Индивидуальное домашнее задание
Математический анализ
Вариант 4

Григорьев Даниил, ИСУ: 465635

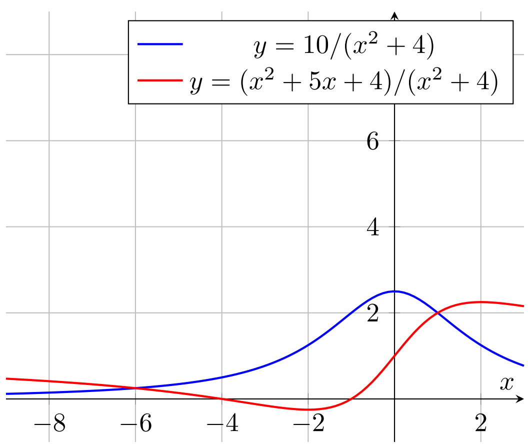
Группа P3116, поток: Мат Ан Прод 11.3

07 апреля 2025

Задание 1

1.1 С помощью интеграла Римана вычислить площадь фигуры, ограниченной графиками функций:

$$y = \frac{10}{x^2+4}, y = \frac{x^2+5x+4}{x^2+4}$$



Решение

Для начала, найдем точки пересечения графиков исходных функций:

$$\frac{10}{x^2+4} = \frac{x^2+5x+4}{x^2+4} \Rightarrow 10 = x^2+5x+4 \Rightarrow x^2+5x-6=0 \Rightarrow x=-6, \quad x=1$$

По графику сверху видно, что сверху находится график функции $y = \frac{10}{x^2+4}$ а снизу - $y = \frac{x^2+5x+4}{x^2+4}$
Теперь найдём разность функций и преобразуем ее в сумму правильных рациональных дробей:

$$y_1 - y_2 = \frac{10-(x^2+5x+4)}{x^2+4} = \frac{-x^2-5x+6}{x^2+4} = \frac{-x^2-4}{x^2+4} + \frac{-5x+10}{x^2+4} = -1 - \frac{5(x-2)}{x^2+4}$$

Тогда площадь равна:

$$S = \int_{-6}^{1} \left(-1 - \frac{5(x-2)}{x^2+4}\right) dx = -\int_{-6}^{1} dx - 5\int_{-6}^{1} \frac{x-2}{x^2+4} dx$$

Преобразуем интеграл $\int_{-6}^{1}\frac{x-2}{x^2+4}dx$:

$$\int_{-6}^{1}\frac{x-2}{x^2+4}dx = \int_{-6}^{1}\frac{x}{x^2+4}dx - 2\int_{-6}^{1}\frac{1}{x^2+4} =$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-6}^{1}\frac{d(x^2+4)}{x^2+4} - 2\int_{-6}^{1}\frac{1}{x^2+4}$$

Тогда получаем:

$$S = -\int_{-6}^{1}dx - \frac{5}{2}\int_{-6}^{1}\frac{d(x^2+4)}{x^2+4} + 10\int_{-6}^{1}\frac{1}{x^2+4} =$$

$$= -x\Big|_{-6}^{1} - \frac{5}{2}ln|x^2+4|\Big|_{-6}^{1} + 10 * \frac{1}{2}arctg(\frac{x}{2})\Big|_{-6}^{1} =$$

$$= -1 - 6 - \frac{5}{2}ln|5| + \frac{5}{2}ln|40| + 5arctg(1/2) - 5arctg(-3) =$$

$$= -7 + \frac{5}{2}ln8 + 5(arctg(1/2) + arctg(3))$$

Это будет примерно равно: $-7 + 5,1986 + 8,56347 \approx 6,76207$

Ответ:

$$\boxed{S = -7 + \frac{5}{2}\ln 8 + 5\left(\arctan\frac{1}{2} + \arctan 3\right) \approx 6,76207}$$

1.2 Вычислить площадь фигуры, ограниченной графиками функций:

$$y = \frac{10}{x^2+4}, y = \frac{x^2+5x+4}{x^2+4}$$

приближенно с помощью интегральных сумм. Сравнить результаты точного и численного вычислений при n = 10,100, 1000.

