Problem 1.

证明：

(a). 记 $\theta = \frac{p}{2^k} \cdot 2\pi$，其中 p 为正奇数，k 是满足 $0 \leq p < 2^k$ 的非负整数。取 $z = r \cdot e^{i\theta}$，则当 $n \geq k$ 时有

$$z^{2^n} = r^{2^n}$$

进而当 $r \to 1$ 时级数 $f(z)$ 不收敛。

事实上，前面给出的 θ 涵盖了 $[0, 1)$ 内的全部二进制有限小数，故 $e^{i\theta}$ 在单位圆周 C 上稠密，进而无法在单位圆周 C 上找到一个正则（regular）点，即 $f(z)$ 无法解析延拓至单位圆盘外。

(b). 显然给出的 $f(z)$ 当 $|z| = 1$ 时仍然绝对收敛，因此可以直接将原有函数连续延拓到单位圆周 C 上。下面证明命题的后半部分。

对于 $0 < \alpha \leq 1$ 的情况，$f(z)$ 在单位圆周上的表达式为

$$f(e^{i\theta}) = \sum_{n \geq 0} 2^{-n\alpha} e^{i2^n\theta}$$

根据 Hint 指向的内容，上述函数处处不可导，因此 $f(z)$ 无法解析延拓至单位圆周外。

对于 $1 < \alpha \leq 2$ 的情况，由于在单位圆盘 $\mathbb{D}$ 内有

$$g(z) = zf'(z) = \sum_{n \geq 0} 2^{(1-\alpha)n} z^{2^n}$$

若 $f(z)$ 可解析延拓到单位圆盘外，$g(z)$ 必然也可以。但此时时有 $-1 \leq 1 - \alpha < 0$，而前面 $0 < \alpha \leq 1$ 的论证表明 $g(z)$ 无法延拓到单位圆盘外，故 $f(z)$ 也不行。

类似地，对于 $2 < \alpha \leq 3$ 的情况可通过讨论 $zg'(z)$ 得到。不断归纳下去即可完成证明。

□

Problem 2.

证明：

当 $|z|<1$ 时，由绝对收敛可知

$$\sum_{n\geq 1}\frac{z^n}{1-z^n}=\sum_{n\geq 1}\sum_{k\geq 1}z^{kn}=\sum_{d\geq 1}z^d\sum_{n|d}1=\sum_{d\geq 1}d(n)z^d$$

对于剩下的两个不等式估计，由于 $z=r$ 的情形实际上是 $z=re^{2\pi ip/q}$ 中 $q=1$ 的特例，我们直接证明后者。

不妨设 $0\leq p<q$ 且 p,q 互素。取 $z=re^{i\theta}$，则有

$$|F(z)|=\left|\sum_{n\geq 1}\frac{z^n}{1-z^n}\right|\geq\left|\sum_{q|n}\frac{z^n}{1-z^n}\right|-\left|\sum_{q\nmid n}\frac{z^n}{1-z^n}\right| \tag{2.1}$$

对于上式右端第一项，注意到当 $q|n$ 时有 $z^n=r^n$，因此

$$\begin{aligned}(1-r)\left|\sum_{q|n}\frac{z^n}{1-z^n}\right|&=(1-r)\sum_{k\geq 1}\frac{r^{kq}}{1-r^{kq}}=\frac{1-r}{1-r^q}\sum_{k\geq 1}\frac{r^{kq}(1-r^q)}{1-r^{kq}}\\&=\frac{1}{1+r+\cdots+r^{q-1}}\sum_{k\geq 1}\frac{r^{kq}}{1-r^q+r^{2q}+\cdots+r^{(k-1)q}}\\&\geq\frac{1}{q}\sum_{k\geq 1}\frac{(r^q)^k}{k}=\frac{1}{q}\ln\frac{1}{1-r^q}\geq\frac{1}{q}\ln\frac{1}{q(1-r)}\end{aligned} \tag{2.2}$$

