Индивидуальное задание №1

№ 6 Вариант 6.

1 задание

а) $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\ldots-\frac{1}{2n}=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}+\ldots+\frac{1}{2n}$

База: $\exists n=1$:

$1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$; $\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}$, т.е при $n=1$ равенство верно.

Инд. предположение:

$\exists$ для $n=k$ верно:

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\ldots+\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k}=\frac{1}{k+1}+\frac{1}{k+2}+\ldots+\frac{1}{2k}$$

Инд. переход: Докажем, что при $n=k+1$ верно $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\ldots-\frac{1}{2(k+1)}=\frac{1}{k+2}+\ldots+\frac{1}{2(k+1)}$

$\exists n=k+1$:

1) $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k}+\frac{1}{2k+1}-\frac{1}{2(k+1)}=$

$=\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\ldots+\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k}\right)+\left(\frac{1}{2k+1}-\frac{1}{2(k+1)}\right)=$

$=\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\ldots+\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k}\right)+\frac{1}{2(k+1)(2k+1)}$

2) $\frac{1}{(k+1)+1}+\frac{1}{(k+1)+2}+\ldots+\frac{1}{2(k+1)}=\frac{1}{k+2}+\frac{1}{k+3}+\ldots+\frac{1}{2k}+\frac{1}{2k+1}+\frac{1}{2k+2}=$

$=\left(\frac{1}{k+2}+\frac{1}{k+3}+\ldots+\frac{1}{2k}\right)+\frac{1}{2k+1}+\frac{1}{2k+2}$

По инд. предположению имеем:

$\frac{1}{k+2}+\frac{1}{k+3}+\ldots+\frac{1}{2k}=\left(\frac{1}{k+1}+\frac{1}{k+2}+\frac{1}{k+3}+\ldots+\frac{1}{2k}\right)-\frac{1}{k+1}=$

$=\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\ldots+\frac{1}{2k-1}\right)-\frac{1}{k+1}\Rightarrow$

$\Rightarrow\left(\frac{1}{k+2}+\frac{1}{k+3}+\ldots+\frac{1}{2k}\right)+\frac{1}{2k+1}+\frac{1}{2k+2}=\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\ldots+\frac{1}{2k-1}\right)-\frac{1}{k+1}+\frac{1}{2k+1}+\frac{1}{2k+2}=$

1 задание (продолжение)

а) $= \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \ldots + \frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k}\right) - \frac{1}{k+1} + \frac{4k+3}{2(k+1)(2k+1)} =$

$= \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \ldots + \frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k}\right) + \frac{1}{2(2k+1)(k+1)}$

1-е и 2-е выражения равные => равенство доказано.

б) $\frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{n!} < \frac{2n-1}{n}$, $n \geq 4$

База: $\exists n = 4$:

$\frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} = \frac{24+12+4+1}{24} = \frac{41}{24}$;

$\frac{2 \cdot 4 - 1}{4} = \frac{7}{4} = \frac{42}{24}$, $\frac{41}{24} < \frac{42}{24}$, неравенство выполняется

$\exists$ при $n = k$ справедливо неравенство:

$\frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{k!} < \frac{2k-1}{k}$, где $k \geq 4$

Докажем, что при $n = k+1$ справедливо:

$\frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{k!} + \frac{1}{(k+1)!} < \frac{2(k+1)-1}{k+1}$

1) $\frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{k!} + \frac{1}{(k+1)!} = \left(\frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{k!}\right) + \frac{1}{k!\,(k+1)}$

2) $\frac{2(k+1)-1}{k+1} = \frac{2k+2-1}{k+1} = \frac{2k+1}{k+1}$

$\frac{2k+1}{k+1} - \frac{2k-1}{k} = \frac{2k^2+k-2k^2+k-2k+1}{k(k+1)} = \frac{1}{k(k+1)}$

$k! > k$ т.к. $k! = k \cdot (k-1)!$, $(k-1)! > 1$ при $k \geq 4$ =>

=> $k! > k$, значит $\frac{1}{k!} < \frac{1}{k}$ =>

=> $\frac{1}{k!(k+1)} < \frac{1}{k(k+1)}$, тогда получаем:

1 задание (продолжение)

б) $\left(\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\ldots+\frac{1}{k!}\right)+\frac{1}{k!(k+1)}<\left(\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\ldots+\frac{1}{k!}\right)+\frac{1}{k(k+1)}$ (*)