Решение

Формула, по которой будем вычислять площадь фигуры с помощью интегральных сумм:

$$S = \sum_{i=1}^{n}(f_{\text{верх}}(x_i) - f_{\text{нижн}}(x_i))\Delta x = \sum_{i=1}^{n}(-1 - \frac{5(x-2)}{x^2+4}), \quad x_i = a + (b-a)\frac{i}{n}, \quad \Delta x = \frac{b-a}{n}, a = -6, b = 1$$

Ниже приведен код программы на языке Python, реализующий интегральную сумму в приближенном виде (зависит от n):

```
def f_upper(x):
    return 10 / (x**2 + 4)

def f_lower(x):
    return (x**2 + 5*x + 4) / (x**2 + 4)

a, b = -6, 1
n = int(input())

dx = (b - a) / n
```

```
sum_integral = 0
for i in range(1, n+1):
    xi = a + (b - a) * i / n
    sum_integral += (f_upper(xi) - f_lower(xi)) * dx
print(str(n) + ": " + str(sum_integral))
```

Результаты

1) $n = 10$: результат $S = 6.697507069500442$, : разница составляет 0.0645629305
2) $n = 100$: результат $S = 6.761427609769792$, разница составляет: 0.000064239
3) $n = 1000$: результат $S = 6.762064329942248$, разница составляет: 0.00000567
С увеличением n разница между точным и приближенным значениями уменьшается

Задание 2

Вычислить площадь в полярной системе координат:
2.1 Представить геометрическую интерпретацию розы: $(x^2 + y^2)^{2.5} = 4x^2y^2$

Решение

Заметим, что график будет симметричен относительно горизонтали и вертикали, так как

$$(x, y) \iff (-x, -y) \iff (-x, y) \iff (x, -y)$$

Перейдём к полярной системе координат:

$$x = r\cos\phi, \quad y = r\sin\phi$$

Тогда:

$$(x^2 + y^2)^{2.5} = r^5, \quad 4x^2y^2 = 4r^4\cos^2\phi\sin^2\phi = r^4\sin^2(2\phi)$$

Таким образом, уравнение преобразуется к:

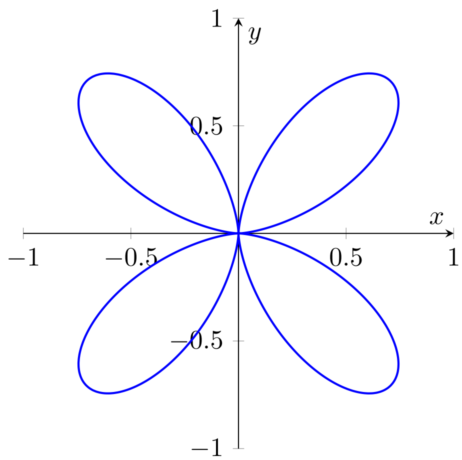
$$r = \sqrt{\sin(2\phi)}$$

- Подкоренное выражение должно быть неотрицательным: $\sin(2\phi) \geq 0$
- Следовательно, определение функции ограничено интервалами:

$$\phi \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right], \ldots$$

- В этих интервалах функция $r(\phi)$ принимает вещественные положительные либо ноль значения
- Максимальное значение: $\sin(2\phi) = 1 \Rightarrow r = 1$ при $\phi = \frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \ldots$
- Число лепестков: 4 (каждый располагается через угол $\frac{\pi}{2}$)
- Один лепесток расположен в диапазоне углов $\phi \in [0, \frac{\pi}{2}]$

Это уравнение задаёт розу с четырьмя лепестками. Один лепесток расположен в пределах $\phi \in [0, \frac{\pi}{4}]$.



2.2 Вычислить площадь фигуры, ограниченной лепестками розы, с помощью интеграла Римана.

