МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Курсовая проект по дисциплине:

«МЕХАНИКА»

Проектирование механической модели катапульты

Факультет: ВКИ НГУ (ИИР)
Группа: 21933

Студенты:	Оценка
Круковский Василий	

Преподаватель: <u>*Сахнов А.Ю.*</u>

НОВОСИБИРСК
2022

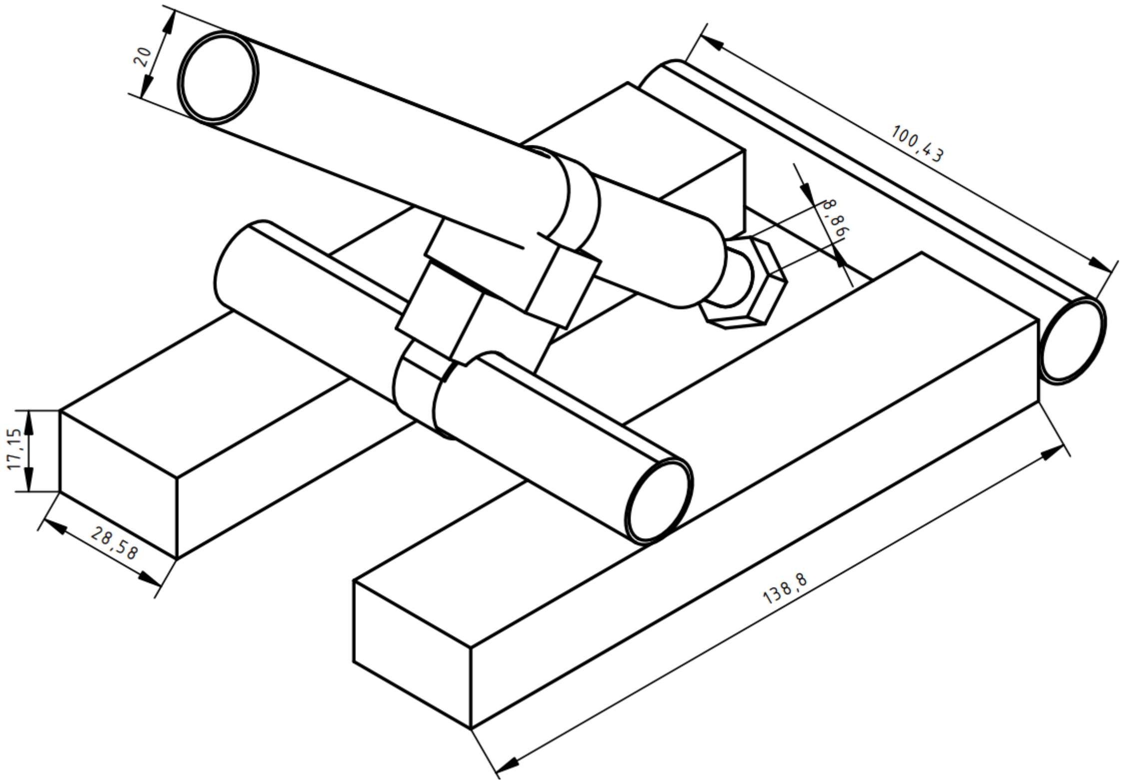
1. Задание на курсовую работу.

Создание механической модели. Обсуждение теоретической модели. Распределение обязанностей. Расчёт теоретической модели. Построение механической модели катапульты.