По инд. предп. имеем:

$$\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\ldots+\frac{1}{k!}<\frac{2k-1}{k} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\ldots+\frac{1}{k!}\right)+\frac{1}{k(k+1)}<\frac{2k-1}{k}+\frac{1}{k(k+1)}=\frac{(2k-1)(k+1)+1}{k(k+1)}=$$

$=\frac{2k^2-k+2k-1+1}{k(k+1)}=\frac{2k^2+k}{k(k+1)}=\frac{2k+1}{k+1}$, значит исходя из (*) имеем:

$$\left(\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\ldots+\frac{1}{k!}\right)+\frac{1}{k!(k+1)}<\left(\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\ldots+\frac{1}{k!}\right)+\frac{1}{k(k+1)}<\frac{2k+1}{k+1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\ldots+\frac{1}{k!}+\frac{1}{(k+1)!}<\frac{2k+1}{k+1}=\frac{2(k+1)-1}{k+1}$$

Утверждение доказано.

Задание 2.

$$\frac{C_n^1}{C_n^0}+\frac{2C_n^2}{C_n^1}+\frac{3C_n^3}{C_n^2}+\ldots+\frac{nC_n^n}{C_n^{n-1}}-?$$

$\exists\, n=k$, рассмотрим все члены суммы вида

$\frac{kC_n^k}{C_n^{k-1}}$ при $k\in\{1,2,3,\ldots n\}$:

$$\frac{kC_n^k}{C_n^{k-1}}=k\cdot\frac{\frac{n!}{(n-k)!\,k!}}{\frac{n!}{(n-k+1)!\,(k-1)!}}=k\cdot\frac{(n-k+1)!\,(k-1)!}{(n-k)!\,k!}=\frac{(n-k)!\,(n-k+1)\,(k-1)!}{(n-k)!\,(k-1)!\cdot k}\cdot k=$$

1. 2 задание (продолжение)

$$= k\cdot\frac{n-k+1}{k} = n-k+1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{C_n^1}{C_n^0}+\frac{2C_n^2}{C_n^1}+\frac{3C_n^3}{C_n^2}+\ldots+\frac{nC_n^n}{C_n^{n-1}} =$$

$= \sum\limits_{k=1}^{n}(n-k+1)$, что равно сумме всех $S\in\mathbb{Z}$,

$n-n+1 \leq S \leq n-1+1$; $1\leq S\leq n$, значит

$$\frac{C_n^1}{C_n^0}+\frac{2C_n^2}{C_n^1}+\frac{3C_n^3}{C_n^2}+\ldots+\frac{nC_n^n}{C_n^{n-1}} = \sum_{k=1}^{n}(n-k+1) = \frac{1+n}{2}\cdot n$$

(Равно сумме арифм. прогрессии чисел от 1 до n с $d=1$)

Ответ: $n\left(\frac{n+1}{2}\right)$

Задание 3.

1) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n+5}{6n-3}=\frac{1}{3}$

Δ $\forall\varepsilon>0$, $a_n=\frac{2n+5}{6n-3}$, $n\in\mathbb{N}$, $n_0\in\mathbb{N}$, $\varepsilon\in\mathbb{R}$, $A=\frac{1}{3}$:

По определению предела последовательности, последов. a_n сходится к A, если для $\forall\varepsilon>0$ существует $n_0>0$: $\forall n>n_0$ выполняется:

$$|a_n-A|<\varepsilon$$

$$|a_n-A| = \left|\frac{2n+5}{6n-3}-\frac{1}{3}\right| = \left|\frac{(2n+5)\cdot 3-2n+1}{6n-3}\right| =$$

$$= \left|\frac{6}{6n-3}\right| = \left|\frac{2}{2n-1}\right|$$

3 задание (продолжение)

Б) $|a_n - A| < \varepsilon \Rightarrow \left|\frac{2}{2n-1}\right| < \varepsilon$. Найдем номера тех членов пос-ти, которые удовл. этому неравенству (то есть попадают в ε окрестность точки $\frac{1}{3}$):

Т.к. $\frac{2}{2n-1} > 0$ при $n \in \mathbb{N}$, то $\left|\frac{2}{2n-1}\right|$ раскрыв., как

$\frac{2}{2n-1} \Rightarrow \frac{2}{2n-1} < \varepsilon$ (*)

$2n-1 \neq 0$ при $n \in \mathbb{N}$, тогда домножим обе части неравенства (*) на $(2n-1)$:

