)\mathrm{d}\xi = \int_0^{2\pi} \frac{f(z + r\cdot e^{i\theta})}{r\cdot e^{i\theta}} \cdot ir\cdot e^{i\theta}\mathrm{d}\theta$$

上式中令 $r \to 0$，则有

$$\lim_{r\to 0}\int_{C_r} F(\xi)\mathrm{d}\xi = i\lim_{r\to 0}\int_0^{2\pi} f(z + r\cdot e^{i\theta})\mathrm{d}\theta = 2\pi i\cdot f(z)$$

□

Exercise 19.

证明：

只证明 (a)，(b) 可直接由 (a) 推出。

由 u 是调和函数可知存在全纯函数 f 使得 $\mathrm{Re}(f) = u$。由于 u 非常值，f 也非常值，进而 f 是开映射。

对于 z_0 的任何开邻域 $D_r(z_0) \subset \Omega$，$f(D_r(z_0))$ 都是开集，进而必然存在 $z_1 \in D_r(z_0)$ 使得 $\mathrm{Re}\, f(z_1) > \mathrm{Re}\, f(z_0)$，这与 z_0 是 u 的极值点矛盾。极小值同理。

□

Exercise 20.

证明：

(a). 由已知，f 在 $D_s(z_0)$ 上全纯，由极大模原理，不妨设 $|f|$ 在 $\omega \in \partial D_s(z_0)$ 取到极大模。记 $d = r - s > 0$，则 f 在 $D_d(\omega)$ 上全纯，进而由平均值原理可知对任意 $0 < t < d$ 有

$$|f(\omega)| = \left|\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(z_0 + te^{i\theta})\mathrm{d}\theta\right| \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(z_0 + te^{i\theta})|\mathrm{d}\theta$$

进而

$$\int_{D_r(z_0)}|f(z)|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y \geq \int_{D_d(\omega)}|f(z)|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^d t\mathrm{d}t\int_0^{2\pi}|f(\omega+te^{i\theta})|\mathrm{d}\theta \geq \pi d^2|f(\omega)|$$

综上，取 $C = \dfrac{1}{\sqrt{\pi}(r-s)}$ 即可。

(b). 若 $\{f_n\}$ 在 L^2 范数下收敛，则由 (a) 的结论可知其亦在 L^∞ 范数下收敛，即一致收敛。进而由全纯函数的性质可知序列 $\{f_n\}$ 的极限全纯。

$\square$

Exercise 21.

证明：

(a). 不妨设 $\gamma:[0,1]\to\Omega$ 是 Ω 上的一条道路，$z_0\in\Omega$ 是任意一点，则有同伦映射

$$G(s,t)=(1-s)\gamma(t)+s\cdot z_0$$

显然由凸性可知 G 的值域在 Ω 中，进而道路 γ 和单点集 $\{z_0\}$ 同伦。由 γ 的任意性可知 Ω 单连通。

(b). 与 (a) 完全类似，这里 z_0 换为条件给出的 z_0 即可。$\mathbb{C}-(-\infty,0]$ 显然是星型的（可取 $z_0=1$），进而单连通。

$\square$

Exercise 22.

证明：

假设存在符合要求的 f。由于 f 在紧集 $\overline{D}$ 上连续，故一致连续，即任给 $\delta>0$，存在 $\epsilon>0$，当 $|z_1-z_2|\leq\delta$ 时总有

$$|f(z_1)-f(z_2)|<\epsilon$$

现令 $|z_1|=1$, $z_2=(1-\delta)z_1$，则有

$$\left|\int f(z_1)-f(z_2)\mathrm{d}z\right| < \int|f(z_1)-f(z_2)|\mathrm{d}z < 2\pi\epsilon$$

而注意到

$$\int f(z_1)\mathrm{d}z = \int_{\partial\mathbb{D}}f(z)\mathrm{d}z = \int_{\partial\mathbb{D}}\frac{\mathrm{d}z}{z} \qquad \int f(z_2)\mathrm{d}z = \int_{|z|=1-\delta}f(z)\mathrm{d}z$$

又有 f 在 $\mathbb{D}$ 上全纯可知第二个积分取值为 0，故第一个积分取值也应该是 0，由此产生矛盾。

$\square$