对于上式右端第二项，注意到

$$\begin{aligned}|1-z^n|^2&=1+|z|^{2n}-2\operatorname{Re}(z^n)=1+r^{2n}-2r^n\cos n\theta\\&=(1-r^n)^2+4r^n\sin^2\frac{n}{2}\theta\geq 4r^n\sin^2\frac{\pi}{q}\end{aligned}$$

因此有

$$\begin{aligned}(1-r)\left|\sum_{q\nmid n}\frac{z^n}{1-z^n}\right|&\leq(1-r)\sum_{q\nmid n}\frac{r^n}{2r^{n/2}\sin\frac{\pi}{q}}=(1-r)\sum_{q\nmid n}\frac{r^{n/2}}{2\sin\frac{\pi}{q}}\\&\leq(1-r)\sum_{n\geq 0}\frac{r^{n/2}}{2\sin\frac{\pi}{q}}=\frac{1+\sqrt{r}}{2\sin\frac{\pi}{q}}\leq\left(\sin\frac{\pi}{q}\right)^{-1}\end{aligned} \tag{2.3}$$

将式 (2.2) 和 (2.3) 代入 (2.1)，有

$$(1-r)|F(z)|\geq\frac{1}{q}\ln\frac{1}{1-r}-\frac{1}{q}\ln q-\left(\sin\frac{\pi}{q}\right)^{-1}$$

类似于 Problem 1(a) 的论证，$F(z)$ 无法解析延拓至单位圆盘外。

□

Problem 3.

证明：

首先假设 f 可微。记 $f=u+iv$，则对任意包含固定点 z_0 的开圆盘 D 及其边界 $C=\partial D$ 有

$$\begin{aligned}0=\int_C f(z)\mathrm{d}z&=\int_C (u+iv)\mathrm{d}(x+iy)\\&=\int_C u\mathrm{d}x-v\mathrm{d}y+i\int_C u\mathrm{d}y+v\mathrm{d}x\\&=-\int_D(u_y+v_x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y+i\int_D(u_x-v_y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\end{aligned}$$

由 D 的任意性可知 $u_y+v_x=u_x-v_y=0$，这是恰好为 Cauchy-Riemann 方程。因此 f 全纯。

对于一般的 f，考虑构造一列在 $\mathbb{C}$ 的任意紧子集上一致收敛到 f 的可微函数，然后利用全纯函数的一致极限也全纯完成证明。我们利用磨光算子 $\varphi(z)$ 来构造需要的可微函数列。

记 $\varphi_\epsilon(z)=\epsilon^{-2}\varphi(\epsilon^{-1}z)$，定义

$$f_\epsilon=f*\varphi_\epsilon=\int_{\mathbb{R}^2}f(z-w)\varphi_\epsilon(w)\mathrm{d}w$$

由 Fubini 定理，对任意圆圈 C 有

$$\int_C f_\epsilon(z)\mathrm{d}z=\int_C\int_{\mathbb{R}^2}f(z-w)\varphi_\epsilon(w)\mathrm{d}w\mathrm{d}z=\int_{\mathbb{R}^2}\int_C f(z-w)\mathrm{d}z\varphi_\epsilon(w)\mathrm{d}w=0$$

又由卷积的性质知 f_ϵ 可微，进而 f_ϵ 全纯。

最后我们证明当 $\epsilon\to 0$ 时 f_ϵ 在 $\mathbb{C}$ 的任意紧子集上一致收敛到 f。

根据我们的定义不难推出

$$f_\epsilon(z)=\int_{\mathbb{R}^2}\varphi(t)f(z-\epsilon t)\mathrm{d}t$$

注意到 φ 在 $\mathbb{R}^2$ 上的积分为 1，于是有

$$|f(z)-f_\epsilon(z)|\le\int_{\mathbb{R}^2}\varphi(t)|f(z-\epsilon t)-f(z)|\mathrm{d}t\le\sup|f(z-\epsilon t)-f(z)|$$

又由于在 $\mathbb{C}$ 的任意紧子集上 f 一致连续，进而当 $\epsilon\to 0$ 时上式右端趋于 0，进而 f_ϵ 内闭一致收敛至 f。

$\square$

Problem 4.

