Индивидуальное домашнее задание №1 (третья часть)
Математический анализ
Вариант 16

Григорьев Даниил, ИСУ: 465635

Группа P3116, поток: Мат Ан Прод 11.3

16 апреля 2025

Задание

Исследовать несобственные интегралы на сходимость (в каждом варианте четыре интеграла). Если подынтегральная функция является знакопеременной, требуется исследовать интеграл на абсолютную и условную сходимости.

а)

$$\int_1^\infty xe^{-x} sinx dx$$

Применим признак абсолютной сходимости:

$$\int_0^\infty |xe^{-x}\sin x|\, dx \le \int_0^\infty xe^{-x}\, dx$$

Поскольку $|\sin x| \le 1$, и $\int_0^\infty xe^{-x}dx = 1 < \infty$, то интеграл абсолютно сходится, а значит и условно сходится

Ответ

$\boxed{\text{Сходится и условно, и абсолютно}}$

б)

$$\int_0^\infty \frac{x^{-\frac{1}{2}}\cos x}{1 + x^{-\frac{1}{3}}}\, dx$$

На $[1, \infty)$ функция ведёт себя как:

$$\frac{x^{-1/2}\cos x}{1 + x^{-1/3}} \sim \frac{x^{-1/2}\cos x}{x^{-1/3}} = x^{-1/6}\cos x$$

Проверим абсолютную сходимость:

$$\int_1^\infty \left|x^{-1/6}\cos x\right| dx \le \int_1^\infty x^{-1/6} dx = \infty$$

Виодно, что не сходится абсолютно. Проверим условную сходимость по признаку Дирихле: 1) $\cos x$ — ограничена и постоянно колеблется
2) $f(x) = \frac{x^{-1/2}}{1+x^{-1/3}}$ — убывает и стремится к нулю.

Следовательно, интеграл условно сходится, но не абсолютно

Ответ

$\boxed{\text{Условно сходится, но не абсолютно}}$

в)

$$\int_0^1 \frac{\ln x}{\sqrt{(1-x^2)^3}}\,dx$$

Особенность в точке $x \to 0$ из-за логарифма. Посмотрим, как ведет себя подынтегральное выражение при $x \to 0$:

$$\ln x \to -\infty, \quad \sqrt{(1-x^2)^3} \to 1 \Rightarrow \frac{\ln x}{\sqrt{(1-x^2)^3}} \sim \ln x$$

Исследуем сходимость:

$$\int_0^1 |\ln x|\,dx = \int_0^1 -\ln x\,dx = -x\ln x + x|_0^1 = 1 < \infty$$

При $x \to 1$:

$$1 - x^2 \sim 2(1-x) \Rightarrow \sqrt{(1-x^2)^3} \sim \sqrt{8(1-x)^3} \Rightarrow \frac{1}{(1-x)^{\frac{3}{2}}}$$

Значит:

$$\int_{1-\varepsilon}^1 \frac{|\ln x|}{(1-x)^{\frac{3}{2}}}dx$$

Поскольку логарифм ограничен вблизи $x = 1$, интеграл ведёт себя как:

$$\int_{1-\varepsilon}^1 \frac{1}{(1-x)^{\frac{3}{2}}}dx = \infty$$

Интеграл расходится при $x \to 1$.

Ответ

$\boxed{\text{Расходится}}$

г)

$$\int_0^2 \frac{\ln(2 - x/2)}{\sin(x-2)} \cdot ctg\left(\sqrt{\frac{\pi x}{2}}\right)dx$$

Особенность в точке $x = 2$:
1)$\sin(x-2) \sim x - 2$
2)$\ln(2 - x/2) \sim \ln(1 - x/4) \to \ln 0 \to -\infty$
3)$\text{ctg}\left(\sqrt{\frac{\pi x}{2}}\right) \to \text{ctg}(\sqrt{\pi})$ — конечная функция

Значит, при $x \to 2$:

$$\frac{\ln(2 - x/2)}{\sin(x-2)} \sim \frac{\ln(2 - x/2)}{x-2}$$

Это аналогично интегралу:

$$\int_0^\delta \frac{\ln x}{x}dx \Rightarrow \text{расходится}$$

Значит исходный интеграл расходится при $x \to 2$

Ответ

$\boxed{\text{Расходится}}$