Площадь в полярной системе координат выражается формулой:

$$S = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} r^2(\phi)\, d\phi$$

Подставим: $r(\phi) = \sqrt{\sin(2\phi)}$, область одного лепестка: $\phi \in [0, \frac{\pi}{4}]$

$$S_1 = \frac{1}{2} \int_{0}^{\pi/4} \sin(2\phi)\, d\phi$$

Площадь всей фигуры будет равна $4S_1$, так как все лепестки равны между собой в силу симметричности:

$$S = 4S_1 = 2 \int_{0}^{\pi/4} \sin(2\phi)\, d\phi = 1$$

Ответ: 1

2.3 Вычислить площадь фигуры, ограниченной лепестками розы, приближенно с помощью интегральных сумм. Сравнить результаты точного и численного вычислений при n = 10,100, 1000.

$$S \approx 2 \cdot \sum_{i=1}^{n} \sin(2\phi_i) \cdot \Delta\phi, \quad \phi_i = \frac{i\pi}{4n},\ \Delta\phi = \frac{\pi}{4n}$$

Программа на Python:

```
import numpy as np
import math
n = int(input())
dphi = math.pi / (4 * n)
phis = np.linspace(dphi, np.pi / 4, n)
integral = np.sum(np.sin(2 * phis)) * dphi
S = 2 * integral
print(n, S)
```

Результаты:

- При $n = 10$: $S = 1.076482802694102$, разница 0.076482802694102
- При $n = 100$: $S = 1.0078334198735819$, разница 0.0078334198735819
- При $n = 1000$: $S = 1.0007851925466307$, разница 0.0007851925466307

С увеличением n разница между точным и приближенным значениями уменьшается

Задание 3

Вычислить площадь фигуры, ограниченной петлёй кривой:

$$x = 4t - t^3, y = sin(\frac{\pi t}{2}), \quad t \in [0, 2]$$

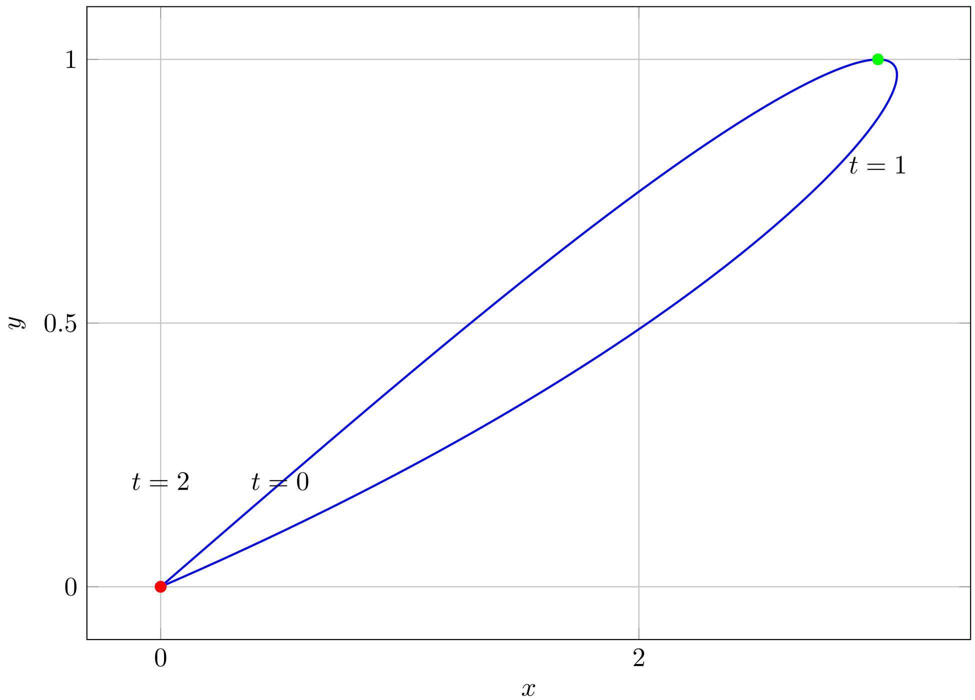


Рис. 1: График параметрической кривой с петлёй при $t \in [0, 2]$.