证明：

由 K 紧致以及 K^c 不连通可知 K^c 一定存在一个有界的连通分支 B。取 $z_0 \in B$ 并记

$$f(z) = \frac{1}{z - z_0}$$

若命题不成立，则 $f(z)$ 在 K 上可由一列多项式 $\{p_n\}$ 一致逼近，进而存在 $N > 0$ 使得当 $n \geq N$ 时有

$$|f(z) - p_n(z)| < \frac{1}{d}$$

其中 d 是点集 $K \cup B$ 的直径。进而有

$$|1 - (z - z_0)p_n(z)| < \frac{|z - z_0|}{d} \leq 1$$

又由于 $1 - (z - z_0)p_n(z)$ 显然是全纯函数，根据最大模原理，其在集合 $K \cup B$ 上的最大模只能在点集边界上取到。但注意到 $z = z_0$ 显然在点集内部，但

$$|1 - (z_0 - z_0)p_n(z_0)| = 1$$

这与最大模原理矛盾。故 $f(z)$ 不能被多项式一致逼近。

□

Problem 5.

证明：

(a). 任取一个整函数 $h(z)$，Runge 逼近定理表明 $h(z)$ 可以被多项式一致逼近，进而存在 $\{p_n\}$ 的一个子序列 $\{p_{n_k}\}$ 在 $\mathbb{C}$ 的任意紧子集上一致收敛到 $h(z)$。

任给 $\epsilon > 0$，则对于充分大的 k 有

$$|F(z+N_{n_k}) - p_{n_k}(z)| \leq |F(z+N_{n_k}) - h(z)| + |h(z) - p_{n_k}(z)| < \epsilon + \epsilon$$

在开圆盘 $D(0, M_{n_k})$ 上成立。

在上式中以 $z - N_{n_k}$ 取代 z 并相应平移开圆盘 $D(0, M_{n_k})$ 即得需要证明的结论。

(b). 取 $z \in D_n$，则有

$$F(z) - p_n(z - M_n) = p_n(z - M_n)\left(e^{-c_n(z-M_n)^2} - 1\right) + \sum_{k \neq n} u_k(z)$$

根据定义，有 $|z - M_n| \leq n$，因此存在足够小的 $c_n > 0$ 使得

$$|p_n(z - M_n)| \cdot \left|e^{-c_n(z-M_n)^2} - 1\right| < \frac{1}{2n}$$

记

$$A(m,n) = \sup_{z \in D(0,m)} \left|p_n(z + M_m - M_n)e^{-c_n(z+M_m-M_n)^2}\right|$$

我们希望选取适当的 $\{M_k\}$ 使得 $A(m,n) \leq \dfrac{1}{2m2^n}$，这样就有

$$\left|\sum_{k \neq n} u_k(z)\right| \leq \sum_{k \neq n} A(n,k) < \frac{1}{2n}$$

从而完成构造。

首先 M_1 的值可以任取。我们考虑如何根据 M_1 和 $\{c_n\}$ 的值确定 M_2。

记 $t_n = M_n - M_1$，则有

$$A(1,n) = \sup_{z \in D(0,1)} \left|p_n(z - t_n)e^{-c_n(z-t_n)^2}\right|$$

注意到当 t_n 足够大时 $z - t_n$ 将完全落在扇形 $\{z : |\pi - \arg z| < \pi/4 - \delta\}$ 中，进而根据 Hint 有 $e^{-c_n(z-t_n)^2} \to 0$。这样就可以找到一个 M_2 的下界使得 $A(1,2) < \dfrac{1}{8}$。类似地，可以利用 $A(2,1) < \dfrac{1}{8}$ 确定 M_2 的另一个下界，进而最终取定 M_2 的值。

以此类推，当 $M_1, \cdots, M_{k-1}$ 的值取定后，我们总可以根据

$$A(k,n) < \frac{1}{2k2^n} \qquad A(n,k) < \frac{1}{2n2^k}$$

确定 M_k 的下界，进而选出 M_k 的值。

□