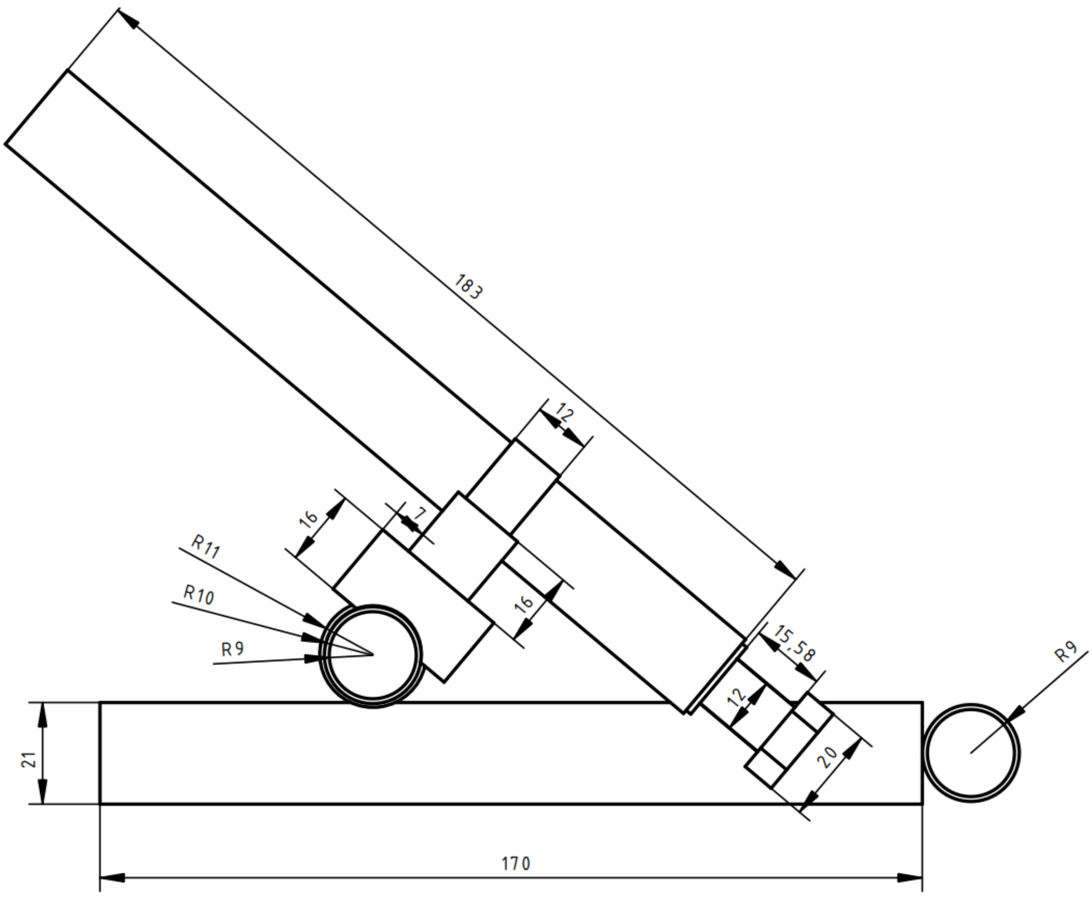
Описание механической модели:

1. Способность производить выстрел на 50-80 см.
2. Способность находится во взведённом состоянии без вмешательства человека.
3. Наличие механического спуска.
4. Целостность и устойчивость модели на протяжении трёх выстрелов

2. Эскиз модели.



Вид модели ортогональный



Вид модели сбоку

3. Экспериментальное определение коэффициента жёсткости пружины (резинки)

N-номер опыта	x – удлинение пружины [см]	m – масса груза [кг]	k - коэффициент жёсткости пружины [Н/м]
1	0.025	6.5	2548
2	0.013	2	1507
3	0.018	3.5	1905

Подвесим груз массой m на пружине с коэффициентом жёсткости k и найдём удлинение x.

Стоит подчеркнуть что зависимость силы пружины от удлинения НЕ ЛИНЕЙНАЯ. Закон Гука для пружины можно применять лишь в случае удлинения пружины в рабочем ходе.

Рабочий ход пружины это область удлинений пружины примерно подчиняющихся закону Гука, то есть в этой области сила пружины будет прямо пропорционально возрастать удлинению. Именно поэтому по данным в таблице можно заметить довольно сильные разбросы значений.

