

Лабораторная работа №2

Математический анализ

Вариант 1

Григорьев Даниил, ИСУ: 465635

Группа Р3116, поток: Мат Ан Прод 11.3

22 апреля 2025

Задание 1

Длина кривой Безье

Задача — протянуть оптоволоконный кабель от точки A до точки C , огибая точку K и используя наименьшее количество материала (длина кабеля минимальна). Для моделирования кабеля необходимо использовать единственную кривую Безье второго порядка на плоскости, проходящую через все три точки. В процессе решения нужно в явном виде использовать интегральную формулу вычисления длины кривой. Разрешается использовать любые программные пакеты для выполнения алгебраических операций и взятия интегралов, все вычисления следует привести в отчёте с подробным описанием. В ответе должна присутствовать длина провода и координаты опорных точек кривой Безье. Также необходимо продемонстрировать результат графически. Кривая Безье второго порядка на плоскости имеет следующее уравнение:

$$B(t) = (1-t)^2 A + 2t(1-t)B + t^2 C,$$

где $A, B, C \in \mathbb{R}^2$ — опорные точки кривой. $A(0, 0)$; $C(10, 0)$; $K(x, y)$ зависит от варианта.

В моем варианте: $K(x, y)$: $K(2, 7)$

Решение

Кривая должна проходить через точку $K(2, 7)$ при некотором $t = t_k$:

$$\begin{cases} 2 = 2t_k(1-t_k)x_b + 10t_k^2 \\ 7 = 2t_k(1-t_k)y_b \end{cases}$$

Выражаем координаты опорной точки B :

$$x_b = \frac{2 - 10t_k^2}{2t_k(1-t_k)}, \quad y_b = \frac{7}{2t_k(1-t_k)}$$

Заметим, что если мы подставим в уравнение кривой Безье $t = 0$, то получим $B(0) = A + 0*B + 0*C = A$, при $t = 1$ имеем: $B(1) = 0*A + 0*B + C = C$, значит пределы интегрирования при вычислении длины кривой будут от 0 до 1 (так как A и C — крайние точки графика кривой). Тогда длина кривой вычисляется по формуле:

$$L = \int_0^1 \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt$$

где производные:

$$x'(t) = 2(1-2t)x_b + 20t, \quad y'(t) = 2(1-2t)y_b$$

По условию задачи длина кривой должна иметь минимальное значение. Найдем такое $t_k \in (0, 1)$, при котором L будет иметь минимальное значение (сделаем это с помощью метода Симпсона)

```
import numpy as np
from scipy.integrate import simpson

def compute_length_simpson(t_k, n_points=1001):
    B_x = (2 - 10 * t_k**2) / (2 * t_k * (1 - t_k))
    B_y = 7 / (2 * t_k * (1 - t_k))
    t = np.linspace(0, 1, n_points)
    x_prime = 2*(1-2*t)*B_x + 20*t
    y_prime = 2*(1-2*t)*B_y
    integrand = np.sqrt(x_prime**2 + y_prime**2)
    return simpson(integrand, t)

t_min, t_max = 0.01, 0.99
N = 1000
n_int_points = 1001

t_k_values = np.linspace(t_min, t_max, N)
lengths = np.zeros(N)

for i, t_k in enumerate(t_k_values):
    lengths[i] = compute_length_simpson(t_k, n_int_points)

optimal_idx = np.argmin(lengths)
optimal_t_k = t_k_values[optimal_idx]
optimal_length = lengths[optimal_idx]

optimal_B_x = (2 - 10*optimal_t_k**2)/(2*optimal_t_k*(1-optimal_t_k))
optimal_B_y = 7/(2*optimal_t_k*(1-optimal_t_k))

print(optimal_t_k:.6f)
print(optimal_length:.6f)
print(optimal_B_x:.6f)
print(optimal_B_y:.6f)
```

После запуска программы получаем:

Минимальная длина $L = 18.686170$

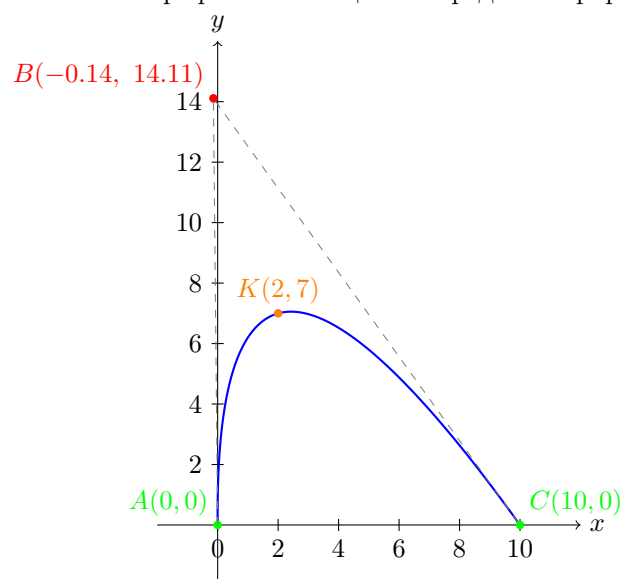
Достигается при $t_k = 0.455365$

В этом случае координаты точки B такие:

$x_B = -0.148334$

$y_B = 14.112462$

На этом графике синим цветом продемонстрирован график итоговой кривой:



Ответ:

Длина кабеля ≈ 18.68617

Координаты опорных точек:

$x_B = -0.148334$

$y_B = 14.112462$