$2 < \varepsilon(2n-1)$

$2 < 2n\cdot\varepsilon - \varepsilon$

$2n\cdot\varepsilon > 2 + \varepsilon$

$n > \frac{2+\varepsilon}{2\varepsilon}$

Если взять $n_0 = \left\lceil \frac{2+\varepsilon}{2\varepsilon} \right\rceil$ (округление вверх), то для $\forall n > n_0$ выполняется $|a_n - \frac{1}{3}| < \varepsilon$, то есть при $\forall n > n_0$ члены последовательности попадут в ε-окрестность точки $\frac{1}{3} \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{1}{3}$ является пределом a_n

5 задание (продолжение)

2) $\lim\limits_{n\to\infty}(n+\ln n-2)=+\infty$

Покажем, что при $\forall M>0$ найдется $n_0\in\mathbb{N}$:
для $\forall n\in\mathbb{N}$ $n>n_0$ выполняется неравенство,
$n+\ln n-2>M$
Рассмотрим это неравенство:
$n+\ln n-2>M \iff n+\ln n>M+2$
$\exists K=M+2$, тогда имеем:
$n+\ln n>K$
$n\to\infty \Rightarrow \ln n\to(+\infty)$. $\ln n$ растет медленнее, чем n, но несмотря на разницу в скорости роста, $(n+\ln n)$ также стремится к $(+\infty)$ при $n\to\infty$, $n\in\mathbb{N}$. Значит $\lim(n+\ln n)=+\infty$ и
$\exists n_0\in\mathbb{N}$: $\forall n>n_0$, ~~выпол~~ $n\in\mathbb{N}$ выполняется:
$n+\ln n>K$
Значит $n+\ln n>M+2$ т.к. $K=M+2 \Rightarrow$
$\Rightarrow n+\ln n-2>M$
Утверждение доказано.

3) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}\,\operatorname{arctg} n)=+\infty$

Докажем, что при $\forall M>0$ найдется $n_0\in\mathbb{N}$:
для $\forall n\in\mathbb{N}$ $n>n_0$ выполняется неравенство:
$\sqrt{n+1}\,\operatorname{arctg} n>M$ (*)
Рассмотрим неравенство (*):

3 задание (продолжение)

3) $y = \operatorname{arctg} x$ имеет $E(y): \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ и монотонно возрастает $\Rightarrow$ при $n \in \mathbb{N}$ $\operatorname{arctg} n \to \frac{\pi}{2}$ при $n \to \infty \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty}(\operatorname{arctg} n) = \frac{\pi}{2}$.

Тогда начиная с некоторого $n_1 \in \mathbb{N}: \forall n \in \mathbb{N}$, $n > n_1$ выполнено:

$$\operatorname{arctg} n > \frac{\pi}{4}$$

Так как $\sqrt{n+1}$ растет бесконечно вверх при $n \to \infty$ то для $\forall M > 0$ $\exists n_2 \in \mathbb{N}: \forall n \in \mathbb{N}$ $n > n_2$ выполнено:

$$\sqrt{n+1} > \frac{4M}{\pi}$$

Значит $\forall M > 0$ $\exists n_0 = \max(n_1, n_2): \forall n \in \mathbb{N}$ $n > n_0$ выполнено:

$$\operatorname{arctg} n \cdot \sqrt{n+1} > \frac{\pi}{4} \cdot \frac{4M}{\pi} = M$$

Утверждение доказано.

4 задание.

1) $$\lim_{n\to\infty} \frac{3n\sqrt[3]{n-2} + n\sqrt[3]{8n^3-1}}{\sqrt[4]{81n^8+15n^5+4} + 7n^2} = \frac{n\left(3\sqrt[3]{n-2} + \sqrt[3]{8n^3-1}\right)}{7n^2 + \sqrt[4]{81n^8+15n^5+4}} =$$

$$= \frac{3\sqrt[3]{n-2} + \sqrt[3]{8n^3-1}}{\frac{7n^2}{n} + \sqrt[4]{\frac{81n^8+15n^5+4}{n^4}}} = \frac{3\sqrt[3]{n-2} + \sqrt[3]{8n^3-1}}{7n + \sqrt[4]{81n^4+15n+\frac{4}{n^4}}} =$$

$$= \frac{3\cdot\sqrt[3]{\frac{n-2}{n^3}} + \sqrt[3]{\frac{8n^3-1}{n^3}}}{\frac{7n}{n} + \sqrt[4]{\frac{81n^4+15n+\frac{4}{n^4}}{n^4}}} = \frac{3\cdot\sqrt[3]{\frac{1}{n^2} - \frac{2}{n^3}} + \sqrt[3]{8 - \frac{1}{n^3}}}{7 + \sqrt[4]{81 + \frac{15}{n^3} + \frac{4}{n^8}}}$$

4 задание (продолжение)

1)

$\frac{1}{n^s}$, $s \in \mathbb{N}$ – неопределенность вида $\frac{1}{\infty}$ =>

=> $\lim \frac{1}{n^s} = 0$ при $s \in \mathbb{N}$.