Площадь, ограниченная замкнутой кривой, может быть найдена по формуле:

$$S = \int_{t_1}^{t_2} y(t) x'(t) \, dt$$

Считаем производную от x(t):

$$x'(t) = 4 - 3t^2$$

Тогда имеем:

$$S = \int_0^2 \sin(\pi t^2) \, (4 - 3t^2) \, dt = 4 \int_0^2 \sin(\pi t^2) \, dt - 3 \int_0^2 t^2 \sin(\pi t^2) \, dt$$

Преобразуем первый интеграл:

$$\int_0^2 \sin\left(\frac{\pi t}{2}\right) dt = 4 \left[-\frac{2}{\pi} \cos\left(\frac{\pi t}{2}\right) \right]_0^2 = 4 \left(-\frac{2}{\pi} \cos\pi + \frac{2}{\pi} \cos 0 \right) = 4 \left(\frac{2}{\pi} + \frac{2}{\pi} \right) = \frac{16}{\pi}.$$

Вычислим второй интеграл методом интегрирования по частям: Пусть $u = t^2$, $dv = \sin\left(\frac{\pi t}{2}\right) dt$, тогда:

$$du = 2tdt, \quad v = -\frac{2}{\pi} \cos\left(\frac{\pi t}{2}\right).$$

Применяем формулу интегрирования по частям:

$$\int t^2 \sin\left(\frac{\pi t}{2}\right) dt = -\frac{2t^2}{\pi} \cos\left(\frac{\pi t}{2}\right) + \frac{4}{\pi} \int t \cos\left(\frac{\pi t}{2}\right) dt.$$

Пусть $u = t$, $dv = \cos\left(\frac{\pi t}{2}\right) dt$, тогда:

$$du = dt, \quad v = \frac{2}{\pi} \sin\left(\frac{\pi t}{2}\right).$$

Получаем:

$$\int t \cos\left(\frac{\pi t}{2}\right) dt = \frac{2t}{\pi} \sin\left(\frac{\pi t}{2}\right) - \frac{2}{\pi} \int \sin\left(\frac{\pi t}{2}\right) dt = \frac{2t}{\pi} \sin\left(\frac{\pi t}{2}\right) + \frac{4}{\pi^2} \cos\left(\frac{\pi t}{2}\right).$$

Подставим обратно:

$$\int t^2 \sin\left(\frac{\pi t}{2}\right) dt = -\frac{2t^2}{\pi} \cos\left(\frac{\pi t}{2}\right) + \frac{4}{\pi} \left(\frac{2t}{\pi} \sin\left(\frac{\pi t}{2}\right) + \frac{4}{\pi^2} \cos\left(\frac{\pi t}{2}\right)\right).$$

Упрощаем:

$$= -\frac{2t^2}{\pi} \cos\left(\frac{\pi t}{2}\right) + \frac{8t}{\pi^2} \sin\left(\frac{\pi t}{2}\right) + \frac{16}{\pi^3} \cos\left(\frac{\pi t}{2}\right).$$

Подставим пределы от 0 до 2: При $t = 2$:

$$-\frac{8}{\pi} \cos\pi + \frac{16}{\pi^2} \sin\pi + \frac{16}{\pi^3} \cos\pi = \frac{8}{\pi} - \frac{16}{\pi^3}.$$

При $t = 0$:

$$0 + 0 + \frac{16}{\pi^3} \cos 0 = \frac{16}{\pi^3}.$$

Разность:

$$\left(\frac{8}{\pi} - \frac{16}{\pi^3}\right) - \frac{16}{\pi^3} = \frac{8}{\pi} - \frac{32}{\pi^3}.$$

Таким образом:

$$-3\left(\frac{8}{\pi} - \frac{32}{\pi^3}\right) = -\frac{24}{\pi} + \frac{96}{\pi^3}.$$

Теперь суммируем полученное:

$$S = \frac{16}{\pi} - \frac{24}{\pi} + \frac{96}{\pi^3} = -\frac{8}{\pi} + \frac{96}{\pi^3} = \frac{96 - 8\pi^2}{\pi^3}.$$

Ответ

$$\boxed{\frac{96 - 8\pi^2}{\pi^3} \approx 0,549668}$$