Ортогональное дополнение

Sunday, April 17, 2022 11:19 PM

Задача 2.2. *В ортонормированном базисе четырехмерного евклидова пространства пара векторов задана координатными столбцами. Дополнить эту систему векторов до ортогонального базиса.*

$$x_1 = \begin{Vmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \end{Vmatrix}, \quad x_2 = \begin{Vmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 3 \end{Vmatrix}.$$

$\langle y, x_1\rangle = 0 \quad \langle y, x_2\rangle = 0$

$$\begin{cases} \xi^1 - \xi^2 + 2\xi^3 = 0 \\ -\xi^1 + \xi^2 + \xi^3 + 3\xi^4 = 0 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 1 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 0 & 0 \end{array}\right) \to \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \downarrow & \Pi & \downarrow & \Pi \end{array} \\ \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \end{array}$$

То что вектора ортогональны гарантирует ЛНЗ

$$\text{ФСР}: \mathcal{L}\Big\{ \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}}_{= y_3}, \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{= y_4} \Big\}$$

$\langle x_1, x_2\rangle = -1 - 1 + 2 = 0$

$$x_3 = y_3 - \frac{\langle x_1, y_3\rangle}{\langle x_1, x_1\rangle} x_1 - \frac{\langle x_2, y_3\rangle}{\langle x_2, x_2\rangle} x_2 \qquad x_4 = y_4 - \frac{\langle x_1, y_4\rangle}{\langle x_1, x_1\rangle} x_1 - \frac{\langle x_2, y_4\rangle}{\langle x_2, x_2\rangle} x_2 - \frac{\langle x_3, y_4\rangle}{\langle x_3, x_3\rangle} x_3$$

$$x_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad x_4 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Задача 2.3. *Подпространство L евклидова пространства задано в некотором ортонормированном базисе системой линейных уравнений. Найти какой-либо ортонормированный базис L.*

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 + 4x_4 = 0 \\ x_1 - 3x_3 - 6x_4 = 0. \end{cases}$$

ОНБ в L

$$\to \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \Pi & \Pi & \downarrow & \downarrow \end{array} \\ \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -3 & -6 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \end{array} \qquad \mathcal{L}\left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$a_1 = y_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad a_2 = y_2 - \frac{\langle y_2, a_1\rangle}{\langle a_1, a_1\rangle} a_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$x_1 = \frac{1}{\sqrt{14}}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad x_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Задача 2.4. *Найти базис ортогонального дополнения подпространства векторов, координаты которых в некотором ортонормированном базисе евклидова пространства удовлетворяют следующей системе линейных уравнений:*

$$\begin{cases} 2x_1 + 9x_2 + 5x_3 - 3x_4 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + x_4 = 0 \\ 10x_1 + 19x_2 - x_3 + 11x_4 = 0. \end{cases}$$

ОНБ в $L^\perp$

$$M = L^\perp = \{x \in E: \quad x \perp L\}$$

$$L^\perp = \mathcal{L}\left\{ \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ 9 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix}}_{= y_1}, \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{= y_2}, \underbrace{\begin{pmatrix} 10 \\ 19 \\ -1 \\ 11 \end{pmatrix}}_{= y_3} \right\}$$

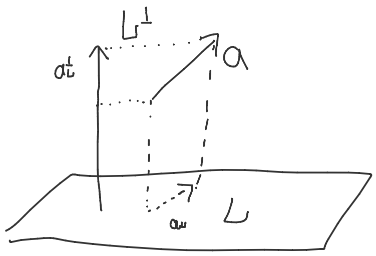
$$x_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 9 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix} \qquad x_2 = y_2 - \frac{\langle x_1, y_2 \rangle}{\langle x_1, x_1 \rangle} x_1 \qquad x_3 = y_3 - \frac{\langle y_3, x_1 \rangle}{\langle x_1, x_1 \rangle} x_1 - \frac{\langle y_3, x_2 \rangle}{\langle x_2, x_2 \rangle} x_2$$

$$x_2 = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ -5 \\ 10 \end{pmatrix} \qquad x_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \tilde{x}_1 = \frac{1}{\sqrt{119}}\begin{pmatrix} 2 \\ 9 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix} \qquad \tilde{x}_2 = \frac{1}{5\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ -5 \\ 10 \end{pmatrix}$$

Задача 2.5. *Подпространство L евклидова пространства E является линейной оболочкой векторов, заданных в некотором ортонормированном базисе пространства координатными столбцами $x_1, x_2, \dots x_m$. Найти ортогональную проекцию на L и ортогональную составляющую относительно L вектора y, если:*

$$x_1 = \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{vmatrix}, \quad x_2 = \begin{vmatrix} 3 \\ 3 \\ -2 \\ 1 \end{vmatrix}, \quad x_3 = \begin{vmatrix} -1 \\ 6 \\ 3 \\ -5 \end{vmatrix}, \quad y = \begin{vmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \\ 2 \end{vmatrix},$$

$$y = a_L + a_{L^\perp} \qquad a_L \in L \qquad a_{L^\perp} \in L^\perp$$



$$y = \alpha x_1 + \beta x_2 + \gamma x_3 + a_L^\perp \qquad \langle a_L^\perp, x_1 \rangle = 0$$