Тогда имеем:

$$\frac{3\cdot\sqrt[3]{\frac{1}{n^2}-\frac{2}{n^3}}+\sqrt[3]{8-\frac{1}{n^3}}}{7+\sqrt[4]{81+\frac{15}{n^5}+\frac{4}{n^8}}} = \frac{3\cdot\sqrt[3]{0-0}+\sqrt[3]{8-0}}{7+\sqrt[4]{81+0+0}} = \frac{\sqrt[3]{8}}{7+\sqrt[4]{81}} = \frac{2}{7+3} = \underline{0,2}$$

2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{4n-3}{4n+7}\right)^{4n+7}$

Основание $\frac{4n-3}{4n+7}$ степени $4n+7$ стремится к 1 -> выражение является неопр. вида 1^{∞}.

$\frac{4n-3}{4n+7} = \frac{4n+7-10}{4n+7} = 1+\left(-\frac{10}{4n+7}\right) = \left(\left(1+\left(-\frac{10}{4n+7}\right)\right)^{-\frac{4n+7}{10}}\right)^{-\frac{10}{4n+7}} \Rightarrow$

=> используя свойство предельного перехода $\left(\lim\limits_{n\to\infty} x_n^{y_n}\right) = \left(\lim\limits_{n\to\infty} x_n\right)^{\lim\limits_{n\to\infty} y_n}$ и второй замечательный предел имеем:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{4n-3}{4n+7}\right)^{4n+7} = \lim_{n\to\infty}\left(\left(\left(1+\left(-\frac{10}{4n+7}\right)\right)^{-\frac{4n+7}{10}}\right)^{-\frac{10}{4n+7}\cdot(4n+7)}\right) =$$

$$= \left(\lim_{n\to\infty}\left(\left(1+\left(-\frac{10}{4n+7}\right)^{-\frac{10}{4n+7}}\right)^{-10}\right)\right) = \left(\lim_{n\to\infty}\left(1+\left(-\frac{10}{4n+7}\right)\right)^{-\frac{10}{4n+7}}\right)^{\lim\limits_{n\to\infty} -10} =$$

$$= e^{-10} = \frac{1}{e^{10}}$$

3) $$\lim_{n\to\infty}\frac{6^{2+n}-3^n-5n^5}{3^{2n+1}+4n^2+5} = \lim_{n\to\infty}\frac{6^n\cdot 3^n\left(\frac{36\cdot 6^n}{6^n\cdot 3^n}-\frac{3^n}{6^n\cdot 3^n}-\frac{5n^5}{6^n\cdot 3^n}\right)}{6^n\cdot 3^n\left(\frac{3^{2n+1}}{6^n\cdot 3^n}+\frac{4n^2}{6^n\cdot 3^n}+\frac{5}{6^n\cdot 3^n}\right)} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{36}{3^n}-\frac{1}{6^n}-\frac{5n^5}{6^n\cdot 3^n}}{\frac{3\cdot 3^n}{2^n}+\frac{4n^2}{6^n\cdot 3^n}+\frac{5}{6^n\cdot 3^n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{36}{3^n}-\frac{1}{6^n}-\frac{5n^5}{6^n\cdot 3^n}}{\frac{3}{2^n}+\frac{4n^2}{6^n\cdot 3^n}+\frac{5}{6^n\cdot 3^n}}$$

Т.к. $\lim \frac{n^{\alpha}}{a^n} = 0$ при $\alpha > 0$ и $a > 1$, имеем:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{36}{3^n}-\frac{1}{6^n}-\frac{5n^5}{6^n 3^n}}{\frac{3}{2^n}+\frac{4n^2}{6^n\cdot 3^n}+\frac{5}{6^n\cdot 3^n}} = 0$$

4) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3(n-15)\cdot n! + 5^{3n-2}}{3^{4n+7} - (n+1)!}$

