Задание 5. Найти $\sup x_n$, $\inf x_n$, $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n$, $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n$ для $x_n = (2+\sin\frac{\pi n}{2})\frac{n+2}{n+1}$.

(1)

1) $\measuredangle$ $n = 2k$: $x_{2k} = (2+\sin\frac{2k\pi}{2})\frac{2k+2}{2k+1} =$

$= (2+\sin\pi k)\frac{2k+2}{2k+1} = (2+0)\frac{2k+2}{2k+1} = \frac{4k+4}{2k+1} =$

$= 2\cdot\frac{2k+1+1}{2k+1} = 2(1+\frac{1}{2k+1})$ – рассматриваем $n \equiv 0 \pmod 2$, то есть $n \equiv 0 \pmod 4$ и $n \equiv 2 \pmod 4$

2) $\measuredangle$ $n = 4k+1$, то есть $n \equiv 1 \pmod 4$:

$$x_{4k+1} = (2+\sin\frac{(4k+1)\pi}{2})\frac{4k+3}{4k+2} = (2+\sin(2\pi k+\frac{\pi}{2}))\frac{4k+3}{4k+2} =$$

$$= (2+1)\frac{4k+3}{4k+2} = 3\cdot\frac{4k+2+1}{4k+2} = 3\cdot(1+\frac{1}{4k+2})$$

3) $\measuredangle$ $n = 4k+3$, то есть $n \equiv 3 \pmod 4$:

$$x_{4k+3} = (2+\sin\frac{(4k+3)\pi}{2})(\frac{4k+5}{4k+4}) = (2+\sin(2\pi k+\frac{3\pi}{2}))\frac{4k+5}{4k+4} =$$

$$= (2-1)(1+\frac{1}{4k+4}) = (1+\frac{1}{4k+4})$$

② $\frac{n+2}{n+1} = \frac{n+1+1}{n+1} = 1+\frac{1}{n+1}$. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right) = 1$,

значит

1) $\lim\limits_{k\to\infty} 2\left(1+\frac{1}{2k+1}\right) = 2$ при $k\in\mathbb{N}$ и $k=\frac{n}{2}$

2) $\lim\limits_{k\to\infty} 3\left(1+\frac{1}{4k+2}\right) = 3$ при $k=\frac{n-1}{4}$, $k\in\mathbb{N}$

3) $\lim\limits_{k\to\infty} 1\left(1+\frac{1}{4k+4}\right) = 1$ при $k=\frac{n-3}{4}$, $k\in\mathbb{N}$

Значит при $n\to\infty$ значения x_n будут колебаться между:

1) 2 при $n\equiv 0 \pmod 2$
2) 3 при $n\equiv 1 \pmod 4$
3) 1 при $n\equiv 3 \pmod 4$

Тогда имеем:

$\sup x_n = 3$

$\inf x_n = 1$

$\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n = 3$

$\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n = 1$

Ответ: 3; 1; 3; 1.

задание 6

$x_n = x_{n-1} + \left(\frac{4}{5}\right)^n$ Заметим, что это представляется в виде

$$x_n = x_1 + \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{4}{5}\right)^k.$$

Подставим $x_1 = a$:

$$x_n = a + \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{4}{5}\right)^k = a + \left(\left(\frac{4}{5}\right)^1 + \left(\frac{4}{5}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{4}{5}\right)^n\right)$$

Сумма n первых членов геом. прогрессии равна при $q \neq 1$: $S_n = \sum_{i=1}^{n} b_i = \frac{b_1(1-q^n)}{1-q} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{4}{5}\right)^k = \frac{4}{5} \cdot \frac{\left(1-\left(\frac{4}{5}\right)^n\right)}{1-\frac{4}{5}} = 4\left(1-\left(\frac{4}{5}\right)^n\right), \text{ тогда}$$

$$x_n = a + 4\left(1-\left(\frac{4}{5}\right)^n\right)$$

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{4}{5}\right)^n = 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} x_n = a+4$$

Для $\forall n+p > n$ имеем:

$$|x_n - x_{n+p}| = \left|a + \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{4}{5}\right)^k - a - \sum_{l=1}^{n+p}\left(\frac{4}{5}\right)^l\right| =$$

$$= \left|\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{4}{5}\right)^k - \sum_{l=1}^{n+p}\left(\frac{4}{5}\right)^l\right| = \left|\sum_{k=n+1}^{n+p}\left(\frac{4}{5}\right)^k\right| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty}\left(\frac{4}{5}\right)^k$$

$$\sum_{k=n+1}^{\infty}\left(\frac{4}{5}\right)^k = \frac{\left(\frac{4}{5}\right)^{n+1}}{1-\frac{4}{5}} = 4\left(\frac{4}{5}\right)^{n+1}, \text{ при этом } \left(\frac{4}{5}\right)^{n+1} \to 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow 4\left(\frac{4}{5}\right)^{n+1} \to 0$ при $n \to \infty$. Значит, для $\forall \varepsilon > 0$

$\exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n > n_0 \ \forall p \in \mathbb{N} \ |x_{n+p} - x_n| < \varepsilon.$

Задание 7.

Используя признак Вейерштрасса, доказать, что данная последовательность сходится, и найти её предел:

$x_n = \frac{4}{2}\cdot\frac{9}{8}\cdot\frac{14}{14}\cdot\ldots\cdot\frac{5n-1}{6n-4}$. Напишем рекуррентную формулу:

$x_{n+1} = x_n \cdot \frac{5(n+1)-1}{6(n+1)-4}$, $x_1 = \frac{4}{2}$, $x_2 = \frac{4}{2}\cdot\frac{9}{8} = \frac{9}{4}$, $x_4 = \frac{171}{80}$

Докажем, что последовательность x_n монотонна и ограничена:

Задача Косиедов. $x_n = \prod_{k=1}^{n} \frac{5k-1}{6k-4}$,

Вычислим отношение двух соседних членов пос-сти

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{\prod_{k=1}^{n+1} \frac{5k-1}{6k-4}}{\prod_{k=1}^{n} \frac{5k-1}{6k-4}} = \frac{\left(\prod_{k=1}^{n} \frac{5k-1}{6k-4}\right) \cdot \frac{5(n+1)-1}{6(n+1)-4}}{\prod_{k=1}^{n} \frac{5k-1}{6k-4}} =$$

$$= \frac{5(n+1)-1}{6(n+1)-4} = \frac{5n+4}{6n+2}$$

Для того, чтобы x_n была убывающей, нам нужно, чтобы $\frac{x_{n+1}}{x_n} < 1$ для $\forall n \in \mathbb{N}$, то есть $\frac{5n+4}{6n+2} < 1$. Решим неравенство.

$$5n+4 < 6n+2$$
$$n > 2$$

Таким образом, при $n > 2$ $(n \geq 3)$ x_n убывает.

Докажем ограниченность снизу. Это очевидно, так как все члены $x_n > 0$.

Пос-ть убывает и ограничена снизу, поэтому по теореме Вейерштрасса она сходится и имеет предел $\lim_{n\to\infty}\left(\left(\frac{5}{6}\right)^n\right) = 0$, т.к.

каждый из множителей стремится к $\frac{5}{6}$ при $n \to \infty$, а всего таких множителей n.

Ответ: 0