По второму закону Ньютона: $\sum F = 0$, тогда: $kx - mg = 0$

$$k = \frac{mg}{x}$$

$$\text{kср} = \frac{g}{N}\sum \frac{m_i}{x_i} = \frac{1}{N}\sum k_i$$

$k_{ср}$ = 1986 Н/м

Полученное значение не является оптимальным при запуске снаряда маленькой массы и поэтому не будет учитываться при дальнейших расчётах.

4. Динамический анализ механической модели (Расчёт разгона снаряда)

1. Расчёт коэффициента жёсткости пружины.

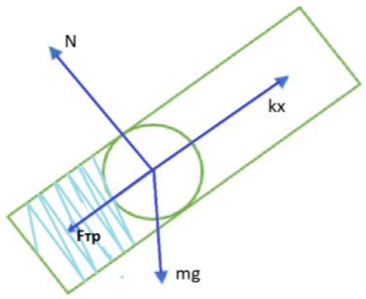
   $$\mathrm{k} = \mathrm{G}\frac{{D_w}^4}{8\mathrm{N}\cdot {D_m}^3}$$

   G = 83670 МПа
   D_w = 0.006 м
   N = 11.5
   D_m = 0.016 м

Подробнее о пружине: ГОСТ 13165-67. Обозначение 7039-2021.

Таким образом получаем коэффициент жёсткости:
   k = 1461 Н/м.

2. Расчёт движения снаряда трубке.



Ось X – ось противоположно направленная сжатию пружины. Необходимо найти зависимость координаты снаряда x от времени t. Сила трения в трубке присутствует, коэффициент трения качения равен μ, наклон трубки относительно земли равен углу α. Радиус трубки равен R.

$$\mathrm{k}\cdot\left(-\mathrm{x}(\mathrm{t})\right) - \mathrm{mg}\left(\frac{\mu}{R}\cos\alpha + \sin\alpha\right) = \mathrm{m}\cdot x''(t)$$

Расчёт траектории x(t) сводится к решению дифференциального уравнения гармонического осциллятора с некоторыми коэффициентами.
Условия Коши:

$$x(t_0) = x_0$$
$$x'(t_0) = v_0$$
$$t_0 = t_0$$

Однородное линейное диф. уравнение:

$$mx'' + kx + A = 0$$
$$x(t) = C_1 e^{\sqrt{\frac{-k}{m}}} + C_2 e^{\sqrt{\frac{-k}{m}}} - \frac{A}{k}$$

После решения задачи Коши и гиперболических преобразований с комплексными числами получаем:

$$x(t) = (x_0 + \tfrac{A}{k})\cosh\left(i\sqrt{\frac{k}{m}}(t - t_0)\right) + v_0\sqrt{\frac{m}{k}}\sinh\left(\sqrt{\frac{k}{m}}(t - t_0)\right) - \frac{A}{k}$$

Заметим, что снаряд покоится в трубке в начальный момент времени.

$$x(t) = (x_0 + \tfrac{A}{k})\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}(t - t_0)\right) - \frac{A}{k}$$

Где A $= \frac{mg\left(\frac{\mu}{R}\cos\alpha + \sin\alpha\right)}{R}$

$$V(t) = x'(t) = -\sqrt{\frac{k}{m}}(x_0 + \frac{A}{k})sin(\sqrt{\frac{k}{m}}(t - t_0))$$

Отделение снаряда от пружины происходит в момент времени $t = \tau$, а именно, когда скорость конца пружины максимальна и равна скорости снаряда. Именно в этот момент вес тела оказываемый на пружину равен нулю.
Необходимо найти первую точку максимума у периодической функции скорости.

$$\tau = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{m}{k}}$$

$$v\left(t = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{m}{k}}\right) = -\sqrt{\frac{k}{m}}(x_0 + \frac{A}{k})$$