Используя факт, что $\lim \dfrac{a^n}{n!} = 0$, имеем,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3(n-15)\cdot n! + 5^{3n-2}}{3^{4n+7} - (n+1)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)!\left(\frac{3(n-15)\cdot n!}{(n+1)!} + \frac{5^{3n-2}}{(n+1)!}\right)}{(n+1)!\left(\frac{3^{4n+7}}{(n+1)!} - \frac{(n+1)!}{(n+1)!}\right)} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{3(n-15)}{n+1} + \frac{5^{3n-2}}{(n+1)!}}{\frac{3^{4n+7}}{(n+1)!} - 1} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{3n+3-48}{n+1} + \frac{5^{3n-2}}{(n+1)!}}{\frac{3^{4n+7}}{(n+1)!} - 1} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{3 - \frac{48}{n+1} + \frac{5^{3n-2}}{(n+1)!}}{\frac{3^{4n+7}}{(n+1)!} - 1} = \frac{3-0+0}{0-1} = -3$$ Ответ: -3

5) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{7n+5}{9n-6}\right)^{4n+7}$

Основание $\dfrac{7n+5}{9n-6}$ степени $4n+7$ стремится к числу $\frac{7}{9}$. Возьмём число, лежащее между $\frac{7}{9}$ и 1: к примеру, число $\frac{8}{10} = \frac{4}{5}$, $\frac{7}{9} < \frac{4}{5} < 1$. Начиная с некоторого n выполняется:

$\dfrac{7n+5}{9n-6} < \dfrac{4}{5}$, тогда в силу возрастания степенной функции, выполняется:

$$0 < \left(\frac{7n+5}{9n-6}\right)^{4n+7} < \left(\frac{4}{5}\right)^{4n+7}. \quad \lim_{n\to\infty}\left(\frac{4}{5}\right)^{4n+7} = 0$$

Значит по теореме о зажатой переменной

$\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{7n+5}{5n-6}\right)^{4n+7} = \lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{4}{5}\right)^{4n+7} = 0.$ Ответ: 0

б) $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\sqrt[3]{8n^3+4n-3}+\sqrt[3]{5n-8n^3}\right) =$

$= \lim\limits_{n\to\infty} n\left(\sqrt[3]{8n^3+4n-3}-\sqrt{8n^3-5n}\right) =$

$= \lim\limits_{n\to\infty} n \dfrac{(8n^3+4n-3)-(8n^3-5n)}{\left(\sqrt[3]{8n^3+4n-3}\right)^2+\sqrt[3]{8n^3+4n-3}\sqrt[3]{8n^3-5n}+\left(\sqrt[3]{8n^3-5n}\right)^2} =$

$= \lim\limits_{n\to\infty} n \dfrac{9n-3}{\left(\sqrt[3]{8n^3+4n-3}\right)^2+\sqrt[3]{8n^3+4n-3}\,\sqrt[3]{8n^3-5n}+\left(\sqrt[3]{8n^3-5n}\right)^2} =$

$= \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{9n^2-3n}{\left(\sqrt[3]{8n^3+4n-3}\right)^2+\sqrt[3]{8n^3+4n-3}\cdot\sqrt[3]{8n^3-5n}+\left(\sqrt[3]{8n^3-5n}\right)^2} =$

Сократим числитель и знаменатель на n^2 и используя то, что $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\alpha}{n^2}=0$, где $\alpha>0$, имеем:

$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\frac{9n^2}{n^2}-\frac{3n}{n^2}}{\left(\sqrt[3]{\frac{8n^3}{n^3}+\frac{4n}{n^3}-\frac{3}{n^3}}\right)^2+\sqrt[3]{\frac{8n^3}{n^3}+\frac{4n}{n^3}-\frac{3}{n^3}}\sqrt[3]{\frac{8n^3}{n^3}-\frac{5n}{n^3}}+\left(\sqrt[3]{\frac{8n^3}{n^3}-\frac{5n}{n^3}}\right)^2} =$

$= \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{9-\frac{3}{n}}{\left(\sqrt[3]{8+\frac{4}{n^2}-\frac{3}{n^3}}\right)^2+\sqrt[3]{8+\frac{4}{n^2}-\frac{3}{n^3}}\sqrt[3]{8-\frac{5}{n^2}}+\left(\sqrt[3]{8-\frac{5}{n^2}}\right)^2} =$

$= \cancel{\lim\limits_{n\to\infty}} \dfrac{9-0}{4+2\cdot 2+4} = \dfrac{9}{12} = \dfrac{3}{4}$