$$\langle x_1, y \rangle = \alpha \langle x_1, x_1 \rangle + \beta \langle x_1, x_2 \rangle + \gamma \langle x_1, x_3 \rangle$$
$$\langle x_2, y \rangle = \alpha \langle x_1, x_2 \rangle + \beta \langle x_2, x_2 \rangle + \gamma \langle x_2, x_3 \rangle$$
$$\langle x_3, y \rangle = \alpha \langle x_1, x_3 \rangle + \beta \langle x_2, x_3 \rangle + \gamma \langle x_3, x_3 \rangle$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \multicolumn{3}{c|}{\overbrace{\hphantom{3 \quad 6 \quad -9}}^{G}} & \\ 3 & 6 & -9 & 3 \\ 6 & 23 & 4 & 17 \\ -9 & 4 & 21 & 13 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \qquad \begin{aligned} \alpha &= -1 \\ \beta &= 1 \\ \gamma &= 0 \end{aligned}$$

$$a_L = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad a_L^\perp = y - a_L = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\langle a_L, a_L^\perp \rangle = -2 + 3 - 1 = 0 \qquad \langle a_L^\perp, x_1 \rangle = -1 - 1 + 2 = 0$$

Задача 3.2. *Линейное подпространство L арифметического пространства со стандартным скалярным произведением образовано векторами, компоненты которых удовлетворяют однородной системе линейных уравнений. Найти ортогональную проекцию y и ортогональную составляющую z относительно L вектора x, если:*

$$x = \begin{vmatrix} 8 \\ -2 \\ 8 \\ 3 \end{vmatrix}, \quad L: \quad \begin{cases} y_1 - 2y_2 + y_3 = 0 \\ y_1 - y_2 + 4y_3 + y_4 = 0. \end{cases}$$

$x = y + z \qquad y \in L \qquad y \in L^\perp$

$L^\perp : \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \qquad x = y + \alpha z_1 + \beta z_2$

$z_1 \qquad z_2$

$\tilde{z}_1 = \dfrac{z_1}{\sqrt{\langle z_1, z_1\rangle}} = \dfrac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$z_2' = z_2 - \dfrac{\langle z_2, z_1\rangle}{\langle z_1, z_1\rangle} z_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} - \dfrac{7}{6}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \dfrac{1}{6}\begin{pmatrix} -1 \\ 8 \\ 17 \\ 6 \end{pmatrix}$

$\tilde{z}_2 = \dfrac{1}{\sqrt{390}}\begin{pmatrix} -1 \\ 8 \\ 17 \\ 6 \end{pmatrix}$

$\langle \tilde{z}_1, x\rangle = \alpha = \dfrac{1}{\sqrt{6}}(8 + 4 + 8) = \dfrac{1}{\sqrt{6}} 20$

$\langle \tilde{z}_2, x\rangle = \beta = \dfrac{\sqrt{390}}{3}$

$z = \alpha \tilde{z}_1 + \beta \tilde{z}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 9 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad y = x - z = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Задача 3.3. *Линейное подпространство L арифметического пространства со стандартным скалярным произведением натянуты на векторы $x_1, x_2, \ldots, x_m$. Найти угол между вектором y и подпространством L, если:*

$$y = \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix}, \quad x_1 = \begin{vmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{vmatrix}, \quad x_2 = \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \\ 3 \end{vmatrix}, \quad x_3 = \begin{vmatrix} 3 \\ -2 \\ 4 \\ -1 \end{vmatrix},$$

$(\widehat{y, L}) = \varphi - ? \qquad x \in L \qquad a_1 = x_1$

$y = x + z \qquad z \in L^\perp \qquad a_2 = x_2 - \dfrac{\langle a_1, x_2\rangle}{\langle a_1, a_1\rangle} a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$

$\cos\varphi = \dfrac{\langle x, y\rangle}{\sqrt{\langle x, x\rangle \langle y, y\rangle}}$

$a_3 = x_3 - \dfrac{\langle a_1, x_3\rangle}{\langle a_1, a_1\rangle} a_1 - \dfrac{\langle a_2, x_3\rangle}{\langle a_2, a_2\rangle} a_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\tilde{x}_1 = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad \tilde{x}_2 = \dfrac{1}{2\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$

$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \langle \tilde{x}_1, y\rangle \\ 0 & 1 & \langle \tilde{x}_2, y\rangle \end{array}\right) \qquad \alpha = \langle \tilde{x}_1, y\rangle = -\dfrac{1}{2} \qquad \beta = \langle \tilde{x}_2, y\rangle = \dfrac{\sqrt{5}}{2}$

$x = -\dfrac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \dfrac{1}{2\sqrt{5}} \cdot \dfrac{\sqrt{5}}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$\langle x, y\rangle = \frac{3}{2}$ $\langle x, x\rangle = \frac{3}{2}$ $\langle y, y\rangle = 3$

$\cos\varphi = \dfrac{\frac{3}{2}}{\sqrt{\frac{3}{2}\cdot 3}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ $\varphi = \dfrac{\pi}{2}$