Fonction logarithme népérien (ln)

1 | Le logarithme népérien

- Pour tout réel $a > 0$, l'équation $\mathrm{e}^x = a$ admet une unique solution dans $\mathbb{R}$, appelée logarithme népérien de a et notée $\ln(a)$ ou $\ln a$.

→ On définit ainsi sur $]0\ ;\ +\infty[$ la fonction logarithme népérien, notée $\ln$, qui, à tout $x > 0$, associe le réel $\ln(x)$:

$$\begin{aligned} \ln :]0\ ;\ +\infty[&\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \ln(x) \end{aligned}$$

- La fonction logarithme népérien et la fonction exponentielle sont des fonctions réciproques l'une de l'autre.

2 | Propriétés

Propriétés	Conditions
$\mathrm{e}^b = a \Leftrightarrow b = \ln(a)$	$a > 0$ et b réels
$\mathrm{e}^{\ln(a)} = a$	$a > 0$ réel
$\ln\left(\mathrm{e}^b\right) = b$	b réel
$\ln(1) = 0$ et $\ln(\mathrm{e}) = 1$	
$\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$	$a > 0$ et $b > 0$ réels
$\ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln(a)$	$a > 0$ réel
	$a > 0$ et $b > 0$ réels

$\ln\left(\dfrac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$	
$\ln\left(\sqrt{a}\right) = \dfrac{1}{2}\ln(a)$	$a > 0$ réel
$\ln(a^n) = n\ \ln(a)$	$a > 0$ réel et n entier relatif
$a = b \Leftrightarrow \ln(a) = \ln(b)$	$a > 0$ et $b > 0$ réels
$a < b \Leftrightarrow \ln(a) < \ln(b)$	$a > 0$ et $b > 0$ réels
$a > b \Leftrightarrow \ln(a) > \ln(b)$	$a > 0$ et $b > 0$ réels
$\ln(x) < 0 \Leftrightarrow 0 < x < 1$	
$\ln(x) > 0 \Leftrightarrow x > 1$	

3 | Résolution d'équations et d'inéquations

→ **Pour résoudre une équation** du type $\ln\big(u(x)\big) = \ln\big(v(x)\big)$, il faut respecter les étapes suivantes :

1. rechercher l'ensemble E des réels tels que $u(x) > 0$ et $v(x) > 0$;
2. résoudre l'équation $u(x) = v(x)$;
3. prendre les solutions qui sont dans E et rejeter les autres.

→ **Pour résoudre une inéquation** du type $\ln\big(u(x)\big) \geq \ln\big(v(x)\big)$, il faut respecter les étapes suivantes :

1. rechercher l'ensemble E des réels tels que $u(x) > 0$ et $v(x) > 0$;
2. résoudre l'équation $u(x) \geq v(x)$;
3. ne garder que les solutions qui sont dans E.

4 | Le logarithme décimal

- On appelle fonction logarithme décimal la fonction notée $\log$ définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par :

$$\log(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(10)}$$

- Pour tous réels $a > 0$ et $b > 0$, et tout nombre entier relatif n :

→ $\log(ab) = \log(a) + \log(b)$;

→ $\log\left(\frac{a}{b}\right) = \log(a) - \log(b)$;

→ $\log(a^n) = n\log(a)$.

- Si a est un réel strictement positif et b un réel, :

→ $b = \log a \Leftrightarrow 10^b = a$.