Ответ: $\frac{3}{4}$

7) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{3n^3+7}{n^3+7}}$

Используя свойство предельного перехода

$\lim\limits_{n\to\infty} x_n^{y_n} = (\lim\limits_{n\to\infty} x_n)^{\lim\limits_{n\to\infty} y_n}$ имеем:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{3n^3+7}{n^3+7}} = \left(\lim_{n\to\infty} \frac{n^3(3+\frac{7}{n^3})}{n^3(1+\frac{7}{n^3})}\right)^{\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}} =$$

$$= \left(\lim_{n\to\infty} \frac{3+\frac{7}{n^3}}{1+\frac{7}{n^3}}\right)^{\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}} = 3^0 = 1$$

Ответ: 1.

8) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{2n^6-3n^3+7}{n^3+7}} = \lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{2n^6-3n^3+7}{n^3+7}\right)^{\frac{1}{n}}$

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n^6-3n^3+7}{n^3+7} = +\infty$ т.к. в числителе доминирующий член имеет более высокую степень, чем доминирующий член в знаменателе и при $n\to\infty$ выражение $(2n^6-3n^3+7)$ возрастает (стремится к $+\infty$).

По свойству предельного перехода имеем:

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{2n^6-3n^3+7}{n^3+7}\right)^{\frac{1}{n}} = \left(\lim_{n\to\infty} \frac{2n^6-3n^3+7}{n^3+7}\right)^{\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}} =$$

$$= \left(\lim_{n\to\infty} \frac{2n^6-3n^3+7}{n^3+7}\right)^0 = 1$$

9) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2\cdot\sqrt[n]{4}-\sqrt[n]{2}-1}{\sqrt[n]{2}-1} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{2\cdot(\sqrt[n]{2})^2-\sqrt[n]{2}-1}{\sqrt[n]{2}-1}$

$\exists\ a = \sqrt[n]{2}$:

$\frac{2\cdot(\sqrt[n]{2})^2-\sqrt[n]{2}-1}{\sqrt[n]{2}-1} = \frac{2a^2-a-1}{a-1} = \frac{(2a+1)(a-1)}{a-1} = 2a+1 =$

$= 2\sqrt[n]{2}+1$, значит получаем:

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2\cdot(\sqrt[n]{2})^2-\sqrt[n]{2}-1}{\sqrt[n]{2}-1} = \lim\limits_{n\to\infty}(2\sqrt[n]{2}+1)$

Используем арифм. свойства пределов последов.:

$\lim\limits_{n\to\infty}(2\sqrt[n]{2}+1) = \lim\limits_{n\to\infty} 2\cdot\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{2} + \lim\limits_{n\to\infty} 1 =$

$= 2\cdot\lim\limits_{n\to\infty} 2^{\frac{1}{n}}+1$. По свойству пред. перехода получаем:

$2\cdot\lim\limits_{n\to\infty} 2^{\frac{1}{n}}+1 = 2\cdot(\lim\limits_{n\to\infty} 2)^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}}+1 = 2\cdot 2^0+1 = 3$

Ответ: 3

10.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1-3+2-4+\ldots+n-(n+2)}{4n+7}$$

Докажем по мат. индукции, что $1-3+2-4+\ldots+n-(n+2)=(-2)\cdot n$

База: $n=1$:

$1-3=-2$; $(-2)\cdot 1=-2$, $-2=-2$

Пусть $n=k$ и утв. выполняется: $1-3+2-4+\ldots+k-(k+2)=(-2)\cdot k$

Пусть $n=k+1$, докажем, что выполняется утверждение:

$1-3+2-4+\ldots+k-(k+2)+(k+1)-(k+3)=(-2)(k+1)$

$-2(k+1)=-2k-2=(1-3+2-4+\ldots+k-(k+2))-2$ по инд. предп.

$(1-3+2-4+\ldots+k-(k+2))+((k+1)-(k+3))=$

$=(1-3+2-4+\ldots+k-(k+2))-2$

Утверждение доказано. Тогда имеем:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1-3+2-4+\ldots+n-(n+2)}{4n+7}=\lim_{n\to\infty}\frac{-2\cdot n}{4n+7}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{-2n}{n}}{\frac{4n}{n}+\frac{7}{n}}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{-2}{4+\frac{7}{n}}=\frac{-2}{4}=-0{,}5$$

Ответ: $-0{,}5$