Подставляем в формулу

$\alpha = 35°,\ m = 0.013$ кг, $x_0 = -0.012$ м, $k = 1461\frac{\text{Н}}{\text{м}},\ R = 0.0075$ м и $\mu = 0.45$

Получаем скорость в момент отрыва от пружины:

$$v = 2.76\frac{\text{м}}{\text{с}}$$

Примем эту скорость, за скорость в момент вылета из трубки:

x_0 в данном случае это начальное местоположение конца пружины, иначе говоря этой величиной определяется “на какую расстояние вывели из состояния равновесия пружину”. Также стоит заметить, что скорость снаряда равна нулю, в случае когда $x_0 = -\frac{A}{k}$, и действительно, правая часть равенства представляет собой величину “на сколько сильно сжалась пружина, когда сверху на неё положили снаряд”.

5. Кинематический анализ механической модели (Расчёт траектории полёта снаряда)

Снаряд движется с начальной скоростью v_0 в воздухе под действием гравитационного поля.
По второму закону Ньютона:

$$\vec{a} = \vec{g} + \beta\overrightarrow{v^2}$$
$$F_{\text{сопр}} = \frac{1}{2} C_x p_{\text{ср}} S v^2$$
$$\beta = \frac{1}{2m} C_x p_{\text{ср}} S$$

Как известно, не все функции имеют свою первообразную выраженную в элементарных функциях. Зависимости x(t) и y(t) в данном случае тоже не имеют простейшую первообразную. Эту задачу можно решать выразив функции бесконечными рядами, либо методом бесконечных приближений, либо через точечную сетку и предельным определением производной функции.
Воспользуемся третьим методом. Решение задачи представлено на языке Python. Хочется подчеркнуть, что этим методом невозможно получить функциональную зависимость а лишь график траектории и значения координат в точках по отдельности с заданной точностью ȝ > 0. В аналогичном виде можно получить и значения скорости. Можно воспользоваться аппроксимацией, но эта задача не является целью данного проекта.

$$a(t) = \frac{dv(t)}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{v(t + \Delta t) - v(t)}{\Delta t}$$

Таким образом при достаточно малых Δt можно сказать, что

$$v(t + \Delta t) \sim v(t) + a(t)\Delta t$$

Иначе говоря, получаем рекурсивную функцию, где v_0 это скорость с которой вылетел снаряд из трубки.

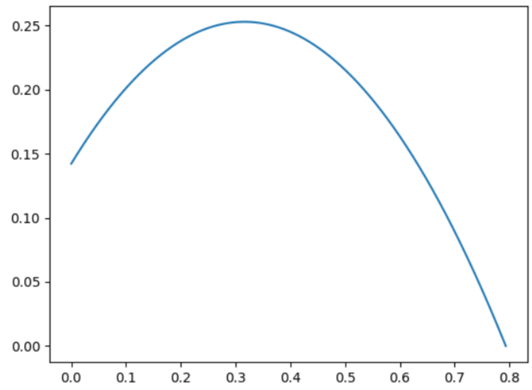
$$v_{n+1} = v_n + ȝ \cdot f(v_n)$$

Заметим, что изменение координаты снаряда за промежуток времени есть скорость и координаты рекурсивным образом тоже можно вычислить, где z_0 – местоположение снаряда при вылете из трубки.

$$v(t) = \frac{dz(t)}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{z(t + \Delta t) - z(t)}{\Delta t}$$

$$z_{n+1} = z_n + ȝ \cdot f(z_n)$$

Тогда время полёта $t = ȝ \cdot n$



Необходимо указать начальное местоположение, а именно $x_0 = 0,\ y_0 = 0.142$

$$y_0 = \big(L + (D + dx)\big) * \sin(\alpha)$$

L – длина трубки

dx – удлинение пружины

D = начальная длина вкрученного болта = 0.053

Начальная скорость вылета снаряда нам известна из предыдущего раздела

$v_0 = 2.76\frac{\text{м}}{\text{с}}$

v_{x_0} и v_{y_0} находим спроецировав на оси

Воспользуемся рекурсивной формулой для расчёта дальности полёта в качестве примера приведена первая итерация, или говоря иначе, приближение на промежутке времени [0, $\mathfrak{z}$]:

$$v_{y_1} = v_{y_0} - \mathfrak{z}\left(g + v_y \cdot \sqrt{{v_{x_0}}^2 + {v_{y_0}}^2}\right)$$

$$v_{x_1} = v_{x_0} - \mathfrak{z}\left(v_x \cdot \sqrt{{v_{x_0}}^2 + {v_{y_0}}^2}\right)$$

Воспользоваться определением предела для определения перемещения:

$y_1 = y_0 + \mathfrak{z} \cdot v_{y_0}$

$x_1 = x_0 + \mathfrak{z} \cdot v_{x_0}$

Чтобы понять, когда заканчивать вычисления по алгоритму, необходимо проверять $y_i \le 0$
Если условие выполняется, то снаряд приземлился.

На 755123-ой итерации получаем:

$x_{755123} = 0.793$

$y_{755123} = 0.000$

Таким образом, дальность полёта составляет 79.3 сантиметра

6. Обоснование устойчивости механической модели (Определение центра тяжести)

Для упрощения данной задачи примем конструкция за однородный объект и будем считать центр тяжести в проекции, так как объект симметричен. Решение представляет из себя два метода.

1. Конструкция имеет множество простейших элементов (n-угольники и круги) с центрами тяжести x_i и y_i и по формуле ниже находим центр тяжести всей конструкции. A_i – площадь простейшего элемента.

$$y_{ц} = \frac{\sum A_i y_i}{\sum A_i} = 5.32 \text{ см} \qquad x_{ц} = \frac{\sum A_i x_i}{\sum A_i} = 11.62 \text{ см}$$

2. С помощью метода подвешивания получаем координаты центра тяжести:
   Суть метода заключается в том, чтобы подвесить объект по очереди за определённую материальные точки и провести перпендикуляры к поверхности от которой измеряют. На пересечении перпендикуляров будет лежать точка центра масс.

   $x_{ц}$ =11.72 см
   $y_{ц}$ =5.1 см

7. Деформационный анализ ключевых элементов конструкции (изгиб, кручение, растяжение-сжатие, оценка коэффициентов запаса прочности и избытка массы механической модели)

Ключевым элементом, который подвержен деформации – механизм взвода, а именно часть полипропиленовой трубки возле спускового курка.

Коэффициент Пуассона для такого полипропилена равен 0.42 – 0.44.

Также допускаемое напряжение на сжатие полипропилена равно 13-15 МПа.

Условие прочности:

$$\delta_{\text{с}} = \frac{F}{S} < \frac{F_{\text{пред}}}{S} = \delta_{\text{пред}}$$

Так как у конструкции имеется две опоры площадью S_1 = 7 мм^2, то сила которая необходима для износа конструкции равна:

$$F_{\text{пред}} = S \cdot \delta_{\text{пред}}$$

$$F_{\text{пред}} = 196\ \text{Н}$$

Максимальное сжатие пружины в механической модели равно около 40 мм. Предельное сжатие самой пружины равно 49.2 мм, поэтому повреждение пружины не рассматривается. Несомненно, коэффициент жёсткости с увеличением нагрузки численно увеличивается. Предположим, что коэффициент жёсткости k будет равен 3000 Н/м, базируясь оценкой табличных значений.

$$F_{\text{пред}} = kx_{max} = 3000 * 0.04 = \ 120\ \text{Н} < 196\ \text{Н}$$

Таким образом, приходим к выводу о том, что условие прочности выполняется.

8. Сравнение фактических параметров механической модели с расчётными параметрами.

1. Сравнение центров тяжести моделей: фактический и расчётный.
   Относительная погрешность составляет:
   $$\gamma_{x_ц} = 0.86\%$$
   $$\gamma_{y_ц} = 4.13\%$$

2. Сравнение коэффициента жёсткости пружины: фактический и расчётный.
   Относительная погрешность составляет:
   $$\gamma_k = 36\%$$

Причиной такой большой погрешности является неправильное использование полученных данных на практике. Не является правильным применение закона Гука о линейной зависимости между силой и удлинением при больших удлинениях.

3. Сравнение дальности полёта снаряда:

Номер опыта	Дальность полёта
1	76
2	75
3	73
4	75
5	80

Теоретическое значение: $x = 0.793$

Среднее практическое: $x_п = 0.758$

Относительная погрешность составляет: $\gamma_x = 4.4\%$

Погрешность может возникать по причине трения деталей пускового механизма.

9. Описание электронной модели механической системы

Код представлен на языке Python.

```
import matplotlib.pyplot as plt
from math import sin, cos, pi, sqrt
def sign(x):
    return (x >= 0) - (x < 0)

C_x = 0.47
g = 9.8
q = 0.45
R = 0.015/2
density_air = 1.225
alpha_degree = 45
density_ball = 7860
dx = 0.012
k = 1461
V_ball = (4/3) * pi * pow(R, 3)
S = pi * pow(R, 2)
m_ball = density_ball * V_ball
print("Доброго времени суток! Вас приветствует помощник по обработке 
баллистического "
      "движения при запуске из механической модели. Введите входные данные:")
print("Масса снаряда в килограммах:")
m_ball = float(input())
print("Угол под котором был запущен снаряд в градусах")
alpha_degree = int(input())
print("\n")

t = (pi/2)*sqrt(m_ball/k)

eps = 0.000001
x0 = 0.0
alpha = (alpha_degree) * pi / 180
y0 = (0.207 + (0.053- dx))*sin(alpha)
w = (0.5 * C_x * S * density_air) / m_ball

Arr_x = []
Arr_x.append(x0)
Arr_y = []
Arr_y.append(y0)

A = (m_ball*g/k)*((q/R)*cos(alpha) + sin(alpha))
v0 = sin(sqrt(k/m_ball) * t) * (dx - A) * sqrt(k/m_ball)
print("Скорость снаярда при вылете из трубки v = ", v0)
vy0 = v0 * sin(alpha)
vx0 = v0 * cos(alpha)

Arr_vy = []
Arr_vy.append(vy0)
Arr_vx = []
Arr_vx.append(vx0)

i = 0
while(True):
    vx = Arr_vx[i - 1]
    vy = Arr_vy[i - 1]
    d = abs(pow(pow(vy, 2) + pow(vx, 2), 0.5))
    Arr_vy.append(vy - eps * (g + vy * w * d))
    Arr_vx.append(vx - eps * (0 + vx * w * d))
    if(sign(Arr_vx[i]) == -1):
```

```
        print("Снаряд такой массы не полетит. В проекте подразумевалась масса
не больше 40 грамм. "
              "Кстати, оптимальный угол равен 57 градусам")
        break
    Arr_y.append(Arr_y[i - 1] + eps * vy)
    Arr_x.append(Arr_x[i - 1] + eps * vx)
    if( abs(Arr_y[i]) <= (eps/2) or Arr_y[i] <= -eps/2):
        print("Дальность полёта L =", round(Arr_x[i], 3), "метров")
        print("Время полёта t =", i*eps, "секунд" )
        break
    i += 1
print(Arr_x[i], Arr_y[i])
plt.plot(Arr_x, Arr_y)
plt.show()
```

10. Список литературы

https://moodle.kstu.ru/pluginfile.php/511741/mod_resource/content/1/движ_под_углом_с_учетом_сопр_лекция3.pdf

https://ru.wikipedia.org/wiki/Закон_Гука

https://files.stroyinf.ru/Data2/1/4294837/4294837991.pdf

https://ru.wikipedia.org/wiki/Центр_масс